3.2.Движение в произвольной системе отсчета.

3.2.1. Системы с поступательным и вращательным движением.

Пусть система отсчета К движется относительно неподвижной системы $К_1$ произвольно (рис. 2.1). Задача состоит в том, чтобы записать уравнение движения материальной точки М (или тела) в системе отсчета К. В самом общем случае это движение можно разбить на 2 движения: на поступательное движение со скоростью $\vec{V}_0$, равной скорости (·)О К системы, и на вращательное движение вокруг мгновенной оси, проходящей через это начало координат (·)О, с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

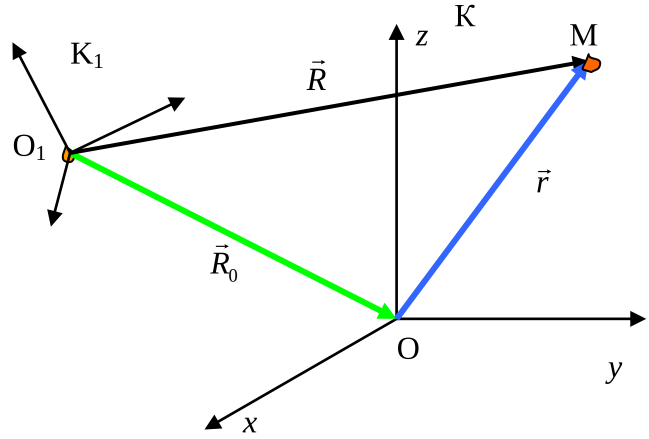


Рис. 2.1.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ меняется по величине и направлению. Следовательно, хотя орты $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ в системе отсчета К имеют постоянные длины, равные 1, однако направление этих единичных векторов-ортов меняется вследствие вращения. Поэтому орты в системе отсчета К зависят от времени $\vec{e}_x(t),\ \vec{e}_y(t),\ \vec{e}_z(t)$. Дальнейший ход рассуждений такой же, как в § 3.1, и формулы для векторов смещения, скорости и ускорения фактически остаются теми же:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{R}_0 + \vec{r} \\ \dot{\vec{R}} &= \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{R}} &= \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

При этом остается неизменной интерпретация векторов $\dot{\vec{R}}_0$ и $\ddot{\vec{R}}_0$ как *абсолютной скорости* $\vec{v}_0$ ($\vec{v}_0 = \dot{\vec{R}}_0$) и *абсолютного ускорения* $\vec{a}_0$ ($\vec{a}_0 = \ddot{\vec{R}}_0$) *начала координат* (·)О, соответственно. Однако при этом меняются слагаемые $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$, а также их интерпретация.

Напомним о связи линейной и угловой скорости, когда вектор $\vec{r}$ вращается с угловой скоростью ω вокруг некоторой оси (см рис. 2.2, а также рассуждения и формулы (1.11.1) и (1.11.2) в § 1.11), причем начало его неподвижно и длина не меняется:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \tag{3.2.2}$$

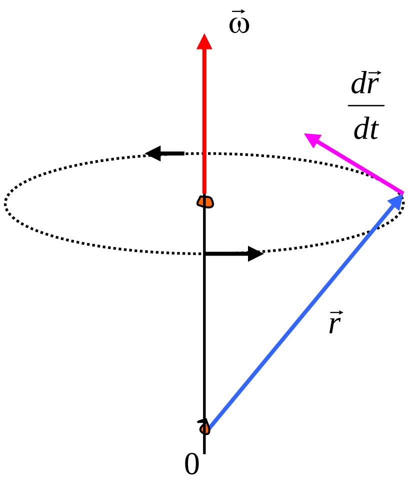


Рис. 2.2.

Аналогично можно записать такое же соотношение для любого вращающегося вектора $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{A}],$$

если он вращается относительно оси, проходящей через его начало (точка 0 на рис. 2.2), с угловой скоростью ω. В нашей системе отсчета сами орты $\vec{e}_x(t), \vec{e}_y(t), \vec{e}_z(t)$ вращаются с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Тогда можно сразу написать, что для их производных по времени имеем равенства аналогичные (3.2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_x}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_x] \\ \frac{d\vec{e}_y}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_y] \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_z] \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Эти соотношения необходимо учитывать, когда будем вычислять производные по времени от вектора $\vec{r}$. Рассмотрим сначала первую производную $\dot{\vec{r}}$.

3.2.2. Скорость в системе К

Итак, координаты точки M в системе К запишем как обычно (рис.2.1):

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{3.2.4}$$

Найдем скорость точки M, дифференцируя радиус-вектор по времени и учитывая, что орты тоже меняются во времени:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \left(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z\right) + \left(x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right) \tag{3.2.5}$$

Если мы находимся в системе К (и, следовательно, вращаемся вместе с ортами системы), то относительно нас точка M движется со скоростью $v_{отн}$, т.е.

$$\vec{v}_{отн} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \tag{3.2.6}$$

Второе слагаемое в (3.2.5) можно преобразовать, используя формулы (3.2.3) (или (3.2.2)):

$$\left(x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right) = x[\vec{\omega},\vec{e}_x] + y[\vec{\omega},\vec{e}_y] + z[\vec{\omega},\vec{e}_z] = [\vec{\omega},(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)] = [\vec{\omega},\vec{r}] \tag{3.2.7}$$

Итак, получаем:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{отн} + [\vec{\omega},\vec{r}] \tag{3.2.8}$$

Точно так же как и ранее (см уравнение (3.1.5) §3.1), можно записать выражение для абсолютной скорости, т.е. для скорости относительно системы $К_1$, как сумму скоростей:

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер} \tag{3.2.9}$$

Но в отличие от движения, рассмотренного в §3.1, в этом случае получаем более сложное выражение для переносной скорости. Итак, здесь имеем:

1) *Относительная скорость* $\vec{v}_{отн}$ – скорость точки M относительно системы К, т.е. относительно центра 0 и ортов $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ как и ранее. Если точка M покоится относительно К системы, то $\vec{v}_{отн} = 0$.

2) *Переносная скорость* $\vec{v}_{пер}$ состоит из 2-х слагаемых:

$$\vec{v}_{пер} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega},\vec{r}] \tag{3.2.10}$$

Переносная скорость $\vec{v}_{пер}$ – это та абсолютная скорость, с которой бы двигалась точка M относительно системы $К_1$, если бы она покоилась в системе К. Эта скорость состоит из двух слагаемых: 1) первое $\vec{v}_0$ – переносная скорость, определяющая скорость начала координат 0 системы К и 2) второе $[\vec{\omega},\vec{r}]$ – переносная скорость, определяющая скорость из-за вращения системы К относительно начала 0.

3.2.3. Ускорение в системе К.

Немного сложнее обстоит дело с *абсолютным ускорением*. В самом деле, продифференцируем по времени уравнение (3.2.9) с учетом (3.2.10):

$$\vec{a}_{абс} \equiv \frac{d\vec{v}_{абс}}{dt} = \dot{\vec{v}}_{отн} + \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega},\dot{\vec{r}}] + [\dot{\vec{\omega}},\vec{r}] \tag{3.2.11}$$

Второе слагаемое $\dot{\vec{v}}_0$ в правой части уравнения (3.2.11) описывает ускорение точки 0 системы К относительно начала отсчета системы $К_1$. С другими слагаемыми в (3.2.11) разберемся по очереди.

1) Производная по времени от относительной скорости (исходя из уравнения (3.2.6) и беря производные по времени от ортов, как и ранее в (3.2.7)) имеет вид:

$$\frac{d\vec{v}_{отн}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{x}\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{e}_y}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{a}_{отн} + \dot{x}[\vec{\omega},\vec{e}_x] + \dot{y}[\vec{\omega},\vec{e}_y] + \dot{z}[\vec{\omega},\vec{e}_z] =$$

$$= \vec{a}_{отн} + [\vec{\omega},\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z] = \vec{a}_{отн} + [\vec{\omega},\vec{v}_{отн}]$$

Итак, получаем, что производная от относительной скорости состоит из 2-х слагаемых:

$$\frac{d\vec{v}_{отн}}{dt} = \vec{a}_{отн} + [\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}] \tag{3.2.12}$$

где *относительное ускорение*, т.е. ускорение точки М для наблюдателя в системе К, равно:

$$\vec{a}_{отн} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \tag{3.2.13}$$

2) Преобразуем третье слагаемое в уравнении (3.2.11), в которое вместо производной от радиус-вектора подставим уравнение (3.2.8):

$$[\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}] = [\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] \tag{3.2.14}$$

Теперь (3.2.12) и (3.2.14) подставим в абсолютное ускорение (3.2.11):

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}] + \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \tag{3.2.15}$$

Получаем, что абсолютное ускорение состоит из 5 слагаемых. Введем следующие обозначения

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{пер} \tag{3.2.16}$$

Здесь относительное ускорение $\vec{a}_{отн}$, определяемое формулой (3.2.13), описывает ускорение точки относительно координат К системы.

Введенное *переносное ускорение* определяется суммой трех слагаемых:

$$\vec{a}_{пер} = \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \tag{3.2.17}$$

и зависит только от движения системы К относительно неподвижной системы $К_1$. Именно такое ускорение испытывает точка М, если она покоится в системе К, поэтому уравнение (3.2.17) определяет переносное ускорение.

В уравнение (3.2.16) ввели также *Кориолисово ускорение*:

$$\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}], \tag{3.2.18}$$

которое зависит от относительного и переносного движений, т.е. “смешивает” 2 движения между собой, поэтому оно выделено в отдельное ускорение.

Теорема Кориолиса: абсолютное ускорение является векторной суммой относительного, Кориолисова и переносного ускорений:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{пер}.$$

Примечание 1. *Гюстав Гаспар Кориолис, французский физик, 1792-1843 г.г.*

3.2.4. Переносное ускорение

Рассмотрим более подробно переносное ускорение, определяемое уравнением (3.2.17).

1) Первое слагаемое в (3.2.17) – $\dot{\vec{v}}_0$ – переносное ускорение, вызванное *поступательным* ускоренным движением системы К, т.е. ускорением точки начала отсчета 0.
2) Все остальные слагаемые в (3.2.17) – обусловлены вращением системы К относительно $К_1$. Так, третье слагаемое в (3.2.17) “$[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}]$” появляется из-за неравномерности вращения системы К. При равномерном вращении угловое ускорение $\dot{\vec{\omega}} = 0$ и угловая скорость постоянна $\vec{\omega} = const$.
3) Второе слагаемое в (3.2.17) – $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{a}_{цс}$ – *центростремительное* ускорение. Оно всегда направлено к мгновенной оси вращения. В самом деле, разложим радиус-вектор на составляющие вдоль оси вращения и перпендикулярно оси вращения: $\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$. Параллельная компонента радиус-вектора не входит в это ускорение, поскольку $[\vec{\omega}, \vec{r}_{||}] = 0$. Тогда, расписывая двойное векторное произведение по правилу БАЦ-ЦАБ и учитывая, что скалярное произведение $(\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}) = 0$, получаем:

$$\vec{a}_{цс} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}]] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}) - \vec{r}_{\perp}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = 0 - \omega^2 \vec{r}_{\perp} = -\omega^2 \vec{r}_{\perp} \tag{3.2.19}$$

Видно, что центростремительное ускорение направлено к оси вращения и перпендикулярно ей.

3.2.5. Уравнение относительного движения

Запишем уравнение относительного движения для тела массы m в виде:

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} - m\vec{a}_{кор} - m\vec{a}_{пер} \tag{3.2.20}$$

Итак, получили, что к настоящей (Ньютоновой) силе $\vec{F}$ добавились еще 2 силы инерции: *Кориолисова сила*

$$\vec{F}_{кор} = -m\vec{a}_{кор} = 2m[\vec{v}_{отн}, \vec{\omega}] \tag{3.2.21}$$

и *переносная сила инерции*

$$\vec{F}_{пер} = -m\vec{a}_{пер} = -m\dot{\vec{v}}_0 + m\omega^2\vec{r}_\perp - m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \tag{3.2.22}$$

В уравнении (3.2.22) имеем:

$\vec{F}_{пер1} = -m\dot{\vec{v}}_0$ – поступательная сила инерции (3.2.23)

$\vec{F}_{пер2} = -m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}]$ – сила инерции из-за неравномерности вращения (3.2.24)

$\vec{F}_{пер3} = m\omega^2\vec{r}_\perp$ – центробежная сила (3.2.25)

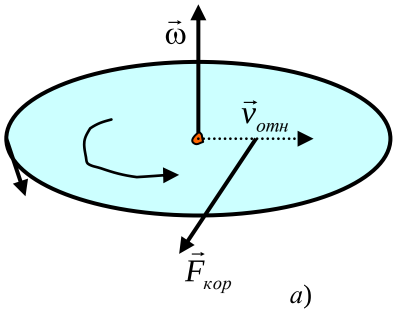
Все эти силы вводят только в ускоренно движущихся системах отсчета. Приведем несколько примеров действия центробежной силы:

1) возникновение перегрузки летчиков при исполнении фигур высшего пилотажа;
2) отклонение тел при поворотах или вращении (предметы на карусели, раскидай и т.д.).
3) движение частиц в центрифугах и сепараторах.

Кориолисова сила (3.2.21) возникает только тогда, когда система вращается, а материальная точка движется относительно этой системы. Эта сила инерции, помимо скорости вращения, зависит от относительной скорости $\vec{v}_{отн}$. Сила Кориолиса всегда перпендикулярна относительной скорости и поэтому работы не совершает. Сила Кориолиса – *гироскопическая сила, не потенциальная*.

Примеры действия силы Кориолиса:

1) движение человека по вращающейся карусели,
2) движение шарика по поверхности вращающегося диска, пущенного из центра, – траектория в системе отсчета диска – кривая линия под действием силы Кориолиса (см рис. 2.3),



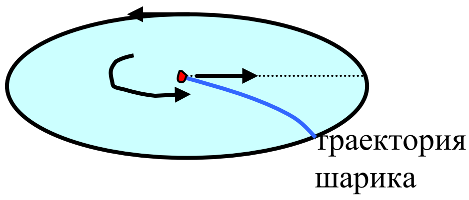


Рис. 2.3.

3) движение тел, брошенных в поле Земли и т.д.
4) Реки, текущие по меридиану (Волга, Енисей, Одер и другие) подмывают свои правые берега. С течением времени русло смещается вправо, оставляя левые берега пойменными.

Подробнее пример движения тел в поле Земли рассмотрим в следующем параграфе.