

3.3. Движение материальной точки относительно Земли.

3.3.1. Уравнение движения тел относительно Земли.

Системы отсчета, связанные с поверхностью Земли – неинерциальные системы отсчета. Применим уравнение относительного движения (3.2.20) к движению тел относительно Земли. Введем далее для простоты написания следующие обозначения: $\vec{a}_{отн} = \vec{a}$, $\vec{v}_{отн} = \vec{v}$. Пусть *начало отсчета нашей системы находится в центре Земли*, тогда в уравнениях (3.2.20)-(3.2.25) \vec{v}_0 и $\dot{\vec{v}}_0$ – скорость и ускорение центра Земли относительно “неподвижной” СО (примем за неподвижную СО – Солнце). Тогда уравнение относительного движения (3.2.20) принимает вид

$$m\vec{a} = \vec{F} + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] - m\dot{\vec{v}}_0 + m\omega^2\vec{r}_\perp - m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad (3.3.1)$$

Учтем следующие обстоятельства. Земля вращается равномерно (приблизительно), поэтому $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Далее, распишем обычные силы более подробно:

$$\vec{F} \Rightarrow \vec{F}_3 + \vec{F}_0 + \vec{F}, \quad (3.3.2)$$

где \vec{F}_3 – гравитационное притяжение Земли; \vec{F}_0 – равнодействующая сил гравитационного притяжения Солнца, Луны и других планет; \vec{F} – сумма всех других сил земного происхождения (сила сопротивления, упругости и т.д.). Тогда уравнение (3.3.2) представим в виде

$$m\vec{a} = (\vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp) + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + \vec{F} + (\vec{F}_0 - m\dot{\vec{v}}_0) \quad (3.3.3)$$

Обобщенный закон Галилея: все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Ускорение $\dot{\vec{v}}_0$ – ускорение центра Земли в поле тяготения Солнца и планет. Оно одинаково для всех тел, в том числе и для тел, находящихся на Земле. Отсюда следует:

$$\vec{F}_0 - m\dot{\vec{v}}_0 = 0 \quad (3.3.4)$$

То есть силы гравитационного притяжения Солнца, Луны, других планет выпадают из уравнений относительного движения. Это есть свободное падение Земли и земных тел во внешнем гравитационном поле (что напоминает свободно падающий маятник, см пункт 3.1.2). Эти гравитационные силы полностью компенсируются поступательными силами инерции, возникающими из ускорений, сообщаемых Земле и всем телам на Земле этими полями.

Итак, получаем уравнение движения тела в поле Земли:

$$m\vec{a} = \vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + \vec{F} \quad (3.3.5)$$

Далее рассмотрим примеры применения этого уравнения к задачам движения в поле Земли.

3.3.2. Ускорение свободного падения и вес тел.

Рассмотрим тело, покоящееся на поверхности Земли (см уравнение (3.3.5) и рис.3.1). Сила $\vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp$ не зависит от движения материальной точки и характеризует только гравитационное поле Земли и ее вращение. Поэтому для суммы этих сил, которая зависит только от точки пространства, можно ввести обозначение

$$m\vec{g} = \vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp \quad (3.3.6)$$

Если внешних сил нет и скорость тела $\vec{v} = 0$, тогда имеем:

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad (3.3.7)$$

То есть, получаем, что g – ускорение свободно падающего тела относительно Земли (если его скорость равна 0 в рассматриваемый момент, что важно, иначе вступает в дело сила Кориолиса). Это ускорение можно представить, как сумму двух величин

$$\vec{g} = \vec{g}_{gr} + \omega^2\vec{r}_\perp, \quad (3.3.8)$$

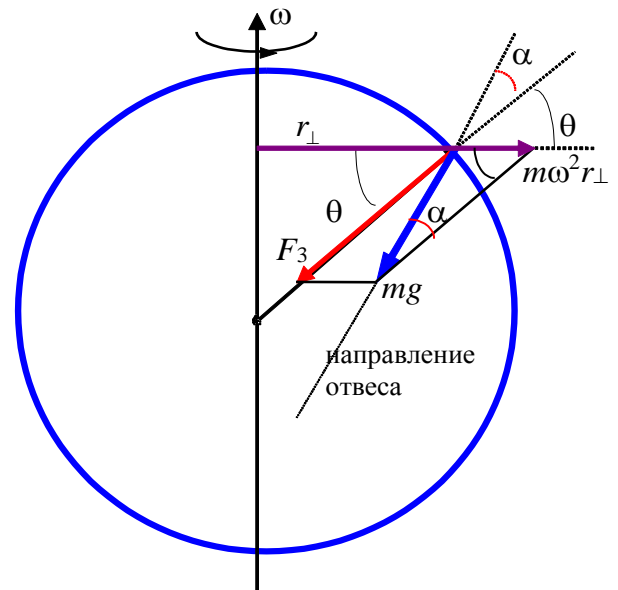


Рис. 3.1.

где $\vec{g}_{gr} = \vec{F}_3/m$ – ускорение за счет гравитационного притяжения, а второе слагаемое в (3.3.8) – центробежное ускорение. Видно, что сила тяжести не направлена к центру Земли (за исключением экватора и полюсов).

Вес тела P – это сила с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или подвес, если опора или подвес покоятся в той системе отсчета, где производится взвешивание

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp \quad (3.3.9)$$

Если Земля была бы сферически симметрична, то и тогда бы направление вектора \vec{P} не совпадало бы с направлением на центр. Угол α между векторами \vec{P} и \vec{F}_3 можно найти с помощью теоремы синусов (см рис.3.1):

$$\frac{m\omega^2 r_\perp}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \theta}$$

Учитывая, что $r \cos \theta = r_\perp$, получаем:

$$\sin \alpha = \frac{\omega^2 r_\perp}{g} \sin \theta = \frac{\omega^2 r}{2g} \sin 2\theta \quad (3.3.10)$$

Здесь угол θ – это *географическая широта*. Проектируя ускорения (3.3.8) на направление \vec{g} и считая угол α достаточно малым, что $\cos \alpha \approx 1$ и $\cos(\theta + \alpha) \approx \cos \theta$, имеем:

$$g = g_{gr} \cos \alpha - \omega^2 r_\perp \cos(\theta + \alpha) \approx g_{gr} - \omega^2 r \cos^2 \theta \quad (3.3.11)$$

Точность полученного выражения $\sim \alpha^2$. опыты показали, что ускорение свободного падения g зависит от географической широты. На полюсе ($\theta = \pi/2$): $g = 983.2 \text{ см/с}^2$, на экваторе ($\theta = 0$): $g = 978.0 \text{ см/с}^2$. Таким образом, различие в весе одного того же тела на полюсе и экваторе составляет $\delta P/P = 0.5\%$.

Примечание 1. В действительности g_{gr} на экваторе меньше, чем на полюсе, дополнительно еще из-за одного фактора – ”сплюснутости” Земли: $R_{\text{полюс}} = 6357 \text{ км}$, $R_{\text{экватор}} = 6378 \text{ км}$.

3.3.3. Отклонение падающих тел. Маятник Фуко.

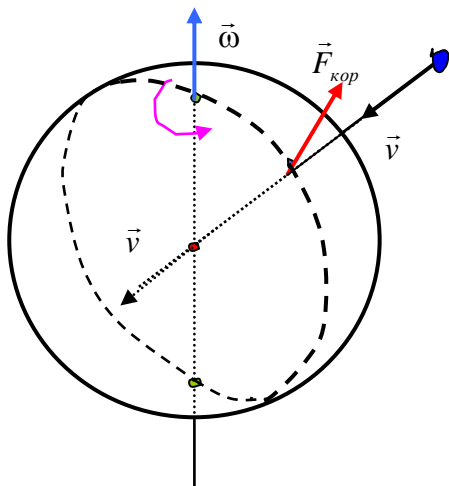


Рис. 3.2.

Рассмотрим свободное падение тел (рис. 3.2). При этом Ньютоны силы отсутствуют $\vec{F} = 0$ и уравнение движения тела (3.3.5) с учетом вращения Земли и уравнения (3.3.6) принимает вид:

$$\vec{a} = \vec{g} + 2[\vec{v}, \vec{\omega}] \quad (3.3.12)$$

Вращение Земли вызывает центробежную силу, которая входит в ускорение g , и Кориолисову силу $\vec{F}_{kop} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$. При падении тел без начальной скорости Кориолисова сила проявляется в отклонении свободно падающих тел к востоку и экватору от направления отвеса. Легко увидеть из рисунка 3.2, что сила Кориолиса направлена за плоскость чертежа перпендикулярно к вектору скорости и плоскости «штриховой» окружности.

Опыты по отклонению падающих тел к востоку доказывают неинерциальность системы отсчета Земли. Однако точность таких опытов

невелика, для более точного определения степени неинерциальности на поверхности Земли лучше использовать маятник Фуко (рис. 3.3 и 3.4).

Если бы Земля была инерциальной системой отсчета, то действующие силы тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити \vec{F} , лежащие в одной плоскости, обеспечивали бы колебания в одной плоскости (если маятник не закрутить). Однако плоскость колебаний маятника медленно поворачивается вокруг

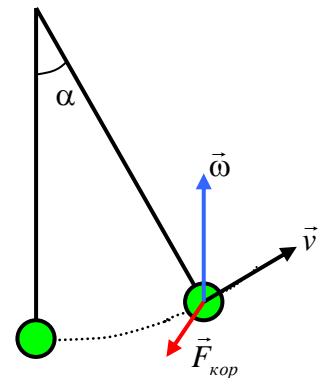


Рис. 3.3.

вертикали в том же направлении, что Солнце и звезды. Ж Фуко демонстрировал свой маятник в Париже в 1850-51 г.г.

Уравнение движения маятника имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + \vec{F} \quad (3.3.13)$$

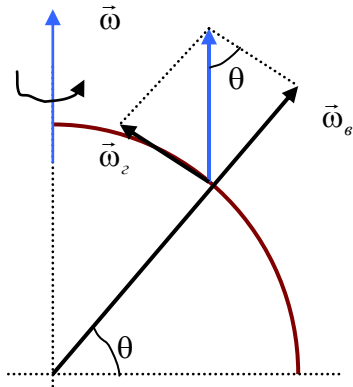


Рис. 3.4.

Напомним, что здесь ω угловая скорость вращения Земли (угловая частота). На рисунке 3.3 показана ситуация с силой Кориолиса на полюсе. На широте θ (см рис. 3.4) вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ Земли можно разбить на две составляющие – вертикальную $\omega_г$ и горизонтальную $\omega_з$. Причем вертикальная составляющая угловой скорости, равная $\omega_г = \omega \sin \theta$, обеспечивает вращение плоскости колебаний маятника. Это и демонстрирует маятник Фуко.

Примеры возможных траекторий маятника представлены на рисунках 3.5 для двух предельных начальных условий. Пусть на рисунках вертикальная составляющая угловой скорости вращения земли направлена из плоскости рисунка на нас. Окружность определяет границы движения маятника, т.е. радиус окружности равен амплитуде смещения. Рассмотрим случай А, когда маятник отклонен в крайнее

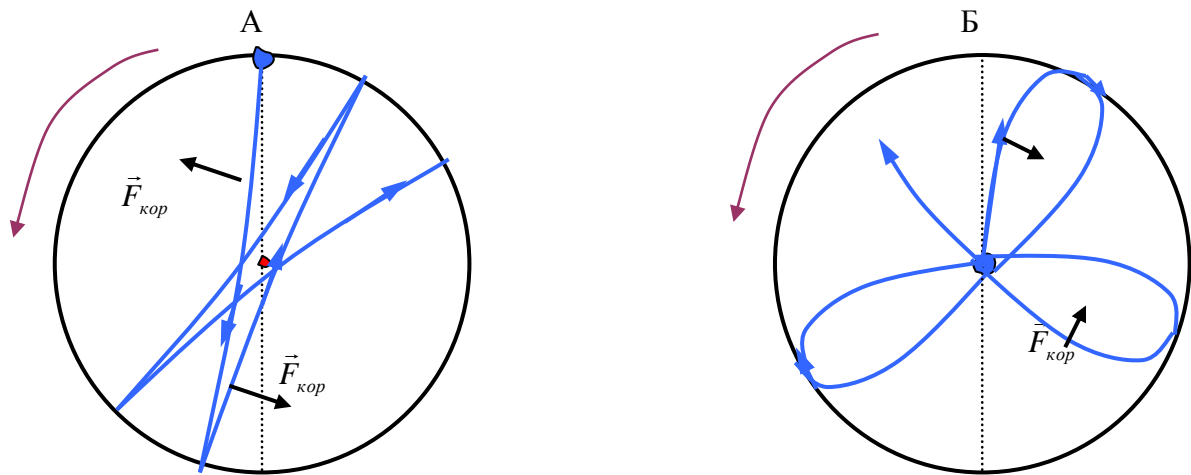


Рис. 3.5.

положение, тогда в результате получаем траекторию в виде “розетки”. В случае Б, когда маятнику был дан толчок в положении равновесия, траектория показана на правой части рисунка 3.5.

Очевидно, что полученные фигуры определяются действием силы Кориолиса на каждом участке движения маятника.

Примечание 2. Жан Бернар Леон Фуко, французский физик, 1819–1868 г.г.
