3.4. Инертная и гравитационная массы. Принцип эквивалентности.

3.4.1. Инертная и гравитационная массы.

Инертная масса m^i выступает как коэффициент пропорциональности между импульсом и скоростью или между силой и ускорением:

$$\vec{p} = m^i \vec{v}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m^i \frac{d\vec{v}}{dt} = m^i \vec{a} \tag{3.4.1}$$

В основе определения этой массы лежат инертные свойства тел.

Однако тела обладают не только свойствами инерции, но и способностью возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля (по аналогии с зарядами в электричестве), при этом сила взаимодействия между двумя точечными телами записывается:

$$F = G\frac{m_1^g m_2^g}{r^2} \tag{3.4.2}$$

Здесь m^g – *гравитационная масса*, коэффициент G введен для согласования системы единиц, чтобы инертная и гравитационная массы измерялись в одних единицах. Важно подчеркнуть, что инерция тел и их способность возбуждать гравитационные поля не должны рассматриваться как взаимосвязанные или, тем более, тождественные свойства. В принципе, задавая расстояние r и силу F известными единицами, можно при любом G выбрать единицы гравитационных масс m^g.

Рассматривая движение тела в поле Земли, имеем:

$$F = G\frac{m^g M^g}{R^2}\ , \tag{3.4.3}$$

где M^g – масса Земли и R – ее радиус. Если тело имеет инертную массу m^i, то под действием этой силы тяжести тело приобретает ускорение:

$$a = \frac{F}{m^i} = G\frac{M^g}{R^2}\cdot\frac{m^g}{m^i} = g\frac{m^g}{m^i} \tag{3.4.4}$$

Галилей же прямыми опытами установил, что ускорение всех тел у поверхности Земли одинаковое.

Итак, физический закон, установленный Ньютоном: *сила гравитационного взаимодействия тел пропорциональна их инертным массам*, то есть инертная масса тела пропорциональна его гравитационной массе. Единицы гравитационной массы m^g можно выбрать такими же, как и для инертной массы m^i.

Это фундаментальный физический закон – закон эквивалентности инертной и гравитационной масс. Таким образом, можно сформулировать обобщенный закон Галилея: все тела при свободном падении в одном и том же гравитационном поле приобретают одинаковое ускорение (мы уже им пользовались в предыдущем параграфе). Обобщенный закон Галилея соответствует принципу эквивалентности инертной и гравитационной масс.

3.4.2. Опыт Этвеша.

Опыты Галилея по проверке одинаковости ускорения тел при свободном падении имели весьма малую точность. Более точные опыты были проведены Ньютоном. Однако их точность также была невелика. Долгое время наиболее точными были опыты Этвеша. Он в 1888 г. сконструировал крутильные весы и с их помощью исследовал и установил в 1889-1908 г.г. равенство инертной и гравитационной масс с относительной точностью $5\cdot10^{-9}$.

Идея эксперимента Этвеша состоит в следующем. Рассмотрим тело на поверхности Земли (рис. 4.1). Вес тела складывается из двух различных сил:

$F_3 = m^g g$ – гравитационная сила притяжения, которая пропорциональна гравитационной массе m^g, и

$F_{in} = m^i\omega^2 r_\perp$ – центробежная сила инерции, которая пропорциональна инертной массе m^i.

Если бы m^i и m^g были не строго пропорциональны друг другу, то направление отвеса зависело бы от материала тела.

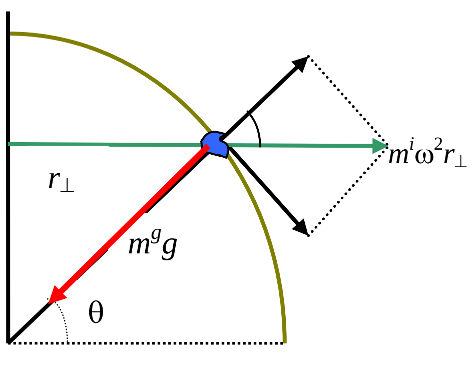

Рис. 4.1.

Чтобы использовать это рассуждение, опыт ставился следующим образом. На нити подвешивался стержень с 2 грузами на краях: из меди 1 и платины 2 (рис. 4.2). Стержень длины l ориентировался перпендикулярно к меридиану (меридиан – прямая с севера на юг на рисунке обозначена как NS). Тогда условие равновесия для стержня в вертикальном направлении к поверхности Земли при условии, что стержень равноплечный (плечи равны по $l/2$), имеет вид:

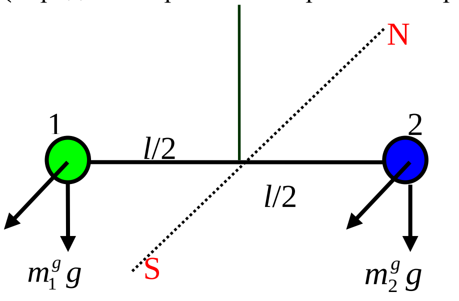

Рис. 4.2.

$$m_1^g g - m_1^i \omega^2 r_\perp Cos\theta = m_2^g g - m_2^i \omega^2 r_\perp Cos\theta \qquad (3.4.5)$$

где угол θ определяет широту (см рис. 4.1). Введем коэффициенты пропорциональности:

$$\alpha_1 = \frac{m_1^g}{m_1^i}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2^g}{m_2^i} \qquad (3.4.6)$$

$$m_1^i\left(\alpha_1 g - \omega^2 r_\perp Cos\theta\right) = m_2^i\left(\alpha_2 g - \omega^2 r_\perp Cos\theta\right) \qquad (3.4.7)$$

Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (т.е. массы не пропорциональны), то $m_1^i \neq m_2^i$. В этом случае центробежные силы, действующие на грузы, а с ними и горизонтальные составляющие, направленные к югу S, не были бы одинаковыми, и при этом появился бы вращательный момент, равный:

$$M = m_1^i \omega^2 r_\perp Sin\theta \cdot \frac{l}{2} - m_2^i \omega^2 r_\perp Sin\theta \cdot \frac{l}{2} = \omega^2 r_\perp \frac{l}{2} Sin\theta \cdot \left(m_1^i - m_2^i\right) \qquad (3.4.8)$$

Итак, при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ появляется момент силы M_1, закручивающий нить на угол $\varphi_1 \sim M_1$. Если повернуть весь прибор на 180^o, то появляющийся момент силы M_2 закручивает нить в другую сторону на угол $\varphi_2 \sim M_2$, причем $M_1 = -M_2$ и $\varphi_1 = -\varphi_2$. При этом нить закрутится относительно начального положения на угол:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\varphi_2 \qquad (3.4.9)$$

Однако опыты Этвеша показали, что $\Delta\varphi = 0$, т.е. получается, что коэффициенты пропорциональности одинаковы $\alpha_1 = \alpha_2$, и это доказывает равенство гравитационных и инертных масс. Относительная точность проведенного эксперимента составляла $\sim 5 \cdot 10^{-9}$.

Принцип эквивалентности неоднократно уточнялся и проверялся. В 1959-1963 гг. американским физиком Р. Дикке точность измерений была увеличена до 10^{-11}, а в 1971 г. советские физики В.П. Брагинский и В.И. Панов довели точность измерения этих величин до 10^{-12}. В настоящее время точность опытов дает, что инертная и гравитационная массы равны с относительной точностью до 10^{-13}, т.е.

$$\frac{m^g - m^i}{m^i} \leq 10^{-13} \qquad (3.4.10)$$

и нет экспериментальных оснований считать их неэквивалентными. Однако проверки их эквивалентности продолжаются, поскольку это связано с проверкой Общей Теории Относительности.

Примечание 1. *Роланд Этвеш, венгерский физик, 1848-1919г.г.*

3.4.3. Принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации.

Эквивалентность инертной и гравитационной масс имеет фундаментальное значение для понимания природы тяготения. А. Эйнштейн обратил на это внимание и задавался вопросом: почему законы природы записываются в одинаковой форме только в специальных системах отсчета (СО), которые движутся равномерно и прямолинейно относительно друг друга – т.е. в инерциальных СО (ИСО). Это понять и объяснить достаточно трудно, поскольку реально выделить такую систему отсчета в реальном физическом пространстве невозможно. Но классическая механика и СТО базируются как раз на существовании, хотя бы в принципе, инерциальных систем отсчета. По мнению Эйнштейна, это противоестественно, *физические законы должны иметь одинаковую форму в любых системах отсчета*.

В чем состоит недостаток неинерциальных СО? В них появляются не ньютоновы силы – силы инерции. Эти силы пропорциональны инертной массе тела.

С другой стороны, в ИСО могут действовать гравитационные силы, которые пропорциональны гравитационной массе.

Но экспериментально показано, что инертная и гравитационная массы эквивалентны, следовательно, можно сделать вывод, что силы инерции эквивалентны силам гравитации. Эти рассуждения пригодны как для механики малых скоростей, так и для релятивистской механики.

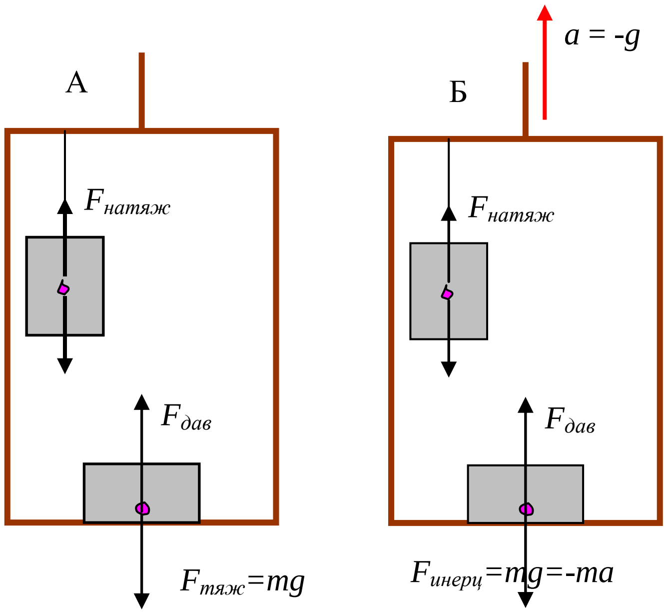

Рис. 4.3.

Рассмотрим важный поясняющий *пример с лифтом* (лифт Эйнштейна), изображенный на рис. 4.3.

Пример А (на рис. 4.3): закрытый лифт находится в гравитационном поле напряженности g. Лифт – инерциальная система отсчета, тогда наблюдатель, находящийся внутри кабины, видит падение тел с ускорением g, растяжение нити или пружины под действием силы тяжести mg, силу давления тела на пол и реакцию опоры и так далее. В этой системе отсчета работает обычная ньютоновская механика. Когда лифт свободно падает, возникает явление невесомости в соответствии с обобщенным принципом Галилея.

Пример Б (см рис. 4.3): лифт, находящийся вдали от Земли и других небесных тел, чтобы не было силы тяжести, движется с ускорением $a = -g$. Лифт – неинерциальная система отсчета. На тела внутри лифта будет действовать поступательная сила инерции $F = -ma = mg$. Для наблюдателя, также находящегося внутри кабины, все явления будут происходить точно также как в случае с неподвижным лифтом в поле тяжести: так же будут падать тела, проявляться сила натяжения или реакции опоры и так далее.

То есть действие силы инерции для наблюдателя внутри будет таким же, как в поле гравитационном.

Принцип эквивалентности Эйнштейна: все физические явления в равномерно ускоренном лифте будут происходить в точности так же, как в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести. Никакие опыты по свободному падению тел в лифте не могут отличить однородное гравитационное поле от однородного поля сил инерции. То же нельзя сделать и любыми другими физическими опытами.

Общая формулировка принципа эквивалентности: Все физические явления в гравитационном поле происходят совершенно так же, как в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а начальные условия одинаковы для всех тел замкнутой системы.

Отсюда следует вывод: физические законы в неинерциальной системе отсчета записываются точно так же, как в инерциальной системе отсчета в присутствии сил тяготения.

Однако не все гравитационные поля могут быть описаны поступательными силами инерции. Это легко сделать для однородных гравитационных полей. Но, например, гравитационное поле точечной массы, Земли и других тел – неоднородные поля, а поступательные силы инерции – однородны. Силы инерции во вращающихся системах отсчета также не могут заменить неоднородные гравитационные поля.

Выход состоит в том, чтобы рассматривать достаточно малый объем, в пределах которого гравитационное поле можно считать однородным. Именно для такого малого объема и справедлив принцип эквивалентности, в нем гравитационное поле может быть имитировано ускоренным движением системы отсчета. То есть принцип эквивалентности носит *локальный характер*. Единственное, что достижимо соответствующим выбором системы отсчета, это исключение гравитационного поля в данном малом объеме пространства, достаточно малом, чтобы в нем можно было считать поле однородным.

В общей теории относительности (ОТО – *релятивистская теория гравитации*) Эйнштейн объединил гравитационное поле и поле всех сил инерции в единое поле. Эйнштейн написал уравнения гравитационного поля (в расширенном смысле), причем закон всемирного тяготения Ньютона получается как частный случай этих уравнений и справедлив приближенно. Математически задача заключается в переходе от галилеевской СО к неинерциальной СО, которая определяется в локальном пространстве точки. В ОТО *геометрические свойства пространства не самостоятельны – они обусловлены материей*. И само физическое пространство является неэвклидовым, наличие материи искривляет его, а кривизна пространства зависит от плотности и движения вещества. Если материя и ее распределение в пространстве известны, то можно говорить о геометрической структуре мира.

Какие особенности такого пространства?

1) Тело, движущееся равномерно и прямолинейно относительно галилеевой СО, будет двигаться, вообще говоря, по криволинейной траектории относительно НСО.
2) Световой луч в поле тяготения и в НСО искривляется. Поясним подробнее этот момент, поскольку мы пользуемся принципом, что свет распространяется между 2 точками по кратчайшему пути. Не имеем ли мы здесь нарушение этого принципа? Оказывается, что нет, поскольку в неэвклидовом пространстве кратчайшее расстояние между 2 точками – кривая линия. Пример: рассматривая мир на сферической поверхности, получаем, что кратчайшее расстояние между 2 точками – дуга большого круга.
3) Однако если свет движется по кривой, то его скорость меняется. Как же обстоит дело с постулатом о постоянстве скорости света? Оказывается, что в присутствии сильных гравитационных полей постулат о постоянстве скорости света может быть пересмотрен.

Вообще название Общая Теория Относительности, введенное Эйнштейном, не совсем правильно отражает суть теории, поэтому более ее современное название есть *Теория Тяготения*. Итак, *первая основная идея* Эйнштейна, основанная на принципе эквивалентности и составляющая основу теории Тяготения, заключается в том, что в поле тяготения все тела движутся по *геодезическим линиям* в пространстве-времени, которое, однако, искривлено, и, следовательно, геодезические линии уже не прямые. Таким образом, поле тяготения по Эйнштейну есть отклонение свойств пространства-времени от свойств плоского (неискривленного) многообразия специальной теории относительности. *Вторая важная идея*, лежащая в основе теории Эйнштейна, – утверждение, что тяготение (т.е. искривление пространства-времени) определяется не только массой вещества, слагающего тело, но и всеми видами энергии, присутствующими в системе. Согласно этой идее, тяготение зависит не только от распределения масс в пространстве, но и от их движения, от давления и натяжений, имеющихся в телах, от электромагнитного поля и всех других физических полей.

3.4.4. Поведение часов и масштабов в присутствии полей тяготения

Рассмотрим поведение часов и масштабов в присутствии полей тяготения или полей инерции на примере поля инерции во вращающейся системе отсчета. Пусть имеются 2 наблюдателя, один в центре ИСО, а другой на поверхности вращающейся сферы (рис. 4.4). На наблюдателя, находящегося на поверхности сферы, действует центробежная сила инерции, направленная от центра сферы и которая по принципу эквивалентности аналогична силе тяготения.

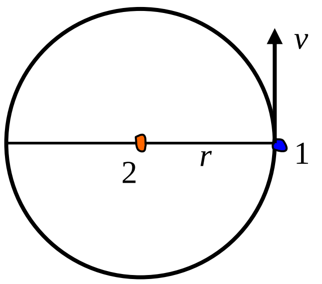

Рис. 4.4.

Геометрические измерения. Наблюдатель 1 находится на вращающейся поверхности и измеряет длину окружности вокруг неподвижного центра. Наблюдатель 2 находится в центре ИСО, следит за этими измерениями и верит в принцип эквивалентности, зная, что для первого наблюдателя существует необычное поле тяготения. Для наблюдателя 2 отношение длины окружности к диаметру есть число π:

$$\frac{l_0}{d} = \pi = 3.1415 \qquad (3.4.11)$$

Для наблюдателя 1 при измерении диаметра окружности ничего не происходит, т.к. скорость его перпендикулярна к диаметру и при этом координаты (и масштабы) не меняются. При измерении длины окружности масштаб будет располагаться по касательной к окружности, вдоль которой наблюдатель 1 движется со скоростью $V = \omega r$. Следовательно, измеряемая им длина окружности равна

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad (3.4.12)$$

где $\beta = V/c = \omega r/c$. Т.е. получаем Лоренцево сокращение длины окружности. Таким образом, для наблюдателя 1 отношение длины окружности к диаметру равно:

$$\frac{l}{d} = \pi\sqrt{1-\beta^2} < \pi \qquad (3.4.13)$$

Более того, поскольку скорость V на поверхности сферы зависит от радиуса сферы r, то и отношение масштабов зависит от каждой точке по радиусу. То есть в присутствии гравитационного поля пространство становится неэвклидовым, и при этом линейные масштабы изменяются от точки к точке непрерывно.

Что будет с часами? Очевидно, что примерно то же, что и с масштабами, поскольку часы, расставленные по радиусу, движутся с различными скоростями и для наблюдателя 2 (находящегося в центре окружности) их ход будет замедляться согласно соотношению

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3.4.14)$$

Таким образом, часы изменяют свой ход непрерывно при перемещении вдоль радиуса, т.е. наличие гравитационного поля приводит к изменению хода часов.

Последнее утверждение можно проверить экспериментально, если наблюдать частоту излучения в известных линиях спектра источников, находящихся в сильном поле тяготения. Ход атомных часов определяется периодом T, или частотой ν, электромагнитной волны, излучаемой атомом, поэтому можно записать для движущихся источников (с не очень большими скоростями V):

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2} \approx \nu_0\left(1-\frac{V^2}{2c^2}\right) \qquad (3.4.15)$$

где T_0 и ν_0 период колебаний и частота часового маятника неподвижного наблюдателя (или наблюдателя, у которого нет гравитационного поля). В нашем примере скорость равна $V = \omega r$, ее и подставим в (3.4.15):

$$\nu = \nu_0\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = \nu_0\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right) \qquad (3.4.16)$$

Здесь мы вспомнили, что $\varphi = \omega^2 r^2/2$ – центробежный потенциал (см движение в центральном поле §1.13, потенциальная энергия которого равна $U(r) = m\omega^2 r^2/2 = m\varphi(r)$), определяющий поле сил инерции. В силу принципа эквивалентности центробежный потенциал φ – это то же, что и гравитационный потенциал, взятый со знаком “минус”:

$$\varphi_{гр} = -\frac{\omega^2 r^2}{2} \qquad (3.4.17)$$

Естественно, что (3.4.17) верно только для определенного гравитационного поля, которое можно заменить нашим полем инерции для вращающей сферы. Тогда вообще можно записать изменение частоты в виде:

$$\nu = \nu_0\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right) \qquad (3.4.18)$$

Очевидно, что уравнение (3.4.18) можно записать для любого гравитационного поля (не очень сильного). Тогда для гравитационного потенциала Ньютона для материальной точки или шара имеем:

$$\varphi(r) = -G\frac{M}{r} \qquad (3.4.19)$$

и, подставляя (3.4.19) в (3.4.18), получаем *сдвиг частоты* в гравитационном потенциале:

$$\frac{\nu_0-\nu}{\nu_0} = G\frac{M}{c^2 r} \qquad (3.4.20)$$

Такой сдвиг впервые наблюдал Адамс в 1924 г., исследуя спектры спутника Сириуса – белого карлика Сириус-В. В лабораторных условиях гравитационное смещение спектральных линий, обусловленное гравитационным полем Земли, было измерено в 1960 году Р. Паундом и Г. Ребкой, используя Мессбауэровский эффект.

Примечание 2. *Роберт Вивиан Паунд, американский физик –экспериментатор, 1919-2010*
Глен Андерсен Ребка, американский физик, 1931 - 2015

3.4.5. Элементы теории тяготения Эйнштейна.

В СТО в инерциальной системе отсчета квадрат 4-хмерного “расстояния” в пространстве-времени (интервала) между двумя бесконечно близкими событиями записывается:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (3.4.21)$$

Или можно записать:

$$ds^2 = dx_\nu dx^\nu \qquad (3.4.22)$$

где $\nu = 0,1,2,3$, а x^1, x^2, x^3 (x_1, x_2, x_3) – произвольные пространственные координаты, $x^0 = ct$ ($x_0 = ct$) – временная координата; в выражении (3.4.22) и в формулах ниже подразумевается сумма по повторяющимся значкам.

Выражения (3.4.21)- (3.4.22) не изменяются при преобразованиях Лоренца. Пространство-время, в котором можно ввести систему координат так, что в каждой точке ds^2 записывается в виде (3.4.21)- (3.4.22), называется псевдоэвклидовым, плоским или пространством-временем Минковского. СТО является теорией физических процессов в таком пространстве.

Если в пространстве-времени Минковского использовать неинерциальные системы отсчета и недекартовы координаты, то в новых координатах квадрат интервала ds^2 запишется в виде:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (3.4.23)$$

где, как и ранее, $\mu,\nu = 0,1,2,3$. В искривленном пространстве-времени общей теории относительности (в конечных, не малых, областях) уже нельзя ввести декартовы координаты, и использование криволинейных координат становится неизбежным. В конечных областях искривленного пространства-времени ds^2 записывается в криволинейных координатах в общем виде (3.4.23). Зная коэффициенты $g_{\mu\nu}$ как функции 4-х координат, можно определить все геометрические свойства пространства-времени. Говорят, что величины $g_{\mu\nu}$ определяют метрику пространства-времени, а совокупность всех величин $g_{\mu\nu}$ называют *метрическим тензором*. С помощью $g_{\mu\nu}$ вычисляются как темп течения времени в различных точках системы отсчета, так и расстояния между точками в трехмерном пространстве. Так, формула для вычисления бесконечно малого интервала времени $d\tau$ по часам, покоящимся в системе отсчета, имеет вид:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0 \qquad (3.4.24)$$

Например, в поле тяготения звезды массы M для g_{00} имеем:

$$g_{00} = 1 - \frac{2MG}{c^2 r}$$

Квадрат пространственного расстояния dl^2 определяется следующим образом через пространственные координаты:

$$dl^2 = h_{ik} dx^i dx^k, \qquad (3.4.25)$$

где

$$h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} \qquad (3.4.26)$$

и индексы $i,k = 1,2,3$.

Математический аппарат, изучающий неевклидову геометрию, или, как говорят, Риманова геометрия, в произвольных координатах, – тензорное исчисление. Теория Тяготения использует аппарат тензорного исчисления, ее законы записываются в произвольных криволинейных координатах в ковариантном виде.

Основная задача теории Тяготения – определение гравитационного поля, что соответствует в теории Эйнштейна нахождению геометрии пространства-времени. Эта последняя задача сводится к нахождению метрического тензора. Уравнения тяготения Эйнштейна связывают величины $g_{\mu\nu}$ с величинами, характеризующими материю, создающую поле. Также записываются уравнения, определяющие геодезические линии в искривленном пространстве-времени, по которым движутся свободные тела (т.е. тела в поле тяготения, но на них не действуют негравитационные силы).

Ряд выводов теории Эйнштейна качественно отличается от выводов ньютоновской теории тяготения. Важнейшие из них связаны с возникновением черных дыр (гравитационный коллапс), гравитационных волн.

Есть ли экспериментальные факты, подтверждающие выводы ОТО? До недавнего времени к ним относили только 4 экспериментальные факта – подтверждения теории Тяготения:

А) Гравитационное смещение спектральных линий.

Б) Искривление лучей света гравитационными полями. Так в 1919 г. Эддингтон и Кроммелин в астрономической экспедиции по исследованию солнечного затмения обнаружили искривление пространства около Солнца.

В) Изменение в орбите Меркурия. Происходит смещение перигелия – вращение большой полуоси вытянутой орбиты Меркурия.

Г) Запаздывание радарного эха.

Однако прогресс в астрофизических исследованиях в последнее время привнес огромное число данных по образованию разнообразных звездных систем и объектов, а также по их эволюции, движению в пространстве. Эти данные укладываются в рамки теории Тяготения, что с несомненностью подтверждает ее справедливость.

Примечание 3. *Артур Стэнли Эддингтон, английский астрофизик и физик, 1882–1944 г.г.*
Эндрю Клод де ля Шеруа Кроммелин, английский астроном, 1865-1939 гг.
