МЕХАНИКА

Глава 4. Колебания.

4.1.Малые отклонения от положения равновесия. Гармонические колебания.

4.1.1 Малые отклонения от положения равновесия.

Колебательные процессы играют очень важную роль в природе и во всей нашей жизни. С колебаниями встречаемся везде: маятники, пружины, струны, упругие тела в различных средах, строительные конструкции, переменный ток, электромагнитные колебания в контурах и т.д.

Система или тело, находящееся в положении устойчивого равновесия при небольших отклонениях возвращается назад. Устойчивое равновесие отражается в минимуме потенциальной энергии. О такой системе говорят, как об *осцилляторе*.

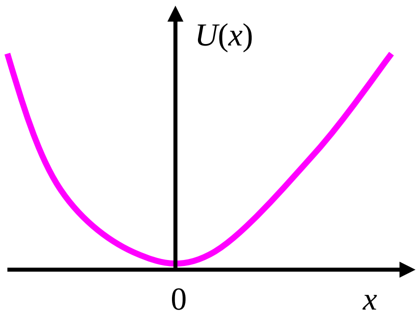


Рис. 1.1.

Пусть для простоты имеем одномерное движение в поле с потенциальной энергией $U(x)$ (рис. 1.1). Устойчивое равновесие соответствует минимуму потенциальной энергии. Пусть минимум находится в точке $x = 0$ и пусть отсчет потенциальной энергии $U(x)$ происходит от минимального значения $U(0) = 0$. Тогда вблизи точки x потенциальную энергию $U(x)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням x – отклонения от положения равновесия:

$$U(x) = U(0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} \cdot x^2 + \ldots \qquad (4.1.1)$$

Рассматривая малые отклонения от положения равновесия, пренебрегаем высшими степенями x^3, x^4,... Поскольку в точке $x = 0$ имеем минимум потенциальной энергии, то при этом получаем:

$$U(0) = 0, \quad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

Отметим, если $U(0) \neq 0$, то можно всегда ввести потенциальную энергию, отсчитываемую от точки $x = 0$: $U_1(x) = U(x) - U(0)$. Так как имеем минимум функции $U(x)$, то вторая производная больше 0: $\left. d^2U/dx^2 \right|_{x=0} > 0$. Введем следующее обозначение для значения второй производной в нуле:

$$k \equiv \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} \qquad (4.1.2)$$

Коэффициент k носит название *коэффициента упругости*. Тогда потенциальная энергия вблизи положения равновесия имеет вид:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (4.1.3)$$

Это потенциальная энергия *элементарного* или *гармонического осциллятора*.

Таким образом, пренебрегая высшими порядками разложения потенциальной энергии вблизи ее минимума, мы получаем движение в поле гармонического осциллятора. Как известно (см Глава 1 §1.9), сила определяется как градиент потенциальной энергии, и для одномерного движения имеем:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{e}_x = -k\vec{x} \qquad (4.1.4)$$

Это сила носит название *упругой* или *квазиупругой* силы независимо от ее природы. Знак минус показывает, что эта сила направлена всегда к положению равновесия, т.е. к точке $x = 0$.

Примечание 1. Изначально можно рассматривать силу и раскладывать ее вблизи точки устойчивого минимума:

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2}F''(0) + \frac{x^3}{3!}F'''(0) + \ldots \qquad (4.1.5)$$

при этом $F(0) = 0$ (в равновесии сила равна нулю), а первая производная от силы в положении равновесия $F'(0) \equiv dF/dx\big|_{x=0} = -d^2U/dx^2\big|_{x=0} = -k$ определяет коэффициент упругости k.

Рассмотрим некоторые примеры колебательного движения.

1) Груз на гладком столе (нет трения) прикреплен к невесомой пружине, закрепленной другим концом к неподвижной стенке (рис. 1.2). Возвращающая сила равна:

$$F = -k\Delta x$$

где k – жесткость пружины, $\Delta x = x - x_0$. При отклонении от положения равновесия x_0 на величину Δx запасенная потенциальная энергия равна

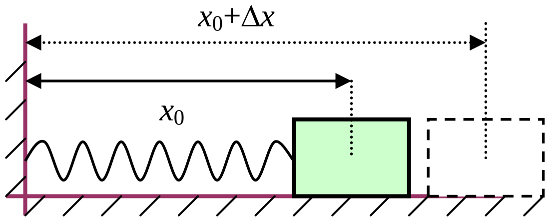


Рис. 1.2.

$$U(\Delta x) = k(\Delta x)^2/2\,.$$

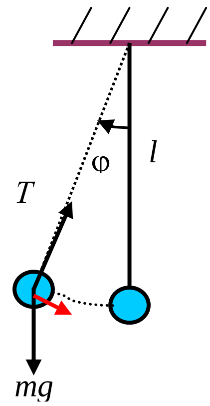


Рис. 1.3.

2) Рассмотрим малые отклонения маятника от положения равновесия (рис. 1.3), здесь переменной является угол отклонения φ, отсчитываемый от вертикального направления. Возвращающая сила при малых углах отклонения от положения равновесия равна:

$$F = mgSin\varphi \approx mg\varphi \qquad (4.1.6)$$

Возвращающий момент силы (вектор момента силы направлен из плоскости рисунка на нас) равен:

$$\begin{gathered}\vec{M} = \left[\vec{l}\,, m\vec{g}\right] \\ M = lmgSin\varphi \approx lmg\varphi = k\varphi\end{gathered}, \qquad (4.1.7)$$

где коэффициентом упругости является величина $k = mgl$. Приращение потенциальной энергии и ее запас при отклонении маятника на угол φ равны:

$$dU = -Md\varphi$$
$$U = k\varphi^2/2$$

3) Еще пример: катание шарика без трения на выемке (без проскальзывания). При этом шарик (рис. 1.4) совершает поступательное и вращательное движения, что необходимо учитывать при решении задачи. Сила, под действием которой совершаются малые колебания около положения равновесия, равна:

$$F = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha$$

где угол α – угол между горизонтальным направлением и касательной к поверхности выемки.

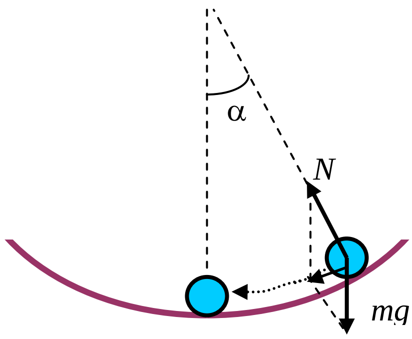


Рис. 1.4.

4.1.2. <u>Гармонические колебания</u>.

Ограничиваясь потенциальной энергией вида (4.1.3) или силой (4.1.4), можно записать одномерное уравнение Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (4.1.8)$$

В механике часто производные по времени от координат обозначают точками над переменной, тогда (4.1.18) перепишем его в виде:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (4.1.9)$$

Окончательно уравнение для нахождения функции $x(t)$ удобно представить в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \qquad (4.1.10)$$

где вводится обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0 \tag{4.1.11}$$

Колебания, описываемые уравнением (4.1.10), называются *гармоническими*, а система, осуществляющая эти колебания, называется *линейным* или *гармоническим осциллятором*.

Уравнение (4.1.10) – линейное дифференциальное уравнение II порядка. Найдем его решение. В математике общий способ решения линейных уравнений состоит в подстановке и поиске решения в виде

$$x(t) = exp(\lambda t), \tag{4.1.12}$$

где λ – неизвестная постоянная. Для подстановки в уравнение (4.1.10) находим производные:

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Подставляя вторую производную в уравнение (4.1.10), получаем так называемое *характеристическое* уравнение для нахождения λ:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \tag{4.1.13}$$

Отсюда находим 2 корня: $\lambda = \pm i\omega_0$, где i – мнимая единица $i = \sqrt{-1}$. Поскольку оба корня удовлетворяют уравнению (4.1.10), то полное решение уравнения (4.1.10) представляется в виде суперпозиции двух частных решений:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \tag{4.1.14}$$

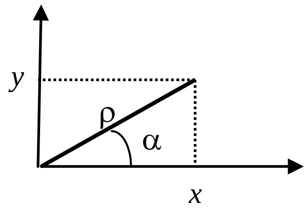
где C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные. Поскольку функция $x(t)$ вещественная, то можно записать

$$\begin{gathered} x(t) = x^*(t) \\ C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} = C_1^* e^{-i\omega_0 t} + C_2^* e^{i\omega_0 t} \end{gathered} \tag{4.1.15}$$

Отсюда следует, что

$$C_1 = C_2^*, \quad C_2 = C_1^* \tag{4.1.16}$$

Примечание 2. Комплексное число состоит из 2-х вещественных чисел x и y, поэтому удобно ввести геометрическую интерпретацию числа: изображать его точкой на плоскости (x, y). Поэтому всякое комплексное число можно записать в двух формах:



$$x + iy = \rho \cdot e^{i\alpha}. \tag{4.1.17}$$

Модуль комплексного числа ρ и его аргумент α равны, соответственно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\alpha = \frac{y}{x} \tag{4.1.18}$$

Представим коэффициенты C_1 и C_2 в соответствии с (4.1.17) в виде:

$$C_1 = C_2^* = \frac{A}{2} e^{i\alpha}, \quad C_2 = C_1^* = \frac{A}{2} e^{-i\alpha} \tag{4.1.19}$$

Тогда решение (4.1.14) преобразуется:

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + \frac{A}{2} e^{-i(\omega_0 t + \alpha)} = \frac{A}{2}\left(e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}\right) = A \cdot cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Итак, общее решение может быть записано в виде:

$$x(t) = A cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{4.1.20}$$

где A и α – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

Вообще решение уравнения гармонических колебаний представляется в различных формах, которые можно использовать в зависимости от удобства применения:

1) $x(t) = A cos(\omega_0 t + \alpha)$ или, что то же самое, $x(t) = A sin(\omega_0 t + \varphi)$, где A, α и φ – произвольные постоянные.
2) $x(t) = A cos\,\omega_0 t + B sin\,\omega_0 t$, где A и B произвольные постоянные.
3) Комплексная форма

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_1^* e^{-i\omega_0 t} = Ae^{i(\omega_0 t + \alpha)} = A[cos(\omega_0 t + \alpha) + i\, sin(\omega_0 t + \alpha)],$$

где C_1, A и α – произвольные постоянные. Комплексную форму иногда очень удобно использовать в вычислениях, а затем можно брать реальную или мнимую часть от полученного в конце вычислений выражения, поскольку конечный ответ – вещественная величина

$$Re\,x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad Im\,x(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$$

Решение (4.1.20) представлено графически на рисунке 1.5. Получаем гармоническое колебание – движение, которое продолжается по времени от ”минус бесконечности” до “плюс бесконечности”. Наибольшее отклонение от положения равновесия – A – называется *амплитудой колебаний*. Полный угол $(\omega_0 t + \alpha)$, стоящий под косинусом (синусом, или в экспоненте), называется *фазой колебаний* (фаза зависит от времени). Угол α – *начальная фаза* колебаний, ω_0 – *частота гармонических колебаний*. Время одного полного колебания называется *периодом колебаний*. За время, равное периоду, система возвращается в начальное состояние, т.е. в решении происходит изменение фазы на 2π:

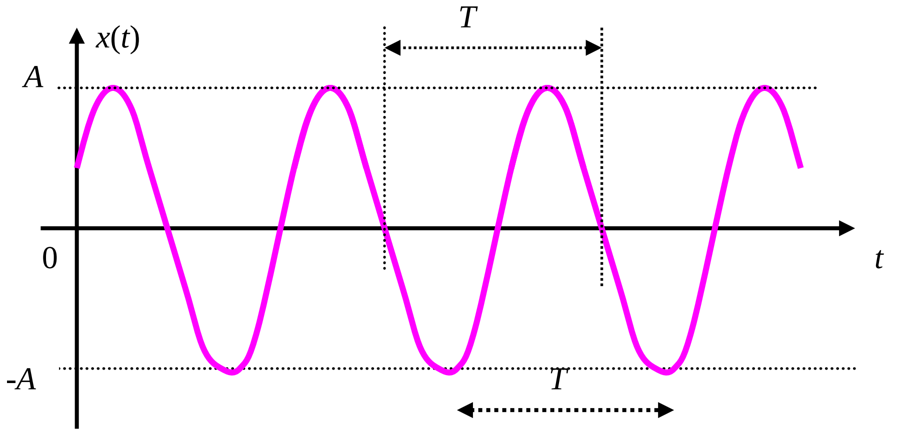


Рис. 1.5.

$$\omega_0(t+T) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi$$

$$\omega_0 T = 2\pi$$

Поэтому период колебаний связан с частотой соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad (4.1.21)$$

Можно проследить четкую аналогию гармонических колебаний с равномерным вращением по окружности с постоянной угловой скоростью ω_0. В самом деле, при равномерном вращении по окружности изменение во времени одной координаты x (или y) описывается теми же уравнениями, что и при гармоническом колебании. Поэтому ω_0 часто называют *круговой частотой колебаний*. Круговая частота колебаний ω_0 измеряется в единицах в $Рад/с$, в отличие от обычной частоты колебаний ν, определяемой как число колебаний в единицу времени:

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad (4.1.22)$$

Частота ν измеряется в Герцах: 1 Герц соответствует одному колебанию в секунду: $1\ Гц = 1\ с^{-1}$.