4.2. Собственные колебания.

4.2.1. Начальные условия колебаний.

Собственными называются колебания системы – *осциллятора* – под действием лишь внутренних сил без внешних воздействий. Гармонические колебания, рассмотренные в §4.1, представляют собой собственные колебания линейного осциллятора. Однако, в принципе, собственные колебания могут быть и не гармоническими. Но при достаточно малых отклонениях от положения равновесия (без внешних сил) они сводятся к гармоническим колебаниям. Здесь рассмотрим несколько примеров гармонических собственных колебаний и их характер в зависимости от начальных условий.

Пусть колебания совершаются пружинным маятником как в примере 1 §4.1. Однако в отличие от предыдущего параграфа координату будем отсчитывать смещение от положения равновесия груза массы m (см рис. 2.1), а не от места прикрепления (т.е. совершим замену Δx в рис. 1.2 на x). Тогда возвращающая сила имеет вид:

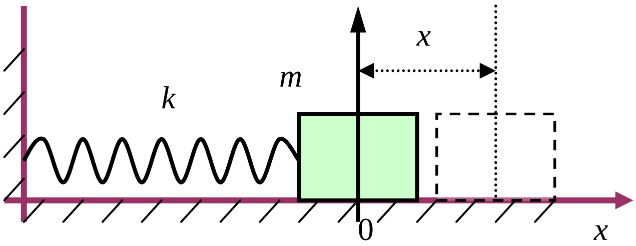

Рис. 2.1.

$$F = -kx, \tag{4.2.1}$$

где k – жесткость пружины, и имеем уравнение (4.1.10) в том же виде, как и ранее

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4.2.2}$$

При этом частота и период колебаний равны согласно (4.1.11) и (4.1.21), соответственно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4.2.3}$$

Решение уравнения (4.2.2) представим в виде (4.1.20):

$$x(t) = ACos(\omega_0 t + \alpha) \tag{4.2.4}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы определить константы A и α. Эти константы определяются из *начальных условий* задачи. Пусть в какой-то момент времени (начальный момент) известны отклонение от положения равновесия и скорость тела. Найдем производную по времени от (4.2.4) и получим выражение для колебаний скорости маятника:

$$\dot{x}(t) \equiv v(t) = -A\omega_0 Sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{4.2.5}$$

Рассмотрим два крайних случая возникновения колебаний.

1) Груз отклонили из положения равновесия на расстояние x_0 и затем отпустили. Математически эти начальные условия запишутся следующим образом. В момент времени $t = 0$ имеем:

координата $x(t)=x(0) = x_0$,

а скорость $v = \dot{x}(0) = 0$ (4.2.6)

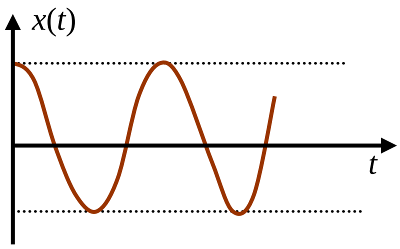

Рис. 2.2.

Подставляя начальные условия в (4.2.4) и (4.2.5), получаем уравнения для определения констант:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = ACos\alpha \\ \dot{x}(0) &= 0 = -A\omega_0 Sin\alpha \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Из последнего равенства (4.2.7) имеем $\alpha = 0 + \pi n$, где n – целое число. Тогда из верхнего (4.2.7) получаем $A = x_0$. Окончательно решение (4.2.4) имеет вид:

$$x(t) = x_0 Cos\omega_0 t \tag{4.2.8}$$

Это решение представлено на рис. 2.2.

2) Пусть в момент времени $t = 0$ телу сообщили (внезапно ударили) скорость v_0, тогда начальные условия выглядят следующим образом:

при $t = 0$: координата $x = 0$,

а скорость $v = \dot{x} = v_0$ (4.2.9)

Подставляя начальные условия (4.2.9) в (4.2.4) и (4.2.5), получаем уравнения для определения констант:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 = ACos\alpha \\ \dot{x}(0) &= v_0 = -A\omega_0 Sin\alpha \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Из первого равенства (4.2.10) получаем $\alpha = \pi/2$ (амплитуду A бессмысленно полагать равной нулю – нет решения), тогда амплитуда из второго уравнения (4.2.10) равна $A = -v_0/\omega_0$. Окончательно решение (4.2.4) имеет вид:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} Sin\omega_0 t \qquad (4.2.11)$$

Графически это решение представлено на рис. 2.3.

Если начальные условия носят более общий характер, чем в рассмотренных выше случаях, то в начальный момент задается промежуточные координата (между x_0 и 0) и скорость тела.

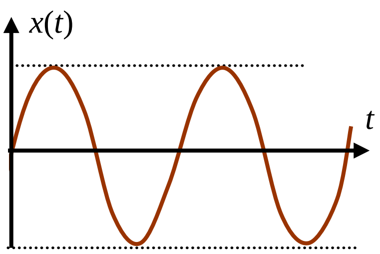

Рис. 2.3.

4.2.2. Математический и физический маятники.

Математический маятник – идеализированная система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити, на которой подвешена материальная точка массы m (рис. 2.4). Пусть вектор $\vec{l}$ направлен от точки подвеса маятника (начало координат) к материальной точке. Маятник отклоняется от положения равновесия на угол φ. В случае плоской траектории движения маятника вектор $\vec{\varphi}$ направлен за плоскость рисунка 2.4 по правилу буравчика (направление обозначено крестом в кружочке). Возвращающий момент силы по определению равен:

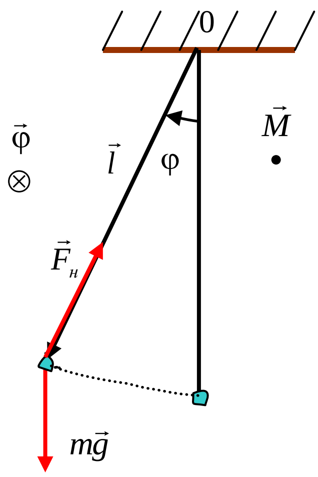

Рис. 2.4.

$$\vec{M} = \left[\vec{l}, m\vec{g}\right]$$

и направлен перпендикулярно плоскости чертежа из плоскости на нас, т.е. в противоположную сторону от направления вектора угла φ. Поэтому, если направление, уходящее за плоскость рисунка, принять за положительное, то величина момента силы равна:

$$M = -lmgSin\varphi \qquad (4.2.12)$$

Тогда уравнение моментов запишется:

$$I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mglSin\varphi \qquad (4.2.13)$$

где I – момент инерции маятника относительно точки подвеса, $I = ml^2$. Рассмотрим достаточно малые углы отклонения φ, когда синус угла можно заменить значением угла φ, тогда уравнение имеет вид уравнения гармонических колебаний:

$$I\ddot{\varphi} \approx -mgl\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (4.2.14)$$

где квадрат частоты собственных колебаний математического маятника и период соответственно равны:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad (4.2.15)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (4.2.16)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника зависит только от длины подвеса и силы тяжести.

Физический маятник – это колебательная система, когда колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку. Колебания возникают тогда, когда точка подвеса не совпадает с точкой центра масс (см пример на рис. 2.5). Возвращающий момент записывается в этом случае точно так же, как и для математического маятника – (4.2.12), да и уравнение колебаний при малых углах отклонения совпадает с уравнением (4.2.14):

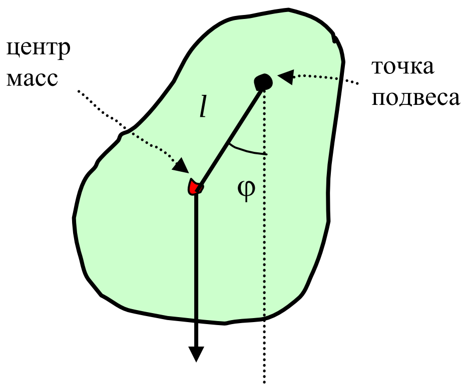

Рис. 2.5.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (4.2.17)$$

Отличие состоит только в том, что момент инерции I не записывается так просто как для математического маятника, а его нужно вычислять для каждой точки подвеса, поскольку для каждой точки отсчета он различен, и поэтому частота собственных колебаний и период записываются соответственно:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I} \tag{4.2.18}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \tag{4.2.19}$$

Здесь l – расстояние от точки подвеса до центра масс. Из уравнения (4.2.19) видно, что в общем период колебаний физического маятника зависит от точки подвеса.

4.2.3. Энергия гармонических колебаний.

При колебаниях энергия системы определяется как кинетической энергией движения, так и потенциальной энергией. Кинетическая энергия вычисляется обычным образом как кинетическая энергия движущегося тела со скоростью v:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{4.2.20}$$

Подставляя сюда скорость (4.2.5), получаем выражение для кинетической энергии:

$$E_k = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 Sin^2(\omega_0 t + \alpha) \tag{4.2.21}$$

Из сравнения (4.2.4) и (4.2.21) видно, что кинетическая энергия меняется от максимального значения до 0 с частотой в 2 раза большей обычных амплитудных колебаний. На рис. 2.6 показаны в сравнении графики смещения, кинетической и потенциальной энергий в зависимости от времени – колебания построены при начальной фазе равной нулю ($\alpha = 0$). Максимальное значение кинетической энергии равно

$$(E_k)_{max} = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \tag{4.2.22}$$

и достигается это значение, когда система проходит через положение равновесия $x(t) = 0$. Наоборот, когда отклонение от положения равновесия максимально $x(t) = A$, кинетическая энергия равна нулю.

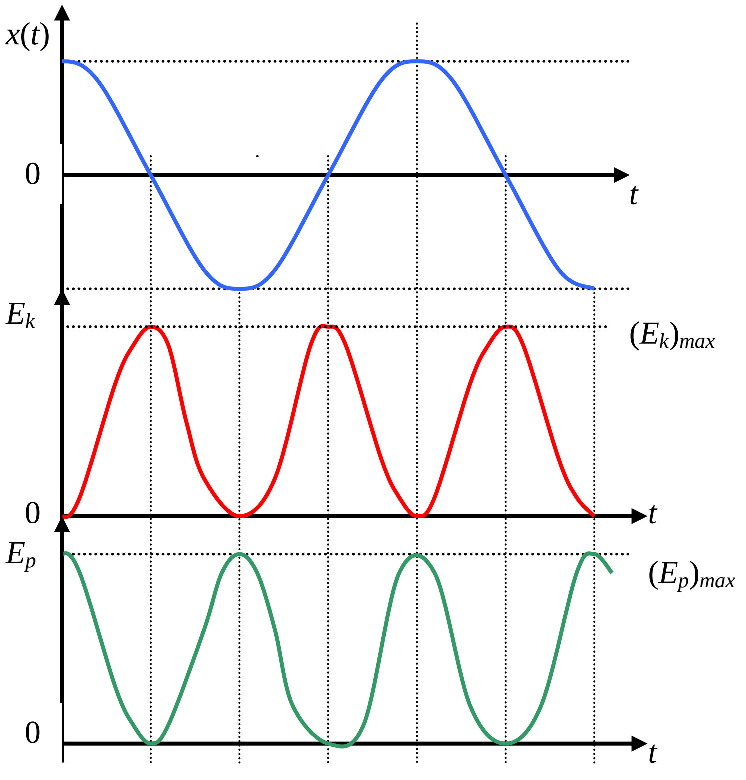

Рис. 2.6.

Примечание 1. Вообще при вычислении кинетической энергии в колебаниях x и m могут иметь совершенно другой смысл, как, например, в электрических колебаниях вместо них имеем q – заряд и L – индуктивность.

Потенциальная энергия осциллятора вычисляется по работе упругой силы:

$$E_p = -\int F dx + Const = \frac{kx^2}{2} + C \tag{4.2.23}$$

Будем отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия, т.е. при $x = 0$ имеем $E_p = 0$ и постоянная также равна нулю $C = 0$. Подставляя (4.2.4) в (4.2.23) и коэффициент жесткости из (4.2.3), получаем потенциальную энергию

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2Cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \\ = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 Cos^2(\omega_0 t + \alpha) \qquad (4.2.24)$$

Максимальное значение потенциальной энергии совпадает с максимальным значением кинетической энергии по величине:

$$(E_p)_{max} = \frac{kA^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \qquad (4.2.25)$$

Однако во времени колебания потенциальной энергии происходят в противофазе по отношению к колебаниям кинетической энергии (см рис.2.6).

Складывая кинетическую и потенциальную энергии, получаем, что выполняется закон сохранения энергии:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\left[Sin^2(\omega_0 t + \alpha) + Cos^2(\omega_0 t + \alpha)\right] = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = const \qquad (4.2.26)$$

Итак, имеем следующие утверждения:

1. Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий совпадают, но достигают эти значения в разные моменты времени.
2. Полная энергия осциллятора остается постоянной и равной амплитудному значению кинетической или потенциальной энергий. Во время колебаний происходит «перекачка» кинетической энергии в потенциальную и наоборот.
3. Средняя кинетическая энергия осциллятора равна его средней потенциальной энергии. В самом деле, среднее значение энергии за период равно:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_k(t)dt = \frac{mA^2\omega_0^2}{2T}\int_0^T Sin^2(\omega_0 t + \alpha)dt \qquad (4.2.27)$$

Так как

$$\frac{1}{T}\int_0^T Sin^2(\omega_0 t + \alpha)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Cos^2(\omega_0 t + \alpha)dt = \frac{1}{2}$$

Получаем, таким образом, что:

$$\langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4}mA^2\omega_0^2 \qquad (4.2.28)$$

В этом параграфе мы рассматривали одномерное движение или движение с одной степенью свободы – *одномерный осциллятор*. Удобно изображать одномерный осциллятор на плоскости, образованной импульсом p и координатой x. Вообще пространство, образованное координатами (x, y, z) и импульсами (p_x, p_y, p_z) частицы, носит название *фазового пространства*. Такое пространство часто используется для анализа движения частицы или системы тел. Элемент объема фазового пространства дает положение частицы и значение ее скорости: $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z$ с той точностью, с которой определяются линейные размеры этого объема.

Для одномерного осциллятора мы имеем дело с движением в двумерном фазовом пространстве (x, p) При этом энергия может быть представлена в следующем виде:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = const \qquad (4.2.29)$$

Здесь координата записывается как обычно

$$x = ACos(\omega_0 t + \alpha),$$

и соответственно импульс в виде

$$p = m\dot{x} = mA\omega_0 Sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Разделив обе части уравнения на полную энергию, приведем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{p^2}{\left(\sqrt{2mE}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{2E/m\omega_0^2}\right)^2} = 1 \qquad (4.2.30)$$

Уравнение (4.2.30) есть не что иное, как уравнение эллипса в фазовом пространстве (x, p)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1$$

со следующими полуосями:

$$a = x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \quad \text{и} \quad b = p_{max} = \sqrt{2mE} \tag{4.2.31}$$

(см рис. 2.7). Траектория в этом пространстве, определяемая функцией $H(p,x)=E=const$ – *фазовая траектория*. *Элемент фазового «объема»* в этом двумерном фазовом пространстве равен $\Delta V = \Delta p\cdot\Delta x$. Полный фазовый «объем» равен площади эллипса:

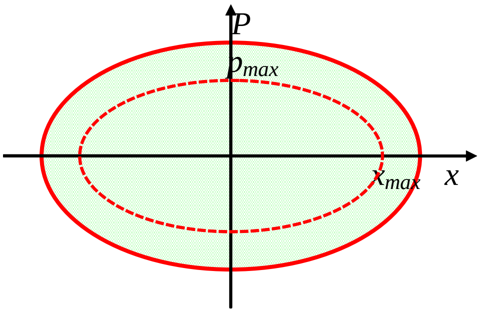

Рис. 2.7.

$$S = \pi ab = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}\cdot\sqrt{2mE} = 2\pi\frac{E}{\omega_0} = ET \tag{4.2.32}$$

Отметим здесь важный момент: при медленном изменении параметров колеблющейся системы (например, величины k) площадь остается постоянной

$$ET = const \quad \text{или} \quad E = const\cdot\omega_0 \tag{4.2.33}$$

При этом получаем так называемые *адиабатические* инварианты для гармонического осциллятора (см 1-ый том Д.В. Сивухина, с.223). *Адиабатический инвариант* – физическая величина, которая не меняется при плавном, «адиабатическом», изменении некоторых параметров физической системы. Адиабатичность изменения параметра означает, что характерное время этого изменения гораздо больше характерного времени процессов, происходящих в самой системе.

Смысл этих инвариантов (4.2.33) состоит в следующем: при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте.

4.2.4. Ангармоничные колебания.

Если в разложении для силы (4.1.5) из § 4.1. наряду с линейным членом $xF'(0)$ существенен также и следующий член, например

$$\frac{1}{2}x^2F''(0)=\alpha x^2.$$

Тогда вместо уравнения гармонических колебаний получим следующее уравнение движения:

$$m\ddot{x}=-kx+\alpha x^2,$$

которое удобно записывать в виде:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon\omega_0^2x^2 \tag{4.2.34}$$

Здесь параметры уравнения записываются

$$\omega_0^2=\frac{k}{m},\quad \varepsilon=\frac{F''(0)}{2m\omega_0^2}=-\frac{F''(0)}{2F'(0)}.$$

Появление дополнительных членов в уравнение колебания приводит к *негармоничности* колебаний (*ангармоничность*). В частности, слагаемое, пропорциональное $\sim x^2$, приводит к появлению в колебаниях члена с удвоенной частотой $2\omega_0$, называемого второй гармоникой. Обычно ε является малой добавкой и представляет собой параметр малости, по которому можно провести разложение. Если учитывать следующие малые поправки, то в решении получаются более высокие гармоники ($n\omega_0$). Появление высших гармоник и есть ангармоничность колебаний.