4.3. Сложение колебаний.

4.3.1. Векторная диаграмма. Сложение колебаний одинаковой частоты.

Удобно использовать наглядное изображение колебаний с помощью *векторных диаграмм*. Введем ось x и отложим вектор $\vec{A}$, определяющий амплитуду колебаний, из точки 0 под углом α, в соответствие с записью гармонических колебаний (рис. 3.1):

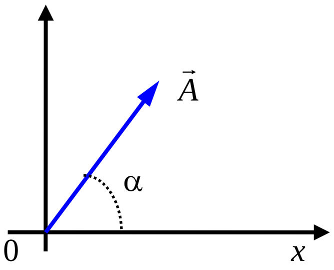

Рис. 3.1.

$$x(t) = ACos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (4.3.1)$$

При этом можно считать, что зависимость от времени проявляется в том, что фаза $\omega_0 t + \alpha$ растет линейно со временем, а соответственно вектор $\vec{A}$ вращается с угловой скоростью ω_0. Тогда зависимость проекции $\vec{A}$ на ось x от времени t определяется формулой (4.3.1). Это рассмотрение аналогично представлению комплексных чисел на плоскости, когда реальная часть комплексного числа определяется точкой на оси x.

Рассмотрим сложение 2-х гармонических колебаний одинаковой частоты ω_0 и одного направления:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 Cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= A_2 Cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

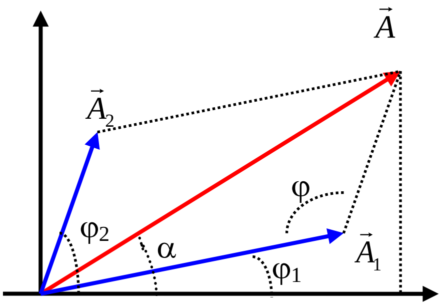

Рис. 3.2.

Используя геометрическую интерпретацию колебаний, изображенных на рис. 3.2, удобно получить суммарное колебание как сложение векторных амплитуд отдельных колебаний $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ и их проекций на ось x: $x = x_1 + x_2$. Из теоремы косинусов имеем:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2Cos\varphi = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2Cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \qquad (4.3.3)$$

Итак, в результате сложения этих колебаний имеем для полного колебания следующее выражение:

$$x(t) = ACos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (4.3.4)$$

где амплитуда и начальная фаза определяются:

$$\begin{cases} A = \left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2Cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right)^{1/2} \\ tg\alpha = \dfrac{A_1Sin\varphi_1 + A_2Sin\varphi_2}{A_1Cos\varphi_1 + A_2Cos\varphi_2} \end{cases} \qquad (4.3.5)$$

Эти же формулы можно было получить из простых тригонометрических преобразований, складывая уравнения (4.3.2). Отметим, *максимальная амплитуда* получается при *равных* начальных фазах колебаний $\varphi_1 = \varphi_2$:

$$A = A_1 + A_2,$$

то есть при синфазных колебаниях, в то время как *минимальная амплитуда* – при разности начальных фаз $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm\pi$:

$$A = A_1 - A_2,$$

когда колебания происходят в противофазе.

Итак, получаем следующий вывод: *суммой гармонических колебаний одинаковой частоты является гармоническое колебание с той же частотой*, а амплитудой и фазой, определяемыми формулами (4.3.4) - (4.3.5).

4.3.2. Сложение гармонических колебаний с близкими частотами. Биения.

Рассмотрим два колебания одного направления, частоты которых ω_1 и ω_2 различны. Как следует из векторной диаграммы на рис. 3.2, поскольку $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с разной угловой скоростью, то при их сложении в результирующем колебании возникают зависимости амплитуды и частоты от времени. Получаем в результате сложения *негармоническое колебание*, для которого, строго говоря, уже нельзя вводить понятия амплитуды и частоты.

Наибольший интерес вызывает случай, когда разность частот складывающихся колебаний $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ мала:

$$\Delta\omega << \omega_1, \omega_2 \qquad (4.3.6)$$

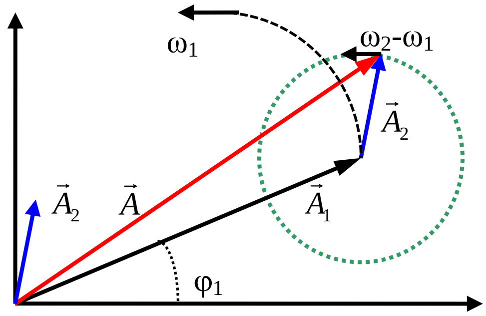

Рис. 3.3.

Итак, рассмотрим два колебания:

$$x_1(t) = A_1 Cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 Cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (4.3.7)$$

Пусть для определенности $A_1 > A_2$ и система координат вращается вместе с вектором $\vec{A}_1$ с угловой скоростью ω_1. Тогда в некоторый момент времени имеем следующую картину, представленную на рис. 3.3: $\vec{A}_1$ находится под углом φ_1 к горизонтальной оси. Тогда относительно вектора $\vec{A}_1$ вектор $\vec{A}_2$ вращается вокруг конца вектора $\vec{A}_1$ с угловой скоростью $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, то есть достаточно медленно по сравнению с частотами ω_1, ω_2.

Для упрощения задачи пусть амплитуды складывающихся колебаний равны $A_1 = A_2$, и начало отсчета введем в момент времени t, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (всегда можно перенести начало отсчета времени). Таким образом, будем складывать следующие колебания:

$$x_1(t) = ACos\omega_1 t$$
$$x_2(t) = ACos(\omega_1 + \Delta\omega)t \qquad (4.3.8)$$

Сложим (4.3.8):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A[Cos\omega t + Cos(\omega + \Delta\omega)t] = 2ACos\frac{(\omega + \Delta\omega)t - \omega t}{2} Cos\frac{(\omega + \Delta\omega)t + \omega t}{2}$$

и, так как разность частот мала $\Delta\omega << \omega$, получаем окончательно:

$$x(t) \approx 2ACos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot Cos\omega t \qquad (4.3.9)$$

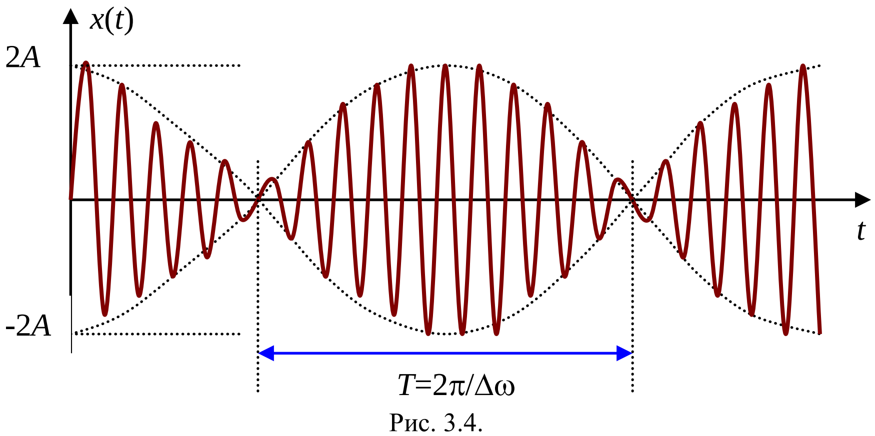

Рис. 3.4.

Фаза ωt меняется со временем значительно быстрее, чем фаза $\Delta\omega t/2$, и поэтому медленно меняющийся со временем косинус $Cos(\Delta\omega t/2)$ можно отнести к амплитуде $2A$. Таким образом, получаем амплитуду, пульсирующую во времени:

$$a(t) = \left|2ACos\frac{\Delta\omega}{2}t\right| \qquad (4.3.10)$$

Эта амплитуда “вырезает” область на оси x (пунктирные линии на рис. 3.4), которая ограничивает колебания с частотой близкой к ω. Такие колебания называются *биениями* (см рис. 3.4). Для складывающихся колебаний с равными амплитудами $A_1 = A_2$ максимальное значение амплитуды биений равно $2A$, минимальное – 0. Частота биений Ω – медленная частота – определяется соотношением:

$$\Omega = |\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega \qquad (4.3.11)$$

Частота Ω в 2 раза больше, чем следует из (4.3.10), так как области заполнения появляются на каждый полупериод. Период биений также в 2 раза меньше времени полного колебания из (4.3.10) и равен

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \qquad (4.3.12)$$

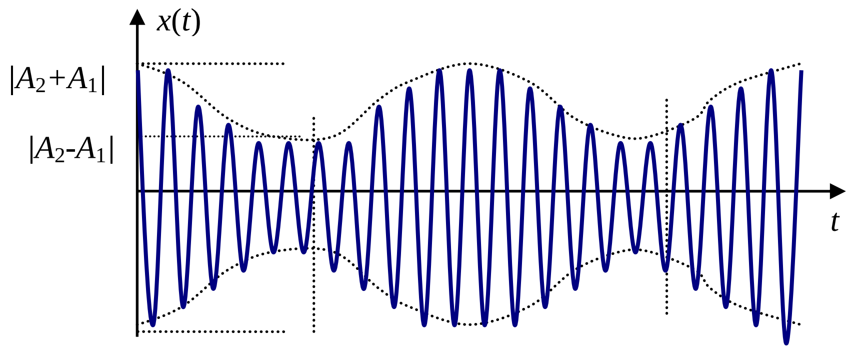

Рис. 3.5.

Если амплитуды складывающихся колебаний не одинаковы, т.е.

$$A_2 \neq A_1,$$

тогда амплитуда биений не обращается в 0 (см рис. 3.5), а достигает своего минимального $|A_2 - A_1|$ и максимального $|A_2 + A_1|$ значений. Огибающая биений периодически изменяется со временем с той же частотой Ω, определяемой (4.3.11).

4.3.3. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний.

Рассмотрим сложение 2-х колебаний, направленных вдоль осей x и y. Результирующая траектория конца вектора результирующего колебания – плоская кривая, ее форма зависит от частот складывающихся колебаний и от разности их фаз $\Delta\varphi$.

1) Рассмотрим сначала случай одинаковых частот $\omega_1 = \omega_2$.

$$x = ACos\omega t, \quad y = BCos(\omega t + \varphi) \tag{4.3.13}$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Чтобы получить траекторию движения материальной точки, определяемую уравнениями (4.3.13), исключим из них время t. Из первого уравнения (4.3.13) имеем:

$$Cos\omega t = \frac{x}{A}, \quad Sin\omega t = \sqrt{1 - cos^2\,\omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

и подставим во второе уравнение для y, предварительно разложив косинус суммы углов:

$$y = B(Cos\omega t \cdot Cos\varphi - Sin\omega t \cdot Sin\varphi) = B\left(\frac{x}{A}Cos\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot Sin\varphi\right)$$

Преобразуем последнее равенство к виду:

$$\frac{x}{A}Cos\varphi - \frac{y}{B} = Sin\varphi\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

Возводя в квадрат, получаем окончательно:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}Cos\varphi = Sin^2\varphi \tag{4.3.14}$$

Это *уравнение эллипса*, оси которого произвольно ориентированы относительно осей x и y.

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.3.14) и определим для них траектории движения колеблющейся материальной точки.

А). Пусть разность фаз $\varphi = 0$, тогда для траектории колеблющегося тела получаем прямую линию, проходящую через начало координат (рис. 3.6 *а*)

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0, \quad y = \frac{B}{A}x, \tag{4.3.15}$$

Таким образом, получаем гармоническое колебание с амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Б). Пусть разность фаз $\varphi = \pm\pi$, тогда получаем тоже прямую линию и гармоническое колебание с той же амплитудой, но только прямая проходит через другие квадранты (рис. 3.6 *б*):

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0, \quad y = -\frac{B}{A}x \tag{4.3.16}$$

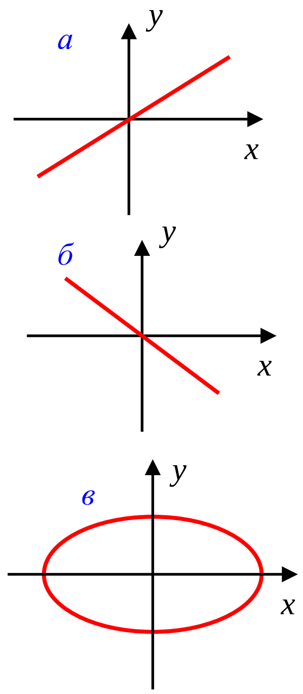

Рис. 3.6.

В). Рассмотрим разность фаз равную $\varphi = \pm\pi/2$, тогда получаем эллипс, ориентированный по осям x и y (рис. 3.6 *в*):

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1 \qquad (4.3.17)$$

При этом движение колеблющегося тела (траектория маятника) совершается по часовой стрелке при разности фаз $\varphi = \pi/2$, и против часовой стрелки при разности фаз $\varphi = -\pi/2$.

При тех же разностях фаз и одинаковых амплитудах складывающихся взаимно перпендикулярных колебаний получаем равномерное движение по окружности.

2) Рассмотрим разные частоты складывающихся взаимно перпендикулярных колебаний ω_1 и ω_2:

$$x(t)=ACos\omega_1 t$$
$$y(t)=BCos(\omega_2 t+\varphi)$$

А) Если частоты разные и их отношение не равно отношению целых чисел $\omega_1/\omega_2 \neq n/m$ (n,m – целые числа), то траектория результирующего колебания не является замкнутой кривой. Если при этом частоты ω_1 и ω_2 близки по величине $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| << \omega_1, \omega_2$, то траектория колебаний меняется постепенно. В самом деле, сложим следующие колебания:

$$x(t)=ACos\omega t$$
$$y(t)=BCos(\omega t+(\Delta\omega t+\varphi)), \qquad (4.3.18)$$

где разность фаз этих колебаний $\Delta\omega = (\Delta\omega t+\varphi)$ является медленно меняющейся величиной по сравнению с ω_1, ω_2. При этом разность фаз колебаний проходит с небольшой скоростью все возможные значения, и, следовательно, траектория результирующих колебаний не является замкнутой, она меняется непрерывным образом и проходит все те частные случаи, о которых говорилось в предыдущем пункте 1) этого параграфа.

Б) Если частоты ω_1 и ω_2 – кратны

$$\omega_1 = n\omega_2 \quad \text{или} \quad \omega_2 = n\omega_1,$$

где n – целое число, то получаем замкнутые фигуры траектории, которые носят название *фигур Лиссажу*.

Рассмотрим в качестве примера соотношение частот, равное $\omega_1/\omega_2 = ½$, то есть по оси y колебания происходят чаще в 2 раза, чем по оси x. На рисунках 3.7 приведены 2 траектории, соответствующие суммам перпендикулярных колебаний с разностями фаз $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 0$. При промежуточных разностях фаз складывающихся колебаний получаем замкнутые кривые, занимающие промежуточные траектории между этими двумя предельными случаями.

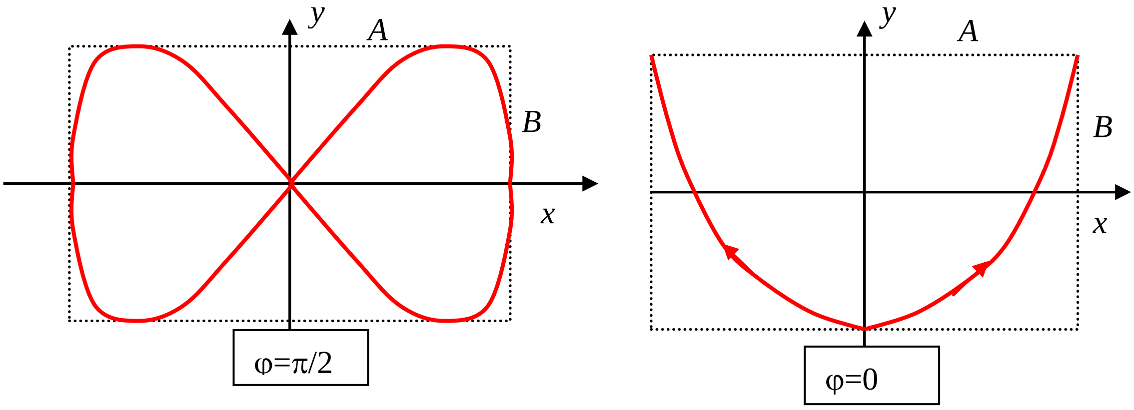

Рис. 3.7.

При других кратностях частот $\omega_1 = n\omega_2$ происходит движение по замкнутой траектории с многократными пересечениями осей в пределах пространства, ограниченного амплитудами A и B. Фигуры Лиссажу хорошо могут быть видны на осциллографе при подаче на вход x и y двух периодических сигналов, кратных по частоте.

Отметим, что в принципе замкнутые траектории получаются при любом рациональном отношении частот $\omega_1/\omega_2 = n/m$ (n,m – целые числа).

Примечание 1. *Жюль Антуан Лиссажу, французский физик, 1822–1880*

4.3.4. Разложение в спектр периодических функций.

Суммированием или, иначе, суперпозицией гармонических колебаний можно получить любую периодическую функцию времени. Верно и обратное, любое сложное колебание – периодическая функция времени – может быть разложено в ряд по гармоническим колебаниям различных частот. Такое разложение называется разложением в *ряд Фурье* и оно определяет *спектр сложного колебания*.

Если имеем дело с непериодической функцией времени, то оказывается, что и она может быть представлена в виде интеграла по периодическим функциям. Такое разложение называется разложением в *интеграл Фурье*. Возможность разложения в ряд Фурье или интеграл Фурье есть следствие общей математической теоремы о разложении любой функции в ряд или интеграл по полному набору ортонормированных функций.

Например, рассмотрим периодический сигнал, состоящий из прямоугольных импульсов (рис. 3.8), с периодом $T = 2\tau$. Разложение для подобного колебания выглядит следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Cos\omega nt + b_n Sin\omega nt\right) \qquad (4.3.19)$$

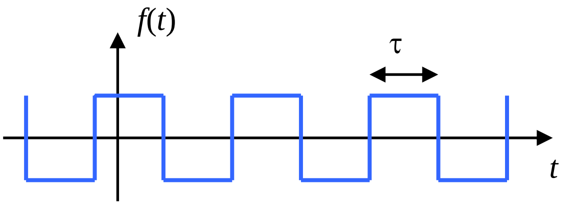

Рис. 3.8.

Здесь $\omega = 2\pi/T$, а a_n и b_n – амплитуды слагаемых гармонических колебаний, которые определяются как интегралы:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad (4.3.20)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) Cos\, n\omega t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) Sin\, n\omega t\, dt \qquad (4.3.21)$$

Из интегралов (4.3.21) - (4.3.22) получаем амплитуды a_n и b_n колебаний с соответствующими частотами $n\omega$. При этом говорят, что совокупность значений a_n и b_n составляет *спектр данного колебания* или сигнала. Для периодического сигнала спектр дискретный, кратный частоте ω.

Аналогичным образом получается спектр для непериодической функции времени. Только вместо бесконечного ряда Фурье (4.3.19) записывается интеграл Фурье по частоте, при этом амплитуды $a(\omega)$ и $b(\omega)$ являются непрерывными функциями частоты. Таким образом получаем непрерывный характер спектра разложения.