## 4.4. Затухающие колебания.

4.4.1. Уравнение и общее решение уравнения затухающих колебаний.

До сих пор рассматривали собственные колебания без воздействия внешних сил, поэтому это были незатухающие колебания, так как амплитуда и, следовательно, полная энергия колебаний не менялись. Однако в реальности амплитуда и энергия колебаний уменьшаются, так как существует трение (или сопротивление), на преодоление которого затрачивается работа, и колебания без внешней силы, поддерживающей эти колебания, затухают. Такие колебания называются затухающими.

Напишем уравнение движения при наличии силы трения. Наиболее распространенный вид трения, когда сила трения пропорциональна скорости движения $F_{тр} \sim v = \dot{x}$ (в этом случае иногда говорят о наличии жидкого трения). Итак, из 2-го закона Ньютона для одномерного движения имеем следующее уравнение движения:

$$m\ddot{x} = F_{упр} + F_{тр} = -kx - r\dot{x} \tag{4.4.1}$$

где $r$ – коэффициент сопротивления или трения, а сила упругости как обычно равна $F_{упр} = -kx$. Перенося все слагаемые в одну сторону и разделив уравнение (4.4.1) на массу тела, получаем *уравнение затухающих колебаний*:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.4.2}$$

где ввели следующие обозначения: квадрат собственной частоты колебаний, как и ранее:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{4.4.3}$$

и *коэффициент затухания* $\gamma$:

$$\gamma = \frac{r}{2m}. \tag{4.4.4}$$

Как и ранее ищем решение уравнения (4.4.2) в виде: $x = e^{\lambda t}$. Вычислим первые и вторые производные по времени $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ и $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, подставим их в уравнение (4.4.2) и получим *характеристическое уравнение* для определения постоянной $\lambda$:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{4.4.5}$$

Находим корни уравнения (4.4.5), которые равны:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{4.4.6}$$

Будем пока считать, что затухание мало (иначе вообще не будет колебаний, как мы увидим далее), т.е. $\gamma < \omega_0$, и введем частоту $\omega_1$ – *частоту затухающих колебаний*:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{4.4.7}$$

Тогда корни характеристического уравнения записываются:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega_1 \tag{4.4.8}$$

Общее решение записываем, как и ранее, в виде:

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\gamma - i\omega_1)t} = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right) \tag{4.4.9}$$

Выражение в скобках (4.4.9), как и в § 4.1, можно представить в виде косинуса или синуса:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}Cos(\omega_1 t + \alpha) \tag{4.4.10}$$

Уравнение (4.4.10) представляет собой общее решение уравнения затухающих колебаний. Здесь, как и ранее, $\alpha$ – начальная фаза, $A$ – начальная амплитуда, которые определяются из начальных условий. Решение (4.4.10) можно также представить в комплексной форме.

4.4.2. Свойства и характеристики затухающих колебаний.

В общем решении (4.4.10), когда $\omega_1$ вещественно, присутствует “гармонический” множитель $Cos(\omega_1 t + \alpha)$, но при этом полное колебание не является периодическим и гармоническим. Это связано с тем, что имеется *затухающая амплитуда*:

$$A(t) = A \cdot exp(-\gamma t) \tag{4.4.11}$$

Скорость затухания колебаний определяется коэффициентом затухания $\gamma$. Коэффициент затухания $\gamma = r/2m$ иногда называют *декрементом затухания*, а определяемую (4.4.7) частоту $\omega_1$ – *частотой затухающих колебаний*. Период затухающих колебаний равен соответственно:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (4.4.12)$$

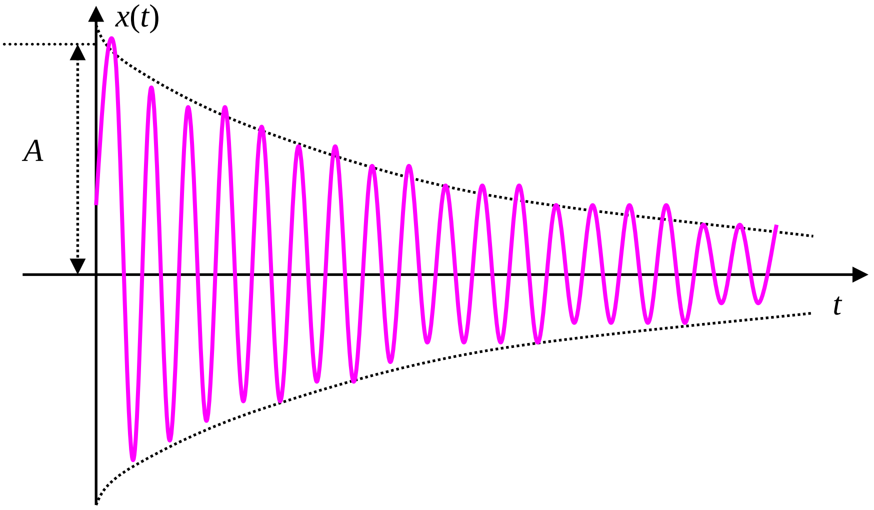


Рис. 4.1.

Пример затухающего колебания показан на рисунке 4.1.

Отметим один интересный момент в затухающих колебаниях в отличие от гармонических: достигаемый в затухающих колебаниях максимум смещения не совпадает со значением амплитуды в этот момент времени (которая падает по экспоненте), что можно увидеть из рисунка 4.2.

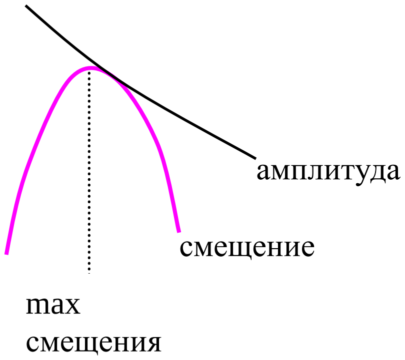


Рис. 4.2.

Часто декрементом затухания называют отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимися на период:

$$D = e^{\gamma T} = \frac{A(t)}{A(t+T)} \quad (4.4.13)$$

Амплитуда колебаний уменьшается в $e$ раз за время

$$\tau = 1/\gamma, \quad (4.4.14)$$

Это время $\tau$ называется *временем затухания*. *Логарифмический декремент затухания* $\lambda$ определяется как логарифм отношения амплитуд за период:

$$\lambda = \gamma T = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} \quad (4.4.15)$$

За время затухания $\tau$ амплитуда падает в $e$ раз, и система успевает совершить за это время

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\lambda} \quad (4.4.16)$$

колебаний. Тогда логарифм отношения амплитуд

$$ln\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = ln\, e = 1 = \gamma\tau = \frac{\lambda}{T}\tau = \lambda N_e$$

$$\lambda = \frac{1}{N_e} \quad (4.4.17)$$

Откуда получаем, что логарифмический декремент затухания есть величина обратная числу колебаний $N_e$, за которое амплитуда падает в $e$ раз. Это дает наглядное представление о логарифмическом декременте затухания. Пусть $\lambda = 0.01$, тогда колебания примерно затухают через 100 колебаний, т.е. их амплитуда упадет в $e$ раз после такого количества колебаний. Иногда вводят понятие *добротности* колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\gamma T} = \pi N_e \quad (4.4.18)$$

Добротность обратно пропорциональна скорости затухания собственных колебаний в системе. Чем выше добротность колебательной системы, тем меньше потери энергии за каждый период и тем медленнее затухают колебания.

Все эти выше рассмотренные параметры характеризуют колебательную систему.

4.4.3. Апериодические колебания.

До сих пор рассматривали случаи, когда $\gamma^2 < \omega_0^2$. Однако, при увеличении трения период колебаний увеличивается, а при достаточно большом трении движение вообще перестает быть колебательным. Условие для прекращения колебаний есть равенство: $\gamma = \omega_0$. Последнее соотношение при учете (4.4.3) и (4.4.4) приводит к условию для коэффициента сопротивления, при котором колебания прекращаются:

$$r = 2\sqrt{km} \tag{4.4.19}$$

При $\gamma > \omega_0$ решение уравнения (4.4.2) имеет другой вид. В самом деле, теперь имеем:

$$\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \pm i\delta \quad \text{или} \quad \delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{4.4.20}$$

и общее решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma-\delta)t} + C_2 e^{(-\gamma+\delta)t} = C_1 e^{-(\gamma+\delta)t} + C_2 e^{(\delta-\gamma)t} \tag{4.4.21}$$

Примеры решений (4.4.21) при различных коэффициентах $C_1$ и $C_2$ представлены на рисунках 4.3 (*А*, *Б*, *В*).

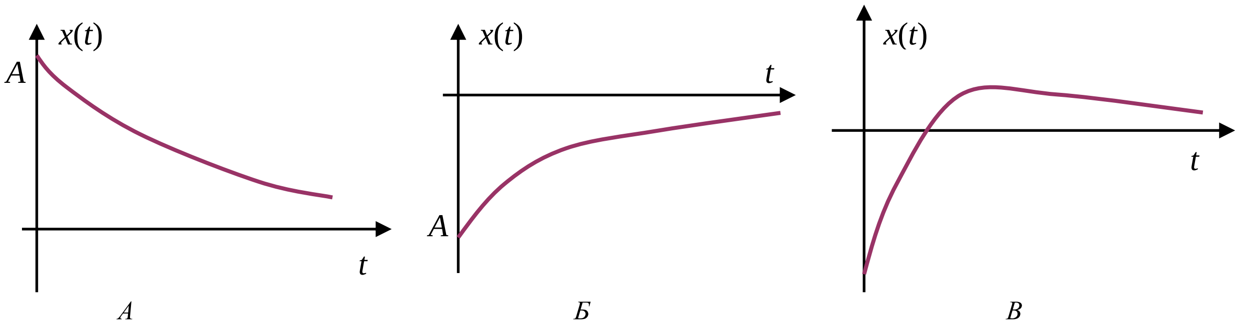


Рис. 4.3.

Решение имеет затухающий характер, колебаний не происходит. Максимум, чего может достичь такая система, – это однократное прохождение через начальное положение равновесия.