4.5. Вынужденные колебания.

4.5.1. Полное решение уравнения вынужденных колебаний.

Наряду с трением колебательная система – *линейный осциллятор* – может подвергаться воздействию внешней силы $F(t)$. Пусть внешняя сила $F(t)$ действует в направлении оси x. Тогда уравнение Ньютона записывается:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F(t) \tag{4.5.1}$$

Характер движения изменяется в зависимости от особенностей действующей силы.

Рассмотрим наиболее важный случай, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 Cos\omega t \tag{4.5.2}$$

где F_0 – амплитуда силы, ω – частота вынуждающей силы. Колебания, совершаемые системой под действием внешней периодической силы, называются *вынужденными*, а уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} Cos\omega t = f_0 Cos\omega t, \tag{4.5.3}$$

где $f_0 \equiv F_0/m$. Получили неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Как решить это уравнение? В курсе математики доказывается теорема, что решение неоднородного дифференциального уравнения есть *сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения*.

Однородное уравнение, имеющее вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.5.4}$$

мы уже решали в § 4.4 (см уравнения (4.4.2) – (4.4.10)) и получили его общее решение в виде (4.4.10). Оно, как и ранее, описывает затухающие собственные колебания системы.

При учете воздействия внешней силы $F(t) = F_0 Cos\omega t$, логично предположить, что система будет также испытывать колебательное движение с частотой вынуждающей силы. Поэтому частное решение неоднородного уравнения (4.5.3) ищем в виде

$$x(t) = ACos(\omega t - \varphi) \tag{4.5.5}$$

где ω – частота вынуждающей силы, A – амплитуда, φ – начальная фаза этих колебаний. Теперь задача состоит в том, чтобы определить параметры A и φ. Подставим (4.5.5) в уравнение (4.5.3), сосчитав производные:

$$\dot{x} = -A\omega Sin(\omega t - \varphi), \qquad \ddot{x} = -A\omega^2 Cos(\omega t - \varphi)$$

$$-A\omega^2 Cos(\omega t - \varphi) - 2\gamma A\omega Sin(\omega t - \varphi) + A\omega_0^2 Cos(\omega t - \varphi) = f_0 Cos\omega t \tag{4.5.6}$$

Преобразуем правую часть уравнения (4.5.6) и приведем ее к сумме членов с $Cos(\omega t - \varphi)$ и $Sin(\omega t - \varphi)$:

$$Cos\omega t = Cos(\omega t - \varphi + \varphi) = Cos(\omega t - \varphi)Cos\varphi - Sin(\omega t - \varphi)Sin\varphi \tag{4.5.7}$$

Подставим соотношение (4.5.7) в уравнение (4.5.6) и учтем, что полученное равенство должно быть справедливо в любой момент времени t. Функции $Cos(\omega t - \varphi)$ и $Sin(\omega t - \varphi)$ имеют разную зависимость от времени (или, как говорят, они независимы). Например, в момент времени, когда косинус равен нулю, синус равен единице. Это означает, что коэффициенты при слагаемых с $Cos(\omega t - \varphi)$ и $Sin(\omega t - \varphi)$ в правой и левой частях уравнения должны быть равны друг другу отдельно. Тогда получаем следующую систему уравнений для определения неизвестных параметров A и φ:

$$\begin{cases} -A\omega^2 + A\omega_0^2 = f_0 Cos\varphi \\ 2\gamma A\omega = f_0 Sin\varphi \end{cases} \tag{4.5.8}$$

Делим второе уравнение в (4.5.8) на первое и определяем начальную фазу φ:

$$tg\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{4.5.9}$$

Возводим первое и второе уравнения (4.5.8) в квадрат и затем сложим:

$$f_0^2 = A^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2 A^2 \omega^2$$

Откуда находим амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \tag{4.5.10}$$

После того, как определили коэффициенты частного решения, можно записать полное решение уравнения вынужденных колебаний (4.5.3) как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} Cos(\omega_1 t + \alpha) + \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} Cos\left(\omega t - arctg\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{4.5.11}$$

где A_0 и α произвольные постоянные, значения которых находятся из начальных условий так же, как это было в §§ 4.2, 4.4.

4.5.2. Переходной режим и установившиеся колебания.

Анализируя решение (4.5.11), можно ввести два временных отрезка при рассмотрении колебаний системы. *Переходной режим* – процесс установления колебаний, при котором первое слагаемое дает еще существенный вклад в решение $x(t)$. При больших временах t от момента начала колебаний имеем дело с *установившимися колебаниями*. В самом деле, при $t \to \infty$ первое слагаемое в (4.5.11) обращается в 0 и сохраняется только "гармоническое" колебание с частотой вынуждающей силы. Это колебание можно считать гармоническим, если можно пренебречь начальным периодом по сравнению с продолжительностью установившихся колебаний. Причем это установившееся колебание не зависит от начальных условий. Типичный пример установления колебаний изображен на рисунке 5.1, где показано возникновение колебаний под действием внешней силы при условии, что в начальный момент колебания отсутствовали.

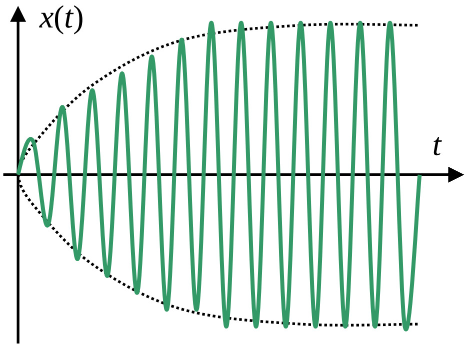

Рис. 5.1.

Отметим, что до установления колебаний нельзя говорить об определенной частоте этих колебаний. Продолжительность переходного периода определяется временем затухания собственных колебаний:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \tag{4.5.12}$$

Установившиеся вынужденные колебания – колебания при достаточно больших временах t, когда собственные колебания в системе затухают $exp(-\gamma t) \to 0$. Тогда получаем решение в виде:

$$x(t) = ACos(\omega t - \varphi), \tag{4.5.13а}$$

где амплитуда и фаза определяются соотношениями:

$$tg\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \tag{4.5.13б}$$

В итоге в установившемся режиме $t >> \tau$ получаем гармоническое колебание с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

4.5.3. Амплитудно-частотная характеристика. Резонанс.

Проанализируем зависимость амплитуды вынужденных колебаний A от частоты вынуждающей силы. Кривая, описывающая зависимость амплитуды A вынужденных установившихся колебаний от частоты внешней силы, называется *амплитудно-частотной характеристикой*. На рис. 5.2 представлен ряд амплитудно-частотных характеристик при различных значениях коэффициента затухания γ.

При некоторой частоте амплитуда вынужденных колебаний (4.5.10) достигает максимума. Явление, при котором амплитуда колебаний резко возрастает, называется – *явление резонанса*. Максимум амплитуды (4.5.10) определяется минимумом знаменателя. Для определения резонансной частоты ω_r вычисляем производную знаменателя по частоте ω и приравниваем ее 0:

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right]=0 \tag{4.5.14}$$

$$2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left(-2\omega\right)+8\gamma^2\omega=0$$

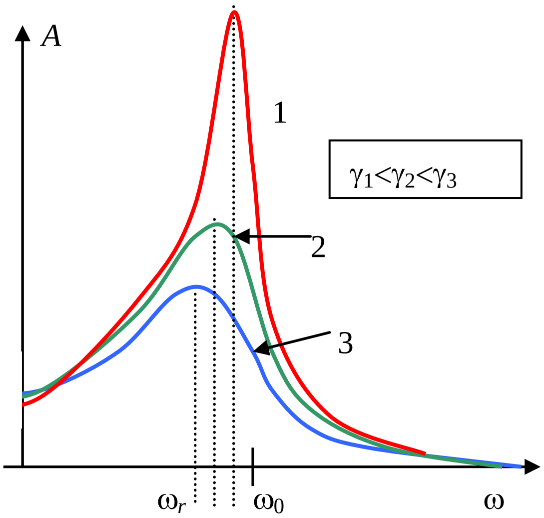

Рис. 5.2.

Отсюда при вычислении ($\omega \neq 0$) получаем *резонансную частоту*, при которой амплитуда достигает максимального значения:

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2} \tag{4.5.15}$$

Рассчитаем амплитуду колебаний в максимуме:

$$A(\omega_r)=\frac{F_0/m}{\sqrt{4\gamma^4+4\gamma^2\left(\omega_0^2-2\gamma^2\right)}}=
=\frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}=\frac{F_0/m}{2\gamma\omega_1} \tag{4.5.16}$$

Итак, получаем, чем меньше коэффициент затухания γ, тем ближе резонансная частота ω_r к частоте собственных колебаний ω_0, тем выше значение амплитуды в максимуме. На рисунке 5.2 изображены резонансные кривые при различных значениях коэффициент затухания γ. Из рисунка можно определить как с уменьшением коэффициента затухания γ резонансная кривая становится более узкой, а величина максимума амплитуды выше. В принципе в системе без затухания ($\gamma = 0$) резонансная частота совпадает с собственной частотой колебаний ω_0 (при этом тоже $\omega_1 \to \omega_0$), а амплитуда колебаний в резонансе стремится к бесконечности.

Производная по времени от смещения (4.5.13) определяет колебания скорости линейного осциллятора. Скорость при некоторой частоте также достигает максимума – *резонанс скорости*. Колебания скорости определяются уравнением

$$v=\dot{x}(t)=-\frac{\omega\cdot F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}Sin\left(\omega t-arctg\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \tag{4.5.17}$$

Найдем максимум амплитуды скорости. Для этого разделим числитель и знаменатель амплитуды на частоту и тогда видно, что максимум достигается при минимуме знаменателя следующего выражения:

$$\frac{\omega F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}=\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2+4\gamma^2}}$$

Таким образом, *резонансная частота скорости* совпадает с частотой собственных колебаний:

$$\omega_{r,v}=\omega_0 \tag{4.5.18}$$

Вернемся к амплитудно-частотной характеристике. Энергия колебаний E пропорциональна квадрату амплитуды A^2. Возведем (4.5.10) в квадрат и перейдем к записи амплитуды через резонансную частоту ω_r:

$$A^2=\frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}=\frac{F_0^2/m^2}{\omega^4-2\omega^2\left(\omega_0^2-2\gamma^2\right)+\omega_0^4}=\frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega^2-\omega_r^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2-4\gamma^4}$$

Получаем выражение для квадрата амплитуды, описывающее поведение энергии линейного осциллятора в окрестности резонанса, поскольку энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Такую зависимость энергии в окрестности резонанса называют *резонансным контуром* или *контуром Лоренца*:

$$A^2 = \frac{F_0^2 / m^2}{\left(\omega^2 - \omega_r^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2} \qquad (4.5.19)$$

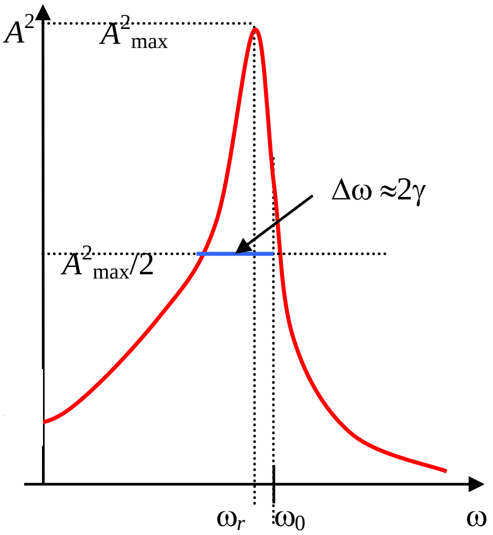

Рис. 5.3.

Графически зависимость квадрата амплитуды от частоты внешней силы изображена на рис. 5.3. При $\omega_0 >> \gamma$ (малое затухание) можно положить $\omega_r = \omega_0$:

$$A^2 = \frac{F_0^2 / m^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \qquad (4.5.20)$$

Рассмотрим ширину контура резонанса по частоте $\Delta\omega$. *Ширина резонанса* определяется на полувысоте резонанса для квадрата амплитуды A^2:

$$\frac{F_0^2 / m^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_0^2 / m^2}{4\gamma^2\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)}$$

Решение этого уравнения определяются после простых алгебраических преобразований:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm 2\gamma\omega_1 = \omega_r^2 \pm 2\gamma\omega_1$$

$$\omega_{лев}^2 = \omega_r^2 - 2\gamma\omega_1, \quad \omega_{пр}^2 = \omega_r^2 + 2\gamma\omega_1 \qquad (4.5.21)$$

Вычитая первое соотношение из второго в (4.5.21), имеем:

$$\omega_{пр}^2 - \omega_{лев}^2 = 4\gamma\omega_1$$

Наиболее важный случай, когда $\omega_0 >> \gamma$, тогда получаем ширину, равную:

$$\omega_{пр}^2 - \omega_{лев}^2 = \left(\omega_{пр} - \omega_{лев}\right)\left(\omega_{пр} + \omega_{лев}\right) \approx 2\omega_1\Delta\omega = 4\gamma\omega_1$$

$$\Delta\omega = 2\gamma \qquad (4.5.22)$$

где $\Delta\omega$ – ширина резонанса, определяемая на полувысоте резонанса (см рис. 5.3). Видно, что ширина резонанса непосредственно связана с коэффициентом затухания. Чем больше γ, тем шире резонансный контур и менее выражено резонансное поведение. Кстати, отношение частоты к ширине резонанса непосредственно связано с добротностью колебательного контура

$$\frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\gamma T} = Q \qquad (4.5.23)$$

где T – период вынужденных колебаний.

4.5.4. <u>Фазово-частотная характеристика</u>.

Уравнение для фазы (4.5.9) описывает соотношение фазы колебаний и фазы вынуждающей силы. Поскольку вынуждающая сила изменяется во времени по закону $F_0 Cos\omega t$, а фаза в решении для установившихся колебаний берется со знаком минус: “-φ”, то отсюда следует следующее.

Если $\varphi > 0$, получаем, что колебание системы запаздывает относительно колебания силы.

Если $\varphi < 0$, получаем, что система колеблется с опережением относительно колебания силы.

Построим кривую зависимости $tg\varphi = 2\gamma\omega / \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$

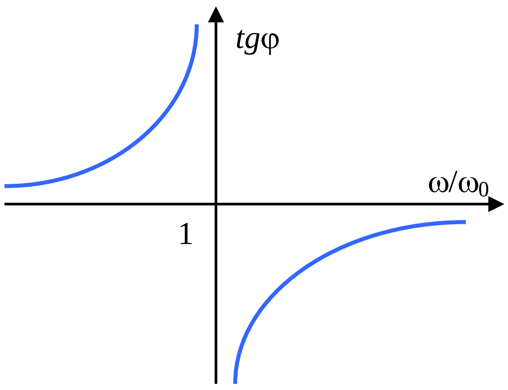

Рис. 5.4.

от частоты внешней силы. Для этого рассмотрим значения тангенса в предельных случаях:

$$\omega << \omega_0 \qquad tg\varphi \to +0$$
$$\omega \to \omega_0 - 0 \qquad tg\varphi \to +\infty$$
$$\omega \to \omega_0 + 0 \qquad tg\varphi \to -\infty$$
$$\omega >> \omega_0 \qquad tg\varphi \to -0$$

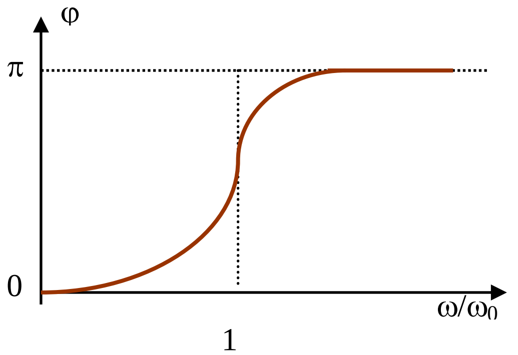

Рис. 5.5.

Эта примерная зависимость показана на рис. 5.4. Видно, что получаем разрыв тангенса фазы при $\omega = \omega_0$.

Если построить поведение самой фазы, то получаем изменение этой фазы на «пи» в области резонанса (рис. 5.5). Отметим, что скачок фазы на π – это характерная особенность прохождения области резонанса: всегда, когда в поведении фазы происходит изменение на «пи», это означает, что система (осциллятор) проходит область частот $\omega \sim \omega_0$, где наблюдается резонанс.

Часто откладывают фазу со знаком минус – «-φ» (см рис. 5.6), поскольку в решение (4.5.13а) она входит тоже со знаком “минус”. При малых частотах колебания происходят в фазе с вынуждающей силой ($\varphi = 0$), при больших частотах вынуждающей силы – колебания системы происходят в противофазе ($\varphi = \pi$) с колебаниями силы. При частоте близкой к частоте резонанса $\omega \approx \omega_0$ имеем скачок тангенса и, соответственно, фазы на π.

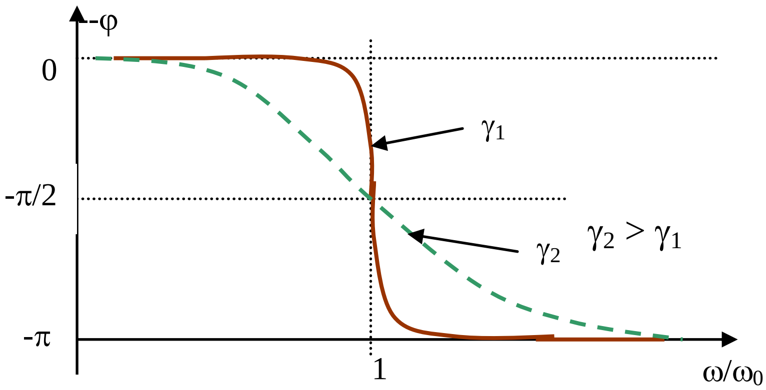

Рис. 5.6.

Как получали ранее, ширина резонанса $\Delta\omega$ зависит от коэффициента затухания γ, поэтому область «скачка» фазы на π также зависит от коэффициент затухания γ. Как показано на рис. 5.6, чем больше затухание γ, тем более широкая и плавная область перехода фазы.