# 4.6. Автоколебания. Параметрические колебания.

4.6.1. Автоколебания.

Потеря энергии собственных колебаний приводит к затуханию. Можно использовать гармоническую подпитку энергией с помощью вынужденных колебаний. Но можно создать такое устройство, когда осциллятор сам регулирует подвод энергии, чтобы компенсировать ее потерю на трение. За период колебаний из внешнего источника энергия, приобретаемая осциллятором, равна энергии, затрачиваемой на преодоление сил трения. Отсюда, осциллятор совершает незатухающие колебания. Такие самоподдерживающиеся колебания называются *автоколебаниями*.

При малом трении автоколебания с большой точностью являются гармоническими и их частота очень близка к частоте собственных колебаний.

При большом трении за период подводится значительная часть полной энергии осциллятора, и поэтому колебания сильно отличаются от гармонических – период этих колебаний не совпадает с периодом собственных колебаний.

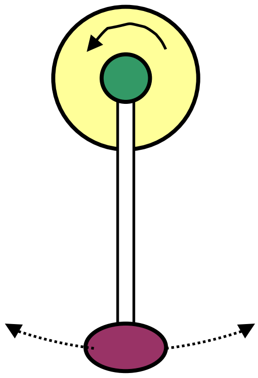

Рис. 6.1.

Рассмотрим несколько примеров автоколебаний.

1) Автоколебания маятника. Маятник со стержнем, подвешенный на оси во вращающейся втулке. Втулка вращается с постоянной угловой скоростью и передает часть энергии оси маятника за счет трения между осью и втулкой. Трение зависит от относительной скорости втулки и оси маятника: когда движение оси (маятника) происходит по направлению вращения втулки, то трение меньше и часть энергии передается в движение маятника; когда движение маятника против вращения втулки, то трение больше и движение замедляется. Полный результат за период зависит от характера зависимости сил трения от скорости относительного движения. Если трение не зависит от относительной скорости, то поддержки колебаний не происходит. Если трение растет со скоростью, то усиливается затухание. Если трение падает со скоростью, то амплитуда колебаний увеличивается. Установившиеся колебания получаются тогда, когда сила трения о воздух компенсирует переданную энергию.
2) Колебания маятника в часах (”ходики”) поддерживаются ”гирей”, при этом происходит работа поля тяжести, или пружиной – работа сил упругости сжатой пружины.
3) В некоторых электрических колебаниях при уменьшении амплитуды автоматически включается электрическая подпитка – подсоединение к источнику тока или напряжения.

*Релаксационные колебания* – изменения в системе накапливаются постепенно, затем резко изменяется состояние системы, возвращающее ее к начальному состоянию, затем снова происходит постепенное

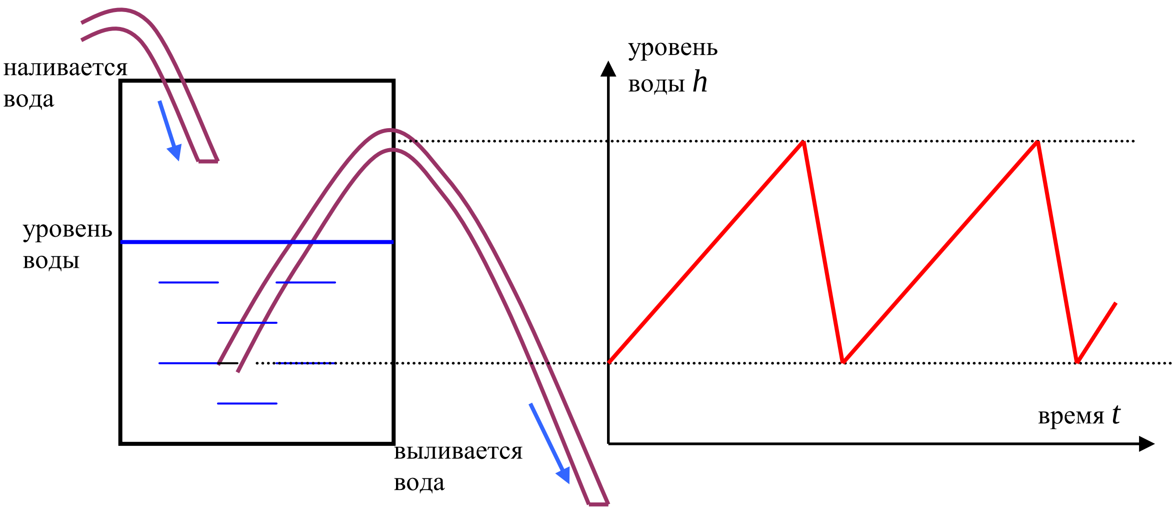


Рис. 6.2.

накопление изменений до момента нового “срыва” и так далее. Примеры такой системы – сифон (см рис.6.2), гейзер.

4.6.2. Параметрическое возбуждение колебаний.

Характеристики или свойства колебательных систем описываются величинами, называемыми *параметрами*. Так, математический маятник характеризуется одним параметром - длиной. Если изменять какой-либо параметр в определенном такте с колебаниями, то можно сообщить маятнику энергию и тем самым поддерживать колебания в незатухающем режиме. Такое возбуждение и поддержание колебаний называется *параметрическим*.

Примеры:

1) Качели. Колебания поддерживаются мускульной силой, изменяющей центр тяжести системы.
2) Маятник на нити, длину которой меняют в такт с колебаниями.

4.6.3. Колебания связанных систем.

Колебания могут быть со многими степенями свободы (даже простой маятник может совершать колебания по осям $x$ и $y$). *Связанная система* – система со многими степенями свободы, между которыми имеются связи, обеспечивающие возможность обмена энергией между различными степенями свободы.

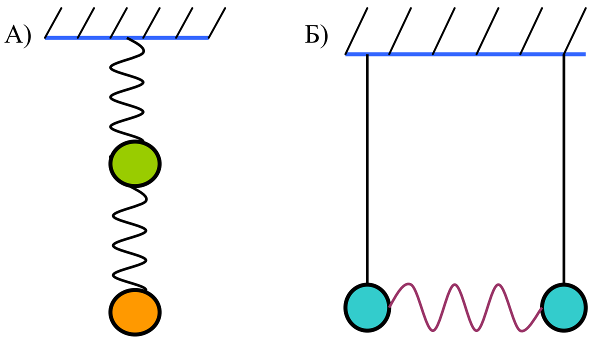


Рис. 6.3.

Примеры колебательных систем со многими степенями свободы представлены на рисунке 6.3. Так в случае Б система имеет 4 степени свободы. Несмотря на сложность комбинированного движения связанных систем (двух связанных маятников Б на рис. 6.3) его всегда можно разложить на простейшие колебания, которые служат своеобразными ортами в пространстве колебаний и носят название *нормальных колебаний*. Число нормальных частот равно числу степеней свободы. Так, например, движение системы Б (см также рис. 6.4 и 6.5) с 4-мя степенями свободы раскладывается на 4 независимых колебания со своими частотами.

Сначала рассмотрим движение шаров в плоскости перпендикулярной к плоскости рисунка (см вид на систему сверху на рисунке 6.4). Отклонения шара 1 (зеленая стрелка) и шара 2 (синяя стрелка) можно рассматривать как сумму 2х нормальных колебаний системы. А именно, система как целое отклоняется на смещение “*б*” (оба как целое колеблются с частотой $\omega_1$) и колебания шаров в разные стороны относительно центра масс системы “*а*” (с частотой $\omega_2$) на один и тот же угол. Естественно, что суммы *а* и *б* дают для каждого шара в отдельности их смещения относительно положения равновесия.

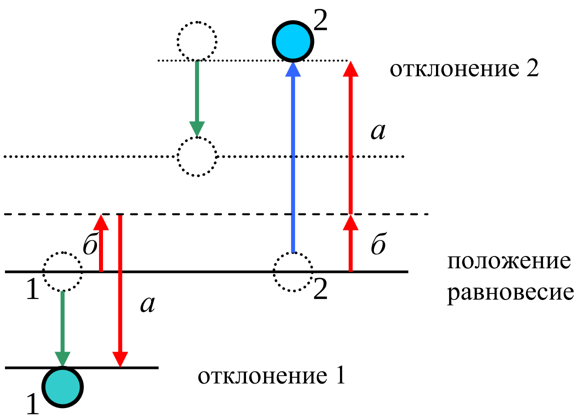


Рис. 6.4.

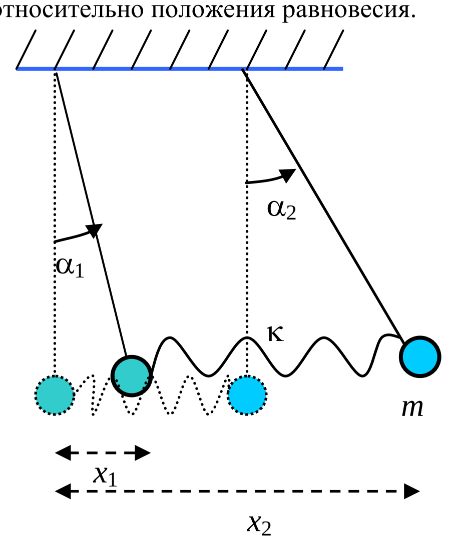


Рис. 6.5.

Аналогично можно рассмотреть колебания системы Б) в плоскости рисунка (см рисунок 6.5). Также имеем колебания вместе двух шаров как целой системы с частотой $\omega_3$ и отклонения шаров в разные друг от друга стороны на одинаковые углы с частотой $\omega_4$.

В принципе существует способ нахождения нормальных частот системы, однако, часто это довольно сложно. В качестве примера рассмотрим для последнего случая колебаний, как находятся частоты $\omega_3$ и $\omega_4$. Пусть шарики имеют одинаковую массу $m$, $\kappa$ – жесткость пружины, а координаты шаров $x_1$ и $x_2$ отсчитываются от положения равновесия левого шара. Тогда, исходя из результатов параграфов 4.1 и 4.2 для пружинного и математического маятников, уравнения движения записываются:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{g}{l}x_1 + \frac{\kappa}{m}(x_2 - x_1)\\ \ddot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_2 - \frac{\kappa}{m}(x_2 - x_1)\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Сложим эти два уравнения и вычтем:

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\frac{g}{l}(x_1 + x_2)$$

$$(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -\frac{g}{l}(x_2 - x_1) - \frac{2\kappa}{m}(x_2 - x_1)$$

Рассматривая сумму координат и разность как две новых переменных, получаем уравнения колебаний:

$$\begin{aligned}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_1^2(x_1 + x_2) = 0\\ (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + \omega_2^2(x_2 - x_1) = 0\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

с частотами соответственно равными:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\kappa}{m}} \tag{4.6.3}$$

Тогда решения уравнений (4.6.2) записываются:

$$\begin{aligned}x_2 + x_1 &= A_0 Sin(\omega_1 t + \varphi_1)\\ x_2 - x_1 &= B_0 Sin(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

Эти решения и частоты совпадают с нормальными колебаниями сложного маятника в плоскости рисунка.