4.7. Распространение колебаний. Волны.

4.7.1. Плоские волны.

Рассмотрим гармоническое колебание точки:

$$\xi(t) = A_0 Cos(\omega t + \alpha) \tag{4.7.1}$$

Пусть для простоты колебания происходят в среде, в которой за счет связи между точками среды могут распространяться колебания. Для начала рассматриваем колебания в точке с координатами ($x = y = z = 0$), затем пусть эти колебания распространяются со скоростью v вдоль оси x. Тогда эта же фаза колебаний, которая была в начале координат, достигнет точки с координатами (x, $y = z = 0$) через время $t = x/v$, то есть фаза колебаний на расстоянии x от точки возникновения колебаний запаздывает на это время t. Тогда колебания в точке x записываются

$$\xi(x,t) = ACos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right] \tag{4.7.2}$$

Это и есть уравнение *плоской волны*, распространяющейся вдоль оси x. Название “плоская” происходит из-за того, что получаем одно и то же значение “смещения” $\xi(t)$ в плоскости (y, z), или постоянство фазы в этой плоскости. Скорость v – *фазовая скорость* волны вдоль оси x. Это скорость распространения постоянной фазы. Вводят *волновое число*

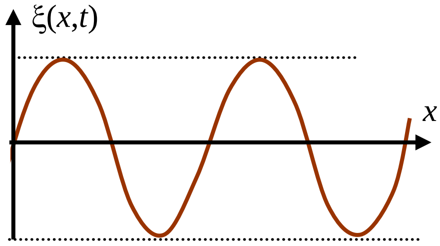

Рис. 7.1.

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{4.7.3}$$

Тогда уравнение плоской волны можно записать:

$$\xi(x,t) = ACos(\omega t - kx + \alpha) \tag{4.7.4}$$

Часто начальную фазу опускают ($\alpha = 0$), поскольку всегда можно изменить начало отсчета. На рис. 7.1 показано распределение “смещения” $\xi(x,t)$ по координате x в определенный момент времени t. Если в среде затухания нет, то амплитуда колебаний во всех точках x и, как показано на рис. 7.1 в любой момент времени t, не меняется.

Пусть волна распространяется вдоль произвольного направления с фазовой скоростью $\vec{v}$. Если волна плоская (см рис. 7.2 и 7.3), то фазовые скорости вдоль осей x, y, z определяются следующим образом

$$v_x = \frac{v}{Cos\alpha}, \quad v_y = \frac{v}{Cos\beta}, \quad v_z = \frac{v}{Cos\gamma} \tag{4.7.5}$$

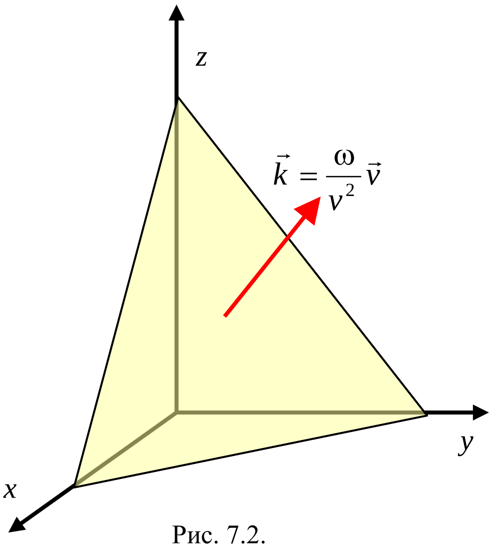

Рис. 7.2.

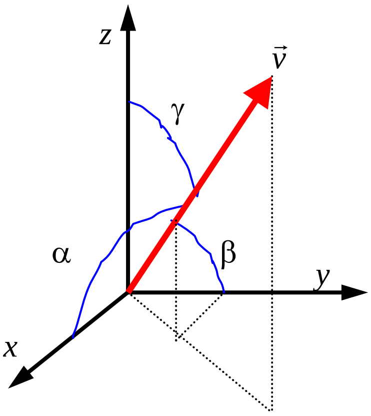

Рис. 7.3.

где углы α, β, γ – углы, образуемые вектором скорости относительно осей x, y, z соответственно. Рассматривая колебания в точке с координатами (x, y, z) получаем следующее уравнение, описывающее распространение плоской волны:

$$\xi(\vec{r},t) = ACos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v_x} - \frac{y}{v_y} - \frac{z}{v_z}\right)\right] = ACos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}\left(xCos\alpha + yCos\beta + zCos\gamma\right)\right] = \tag{4.7.6}$$
$$= ACos(\omega t - xkCos\alpha - ykCos\beta - zkCos\gamma) = ACos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = ACos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Здесь введен *волновой вектор* $\vec{k}$, направление которого совпадает с направлением распространения волны (перпендикулярно к фронту волны) и по модулю равный волновому числу

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v} \tag{4.7.7}$$

Можно еще ввести начальную фазу волны α, тогда общий вид плоской волны запишется:

$$\xi(\vec{r},t) = ACos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \tag{4.7.8}$$

Если источник колебаний точечный, или имеет сферическую симметрию, то волна распространяется в изотропном пространстве в радиальном направлении, т.е. вектор $\vec{k}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{r}$ и $\vec{k}\vec{r} = kr$. Причем в изотропном пространстве на сфере любого радиуса значения фазы и амплитуды имеют одинаковые значения. Однако сама амплитуда волны изменяется с расстоянием от источника r. В самом деле, если потерь в среде нет, то энергия распространяющихся колебаний (пропорциональная квадрату амплитуды) распределяется по площади сферы с возрастающим радиусом:

$$E \sim |A(r)|^2 \cdot 4\pi r^2 = const \tag{4.7.9}$$

Следовательно, амплитуда распространяющихся колебаний падает с радиусом обратно пропорционально ему $A(r) \sim 1/r$ и тогда уравнение, описывающее такую волну, запишется:

$$\xi(\vec{r},t) = \frac{A_0}{r} Cos(\omega t - kr + \alpha) \tag{4.7.10}$$

Такая волна носит название *сферической волны*. Такая волна имеет одну и ту же фазу колебаний на сфере радиуса r.

4.7.2. Волновое уравнение и волны.

Чтобы изучать распространение волн, необходимо получить соответствующее уравнение, решения которого описывало бы все многообразие волновых процессов. Вопрос о выводе такого уравнения, в основном, отложим до изучения электромагнитных волн. В этом параграфе только поясним, как можно было бы догадаться о его виде, исходя из уравнения плоской волны.

Продифференцируем дважды по времени и по всем координатам уравнение плоской волны (4.7.8):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 Cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -\omega^2\xi \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -Ak_x^2 Cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_x^2\xi \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -Ak_y^2 Cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_y^2\xi \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -Ak_z^2 Cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_z^2\xi \end{cases} \tag{4.7.11}$$

Сложим координатные производные:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} \equiv \Delta\xi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2\xi \tag{4.7.12}$$

Здесь мы ввели *оператор Лапласа*

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} \equiv \Delta\xi \tag{4.7.13}$$

Из (4.7.7) видим, что $k^2 = \omega^2 / v^2$, и тогда, пользуясь уравнениями (4.7.11), заменяем k^2 и ω^2 соответствующими вторыми производными и получаем:

$$\frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\xi\partial t^2}$$

Сокращая на ξ, получаем дифференциальное уравнение, называемое *волновым уравнением*:

$$\Delta\xi(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.7.14)$$

Вообще (4.7.14) – общий вид волнового уравнения, описывающего всевозможные волновые процессы. Легко увидеть непосредственной подстановкой, что любая функция, зависящая от аргумента $(\omega t - \vec{k}\vec{r})$:

$$\xi(\vec{r},t) = f\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) \qquad (4.7.15)$$

является решением этого уравнения.

Для волн, распространяющихся вдоль одной оси x, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad (4.7.16)$$

Решением уравнения (4.7.15) являются рассмотренные выше плоская и сферическая волны. Заниматься другими решениями этого уравнения будем при рассмотрении электромагнитных волн.