Метод парных точек

При описании некоторых физических экспериментов основной интерес представляет угловой коэффициент линейной зависимости $y = a\,x + b$. Для оценки его значения и определения его погрешности удобен *метод парных точек* (МПТ).

Он заключается в следующем.

Полученные по результатам измерений экспериментальные точки наносятся на график. На графике выделяют набор точек, которые «удовлетворительно» укладываются на прямую линию. Этот выбор может быть субъективным, хотя существуют статистические методы, которые могут достаточно строго его обосновать. Выделенный набор точек разбивают на пары, в которых точки находятся друг от друга **на примерно одинаковых расстояниях.** Предпочтительно, чтобы это расстояние было **максимально возможным.** Практически это условие выполняется, если из набора N точек пары составляются примерно по правилу: 1 и (N/2) +1 точки, 2 и (N/2) +2 точки, …. N/2 и N точки. **Ч**ерез каждую пару (мысленно, чтобы сохранить читаемость графика) проводят прямую, а затем по формуле $a_{ij} = \Delta y_{ij}/x_{ij}$ вычисляют угловые коэффициенты всех прямых. Из получившегося набора коэффициентов определяют среднее значение коэффициента <a> и его погрешность Δa.

Рассмотрим применение МПТ на конкретном примере. Пусть имеется набор экспериментальных данных по измерению температурной зависимости сопротивления R. Они приведены в таблице.

Таблица. Зависимость сопротивления медного провода от температуры

	Температура, ^{o}C	Сопротивление, Ом
1	20,2	2,161
2	20,4	2,164
3	20,6	2,164
4	20,8	2,168
5	21,0	2,167
6	21,2	2,174
7	21,4	2,177
8	21,6	2,176
9	21,8	2,169
10	22,0	2,185
11	22,2	2,183
12	22,4	2,188
13	22,6	2,186
14	22,8	2,190

По данным из этой таблицы можно построить график.

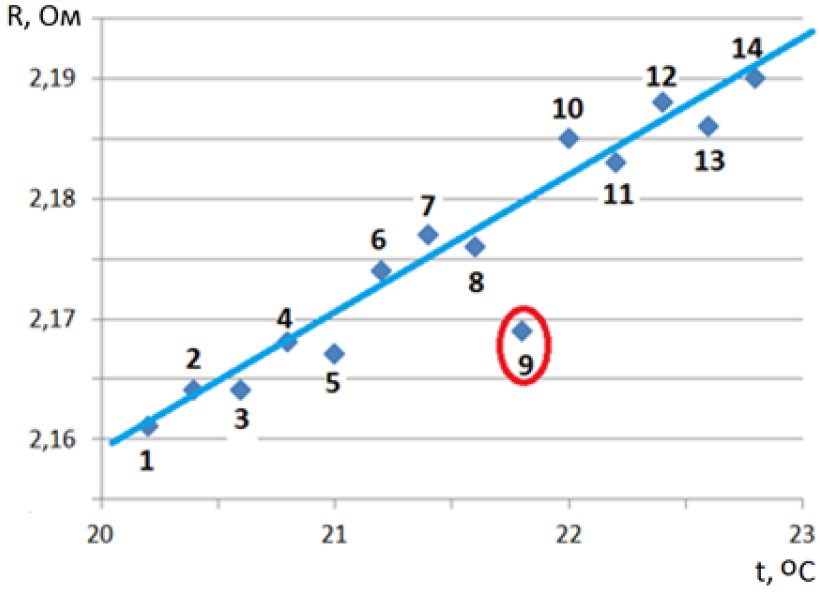

Рис.1

Из графика видно, что все точки за исключением точки №9 располагаются вдоль некой прямой, угловой коэффициент которой (температурный коэффициент сопротивления) предстоит определить методом парных точек. Из дальнейших расчетов, но не с графика, следует исключить точку №9, которая является грубой ошибкой, в наборе остается 13 (нечетное число) точек. Для получения пар точек нужно их четное число. Поэтому из расчетов выпадает еще одна точка. Выбор этой точки опять является субъективным, по крайней мере, в первом приближении. Предположим, что исключить нужно точку №5. Тогда набор парных точек будет: 1 и 8, 2 и 10, 3 и 11, 4 и 12, 6 и 13, 7 и 14. В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ ВЫБОР ЛИНЕЙНОГО УЧАСТКА ЗАВИСИМОСТИ, ПАРНЫХ ТОЧЕК И ИСКЛЮЧАЕМЫХ ТОЧЕК ТРЕБУЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАНЕСЕНИЯ ВСЕХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ТОЧЕК НА ПОЛЕ ГРАФИКА.

Чтобы применение МПТ было понятно на каждом этапе, его результаты рекомендуется оформлять, а в отчетах по лабораторным работам это ОБЯЗАТЕЛЬНО, в виде таблицы с названием, которое описывает величину, подлежащую определению с помощью МПТ.

Таблица. Определение температурного коэффициента сопротивления с помощью МПТ.

№№ точек	ΔT_{ij} , K	ΔR_{ij}, мОм	$\alpha_{ij} = \Delta R_{ij}/\Delta T_{ij}$, мОм/К	$\alpha_{ij}-\langle\alpha\rangle$, мОм/К	$(\alpha_{ij}-\langle\alpha\rangle)^2$, (мОм/К)^2
1, 8	1.4	15	10.714	- 0.298	0.089
2, 10	1.6	21	13.125	2.113	4.465
3, 11	1.6	19	11.875	0.863	0.745
4, 12	1.6	20	12.500	1.488	2.214
6, 13	1.4	12	8.571	-2.441	5.958
7, 14	1.4	13	9.286	-1.726	2.979
			$\langle\alpha\rangle$= 11.012 мОм/К $\Delta\alpha$ = 0.889 мОм/К		$\Sigma(\alpha_{ij}-\langle\alpha\rangle)^2$ = 16.45 (мОм/К)^2

Окончательный результат записывается: $\alpha = (11.0 \pm 0.9)$ мОм/К

Метод наименьших квадратов

Другим распространенным методом определения параметров линейной зависимости $y = a\,x + b$ является метод наименьших квадратов (МНК). Вообще говоря, этот метод можно использовать и для других видов зависимостей измеряемых величин друг от друга, но чаще всего он применяется как раз для линейных зависимостей. Поэтому мы и будем рассматривать именно этот случай.

Как и для МПТ, полученные по результатам измерений экспериментальные точки наносятся на график. На графике выделяют набор точек, которые «удовлетворительно» укладываются на прямую линию. Методом наименьших квадратов определяют параметры a и b линейной зависимости, которая наилучшим образом описывает эту прямую. МЕТОД ОСНОВАН НА УТВЕРЖДЕНИИ, ЧТО СУММА КВАДРАТОВ ОТКЛОНЕНИЙ ИЗМЕРЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ y_i ОТ РАССЧИТАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ $a\,x_i + b$ ДОЛЖНА БЫТЬ НАИМЕНЬШЕЙ ПРИ ПРАВИЛЬНОМ ВЫБОРЕ a и b.

$$S = \sum_{i=1}^{N} (b + ax_i - y_i)^2 = min$$

Эта сумма является функцией $S(a,b)$ переменных a и b при 2N фиксированных параметрах y_i и x_i. Условием ее минимума является равенство нулю производных этой функции по a и b:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

Эти соотношения приводят к формулам для a и b:

$$a = \frac{< xy > - < x >< y >}{\sigma_x^2}$$

$$b = < y > - a < x >$$

В этих формулах использованы средние значения величин:

$$< y > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \;, < x > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \; < xy > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i,$$

$$< x^2 > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2, < x^2 > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2$$

и дисперсия переменной x: $\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - < x >)^2 = < x^2 > - < x >^2$.

Поскольку a и b выражаются через средние значения, которые являются случайными величинами, они тоже случайные величины со среднеквадратичными отклонениями (СКО):

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{N-2}\left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - a^2\right)}; \quad \sigma_b = \sigma_a\sqrt{< x^2 >}$$

Здесь $\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - < y >)^2 = < y^2 > - < y >^2$ – дисперсия переменной y

Рассмотрим применение МНК на том же примере, на котором использовали МПТ. Искомое уравнение линейной зависимости будет иметь вид $R = \alpha\, t + R_o$

Перед началом вычислений по обоим этим методам нанести все экспериментальные точки на поле графика и выделить на нем линейный участок. В нашем случае можно использовать график на рис.1 и его описание. Из всего набора точек снова следует

исключить точку №9. В отличие от МПТ здесь не понадобится исключать «непарную» точку №5

Результаты применения МНК рекомендуется оформлять, а в отчетах по лабораторным работам это ОБЯЗАТЕЛЬНО, в виде таблицы с названием, которое описывает величину, подлежащую определению с помощью МНК.

Таблица. Определение параметров линейной зависимости сопротивления проволоки от температуры с помощью МНК.

	t, °C	R, Ом	t^2, (°C)^2	R^2, Ом^2	t R, °C Ом
1	20,2	2,161	408,04	4,669921	43,6522
2	20,4	2,164	416,16	4,682896	44,1456
3	20,6	2,164	424,36	4,682896	44,5784
4	20,8	2,168	432,64	4,700224	45,0944
5	21,0	2,167	441,00	4,695889	45,5070
6	21,2	2,174	449,44	4,726276	46,0888
7	21,4	2,177	457,96	4,739329	46,5878
8	21,6	2,176	466,56	4,734976	47,0016
10	22,0	2,185	484,00	4,774225	48,0700
11	22,2	2,183	492,84	4,765489	48,4626
12	22,4	2,188	501,76	4,787344	49,0112
13	22,6	2,186	510,76	4,778596	49,4036
14	22,8	2,190	519,84	4,796100	49,9320
Средние	21,47692	2,175615	461,9508	4,733397	46,73348

Из данных этой таблицы:

$$\sigma_t^2 =< t^2 > -< t >^2 = 461.951 - 461.258 = 0.693 \text{ К}^2$$

$$\sigma_R^2 =< R^2 > -< R >^2 = 4{,}733397 - 4{,}733301 = 9{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}^2$$

$$\alpha = \frac{< tR > -< t >< R >}{\sigma_t^2} = \frac{46{,}73348 - 21.47692 \cdot 2.175615}{0.693} = \frac{0.0079707}{0.693} =$$

$$= 0.0115 \ \frac{\text{Ом}}{\text{К}} = 11.5 \text{ мОм/К}$$

$$R_o =< R > - a < t > = 2.175615 - 0.0115 \cdot 21.47692 = 1.929 \text{ Ом}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{N-2}\left(\frac{\sigma_R^2}{\sigma_t^2} - \alpha^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{11} \cdot \left(\frac{9{,}6 \cdot 10^{-5}}{0.693} - 0.0115^2\right)} = \sqrt{\frac{1.3853 - 1.3225}{11} \cdot 10^{-4}} = 10^{-2}\sqrt{\frac{0.0628}{11}} =$$

$$7.56 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Ом}}{\text{К}} = 0.756 \text{ мОм/К}; \ \Delta\alpha = 0.8 \text{ мОм/К}$$

$$\sigma_{Ro} = \sigma_a \sqrt{< t^2 >} = 7.56 \cdot 10^{-4} \cdot 21.5 = 1.63 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}; \ \Delta R_o = 1.8 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$$

Окончательный результат: $\alpha = (11.5 \pm 0.8)$ мОм/К; $R_o = (1.929 \pm 0.018)$ Ом

Во-первых, видно, что полученные значения температурного коэффициента сопротивления, полученные МПТ и МНК, совпали в пределах погрешностей. Более того, практически равными получились и значения погрешностей. Поэтому эти методы можно считать равноценными.

Во-вторых, примеры вычислений σ_t^2, σ_R^2, α и σ_a показывают, что при вычислениях по МНК очень часто приходится иметь дело с разностями больших по абсолютной величине чисел для получения маленьких чисел, т.е. нужно оперировать с числами с большим количеством значащих цифр и при этом недопустимо произвольное их округление. Это создает значительные неудобства при «ручном» использовании МНК даже с

калькулятором. Зато у МНК есть то преимущество, что он встроен в различные табличные и графические редакторы, не требует ручных вычислений при использовании этих редакторов.

В-третьих, зависимость $y = a\ x + b$ можно записать в виде $x = \alpha\ y + \beta$. «Простые» геометрические соображения подсказывают, что должно выполняться соотношение $\alpha = 1/a$. Однако для углового коэффициента α выражение можно получить по тому же правилу, что для a:

$$\alpha = \frac{< xy > - < x >< y >}{\sigma_y^2}$$

При этом если сравнить эти два выражения, то:

$$\alpha \cdot a = \frac{(<xy> - <x><y>)^2}{\sigma_x^2\ \sigma_y^2} \neq 1,$$

т.е. $\alpha \neq 1/a$, и α стремится к $1/a$ только при малом разбросе экспериментальных точек относительно прямой. Это же справедливо для угловых коэффициентов, полученных МПТ.

В-четвертых, может показаться, что МПТ, в отличие от МНК, не позволяет определить свободный член b линейной зависимости $y = a\ x + b$. Однако даже если не пользоваться самим МНК, то можно воспользоваться его выражением $b =< y > - a < x >$, которое означает, что «наилучшая прямая» должна проходить через точку (<x>, <y>). Следовательно, пользуясь МПТ, можно дополнительно вычислить средние значения <x> и <y>, а затем и свободный член b.