ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №106

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Момент силы, момент инерции, основной закон динамики вращательного движения, консервативные системы, закон сохранения механической энергии при вращательном движении.

ВВЕДЕНИЕ

Маятник Максвелла представляет собой тело вращения (цилиндр, шар и т.п.), подвешенное с помощью нити, накрученной на его ось (см. рисунок). Под действием силы тяжести $m\vec{g}$ маятник начинает раскручиваться и опускается вниз с постоянным ускорением. Достигнув нижней точки, под действием силы натяжения полностью раскрученной нити $\vec{T}$ маятник меняет знак скорости на противоположный и начинает подниматься с тем же ускорением, накручивая нить на себя и постепенно замедляясь. В силу закона сохранения механической энергии (если пренебречь потерями на сопротивление воздуха и пластические деформации) высота максимального подъема маятника совпадает с начальной высотой, после чего процесс периодически повторяется.

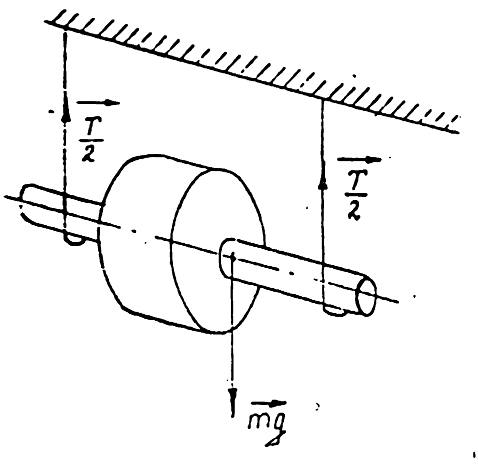

Схема маятника Максвелла

По существу, этот процесс аналогичен движению прыгающего мяча, упруго отражающегося от плоскости. Различие заключается в том, что в маятнике Максвелла часть потенциальной энергии переходит в энергию вращательного движения, поэтому ускорение маятника Максвелла a меньше, чем ускорение свободного падения g, и зависит от его момента инерции J_0. Измеряя экспериментально ускорение a, можно определить момент инерции J_0 тела вращения.

Связь между ускорением и моментом инерции может быть установлена непосредственно с помощью основного закона динамики вращательного движения:

$$N = J\beta, \tag{I}$$

где N - суммарный момент сил относительно оси вращения, β - угловое ускорение, J - момент инерции относительно оси вращения.

При этом

$$J = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm,$$

где r - расстояние от элемента dm до оси вращения.

Однако в настоящей работе мы будем пользоваться формулой, полученной на основе закона сохранения энергии:

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{J_0 \omega^2}{2} = const. \tag{2}$$

Здесь m - масса маятника; h - высота, на которой находится маятник; v - скорость поступательного движения маятника; J_0 - момент инерции относительно оси симметрии маятника; ω - угловая скорость вращения маятника.

Угловая скорость ω вычисляется по формуле:

$$\omega = v/R, \tag{3}$$

где R - радиус оси, на которую накручена нить.

Дифференцируя равенство (2) по времени, а также учитывая, что $\frac{dh}{dt} = -v$ и $\frac{dv}{dt} = a$, найдем искомую связь между J_0 и a:

$$-mg + ma + \frac{J_0}{R^2} a = 0. \tag{4}$$

Ускорение a может быть определено экспериментально по времени падения маятника t на полную длину ℓ:

$$\ell = \frac{at^2}{2}. \tag{5}$$

Подставляя равенство (5) в выражение (4), получим рабочую формулу для определения момента инерции:

$$J_э = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right) = mR^2\left(\frac{gt^2}{2\ell} - 1\right) \tag{6}$$

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение момента инерции маятника Максвелла по времени его падения.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Установка представляет собой вертикальную колонку с нанесенной на ней миллиметровой шкалой. В верхней части колонки закреплен неподвижный кронштейн, на котором находятся электромагнит, удерживающий маятник в верхнем положении, и фотоэлектрический датчик для запуска секундомера. В нижней части колонки находится подвижный кронштейн с прикрепленным к нему фотоэлектрическим датчиком, служащим для остановки секундомера при пересечении маятником оптической оси датчика. Нижний кронштейн может перемещаться вдоль колонки и фиксироваться в произвольно выбранном положении, которое считывается по шкале с помощью указателя, помещенного на высоте оптической оси нижнего датчика.

Маятник Максвелла в данной установке состоит из закрепленного на оси ролика, на который могут накладываться съемные кольца различной массы, изменяя таким образом его момент инерции. Диаметр оси D_0 = 10 мм, внешний диаметр ролика D_p = 86 мм, внешний диаметр кольца D_K = 105 мм. Маятник подвешен к верхнему кронштейну на нити бифиллярным способом. Общая масса маятника равна сумме масс оси (m_0), ролика (m_p) и кольца (m_K):

$$m = m_0 + m_p + m_K.$$

Момент инерции маятника может быть вычислен теоретически по формуле:

$$J_{теор} = J_0 + J_p + J_K, \tag{7}$$

где J_0 – момент инерции оси маятника, $J_0 = \frac{1}{8} m_0 D_0^2$; J_p – момент инерции ролика $J_p = \frac{1}{8} m_p (D_0^2 + D_p^2)$; J_K – момент инерции кольца:

$$J_K = \frac{1}{8} m_K (D_p^2 + D_K^2)$$

При нажати клавиши „Пуск" отключается напряжение от электромагнита, удерживающего маятник в верхнем положении, и одновременно запускается электронный миллисекундомер. При пересечении маятником оптической оси нижнего фотоэлемента миллисекундомер останавливает–

ся, фиксируя время падения маятника. Нажатие клавиши "СБРОС" устанавливает миллисекундомер в исходное нулевое положение.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

I. Подготовка к измерениям

I. Включить прибор в сеть.

2. Наложить на ролик маятника съемное кольцо.

3. Намотать на ось маятника нить подвески и зафиксировать ее электромагнитом. Проверить, соответствует ли нижняя грань кольца нулю шкалы на колонке.

4. Нажать клавишу "ПУСК" и, размотав нить, убедиться, что в нижнем положении край стального кольца находится примерно на 2 мм ниже оптической оси нижнего фотодатчика (если это не так, отрегулировать длину нити подвески).

5. Отжать клавишу "ПУСК", намотать на ось маятника нить подвески, обращая внимание на то, чтобы витки нити ложились равномерно один к одному, и зафиксировать маятник с помощью электромагнита в верхнем положении.

Установка к работе готова.

II. Проведение измерений

I. Повернуть маятник в направлении его движения на угол примерно 5°.

2. Нажать клавишу "СБРОС".

3. Нажать клавишу "ПУСК".

4. Снять показания миллисекундомера.

5. Повторить измерения пять раз. Полученные данные занести в таблицу.

$D_0 = 0$

Номер опыта	m_0, кг	m_p, кг	m_k, кг	ℓ, мм	t_i, с	$t_{ср}$, с	Δt_i	Δt_i^2	Δt
1									
2									
3									
4									
5									

6. Заменить кольцо и повторить измерения по пп. I–5.

Ш. Обработка результатов

I. Время падения маятника t и его погрешность Δt могут быть вычислены по формулам для обработки прямых измерений:

$$t_{ср} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{n};$$

$$\Delta t = \underset{2,78}{t_n}(\alpha)\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i - t_{ср})^2}{n(n-1)}}, \qquad (8)$$

где t_i - результат i-го измерения времени падения маятника Максвелла, n - число измерений (в данной работе $n = 5$), α - доверительная вероятность (принять $\alpha = 0{,}95$), $t_n(\alpha)$ - коэффициент Стьюдента.

2. Величина момента инерции маятника Максвелла J определяется по среднему времени падения t с помощью рабочей формулы (6).

3. Погрешность момента инерции ΔJ может быть найдена по формуле для погрешности при косвенных измерениях. Поскольку выражение (6) имеет вид, удобный для логарифмирования, целесообразно начать расчет с вычисления относительной погрешности. Для этого выражение (6) сначала логарифмируется:

$$\ln J = \ln m + 2\ln R + \ln(gt^2 - 2\ell) - \ln 2 - \ln \ell.$$

Затем в соответствии с общими правилами вычисляется относительная погрешность:

$$\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln J}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln J}{\partial R}\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln J}{\partial t}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln J}{\partial \ell}\Delta \ell\right)^2}. \qquad (9)$$

Здесь Δm, ΔR, Δt, $\Delta \ell$ - погрешности соответствующих величин.

Погрешность времени падения Δt определяется по результатам измерений с помощью формулы (8). Погрешность длины маятника $\Delta \ell$ обусловлена точностью миллиметровой шкалы прибора и равна половине цены деления шкалы.

Значения масс отдельных элементов маятника Максвелла и их размеры заданы. Если при этом величина погрешности специально не указана, то в качестве погрешности берется половина последней значащей цифры.

Вычислив производные, входящие в выражение (9), получим окончательную формулу для нахождения относительной погрешности $\mathcal{J}$:

$$\frac{\Delta \mathcal{J}}{\mathcal{J}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{2gt\Delta t}{gt^2-2\ell}\right)^2 + \left[\frac{gt^2\Delta \ell}{\ell(gt^2-2\ell)}\right]^2} . \qquad (10).$$

Абсолютная погрешность вычисляется по моменту инерции и относительной погрешности:

$$\Delta \mathcal{J} = \left(\frac{\Delta \mathcal{J}}{\mathcal{J}}\right) \overline{\mathcal{J}} .$$

4. Возможен и более простой способ определения момента инерции маятника Максвелла и оценки его погрешности. Для каждого измерения t_i вычислим момент инерции $\mathcal{J}_i$ по формуле (6), после чего $\mathcal{J}$ и $\Delta \mathcal{J}$ определим по формулам для обработки прямых измерений:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}_i ; \qquad \Delta \mathcal{J} = t_n(\alpha) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathcal{J}_i - \mathcal{J})^2}{n(n-1)}} .$$

Однако при этом способе не учитывается систематическая ошибка, вносимая в измерения неточным определением массы и длины маятника Максвелла.

IУ. Задания

1. С помощью рабочей формулы (6) и формулы погрешности (10) определить значения моментов инерции маятника Максвелла с различными кольцами и оценить их погрешность.

2. По формуле (7) найти теоретические значения моментов инерции и сравнить их с найденными экспериментально.

3. Для одной серии экспериментов найти момент инерции и его погрешность по формулам для обработки прямых измерений. Сравнить результат с полученным в п. 1.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое момент инерции?

2. Чему равна кинетическая энергия вращающегося тела?

3. Чему равнялось бы ускорение маятника Максвелла при нулевом моменте инерции ($\mathcal{J}_0 = 0$)?

4. Выведите формулу, связывающую момент инерции и ускорение, (6) исходя непосредственно из основного закона динамики вращательного движения (I).

5. Справедливо ли соотношение (3) для растяжимой нити?

6. Что такое доверительная вероятность?

ЛИТЕРАТУРА

Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 т. - М.: Наука, 1989. - Т. I.