*ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 122*

# ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

## *1.Цель работы*

Экспериментальное исследование колебаний математического маятника, определение ускорения свободного падения тел.

## *2.Теоретические сведения.*

Падение тел из состояния покоя в безвоздушном пространстве под действием силы тяжести называется *свободным падением.* Заметим, что при падении тяжелых тел с небольшой высоты влиянием сопротивления воздуха можно пренебречь и движение их считать свободным падением. Ускорение, с которым движутся тела в состоянии свободного падения, называют *ускорением свободного падения g*.

Опыты по определению ускорения свободного падения тел показали, что его величина на разных широтах земной поверхности различна. На полюсах оно наибольшее ($g_п$=9,8324 м/с$^2$), на экваторе – наименьшее ($g_{эк}$=9,7805 м/с$^2$), на широте 45$^0$ имеет промежуточное значение ($g_{45}$= 9,8066 м/с$^2$.).

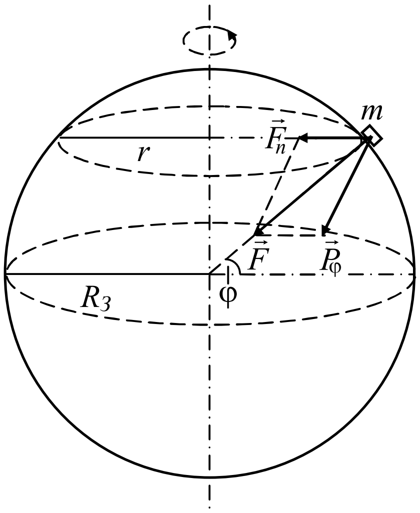


Рис.1.

Главной причиной, вызывающей изменение ускорения свободного падания на разных широтах, является суточное вращение Земли. Вследствие этого вращения все тела, находящиеся в покое относительно Земли (кроме тел, находящихся на полюсе), движутся по окружностям вокруг оси Земли (рис.1). Совершая движение по окружности радиуса $r$, тело имеет центростремительное ускорение. Причиной этого ускорения является центростремительная сила $\vec{F}_n$, представляющая собой одну из составляющих силы тяготения

$$F = G\frac{mM_З}{R_З^2}.$$

Центростремительное ускорение равно

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 R_З \cos\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} R_З \cos\varphi,$$

где ω - угловая скорость Земли, $T$ – период обращения, φ - угол, определяющий широту места. Если принять $R_З$ =6371 км, то $a_n \approx 0{,}034\cos\varphi$ (м/с$^2$).

Вторая составляющая силы тяготения – сила $\vec{P}_\varphi$– обуславливает тяжесть тела и называется *силой тяжести.* Под действием силы тяжести тело в безвоздушном пространстве будет падать с ускорением свободного падения, величина которого определяется по второму закону Ньютона

$$g_{\varphi} = \frac{P_{\varphi}}{m},$$

где $m$ – масса тела.

Так как сила тяжести на разных географических широтах различна, то *ускорение силы тяжести изменяется с изменением широты места.* На полюсах центростремительная сила $\vec{F}_n$ равна нулю, сила тяжести равна силе тяготения и достигает максимального значения. Ускорение свободного падения $g_{п}$ на полюсах будет максимальным. На экваторе центростремительная сила $\vec{F}_n$ максимальна, а сила тяжести $P_{эк} = F – F_n$ минимальна, поэтому минимальным будет и $g_{эк}$. Различие ускорений, вызванное вращением Земли, составляет $\Delta g_1 = g_{п} - g_{эк} \approx 0{,}034$ м/с$^2$.

Другой причиной, вызывающей изменение силы тяжести $P_{\varphi}$ и ускорения $g_{\varphi}$, является сплюснутость Земли у полюсов: полярный радиус меньше экваториального приблизительно на 21 км. Максимальное различие, вызванное этой причиной, составляет $\Delta g_2 \approx 0{,}02$ м/с$^2$. Общее наибольшее различие $\Delta g \approx 0{,}05$ м/с$^2$.

Так как инертная масса тела, входящая в уравнение динамики, и гравитационная масса того же тела в законе тяготения равны между собой, то

$$g_{\varphi} = G\frac{M_З}{R_З^2},$$

то есть *ускорение свободного падения всех тел, независимо от их масс, в данном месте Земли одинаково.*

Поскольку изменение ускорения силы тяжести с изменением широты места невелико, для многих расчетов его можно приблизительно считать везде одинаковым и равным 9,8 м/с$^2$, а для грубых вычислений – 10 м/с$^2$.

С подъемом над поверхностью Земли ускорение свободного падения изменяется:

$$g_h = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2} = g\left(\frac{R_З}{R_З + h}\right)^2,$$

где $g_h$ – ускорение свободного падения на высоте $h$ над поверхностью Земли; $g$ – на поверхности Земли.

### *3. Экспериментальная установка и вывод формулы для определения ускорения свободного падения тела.*

Экспериментальное определение ускорения свободного падения с помощью маятника основано на зависимости периода его колебаний от величины $g$.

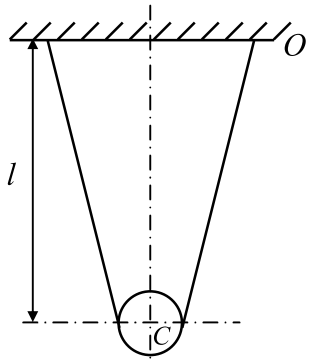


Рис.2

Используемый в лабораторной установке маятник схематически изображен на рис.2. Он представляет собой стальной шарик радиусом $r$ на бифилярном подвесе: тонкая нить пропущена через центр шарика, концы нити закреплены на стойке. Длина подвеса нити может регулироваться в пределах от нескольких сантиметров до 0,5 м. Период колебаний с точностью до $10^{-3}$с измеряется с помощью электронного секундомера.

Строго говоря, данная колебательная система представляет собой физический маятник, период малых колебаний которого равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgl}}\,, \qquad (1)$$

где $I_0$ – момент маятника относительно оси качаний $OO$, $m$ – масса маятника, $l$ – расстояние от оси качаний маятника до его центра масс $C$, $g$ – ускорение свободного падения. В отличие от математического маятника, представляющего собой материальную точку, подвешенную на невесомой нерастяжимой нити, период колебаний физического маятника зависит от его момента инерции и массы.

Момент инерции нашего маятника складывается из момента инерции шарика и момента инерции нити подвеса. Пренебрегая моментом инерции нити, запишем момент инерции маятника относительно оси $OO$ в виде

$$I_0 = I_c + ml^2 = {}^2\!/_5\, mr^2 + ml^2\,. \qquad (2)$$

Здесь мы воспользовались теоремой Штейнера и учли, что момент инерции однородного шара радиусом $r$ и массой $m$ относительно оси, проходящей через его центр, равен

$$I_c = {}^2\!/_5\, mr^2\,. \qquad (3)$$

В нашем случае радиус шарика мал, по сравнению с длиной подвеса: $r \ll l$. Тогда в (2) можно пренебречь слагаемым (3), малым по сравнению с $ml^2$, и положить

$$I_0 = ml^2\,. \qquad (4)$$

Подставив в формулу (1) значение момента инерции (4), придем к формуле, определяющей период малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (5)$$

Из формулы (5) можно выразить ускорение свободного падения $g$ и рассчитать его по измеренным значениям $T$ и $l$.

Чтобы повысить точность определения $g$, измеряют периоды колебаний маятников с двумя различными положениями центра масс $l_1$ и $l_2$:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}; \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}\,.$$

Возводя оба равенства в квадрат, вычтя второе равенство из первого и решив полученное уравнение относительно $g$, получим

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}$$

В этом равенстве значения $g$ не изменятся, если к $l_1$ и $l_2$ прибавить одно и тоже число – радиус шарика. Следовательно, вместо $l_1$ и $l_2$ можно подставить значения $(h_1 - h_0)$ и $(h_2 - h_0)$ соответственно, где $h_1$ и $h_2$ – положения нижнего края шарика при разных длинах маятника, а $h_0$ – положение точек подвеса

$$g = \frac{4\pi^2(h_1 - h_2)}{T_1^2 - T_2^2}. \qquad (6)$$

При определении $g$ таким способом не нужно знать положение центра масс маятника, а достаточно определить по шкале значения $h_1$ и $h_2$. Это легко сделать с помощью угольника, совместив одну из его сторон со шкалой установки, а другую – с нижним краем шарика.

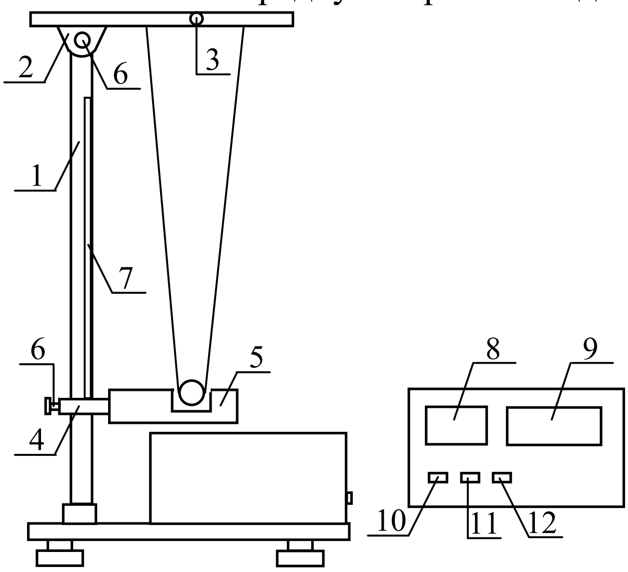

Рис.3.

Схема установки представлена на рис.3. Основание установки снабжено регулирующими высоту ножками, позволяющими выравнивать прибор. К основанию прикреплена стальная колонна 1, на которой имеются два кронштейна: верхний 2 и нижний 4. На кронштейне 2 расположена ручка 3 регулировки длины подвеса маятника. На кронштейне 4 помещен фотоэлектрический датчик 5. Оба кронштейна можно установить на фиксированной высоте натяжением воротков 6. К колонне прикреплена линейка 7. На лицевой панели установки имеются два окошка. В левом окошке находится индикатор числа полных колебаний 8, в правом окошке – шкала секундомера 9. На лицевой панели расположены кнопки включения в сеть «СЕТЬ» 10, остановки счета «СТОП» 12 и включения счета / установки нуля «СБРОС» 11.

*4. Проведение измерений и запись результатов.*

1. Установите с помощью ручки 3 длину подвеса в пределах 40…45 см. Закрепите кронштейн 4 с датчиком так, чтобы маятник свободно проходил в зазор и перекрывал отверстия датчика.

2. Нажмите кнопку «СЕТЬ»

3. Проведите пробное измерение. Для этого аккуратно отклоните маятник на угол 5-10$^o$ от вертикальной оси и отпустите. После одного – двух колебаний нажмите кнопку «СБРОС». Когда в левом окошке появится цифра 19, нажмите кнопку «СТОП». Секундомер остановится, показывая время 20 колебаний.

4. Определите с помощью линейки 7 и угольника положение нижнего края шарика $h_1$.

5. Проведите серию из 3 измерений времени $t$, за которое происходит $n = 10…20$ колебаний.

6. Поднимите шарик на 10…15 см и повторите измерения по пп.4 и 5. Результаты всех измерений занесите в таблицу.

| № опыта $i$ | $n$ | $h_1$ (м) | $t_{1i}$ (с) | $< t_1>$ (с) | $T_1$ (с) | $h_2$ (м) | $t_{2i}$ (с) | $< t_2>$ (с) | $T_2$ (с) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |

## *5. Обработка результатов*

1. Определите периоды колебаний маятника $T_1 = < t_1 >/n$; $T_2 = < t_2 >/n,$ где $<t_1>$ и $<t_2>$ - средние арифметические значения времени колебаний.

2. Вычислите по формуле (6) ускорение свободного падения $<g>$.

3. Оцените погрешность прямых ($\Delta t_1$, $\Delta t_2$) измерений:

$$\Delta t = t_N(\alpha)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - < t >)^2}{N(N-1)}},$$

где под $t$ следует понимать либо $t_1$, либо $t_2$; $N = 3$ – число опытов; $t_N(\alpha)$ – коэффициент Стьюдента.

4. Оцените погрешность косвенных измерений ($\Delta T_1$, $\Delta T_2$, $\Delta g$):

$$\Delta T_1 = \frac{\Delta t_1}{n}; \quad \Delta T_2 = \frac{\Delta t_2}{n},$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{2T_1\Delta T_1}{T_1^2 - T_2^2}\right)^2 + \left(\frac{2T_2\Delta T_2}{T_1^2 - T_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_1}{h_1 - h_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_2}{h_1 - h_2}\right)^2}, \tag{7}$$

$$\Delta g = \left(\frac{\Delta g}{g}\right) < g >,$$

где $\Delta h_1$ и $\Delta h_2$ – погрешность линейки ($0{,}5\cdot10^{-3}$ м).

5. Округлите погрешность и результат и запишите их в стандартном виде $g = (< g > \pm \Delta g)$ (единица измерения).

### *Контрольные вопросы и задания*

1. Что такое свободное падение тел?
2. Как зависит ускорение свободного падения от высоты и географической широты местности?
3. В чем различие между силой тяжести и силой, определяемой по закону всемирного тяготения (силой тяготения)? Как направлены эти силы?
4. Вычислите ускорение свободного падания на полюсе и на экваторе.
5. Что такое математический маятник? Почему для определения ускорения свободного падения используют маятник с двумя различными длинами подвеса?

### *Литература*

1. Курс физики: Учебник для вузов. Т.1./Под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Издательство «Лань», 2000.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т.1. М.,1989.
3. Каленков С.Г., Соломахо Г.И. Практикум по физике. Механика: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1990.