2.5. Следствия из преобразований Лоренца.

2.5.1. Одновременность событий в различных ИСО.

Рассмотрим одновременность событий в различных системах отсчета. Исходим из преобразований Лоренца

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{V_0}{c^2}x}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{t - \frac{V_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.5.1}$$

где V_0 – скорость К' системы отсчета относительно К системы отсчета вдоль оси x. Из этих соотношений получаем следующие выводы.

1) Если в К системе отсчета два события происходят в одной точке $x_1 = x_2$ и одновременно $t_1 = t_2$, то в К' системе они происходят также в одной точке $x'_1 = x'_2$ и одновременно $t'_1 = t'_2$.
2) Если в К системе отсчета два события происходят одновременно $t_1 = t_2$ в разных точках $x_1 \neq x_2$, то в К' - системе они разобщены: эти события происходят в разные моменты времени $t'_1 \neq t'_2$ и в разных точках $x'_1 \neq x'_2$.

Эти выводы следуют из (2.5.1), если рассмотреть координаты и времена для двух точек и взять их разность. Об этом говорят, как об *относительности одновременности событий*.

2.5.2. Сокращение отрезков длины.

Рассмотрим стержень, движущийся относительно К системы отсчета со скоростью V_0 (рис. 5.1). Удобно ввести К' систему отсчета, связанную со стержнем, то есть стержень покоится в К' системе отсчета. Измерим длину этого стержня в К системе. Из преобразований Лоренца (2.4.25) для координаты x получаем для левого и правого концов стержня:

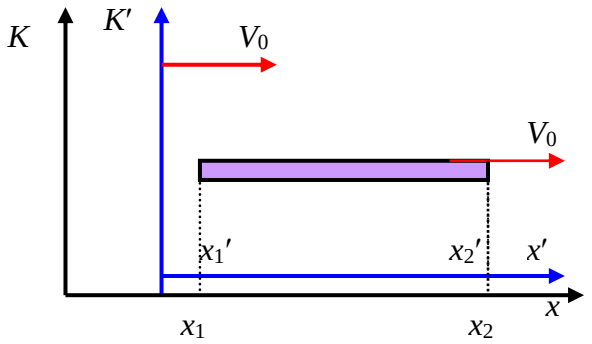

Рис. 5.1.

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad x_2' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.5.2}$$

Для измерения длины стержня в К системе необходимо фиксировать (измерять) координаты левого и правого концов стержня в один и тот же момент времени по часам К системы $t_1 = t_2$. Тогда разность координат $l = x_1 - x_2$ и определяет длину стержня в данной системе. Вычитая первое уравнение (2.5.2) из второго и учитывая одинаковое время измерения $t_1 = t_2$, получаем:

$$x_2' - x_1' \equiv l_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.5.3}$$

Здесь мы ввели величину l_0 – *собственную длину* стержня, то есть длину стержня в системе отсчета, относительно которой стержень покоится. Таким образом, получаем, что длина стержня в системе К, относительно которой стержень движется, сокращается:

$$l = l_0\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \qquad (l < l_0) \tag{2.5.4}$$

Вывод: *сокращаются продольные размеры движущегося объекта*. Собственная длина l_0 всегда является наибольшей длиной.

2.5.3. Преобразование промежутков времени.

Рассмотрим два момента времени в одной и той же точке в движущейся К' системы отсчета, например, рождение движущейся частицы и ее распад через некоторое время. Из преобразований Лоренца (2.4.26) имеем для двух моментов времени в К системе отсчета:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V_0}{c^2} x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V_0}{c^2} x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.5.5}$$

Полагая равенство координат $x'_1 = x'_2$ в К' системе отсчета, связанной с частицей, получаем для промежутков времени

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.5.6}$$

Здесь промежуток времени $\Delta t' = \Delta t_0$ – *собственное время*, т.е. время между двумя событиями в одной и той же точке координатного пространства. Иначе, собственное время – время жизни частицы в системе отсчета, где она покоится. Δt – это промежуток времени по часам системы К, относительно которой движется частица. Таким образом, получаем замедление течения времени в движущихся объектах:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}} \qquad (\Delta t > \Delta t_0) \tag{2.5.7}$$

Вывод: *течение времени замедляется в движущейся системе отсчета*. При этом собственное время является самым коротким временем.

2.5.4. Преобразование скорости, сложение скоростей.

Скорость материальной точки в каждой системе отсчета должна определяться по линейке и часам именно этой системы. Таким образом скорости в К и К' системах отсчета равны, соответственно:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \tag{2.5.8}$$

Рассмотрим компоненты вектора скорости (рис. 5.2). Для этого возьмем малые приращения (дифференциалы) в преобразованиях Лоренца, например, в (2.4.26):

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz' \tag{2.5.9}$$

Делим приращение координат dx на дифференциал времени dt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V_0 dt'}{dt' + \frac{V_0}{c^2}dx'} = \frac{dx'/dt' + V_0}{1 + \frac{V_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{V_0}{c^2}dx'} = \frac{dy'}{dt'}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{V_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \ldots\ldots$$

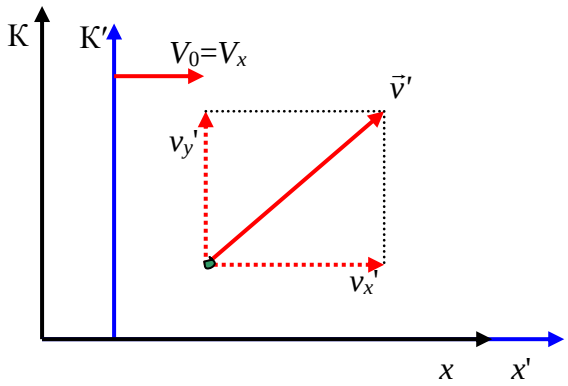

Рис. 5.2.

Учитывая определение скорости в К' системе отсчета (2.5.8), получаем формулы для преобразования компонент скорости при переходе от К' системы отсчета к К системе:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v_x' + V_0}{1 + \frac{v_x' V_0}{c^2}} \tag{2.5.10}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v_x' V_0}{c^2}} \tag{2.5.11а}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v_x' V_0}{c^2}} \tag{2.5.11б}$$

Обратные преобразования имеют вид:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V_0}{1 - \frac{v_x V_0}{c^2}}, \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_x V_0}{c^2}} \tag{2.5.12}$$

Эти же формулы (2.5.10) - (2.5.12) дают правила сложения скоростей. Рассмотрим некоторые свойства этих преобразований:

1) При малых скоростях: $V_0 << c$ получаем правила сложения скоростей Галилея

$$v_x \approx v_x' + V_0, \qquad v_y \approx v_y', \qquad v_z \approx v_z' \tag{2.5.13}$$

2) Если объект движется со скоростью света в К' системе отсчета $v_x' = c$, то в системе К имеем:

$$v_x = \frac{c + V_0}{1 + \frac{V_0}{c^2}c} = c \tag{2.5.14}$$

Получаем, что скорость света во всех ИСО одинакова и равна скорости света c. Получили результат, который был заложен при выводе преобразований Лоренца. Не существует материальных объектов, движущихся со скоростью большей скорости света.

Примечание 1. Со скоростью больше света могут двигаться не материальные объекты, а, говоря условно, “солнечные зайчики”. Например, парадокс “ножниц” (см рис. 5.3): прохождение стержня через границу (ось x). Геометрическая точка пересечения оси x и стержня – точка А – может перемещаться по оси x быстрее скорости света. В самом деле, имеем:

$$tg\varphi = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{V}{V_A},$$

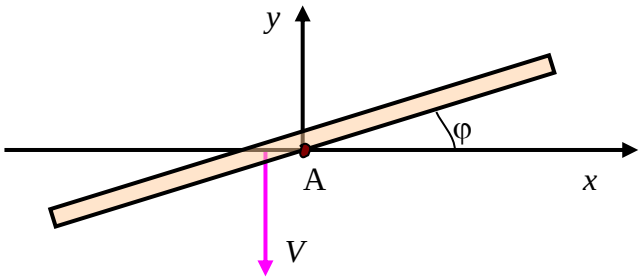

Рис. 5.3.

где V – скорость стержня, а V_A – скорость передвижения точки А. Откуда при малых углах φ:

$$V_A = \frac{V}{tg\varphi} \approx \frac{V}{\varphi} \tag{2.5.15}$$

видно, что скорость точки А может быть сколь угодно большой, в частности больше скорости света. Аналогичный пример, падающая волна на берег: падающий фронт волны распространяется по берегу со скоростью, зависящей от угла падения волны. И в том и в другом случае мы имеем дело не с передвижением материального объекта, а со скоростью передвижения некоторой геометрической точки, которая не может переносить информацию. Информация может передаваться в том случае, если воздействовать на стержень, например ударить вдоль оси y и точка А сместиться вправо. Однако в этом случае скорость перемещения точки А не превышает скорости распространения акустических волн (волн деформации).

К этому же явлению относится эффект “солнечного зайчика” (рис. 5.4), который распространяется по стенке со скоростью большей скорости света при достаточно быстром повороте отражающего зеркала.

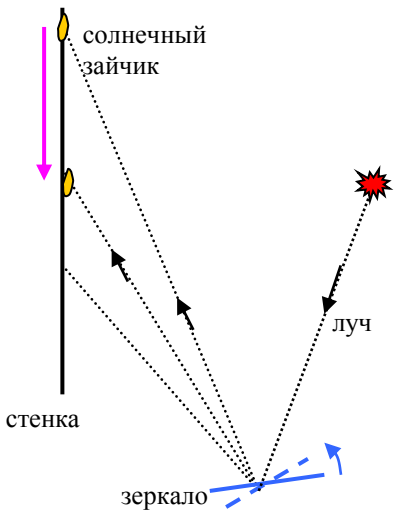

Рис. 5.4.

Можно рассмотреть прожектор, вращающийся вокруг оси, при этом луч света вращается. В этой плоскости вращения на большом расстоянии друг от друга, но на равном расстоянии от прожектора, находятся две точки А и Б. Если ω – угловая

скорость вращения, то всегда можно найти такое расстояние между точками, что $\omega r = v_s > c$, где v_s – скорость зайчика. Однако эта скорость также не несет никакой информации. Еще аналогичный пример: скорость перемещения луча на экране ряда осциллографов может также превышать скорость света.

2.5.5. <u>Примеры проявлений релятивистских эффектов</u>.

1) Время жизни мезона.

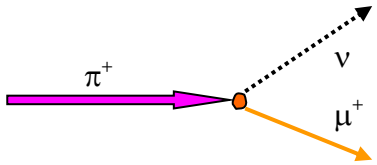

Рис. 5.5.

Собственное время жизни π^+ мезона, который осуществляет взаимодействие между нуклонами в ядре, составляет $\tau_0 = 2.5\cdot10^{-8}$ *с*. π^+ мезон распадается на μ^+ мезон и нейтрино ν (масса π^+ мезона $m_{\pi+} \sim 273\ m_e$, масса μ^+ мезона $m_{\mu+} \sim 215\ m_e$). За это время максимальное расстояние, которое он может пройти до распада составляет:

$$l \sim \tau_0 c = 2.5\cdot10^{-8}\cdot3\cdot10^{8} \approx 7.5\ м \qquad (2.5.16)$$

Тем не менее, от источника π^+ мезонов (например, Бэватрон в лаборатории Лоуренса, США) частицы долетают до водородной пузырьковой камеры, находящейся на расстоянии ~ 100 метров. Так проводились эксперименты по измерению времени жизни π^+ мезонов (Дарбин, Лоар, Хевенс 1952). Скорость π^+ мезонов была близка к скорости света так, что $\beta = v/c = \left(1-5\cdot10^{-5}\right)$. Пользуясь преобразованием временных интервалов (2.5.7), находим время жизни мезонов в лабораторной системе отсчета:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2.5\cdot10^{-8}}{\sqrt{1-\left(1-5\cdot10^{-5}\right)^2}} \approx 2.5\cdot10^{-6}\ c \qquad (2.5.17)$$

За это время π^+ мезон пролетает расстояние ~ 750 метров.

Аналогично получаем то же для других элементарных частиц (μ^+ мезонов, например). Вообще замедление времени проверялось непосредственно в 70-х годах, когда поместили точные атомные часы на самолете и на Земле (см Матвеев, т.1, стр.97-99). Самолет находился около суток в воздухе, передвигаясь с крейсерской скоростью, затем при приземлении сравнивались показания часов. Часы на Земле показывали несколько большее время, чем часы на самолете.

2) Аберрация неподвижных звезд.

Аберрация – это отклонение видимого положения звезды на небе от истинного положения. Любая точка, неподвижная в системе К, движется в системе К' (Земля) со скоростью $v_x' = -V_З$. Пусть звезда в системе Солнца находится непосредственно над наблюдателем, тогда свет от звезды в системе К' будет попадать в глаза под некоторым углом α к вертикали (рис.5.6), т.е. к истинному положению точки. Сосчитаем угол отклонения:

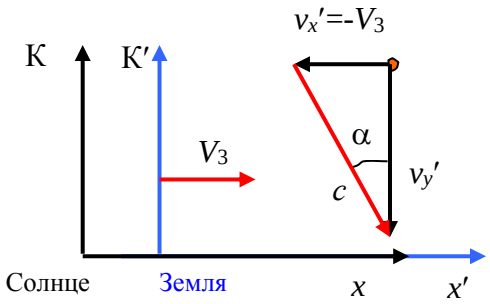

Рис. 5.6.

$$tg\alpha = \frac{|v_x'|}{v_y'} = \frac{V_З}{v_y'} \qquad (2.5.18)$$

Вертикальную компоненту скорости получим из формул преобразования скорости (2.5.12), учитывая, что вертикальная скорость (а другой компоненты нет, т.к. $v_x = 0$) в системе Солнца равна скорости света $v_y = c$:

$$v_y' = v_y\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{V_З v_x}{c^2}} = c\sqrt{1-\beta^2} = c\sqrt{1-V_З^2/c^2} \qquad (2.5.19)$$

где скорость Земли $V_З = 30$ *км/с*. Откуда имеем выражение для угла аберрации:

$$tg\alpha = \frac{V_З}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad Sin\alpha = \frac{V_З}{c} \qquad (2.5.20)$$

Когда производятся наблюдения в течение года, то положение звезды на небе “плавает” около истинного положения звезды из-за изменения направления скорости Земли относительно Солнца.

Если $V_3 << c$ (или $c \to \infty$), то получаем аберрацию в рамках механики Ньютона: $tg\alpha = V_3/c$.

3) Эффект Доплера

Эффект Доплера (*Христиан Доплер, австрийский физик, математик, 1803-1853*) – изменение частоты волны при переходе от одной системы отсчета к другой. Сначала рассмотрим волну (подробнее о волнах см Глава 4), распространяющуюся вдоль оси x, в К и К' системах отсчета (рис. 5.7) со скоростью света c:

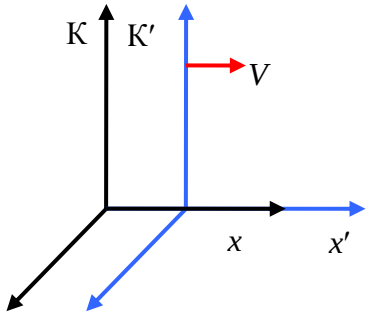

Рис. 5.7.

$$E(x,t) = E_0 Cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right),$$
$$E'(x',t') = E'_0 Cos\left(\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \alpha'\right) \qquad (2.5.21)$$

Здесь E_0 – амплитуда колебаний проекции вектора *напряженности электрического поля*, ω – *круговая частота* колебаний, выражение под косинусом определяют *фазу волны* в данной точке и данное время

$$\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha = \omega t - \frac{\omega}{c}x + \alpha = \omega t - kx + \alpha \qquad (2.5.22)$$

$k = \dfrac{\omega}{c}$ – *волновое число*, α – нулевая фаза.

Заметим, что в общем случае фаза волны - инвариантна во всех ИСО, т.е.

$$\omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega' t' - \vec{k}'\vec{r}', \qquad (2.5.23)$$

здесь $\vec{k} = \dfrac{\omega}{v^2}\vec{v}$ – волновой вектор, $\vec{v}$ – скорость распространения волны (в нашем случае $v = c$). Здесь фазы волны записаны так, что начала отсчета К' и К' систем совпадают в момент времени $t = t' = 0$. Инвариантность фазы доказывается по числу волн (например, максимумов), проходящих через одного и другого наблюдателя, находящихся в различных ИСО (см Сивухин Д.М. том IV, стр.652).

Положим без ограничения общности нулевую фазу равной $\alpha = 0$. Подставим в фазу волны (2.5.22), распространяющейся в К' системе, x' и t' через x и t по формулам преобразования Лоренца (2.5.1):

$$\omega'\left(\frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x - Vt}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \omega'\left(\frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 + \frac{V}{c}\right) - \frac{x}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 + \frac{V}{c}\right)\right) = \omega'\frac{1 + \frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Поскольку фаза должна иметь тот же вид, что в К системе отсчета, получаем:

$$\omega = \omega' \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega' \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \qquad (2.5.24)$$

Эта формула описывает так называемый *продольный эффект Доплера*. Пусть теперь ω $(= \omega')$ – частота, принимаемая приемником, ω_0 $(= \omega)$ – частота источника, V – скорость источника. Тогда, если источник и приемник удаляются друг от друга, имеем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (2.5.25)$$

при этом происходит смещение частоты в длинноволновую область. Если приемник и источник сближаются, то принимаемая частота увеличивается:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad (2.5.26)$$

Теперь рассмотрим эффект Доплера в общем случае. Пусть источник (И) расположен в К' системе, а приемник (Пр) в К системе (см рис. 5.8), причем направление распространения волны составляет угол φ с осью *x*. Плоская волна в К системе отсчета записывается:

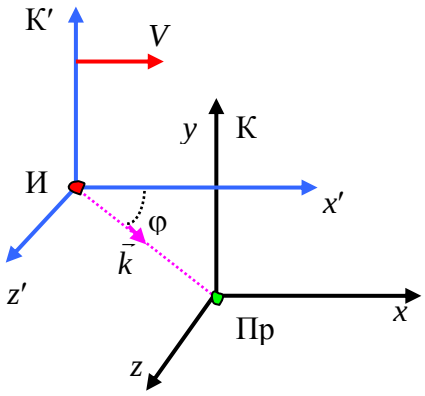

Рис. 5.8.

$$E = E_0 Cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = E_0 Cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right) =$$
$$= E_0 Cos\left[\omega\left(t - \frac{x Cos\varphi}{c} - \frac{y Cos\alpha}{c} - \frac{z Cos\gamma}{c}\right)\right] \qquad (2.5.27)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями типа

$$k_x x = \frac{\omega x}{c_{ph}} = \frac{\omega x}{c/Cos\varphi} = \frac{\omega x Cos\varphi}{c}, \qquad (2.5.28)$$

Отметим, что фазовая скорость волны вдоль оси *x* больше скорости света и определяется следующим выражением

$$c_{ph} = \frac{c}{Cos\varphi} > c. \qquad (2.5.29)$$

Запишем общую фазу волны и подставим преобразования Лоренца:

$$\omega\left(t - \frac{x}{c}Cos\varphi - \frac{y}{c}Cos\alpha - \frac{z}{c}Cos\gamma\right) = \omega\left(\frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x' + Vt'}{c\sqrt{1-\beta^2}}Cos\varphi - \frac{y'}{c}Cos\alpha - \frac{z'}{c}Cos\gamma\right) =$$

$$= \omega t'\left(\frac{1-\beta Cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - \frac{\omega x'}{c}\frac{\beta - Cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\omega y'}{c}Cos\alpha - \frac{\omega z'}{c}Cos\gamma = \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'$$

Таким образом, из сравнения полных фаз получаем:

$$\omega' = \omega_И = \omega\frac{1-\beta Cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_{Пр}\frac{1-\beta Cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (2.5.30)$$

Окончательно получаем формулу описывающую изменение частоты – эффект Доплера в общем случае:

$$\omega_{Пр} = \omega_И \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta Cos\varphi} \qquad (2.5.31)$$

При углах $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, т.е. при сближении И и Пр, получаем “синее” смещение частоты (частота увеличивается).

При углах $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, т.е. при удалении И и Пр, получаем “красное” смещение частоты (частота уменьшается).

При угле $\varphi = \pi/2$, также получаем смещение частоты – *поперечный эффект Доплера*:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} \qquad (2.5.32)$$

Это смещение частоты в красную сторону – чисто релятивистский эффект. Он мал: смещение частоты ~ β^2. Впервые его наблюдал на каналовых лучах Айве в 1932 году.