2.7. Релятивистская механика.

2.7.1. Как строить релятивистскую механику?

Уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v} \tag{2.7.1}$$

Однако, эти уравнения не инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поэтому надо найти такую форму законов, чтобы новые уравнения удовлетворяли следующим условиям:

1) были бы инвариантны относительно преобразований Лоренца, так как эти преобразования подтверждаются экспериментами,
2) и переходили бы в старые уравнения Ньютона в пределе малых скоростей $\beta = \frac{V}{c} \to 0$.

Для того чтобы построить новые уравнения, будем строить 4-х вектора для скорости, импульса, силы и т.д. Строить будем по аналогии с их трехмерными величинами и таким образом, чтобы они преобразовывались при переходе к другим инерциальным системам отсчета (ИСО) по правилам 4-х векторов и переходили в старые трехмерные вектора при малых скоростях:

$$\left(A^0, A^1, A^2, A^3\right) \text{ или } \left(A_0, A_x, A_y, A_z\right)$$

2.7.2. Собственное время и 4-х вектор скорости.

4-х вектор скорости определяется как производная 4-х радиуса по временному интервалу. Для нахождения 4-х вектора скорости нужен инвариант времени, в качестве которого может быть взято *собственное время*.

Собственное время – это время в *мгновенно-сопутствующей инерциальной системе отсчета* (ИСО). Мгновенно-сопутствующая ИСО – это инерциальная система отсчета, у которой в данный момент времени (или за короткий промежуток времени dt) скорость V равна скорости частицы v. Если частица движется с ускорением, то для определения собственного времени необходимо рассматривать набор (в принципе бесконечный) инерциальных систем отсчета и, переходя из одной ИСО в другую за короткое время dt, суммировать время полного движения. Итак, имеем следующее:

1) В мгновенно-сопутствующей ИСО К' за бесконечно малый промежуток времени dt' (в течение которого скорость частицы совпадает со скоростью системы отсчета $\vec{V}=\vec{v}$) координаты частицы не меняются: $dx'=dy'=dz'=0$.
2) В неподвижной (лабораторной) ИСО К за время dt произошло изменение координат: dx, dy, dz.

Поскольку интервал инвариантен:

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2,$$

то можно ввести собственное время (самое быстрое время): $d\tau = dt'$.

$$d\tau = \frac{dS}{c} = \sqrt{\frac{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{2.7.2}$$

где, как и ранее, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Итак, получаем для бесконечно малого интервала:

$$dS = cd\tau. \tag{2.7.3}$$

Так как скорость частицы меняется, то мы меняем мгновенно-сопутствующие ИСО, то есть берем ИСО с различными скоростями $(V = V(t))$, тогда параметр также зависит от времени $\beta = \beta(t)$ и полное собственное время, отсчитанное многими ИСО за промежуток $t_1 \div t_2$, по лабораторным часам равно:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2(t)}\,dt \tag{2.7.4}$$

Компоненты 4-х вектора скорости вводится следующим образом (под “вводится” понимаем запись, которая удовлетворяет правилам, отмеченным в пункте 2.7.1):

$$v^0 = \frac{dx^0}{d\tau}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \tag{2.7.5}$$

где x^0 и $\vec{r}$ – компоненты 4-х радиуса $\vec{\mathrm{R}} = (ct, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Подробнее 4-вектор скорости можно записать следующим образом (используя (2.7.2)):

$$\begin{cases} v^0 = \dfrac{dx^0}{d\tau} = \gamma \dfrac{d(ct)}{dt} = \gamma c \\ v^1 = \dfrac{dx^1}{d\tau} = \gamma \dfrac{dx}{dt} = \gamma v_x \\ v^2 = \gamma v_y, \quad v^3 = \gamma v_z \end{cases} \tag{2.7.6}$$

Или иначе, вводим 4х вектор скорости со следующими компонентами:

$$\vec{\mathrm{V}}(c\gamma, v_x\gamma, v_y\gamma, v_z\gamma) = \vec{\mathrm{V}}(c\gamma, \gamma\vec{v}) \tag{2.7.7}$$

Легко видеть, что *квадрат 4-вектора скорости – инвариант*:

$$\vec{\mathrm{V}}^2 = c^2\gamma^2 - \gamma^2\vec{v}^2 = (c^2 - v^2)\gamma^2 = c^2 = Inv \tag{2.7.8}$$

“Длина” 4х вектора скорости равна постоянной величине – скорости света.

Примечание 1. При $v << c$ имеем $\gamma \approx 1$ и тогда 4-вектор имеет компоненты: (c, v_x, v_y, v_z). Отсюда следует, что, если даже частица покоится, то нулевая компонента всегда не равна 0: $v_0 \neq 0$. Смысл этого состоит в том, что время всегда “течет” и покоя в 4-мерном пространстве Минковского нет.

2.7.3. 4-х вектор энергии-импульса.

Построим импульс по аналогии с классикой как произведение массы (массы покоя как инвариантной массы) на 4-х вектор скорости:

$$\vec{\mathrm{P}} = m_0\vec{\mathrm{V}} \tag{2.7.9}$$

или, переписывая то же самое, имеем:

$$\vec{\mathrm{P}} = m_0 \frac{d\vec{\mathrm{R}}}{d\tau} \tag{2.7.10}$$

Итак, записываем следующие компоненты 4-х вектора:

$$\vec{\mathrm{P}}(p^0, p^1, p^2, p^3) = \vec{\mathrm{P}}(m_0\gamma c, m_0\gamma v_x, m_0\gamma v_y, m_0\gamma v_z) = \vec{\mathrm{P}}(m_0\gamma c, m_0\gamma\vec{v}) \tag{2.7.11}$$

Трехмерный релятивистский импульс определяется:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = m_0\gamma\vec{v} \tag{2.7.12}$$

При $v << c$ получаем классический импульс $\vec{p} = m_0\vec{v}$.

Иногда в некоторых учебника можно увидеть следующую интерпретацию – импульс записывается как в механике Ньютона и при этом вводится понятие *релятивистской массы*:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad где \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{2.7.13}$$

На рисунке 7.1 представлен график зависимости релятивистской массы m от скорости. При стремлении скорости частицы к скорости света ее релятивистская масса растет до бесконечности.

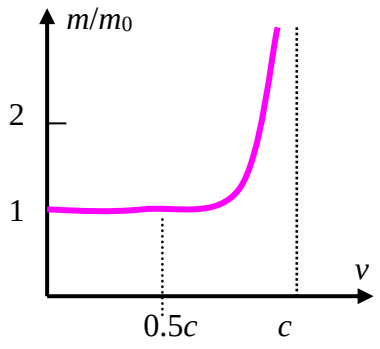

Рис. 7.1.

Однако, в физических рассуждениях удобнее и полезнее использовать величины одинаковые во всех системах отсчета, то есть такие как массу покоя m_0 и собственное время $d\tau$. В самом деле, все отличие релятивистского импульса $\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau}$ от Ньютоновского импульса $\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt}$ состоит только в замещении времени dt на $d\tau$, т.е. в замене лабораторного времени на собственное время $d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, а не в отличии m от m_0. И это связано с преобразованием Лоренца для временной компоненты, а не с зависимостью массы от скорости, поэтому и нет смысла вводить эту зависимость.

Нулевая компонента 4-х вектора импульса – связана с энергией

$$\frac{E}{c} = m_0 \gamma c \tag{2.7.14}$$

Подробнее об этом ниже.

2.7.4. Релятивистское уравнение движения. Пространственная часть.

Рассмотрим уравнение движения – аналог уравнения Ньютона. Напомним, как мы поступали в классической механике, когда получали полную энергию. В классической механике имеем трехмерную силу и классический импульс:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Множим обе части уравнения скалярно на вектор перемещения $\vec{v}dt$:

$$mvdv = \vec{F}\vec{v}dt$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2} + const\right) = \vec{F}\vec{v}dt$$

В классике обычно постоянная составляющая равна 0, и при условии равенства нулю потенциальной энергии $U = 0$ ($\vec{F} = -\nabla U = 0$) полная энергия совпадает с кинетической энергии $E = K = const$. Если $U \neq 0$, то $\vec{F} = -\nabla U$ и

$$-dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot \vec{v}dt.$$

Тогда имеем выражение для полной энергии $E = K + U = const$ и закон сохранения при движении в потенциальном поле.

Поступим по аналогии с рассмотренным выше рассуждением и в релятивистской механике, учитывая, что имеем дело с 4-х векторами:

$$\frac{d\vec{\mathsf{P}}}{d\tau} = \vec{\mathsf{F}} \tag{2.7.15}$$

где мы ввели *4-х вектор силы* $\vec{\mathsf{F}}\left(f^0, f^1, f^2, f^3\right)$. Его компоненты в принципе определяются из (2.7.15) дифференцированием компонент 4-х вектора импульса по инвариантному времени:

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{d}{d\tau}\left(m_0\gamma c\right) = \gamma\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma c\right) \\ f^\alpha &= \frac{d}{d\tau}\left(m_0\gamma v_\alpha\right) = \gamma\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma v_\alpha\right) \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

где α пробегает значения $\alpha = 1,2,3$ (или x,y,z) и v_α есть компоненты обычной трехмерной скорости (см формулы (2.7.6) и (2.7.7)).

Рассмотрим *пространственную часть уравнения* (2.7.16), где f^α компоненты 4-х вектора силы.

$$f^\alpha = \gamma\frac{d}{dt}\left(m_0\gamma v_\alpha\right) \tag{2.7.17}$$

Компоненты 4-х вектора силы должны быть пропорциональны соответствующим компонентам 3-х мерной силы, чтобы при $v << c$ уравнения перешли в уравнения Ньютона. Вводится компоненты 3-х мерной силы

F_α как производные по времени dt от импульса (более строго это обосновывается исходя из Лагранжиана), то есть имеем:

$$f^{\alpha} = \gamma F_\alpha \tag{2.7.18}$$

При этом получаем, что уравнение релятивистской механики инвариантно относительно преобразований Лоренца. Оно имеет примерно тот же вид, что уравнение Ньютона и при $v << c$ переходят в него. В самом деле, подставляя (2.7.18) в (2.7.17) и сокращая на γ, имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(m_0 \gamma v_\alpha\right) = F_\alpha$$

или иначе, записываем окончательно

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m_0 \gamma \vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{2.7.19}$$

Получили *пространственную часть* уравнения движения в релятивистской механике – *основное уравнение релятивистской динамики*.

2.7.5. Релятивистское уравнение движения. Временная часть.

Рассмотрим *временную часть уравнения движения* (2.7.16). Для того чтобы получить нулевую компоненту 4-х вектора силы, рассмотрим инвариант 4-х вектора скорости

$$c^2 = \left(v^0\right)^2 - \left(v^1\right)^2 - \left(v^2\right)^2 - \left(v^3\right)^2 = Inv$$

и продифференцируем его по собственному времени:

$$v^0 \frac{dv^0}{d\tau} - v^1 \frac{dv^1}{d\tau} - v^2 \frac{dv^2}{d\tau} - v^3 \frac{dv^3}{d\tau} = 0 \tag{2.7.20}$$

Учитывая, что компоненты 4-вектора скорости определяются (2.7.7), а компоненты 4-х силы (2.7.16) (выражаем из уравнений (2.7.16) производные $dv^i / d\tau$ и используем связь (2.7.18)), получаем:

$$\gamma c \frac{f^0}{m_0} - \gamma v_x \frac{\gamma F_x}{m_0} - \gamma v_y \frac{\gamma F_y}{m_0} - \gamma v_z \frac{\gamma F_z}{m_0} = 0 \tag{2.7.21}$$

Сокращая на фактор γ и массу покоя в уравнении (2.7.21), получаем, что нулевая компонента 4-х вектора силы равна:

$$f^0 = \gamma \frac{d}{dt}\left(m_0 \gamma c\right) = \frac{\gamma}{c}\left(\vec{F}, \vec{v}\right) \tag{2.7.22}$$

Итак, 4-х вектор силы Минковского имеет следующие компоненты:

$$\vec{\mathrm{F}}\begin{pmatrix} f^0 & f^1 & f^2 & f^3 \\ \frac{\gamma}{c}\left(\vec{F}, \vec{v}\right) & \gamma F_x & \gamma F_y & \gamma F_z \end{pmatrix} \equiv \vec{\mathrm{F}}\left(\frac{\gamma}{c}\left(\vec{F}, \vec{v}\right), \gamma \vec{F}\right) \tag{2.7.23}$$

Теперь из нулевой компоненты релятивистского уравнения движения (2.7.22) получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(m_0 \gamma c^2\right) = \left(\vec{F}, \vec{v}\right) \tag{2.7.24}$$

Справа в уравнении (2.7.24) стоит мощность обычной 3-х мерной силы, т.е. работа в единицу времени. Тогда левая часть по аналогии с классической механикой есть изменение энергии свободной частицы. Таким образом, проявляется *смысл нулевой компоненты 4-х вектора импульса как полной энергии свободной частицы, деленной на скорость*:

$$\vec{\mathrm{P}}\left(m_0 \gamma c = \frac{m_0 \gamma c^2}{c} = \frac{E}{c}, m_0 \gamma \vec{v}\right) \tag{2.7.25}$$

Итак, полная энергия свободной частицы:

$$E = m_0 \gamma c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.7.26}$$

Подведем итоги рассуждений этого параграфа.

1). 4-вектор импульса, который часто называют 4-х вектором энергии – импульса, записывается

$$\vec{\mathrm{P}}\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.7.27}$$

2). Уравнения движения в релятивистской механике – *пространственная и временная части динамических уравнений* – имеют вид соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m_0 \gamma \vec{v}\right) &= \vec{F} \\ \frac{d}{dt}\left(m_0 \gamma c^2\right) &= \vec{F}\vec{v} \end{aligned} \tag{2.7.28}$$

Заметим, что в уравнения (2.7.28) входят только трехмерные вектора.

Примечание 2. Временную часть уравнения можно было просто получить, исходя из пространственной части (2.7.19), умножив ее скалярно на скорость $\vec{v}$ и проведя математические преобразования:

$$d\left(m_0 \gamma \vec{v}\right)\vec{v} = \vec{F}\vec{v}dt = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Примечание 3. Отметим довольно неожиданный вывод: в релятивистской динамике вектор ускорения $\vec{a}$ не совпадает в общем случае с направлением вектора силы $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m_0 \gamma \vec{v}\right) = m_0 \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + m_0 \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} = m_0 \gamma \vec{a} + m_0 \vec{v} \frac{\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$