2.8. Энергия и способы ее выражения.

2.8.1. Инвариант 4-х вектора энергии-импульса и его нулевая компонента.

Еще раз запишем 4-х вектор энергии-импульса и его компоненты:

$$\vec{P}\left\{\frac{E}{c},\vec{p}\right\} \tag{2.8.1}$$

$$\frac{E}{c}=m_0\frac{cdt}{d\tau}=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \vec{p}=m_0\frac{d\vec{r}}{d\tau}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.8.2}$$

Инвариант 4-х вектора энергии-импульса:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2-\vec{p}^{\,2}=inv \quad \text{или} \quad E^2-p^2c^2=inv \tag{2.8.3}$$

Можно задать очевидный вопрос: почему мы уверены, что временная компонента 4-х вектора импульса есть энергия (деленная на скорость света)? Какие аргументы говорят в пользу этого? Приведем их.

а). Величина E имеет размерность релятивистской энергии – *Эрг = г* (*см*/*с*)^2 или *Дж = кг* (*м*/*с*)^2.

б). Так как из §2.7 имеем $\frac{dE}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$, то $dE=\vec{F}\cdot\vec{v}dt=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\delta A$. То есть приращение E представляет собой элементарную работу. Следовательно, по теореме о кинетической энергии dE есть приращение кинетической энергии, а сама величина E может отличаться от нее не более, чем на константу.

в). Временная компонента сохраняется, если сила $\vec{F}$ равна 0. В самом деле

$$\vec{F}=0,\qquad \frac{dE}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}=0,\qquad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=const \tag{2.8.4}$$

Можно говорить иначе: закон сохранения импульса выполняется, что есть экспериментальный факт. Закон сохранения энергии – тоже. Если пространственные компоненты сохраняются ($\vec{p}=const$), то временная компонента сохраняется тоже, т.е. снова убеждаемся, что эта величина связана с энергией.

г). Как будет доказано ниже, при малых скоростях получим $E\approx m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$, то есть отличается от обычной нерелятивистской кинетической энергии всего лишь на константу.

Рассмотрим следующий пример. Пусть 2 частицы движутся в направлении оси x с импульсами p_1 и p_2. Рассмотрим их абсолютно неупругое столкновение в системах К и К', записывая компоненты 4-х вектора энергии – импульса до столкновения и после столкновения.

4-х вектор импульса в К системе: $\left(\frac{E_1+E_2}{c},p_1+p_2,0,0\right)$ до столкновения

4-х вектор импульса в К' системе: $\left(\frac{E_1'+E_2'}{c},p_1'+p_2',0,0\right)$ до столкновения

Переход от К системы к системе отсчета К' для первой компоненты 4-х вектора до столкновения осуществляется обычным преобразованием Лоренца:

$$p_1'+p_2'=\frac{p_1+p_2-\beta\frac{(E_1+E_2)}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.8.5}$$

В результате неупругого столкновения импульс составной частицы стал равен p_0 в системе К и p_0' в системе К', а 4-х вектора энергии – импульса равны соответственно: $(E_0,p_0,0,0)$ и $(E_0',p_0',0,0)$. Связь между импульсами в этих системах равна:

$$p_0'=\frac{p_0-\beta\,{E_0}/{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.8.6}$$

По закону сохранения импульса имеем:

$$p_1 + p_2 = p_0, \quad p_1' + p_2' = p_0'$$

Тогда из равенств (2.8.5) и (2.8.6) получаем закон сохранения нулевой компоненты, т.е. энергии:

$$E_0 = E_1 + E_2 \tag{2.8.7}$$

Примечание 1: то же уравнение (2.8.7) можно получить из инварианта энергии-импульса, записывая его до и после реакции

$$\left(\frac{E_1 + E_2}{c}\right)^2 - (p_1 + p_2)^2 = \frac{E_0^2}{c^2} - p_0^2 \tag{2.8.8}$$

Это следствие законов сохранения.

Из рассмотренного примера следует интересный и важный факт, что при неупругом соударении энергия сохраняется! Таким образом, *релятивистская энергия учитывает и внутреннюю энергию частиц*.

Как результат получаем следующее:

1) каждой частице можно сопоставить релятивистскую энергию $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$
2) если несколько частиц, то их полная релятивистская энергия равна сумме энергий отдельных частиц
3) при взаимодействии между частицами системы энергии отдельных частиц изменяются, но их полная сумма сохраняется

2.8.2. Выражения для энергии одной частицы.

Приведем различные выражения для энергии частицы.

1) Свободная частица

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{2.8.9}$$

2) Частица покоится – скорость равна $v = 0$, тогда получаем энергию покоя частицы или системы частиц

$$E = m_0 c^2 \tag{2.8.10}$$

Энергия покоя – это та постоянная, которая входит в полную энергию частиц.

3) Инвариант энергии-импульса для одной частицы в двух ИСО K и K' равен:

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \frac{E'^2}{c^2} - \vec{p}'^{\,2} = inv \tag{2.8.11}$$

Если рассматриваем процесс в такой K' системе, где частица покоится и, следовательно, ее импульс $p' = 0$, тогда $E' = m_0 c^2$. Таким образом, получаем из (2.8.11) другое выражение для полной энергии через импульс и массу:

$$\begin{gathered} E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\ E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \end{gathered} \tag{2.8.12}$$

4) Кинетическая энергия частицы определяется как разность полной энергии и энергии покоя:

$$T = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \tag{2.8.13}$$

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right) \tag{2.8.14}$$

Связь импульса и кинетической энергии следует из (2.8.14):

$$T^2 + 2m_0c^2T = p^2c^2 \qquad (2.8.15)$$

5) Переход к классической механике при $v/c << 1$ или $p/m_0c << 1$ осуществляется путем разложения функции в ряд при малых значениях аргумента $f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 + \ldots$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)'\Bigg|_{\beta^2=0} \cdot \beta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)''\Bigg|_{\beta^2=0} \cdot \beta^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$$

Пренебрегая высшими степенями малых параметров, получаем:

$$T \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right) = \frac{m_0v^2}{2}$$
$$T \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2c^2} - 1\right) = \frac{p^2}{2m_0} \qquad (2.8.16)$$

6) Полезная формула для энергии и импульса получается из следующих формул:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем:

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} \qquad (2.8.17)$$

7) Ультрарелятивистский предел – это когда скорости частиц близки к скорости света $v \to c$ и $p >> m_0c$. Тогда выражение для энергии имеет вид:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \approx pc \qquad (2.8.18)$$

8) Безмассовые частицы: $m_0 = 0$. К ним относятся: фотон, нейтрино (факт до конца не установленный), глюон, гравитон. Из (2.8.12) и (2.8.17) имеем:

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} = \frac{pc\vec{v}}{c^2} = \frac{v\vec{p}}{c}, \qquad (2.8.19)$$

Отсюда следует, что $v = c$, т.е. *такие частицы могут двигаться только со скоростью света*.

Энергия фотона пропорциональна его частоте: $E = \hbar\omega = h\nu$, импульс: $p = \frac{\hbar\omega}{c}$. Запишем 4-х вектор фотона и его компоненты:

$$\vec{\mathrm{P}} = \vec{\mathrm{P}}\left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\vec{\hbar\omega}}{c} = \hbar\vec{k}\right). \qquad (2.8.20)$$

Легко убедиться, что инвариант энергии – импульса фотона равен 0.

Примечание 2: инвариантность фазы, о которой говорилось в параграфе 2.5, можно рассматривать как скалярное произведение двух 4-х векторов: 4-х вектора энергии – импульса фотона и 4-х радиус-вектора $\left(\vec{\mathrm{P}},\vec{\mathrm{R}}\right) = \frac{\hbar\omega}{c}\cdot ct - \hbar\vec{k}\cdot\vec{r}$. Скалярное произведение двух 4-х векторов есть инвариант.

---

9) На рисунке 8.1 представлена диаграмма, объединяющая разные выражения для энергии релятивистских частиц или систем. Причем разные формулы, дающие энергию, удобны для анализа различных экспериментов. Разберем кратко формулы, входящие в рис. 8.1.

(а) В эту формулу входит скорость, энергия и масса. В эксперименте скорость определяется по времени пролета, энергия E – из законов сохранения в процессах столкновения частиц между собой.

(б) Формула удобна, когда нас не интересует скорость, а основное внимание направлено на проверку или применение законов сохранения.

(в) По этой формуле скорость определяется по времени пролета частиц, импульс по ее траектории (например, по искривлению траектории частицы в магнитном поле).

(г) Выражение для энергии удобно, когда нас не интересует масса.

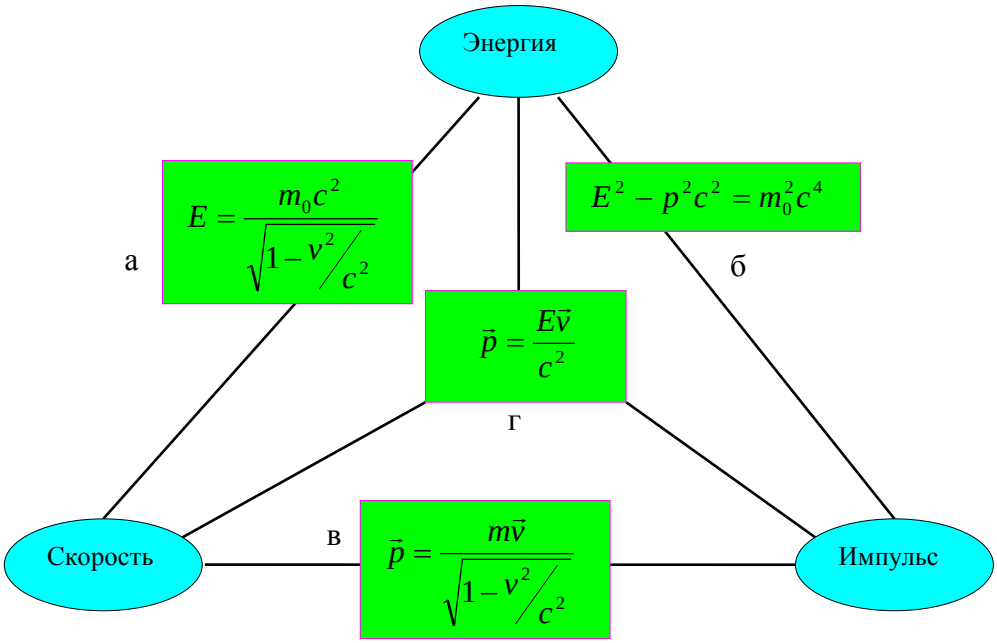

Рис. 8.1.

10) Частица в потенциальном поле. Если частица движется в потенциальном поле, то сохраняется сумма энергий:

$$E + U = m_0 \gamma c^2 + U = const$$

Часто в физике вводится функция Гамильтона:

$$H = E + U = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} + U \qquad (2.8.21)$$

Она играет большую роль в классической теоретической механике и в квантовой теории.

1.8.3. <u>Взаимосвязь энергии и массы покоя</u>.

В классической механике мы говорили о законе сохранения массы. Проводили оценки изменения массы по формуле $\Delta E = \Delta mc^2$, которое оказалось малым в случае неупругих столкновений (при небольших скоростях, где были справедливы преобразования Галилея) и химических реакциях.

В релятивистской теории связаны две важнейшие характеристики материи: энергия и инертность (масса) $E = mc^2$. Иногда говорят об эквивалентности энергии и массы, но это не общепринято.

Всякое изменение релятивистской массы сопровождается изменением энергии. Всякая энергия (полная, кинетическая, потенциальная) обладает инертными свойствами. В отличие от Ньютоновской механики закон сохранения энергии справедлив при упругих и неупругих ударах. При неупругих ударах масса составной частицы не равна сумме масс составных частиц.

Рассмотрим опять в качестве примера неупругое столкновение 2-х частиц с образованием одной частицы. В системе отсчета, где одна частица покоится, а другая налетает (рис. 8.2), инвариант энергии-импульса запишется:

$$E^2 - p^2c^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 = inv\,, \qquad (2.8.22)$$

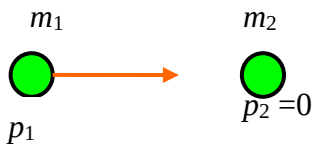

Рис. 8.2.

Здесь энергии и импульсы равны, соответственно

$$E_1 = m_1c^2 + T_1, \quad E_2 = m_2c^2,$$

$$p_1 = p_1, \qquad p_2 = 0$$

Инвариант есть инвариант и для образовавшейся частицы массы m_3 и причем в любой инерциальной системе отсчета. Выберем новую систему отсчета такой, что образовавшаяся частица в ней покоится, то есть $p' = 0$, $E' = m_3c^2$:

$$\left(E_1 + m_2c^2\right)^2 - p_1^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2 = m_3^2c^4 \qquad (2.8.23)$$

Подставляя в последнее равенство E_1, получим:

$$m_3^2 = \left(m_1 + m_2\right)^2 + \frac{2m_2T_1}{c^2} \qquad (2.8.24)$$

т.е. $m_3 > m_1 + m_2$. Масса образовавшейся частицы оказалась больше суммы масс составных частиц. Это связано с тем, что часть кинетической энергии налетающей частицы T_1 перешла во внутреннюю энергию составной частицы, что привело к увеличению ее массы покоя.

Закон сохранения энергии – импульса и соотношение между массой и энергией не только нашли экспериментальное подтверждение, но и стали основными положениями современной физики, в основном ядерной физики и физики элементарных частиц.

Означает ли эйнштейновское утверждение об эквивалентности массы и энергии, что энергия – это то же самое, что масса? Нет! Величина энергии зависит от того, в какой ИСО мы рассматриваем частицу. Величина же массы покоя не зависит от выбора ИСО. Энергия всего лишь временная компонента 4-х вектора, тогда как масса определяется как полная абсолютная величина этого 4-х вектора.

Временная компонента 4-х вектора совпадает с его абсолютной величиной лишь в том случае, когда пространственные компоненты равны 0. Лишь тогда величина энергии совпадает с величиной массы покоя. (см доп. литературу Тейлор Э.Ф. и Уиллер Д.А. “Физика пространства-времени”).