2.9. Примеры применения релятивистской механики.

2.9.1. Дефект массы и энергия связи.

Рассмотрим проблему энергии связи системы связанных частиц. Будем ее рассматривать поэтапно.

1) Полная энергия системы взаимодействующих частиц равна:

$$E = \sum_i \mathrm{E}_i + U\,, \tag{2.9.1}$$

где E_i – полная энергия одной частицы, U – энергия взаимодействия частиц, которая равна работе, необходимой для разделения системы на отдельные частицы и разнесения их на расстояние, где они уже не взаимодействуют.

2) Полная масса покоя системы взаимодействующих частиц:

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{\sum_i \mathrm{E}_i + U}{c^2} = \sum_i m_{0i} + \frac{1}{c^2}\sum_i T_i + \frac{U}{c^2} \tag{2.9.2}$$

где m_{0i} – массы покоя отдельных составляющих частиц, T_i – кинетические энергии каждой из частиц.

3) Сделаем предположение, которое часто выполняется в атоме, ядре и подобных системах микрочастиц, что суммарная кинетическая энергия частиц мала, по сравнению с энергией связи, т.е. можно положить $M \approx \sum_i m_{0i} + \frac{U}{c^2}$. Таким образом, в системе частиц следующая разность масс

$$\sum_i m_{0i} - M = \Delta M \approx -\frac{U}{c^2} \tag{2.9.3}$$

всегда отлична от нуля. Это явление имеет название *дефекта массы*. Система частиц устойчива, если $U < 0$ и $\Delta M > 0$, т.е. когда сумма масс составляющих систему частиц больше массы всей системы. *Энергия связи* системы при этом определяется:

$$|U| = \Delta M \cdot c^2 \tag{2.9.4}$$

Примеров проявления дефекта массы достаточно много: 1) масса ядра меньше суммы масс, составляющих его нуклонов, 2) то же для элементарных частиц, в частности для адронов, состоящих из более массивных частиц – кварков.

2.9.2. Реакция распада частиц.

Пусть распадается частица массы M на две частицы. Запишем для распадающейся частицы инвариант 4-х вектора энергии-импульса до распада:

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 = inv \tag{2.9.5}$$

Рассмотрим процесс в системе центра инерции (СЦИ), в которой полный импульс равен 0: $p = 0$. В результате распада получаем 2 частицы с импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ и массами m_{01} и m_{02}. Тот же инвариант энергии - импульса после распада имеет вид:

$$inv = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 = M^2c^4 = (E_1 + E_2)^2 \tag{2.9.6}$$

поскольку в СЦИ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Тогда

$$E_1 + E_2 = Mc^2 = T_1 + m_{01}c^2 + T_2 + m_{02}c^2 = (m_{01} + m_{02})c^2 + T_1 + T_2 \tag{2.9.7}$$

Так как кинетические энергии T_1 и $T_2 > 0$, то реакция самопроизвольного распада частицы возможна лишь в случае

$$M > m_{01} + m_{02}.$$

Масса распадающегося тела должна превышать сумму масс покоя получившихся тел. Если это не так, то тогда, чтобы частица могла распасться, необходим подвод тепла (энергии).

Рассмотрим пример: распад нейтрона $n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e$. Массы измеряем в *МэВ* (1*эВ* энергии = заряд e^- × разность потенциалов в 1 *В*):

$$m_{0n} = 939.6\ МэВ$$
$$m_{0p} = 938.3\ МэВ$$
$$m_{0e} = 0.511\ МэВ$$

Оставшуюся энергию уносит антинейтрино $\tilde{\nu}_e$. Ранее, пока не ввели и не обнаружили на эксперименте нейтрино и антинейтрино, в этих реакциях предполагалось нарушение закона сохранения энергии.

2.9.3. Рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар.

Рождение электронно-позитронной пары. Фотоны рождают электрон-позитронные пары. Один γ-квант (фотон) *не может* создать электрон - позитронную пару $\left(e^- - e^+\right)$ в вакууме. Это можно доказать из законов сохранения. Это также следует из инварианта, когда рассматриваем процесс в системе центра инерции:

$$\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 = 0 = 4m_0^2c^2 - p^2 = 4m_0^2c^2 \neq 0 \qquad (2.9.8)$$

Инвариант энергии – импульса для фотона равен нулю, а инвариант энергии – импульса электрон-позитронной пары не равен нулю. Это и приводит к запрещению процесса превращения кванта в электрон-позитронную пару в отсутствие других тел.

Так или иначе, для того, чтобы процесс рождения пары состоялся, должно быть наличие третьего тела (например, ядро), которому можно передать импульс. Следовательно, этому телу передается и часть энергии E, т.е. энергетический порог реакции должен быть больше суммы энергий покоя электрона и позитрона (т.е. $> 2m_0c^2$).

До реакции имеем

γ- квант:

$E = E_{порог}$

$p_\gamma = \dfrac{E_{порог}}{c}$

Ядро: M,

$E = Mc^2$

Полный импульс системы

$p = p_\gamma$

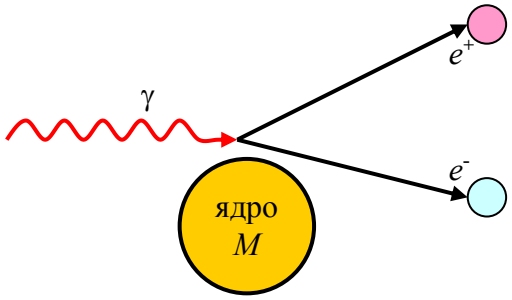

Рис. 9.1.

После реакции имеем

электрон e^- и m_0

$E = m_0c^2$,

позитрон e^+ и m_0

$E = m_0c^2$

Ядро: M

Полный импульс системы в СЦИ $p = 0$

Запишем инвариант энергии-импульса до и после реакции (после реакции запишем его в СЦИ):

$$\left(E_{порог} + Mc^2\right)^2 - p_\gamma^2c^2 = \left(E_{порог} + Mc^2\right)^2 - \left(\frac{E_{порог}}{c}\right)^2 c^2 = \left(Mc^2 + 2m_0c^2\right)^2 \qquad (2.9.9)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем пороговую энергию

$$E_{порог} = 2m_0c^2\left(1 + \frac{m_0}{M}\right) \qquad (2.9.10)$$

Порог реакции оказывается несколько больше, чем энергия $2m_0c^2$, т.е. больше, чем энергия покоя электрона и позитрона.

Аннигиляция электрон-позитронных пар. Аналогично процессу рождения электрон – позитронной пары одним фотоном получаем, что один фотон не может появиться в результате обратного процесса - аннигиляции электрона и позитрона. Как и ранее в СЦИ импульс пары $\left(e^- - e^+\right)$ равен 0, а импульс кванта всегда не равен нулю $p_\gamma \neq 0$. В вакууме (без присутствия третьего тела) электрон и позитрон аннигилируют, по крайней мере, на два γ-кванта из-за законов сохранения энергии-импульса. Энергия, выделяемая в каждом акте, равна, по крайней мере:

$$\Delta E = 2m_0c^2 = 1.02\,MeV \qquad (2.9.11)$$

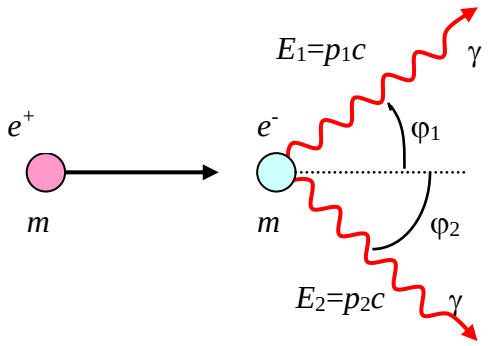

Рис. 9.2.

Пусть одна частица – пусть позитрон – налетает на электрон с энергией E и импульсом p. Энергия позитрона – E, энергия электрона – m_0c^2, энергии фотонов – $E_1 = p_1c, \quad E_2 = p_2c$. Закон сохранения энергии:

$$E + m_0c^2 = E_1 + E_2 \tag{2.9.12}$$

Закон сохранения импульса:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{2.9.13}$$

Запишем (2.9.13) через угол вылета 1-го кванта φ_1 по отношению к импульсу позитрона, подставив (2.9.12):

$$\left(\vec{p} - \vec{p}_1\right)^2 = p^2 - 2pp_1\cos\varphi_1 + p_1^2 = p_2^2 = \frac{E_2^2}{c^2} = \frac{\left(E + m_0c^2 - E_1\right)^2}{c^2} \tag{2.9.14}$$

Раскрывая квадрат и учитывая $E_1 = p_1c$ и $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$, получаем:

$$E_1 = \frac{m_0c^2\left(m_0c^2 + E\right)}{m_0c^2 + E - pc\cdot\cos\varphi_1} = \frac{m_0c^2\left(2m_0c^2 + T\right)}{2m_0c^2 + T - \cos\varphi_1\sqrt{T^2 + 2m_0c^2T}} = \frac{m_0c^2}{1 - \dfrac{\cos\varphi_1}{\sqrt{1 + \dfrac{2m_0c^2}{T}}}} \tag{2.9.15}$$

Здесь ввели кинетическую энергию позитрона и использовали, что $pc = \sqrt{T^2 + 2m_0c^2T}$.

Максимальная энергия кванта получается при $cos\varphi_1 = 1$:

$$\left(E_1\right)_{\max} = \frac{m_0c^2}{1 - \left(1 + \dfrac{2m_0c^2}{T}\right)^{-1/2}} \tag{2.9.16}$$

Рассмотрим предельные случаи для уравнения (2.9.16):

1) при $T >> 2m_0c^2$ получаем $\left(E_1\right)_{\max} \approx \dfrac{m_0c^2}{1 - 1 + \dfrac{m_0c^2}{T}} = T$;

2) при $T = 0$ $\left(E_1\right)_{\max} = m_0c^2$

Минимальная энергия кванта получается при $cos\varphi_1 = -1$:

$$\left(E_1\right)_{\min} = \frac{m_0c^2}{1 + \left(1 + \dfrac{2m_0c^2}{T}\right)^{-1/2}} \tag{2.9.17}$$

Рассмотрим предельные случаи в уравнении (2.9.17):

1) при $T = 0$ $\left(E_1\right)_{\min} = m_0c^2$;

2) при $T >> 2\,m_0\,c^2$ получаем $\left(E_1\right)_{\min} \approx \dfrac{m_0c^2}{1 + 1 - \dfrac{m_0c^2}{T}} = \dfrac{m_0c^2}{2}$

Существует огромное количество реакций рождения и уничтожения частиц, неупругих и упругих столкновений. Их кинематический анализ проводится на основе законов сохранения и релятивистского инварианта. В том числе тот факт, что свет, или что тоже фотон, обладает импульсом проявляется во многих процессах, связанных с упругим рассеянием фотонов: эффект Комптона, давление света и других.