РАБОТА 2.15
СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО-ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ
(фигуры Лиссажу)

Допустим, что материальная точка может совершать колебания как вдоль оси X, так и вдоль перпендикулярной к ней оси Y. Если возбудить оба колебания, материальная точка будет двигаться по некоторой, вообще говоря, криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = a\cos\omega t; \quad y = b\cos(\omega t + \alpha), \tag{1}$$

где α - разность фаз обоих колебаний.

Выражение (1) представляет собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнения (1) параметр t. Из первого уравнения следует, что

$$\cos\omega t = \frac{x}{a}. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\sin\omega t = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{3}$$

Теперь развернем косинус из уравнений (1) по формуле для косинуса суммы, подставляя при этом вместо $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ их значения (2) и (3). В результате получим

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha \mp \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Последнее уравнение после несложных преобразований можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha. \tag{4}$$

Последнее уравнение есть, вообще говоря, уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей x и y. Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд a и b и разности фаз α.

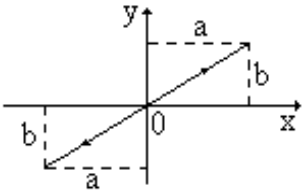

Рис.1

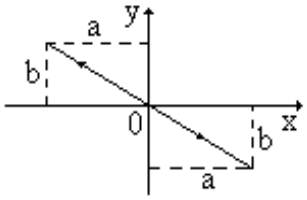

Рис.2

Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз α равна нулю. В этом случае уравнение (4) принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{b}{a}x. \tag{5}$$

Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой, раной $\sqrt{a^2 + b^2}$ (рис.1).

2. Разность фаз α равна $\pm\pi$. Уравнение (4) принимает вид

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0, \qquad (6)$$

откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис.2)

$$y=-\frac{b}{a}x$$

3. При $\alpha = \pm \pi / 2$ уравнение (4) переходит в

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (7)$$

то есть в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд a и b эллипс вырождается в окружность.

Случаи $\alpha = + \pi / 2$ и $\alpha = - \pi / 2$ отличаются направлением движения по эллипсу или по окружности. Если $\alpha = + \pi / 2$ уравнение (1) можно записать следующим образом

$$x=a\cos\omega t, \quad y=-b\sin\omega t. \qquad (8)$$

В момент t=0 тело находится в точке 1 (рис.3). В последующие моменты времени координата x уменьшается, а координата y становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке.

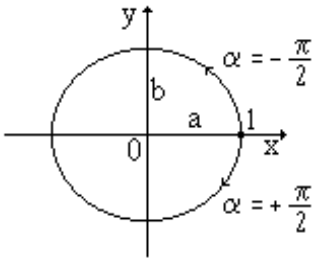

Рис.3

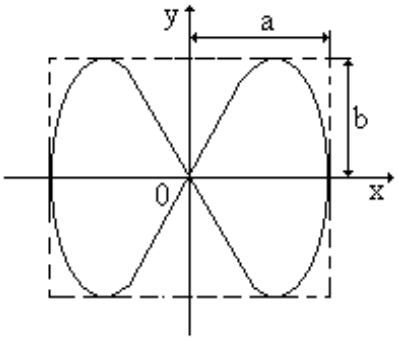

Рис.4

При $\alpha = - \pi / 2$ уравнения колебаний имеют вид

$$x=a\cos\omega t, \quad y=b\sin\omega t. \qquad (9)$$

Отсюда можно заключить, что движение происходит против часовой стрелки.

Из сказанного можно заключить, что равномерное движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$x=R\cos\omega t, \quad y=\pm R\sin\omega t \qquad (10)$$

(знак «+» в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак «-» - движению по часовой стрелки).

В случае, когда частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются на очень малую величину $\Delta\omega$, их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с медленно изменяющейся разностью фаз. В самом деле, уравнения колебаний можно представить следующим образом:

$$x=a\cos\omega t, \quad y=b\cos\left[\omega t+(\Delta\omega t+\alpha)\right]$$

и выражение $\Delta\omega t+\alpha$ рассматривать как разность фаз, медленно изменяющуюся со временем по линейному закону.

Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать форму, отвечающую всем значениям разности фаз от $-\pi$ до $+\pi$.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых **фигурами Лиссажу**. На рис.4 показана одна из простейших траекторий, получающаяся при отношении частот 1:2 и разности фаз $\pi/2$. Уравнения колебаний имеют вид

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\cos(2\omega t + \pi/2).$$

За то время, пока вдоль оси x точка успевает переместиться из одного крайнего положения в другое, вдоль оси y, выйдя из нулевого положения, она успевает достигнуть одного крайнего положения, затем другого и вернуться в нулевое положение.

Рис.5

При отношении частот 1:2 и разности фаз, равной нулю, траектория вырождается в незамкнутую кривую (рис.5), по которой точка движется туда и обратно. Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу.

Установка

Установка приведена на рис.6.

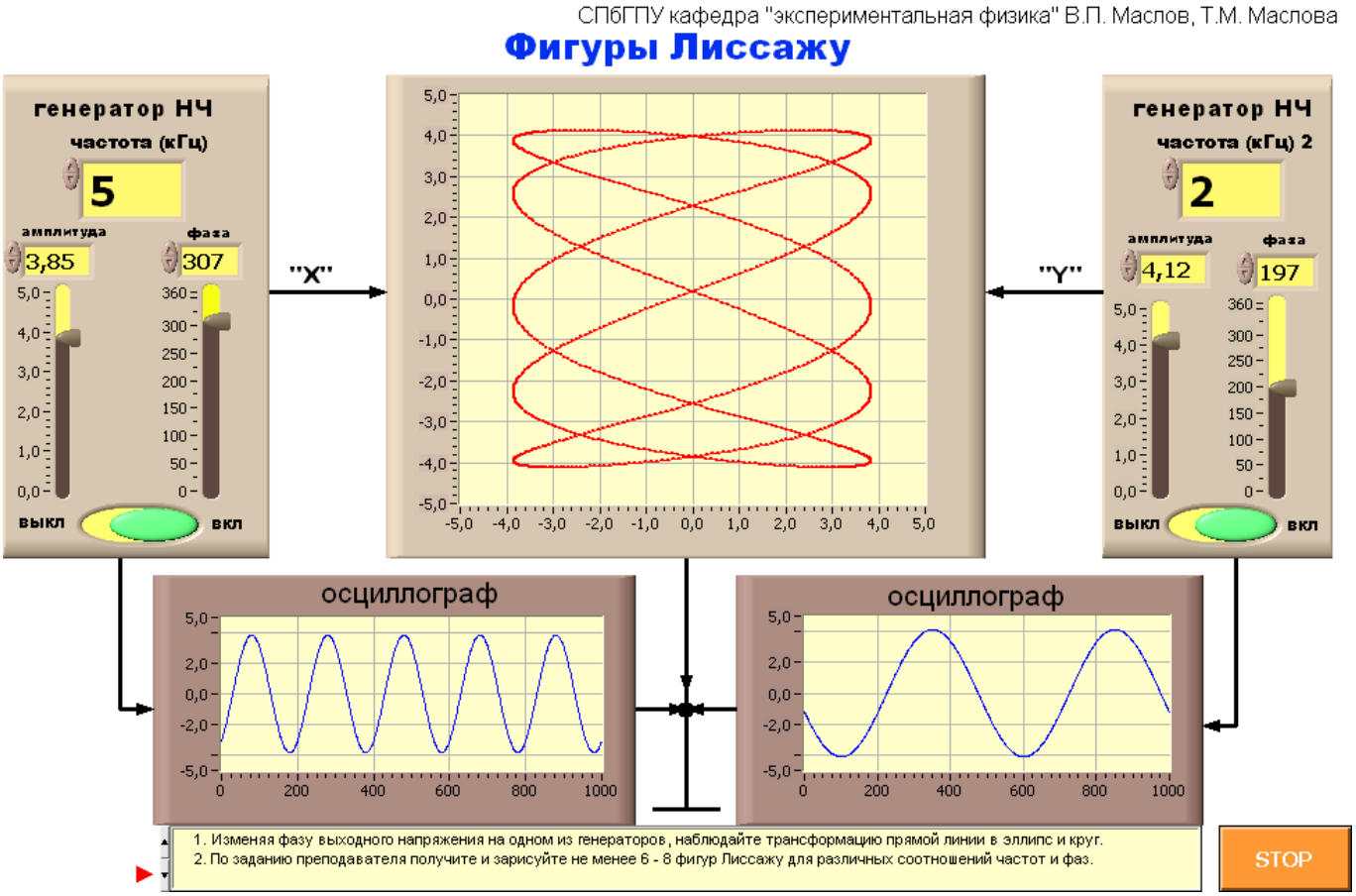

Рис.6

Для наблюдения фигур Лиссажу на экране осциллографа служат два генератора низкой частоты, напряжения с которых подается соответственно на входы «Y» и «X». Каждый генератор позволяет изменять частоту, амплитуду и фазу сигнала. Для визуального контроля подаваемого напряжения служат осциллографы.

Измерения и обработка результатов

Перед запуском программы с помощью инструмента «УПРАВЛЕНИЕ» установите значение частоты на генераторах НЧ, равное 2 кГц, амплитуду - 5 В, фазу - 0. Запустите программу.

1. Изменяя фазу выходного напряжения на одном из генераторов, наблюдайте трансформацию прямой линии в эллипс и круг.
2. По заданию преподавателя получите и зарисуйте не менее 6 - 8 фигур Лиссажу для различных соотношений частот и фаз.

Литература

1. И.В.Савельев. Курс общей физики, т.1 стр.201-204, 1982