САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

М.А.Зеликман

Курс лекций по физике

1-й семестр

Классическая механика.
Специальная теория относительности.
Механические колебания.
Молекулярная физика и термодинамика.
Гидродинамика.

Учебник для студентов
физических специальностей

Санкт-Петербург
2023

<u>Векторы и их свойства</u>

Вектор – это величина, характеризующаяся не только своим численным значением, но и направлением. Модуль вектора – это его длина (число), он всегда >0: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

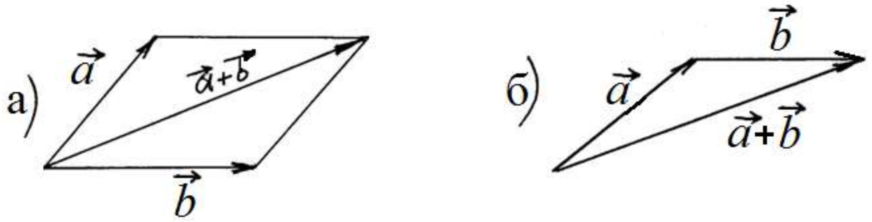
Обозначаются векторы стрелкой над буквой - $\vec{a}$, в учебниках - жирной буквой.

Действия с векторами:

1) Сложение векторов – два способа.

   а) по правилу параллелограмма (если исходят из одной точки)

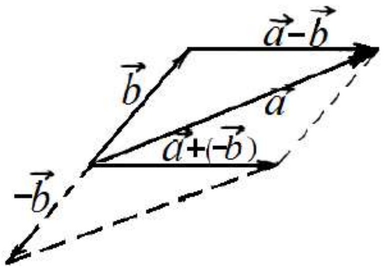
   б) по правилу треугольника (если следуют один за другим)



2) Вычитание векторов – два способа.

   а) Прибавить вектор с противоположным знаком: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

   б) Найти вектор, который надо прибавить к $\vec{b}$, чтобы получить $\vec{a}$.



3) Умножение вектора на число

Вектор $k\vec{a}$, где k – число, - это вектор, направленный в сторону $\vec{a}$, но с длиной, большей в k раз. Если k<0, то вектор $k\vec{a}$ направлен в противоположную $\vec{a}$ сторону, а его длина больше в $|k|$ раз.

Единичный вектор (орт) – вектор единичной длины. Обозначается $\vec{e}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

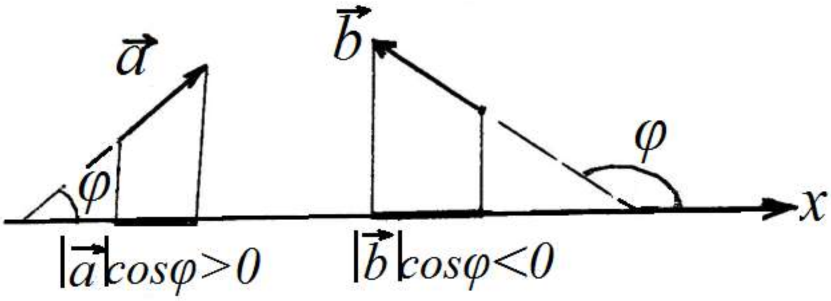
$\vec{e} = \vec{a}/\left|\vec{a}\right| = \vec{a}/a$.

4) Проекция вектора - это число. Она >0, если направление перемещения от проекции начала вектора к проекции его конца совпадает с направлением оси, и <0, если наоборот.

$a_x = \left|\vec{a}\right|\cos\alpha$

Проекция суммы векторов равна сумме проекций:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \qquad \Rightarrow \qquad a_x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x}.$$

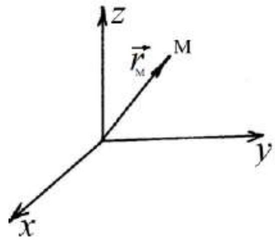


5) Выражение вектора через его проекции на координатные оси

$\vec{e}_x = \vec{i}\,, \vec{e}_y = \vec{j}, \vec{e}_z = \vec{k}$

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, если $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$.

Квадрат модуля вектора равен сумме квадратов его проекций, только если система координат декартова, т.е. векторы $\vec{i}\,, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно перпендикулярны.



6) Радиус-вектор точки – это вектор, проведенный в эту точку из начала координат.

$$\vec{r}_M = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

В декартовой системе координат $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

<u>Примечание.</u> Правой системой координат называется такая, в которой, если смотреть так, что ось *x* входит в глаз, то поворот от оси *y* к оси *z* происходит против часовой стрелки. Система левая, если наоборот.

7) <u>Скалярное произведение векторов</u> (число).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,\alpha$$

Скалярным произведением векторов называется произведение модулей этих векторов и косинуса угла между ними.

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1\ ; \qquad \vec{i}\vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\pi/2) = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\,\vec{k} = 0$$

<u>Свойства скалярного произведения.</u>

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – переместительный закон.

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ - распределительный закон.

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ - через проекции векторов (!!!)

8) <u>Векторное произведение векторов</u> – это вектор, направленный перпендикулярно плоскости, в которой расположены исходные векторы, причем так, что, если смотреть с его конца, то поворот от первого вектора ко второму происходит против часовой стрелки, а модуль его равен произведению модулей исходных векторов и синуса угла между ними.

$\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a},\vec{b}]$ - обозначение.

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha$

<u>Свойства векторного произведения.</u>

$$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ;\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ;\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

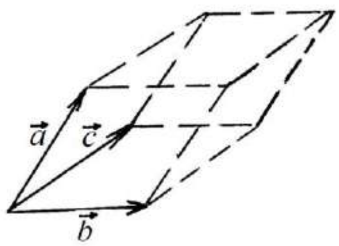
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=\vec{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\vec{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$ - определитель.

9) <u>Смешанное произведение векторов</u>

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\pm V_{призмы}$$

Смешанное произведение векторов – это число, модуль которого равен объему призмы, построенной на основе этих трех векторов. Знак плюс, если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую систему координат, минус – если левую.



10) <u>Двойное векторное произведение векторов</u>

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ - формула «бац минус цаб».

****

<u>Греческий алфавит</u>

Α,α - альфа	Β,β - бета	Γ,γ - гамма	Δ,δ - дельта	Ε,ε - эпсилон
Ζ,ζ - дзета	Η,η - эта	Θ,θ -тета	Ι,ι - йота	Κ,κ - каппа
Λ,λ - лямбда	Μ,μ - мю	Ν,ν - ню	Ο,ο - омикрон	Π,π - пи
Ρ,ρ - ро	Ξ,ξ - кси	Σ,σ - сигма	Τ,τ - тау	Υ,υ - ипсилон
Φ,φ - фи	Χ,χ - хи	Ψ,ψ - пси	Ω,ω - омега	

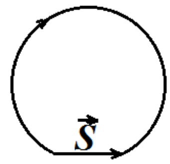
МЕХАНИКА

Глава 1. Кинематика.

§1.Скорость.

Материальная точка – тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Траектория – линия, по которой движется тело.



Перемещение $\vec{S}$ - вектор, направленный из начальной в конечную точку траектории.

Путь l – длина траектории (скаляр).

Равномерное прямолинейное движение (РПД) – такое, при котором точка за ЛЮБЫЕ равные промежутки времени совершает одинаковые ПЕРЕМЕЩЕНИЯ.

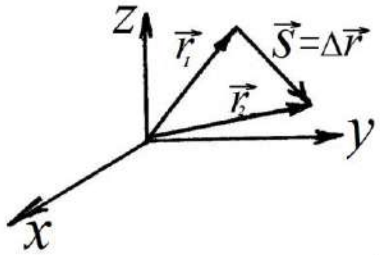
Скорость РПД – отношение перемещения ко времени, за которое оно произошло.

Средняя скорость (любого движения) - отношение всего перемещения ко времени $\langle \vec{v} \rangle = \vec{S}/t$

Средняя путевая скорость - отношение полного пути ко времени: $\langle v_{путевая} \rangle = l/t$.

Мгновенная скорость – это предел отношения перемещения ко времени при стремлении промежутка времени к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \vec{S} / \Delta t) = \frac{d\vec{S}}{dt} = \dot{\vec{S}}(t) .$$



Точкой над величиной всегда обозначают производную по времени.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \neq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

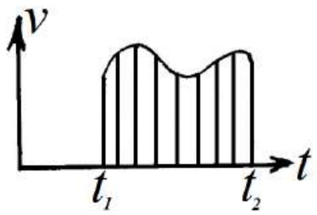
При $\Delta t \to 0 \;\; \Delta l \to |\Delta \vec{r}| \Rightarrow v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt} = \dot{l}$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, то есть $v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Можно записать так: $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к траектории в данной точке, направленный в сторону движения.

Найдем путь от t_1 до t_2:



$$l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$$

$\Delta l_i = v_i \Delta t_i$, тогда $l = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i$. Устремляя все промежутки времени Δt_i к нулю, получим $l = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ - для пути. Аналогично для перемещения: $\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{S}$

§2.Ускорение.

Равноускоренное движение (РУД) – такое, при котором точка за ЛЮБЫЕ равные промежутки времени изменяет свой вектор скорости на одну и ту же величину.

Ускорением РУД называется отношение изменения вектора скорости ко времени, за которое оно произошло.

$$\vec{w} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

При произвольном движении вводятся понятия среднего и мгновенного ускорения:

$$\langle \vec{w} \rangle = \frac{\vec{v}_{кон} - \vec{v}_{нач}}{t};$$

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$ - вторая производная по времени от радиус-вектора.

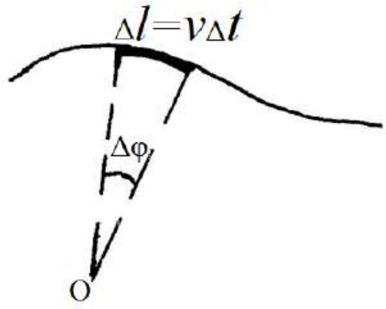
$$\vec{w} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k} \Rightarrow w_x = \dot{v}_x, \quad w_y = \dot{v}_y, \quad w_z = \dot{v}_z, \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

Записав скорость в виде $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$, получим $\vec{w} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \dot{v} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \dot{\vec{\tau}} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$,

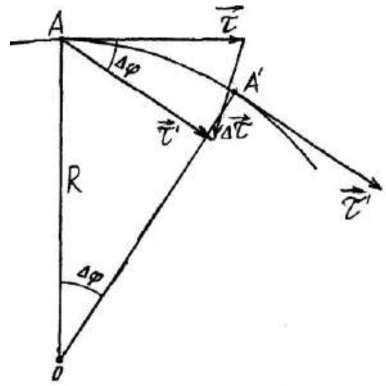
где $\vec{w}_\tau = \dot{v} \cdot \vec{\tau}$ - касательное (тангенциальное) ускорение, $\vec{w}_n = v \cdot \dot{\vec{\tau}}$ - нормальное ускорение, направленное по нормали к траектории.

$$w_\tau = \dot{v}$$

Если $\dot{v} > 0$, то вектор $\vec{w}_\tau$ направлен вдоль $\vec{\tau}$, если $\dot{v} < 0$, то против, если $\dot{v} = 0$, то $\vec{w}_\tau = 0$. Нормальное ускорение w_n зависит от $\dot{\vec{\tau}}$, то есть от скорости изменения направления касательной к траектории. Чем траектория сильнее искривлена и чем быстрее движется частица, тем больше w_n. Степень искривленности ПЛОСКОЙ кривой характеризуется кривизной $c = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l}$.



Пусть точка движется по окружности с центром О. За время Δt она пришла из A в A'. Тогда $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}' - \vec{\tau}$. При произвольном движении в течение очень малого промежутка времени точка движется по окружности, затем переходит на другую окружность и т.д. Взятие предела в определении кривизны позволяет считать данный участок дугой окружности (прямая – частный случай окружности с $R = \infty$). Тогда



$$c = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}.$$

****

<u>Напоминание о единицах измерения угла:</u>

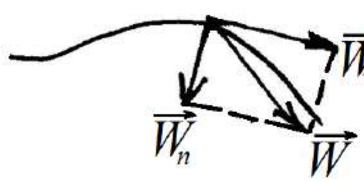
$1°$ - *центральный угол, опирающийся на дугу, равную 1/360 окружности.*

1 *радиан - центральный угол, опирающийся на дугу, равную радиусу. Из этого определения следует, что длина дуги окружности равна* $l_{дуги} = R\varphi$, *а площадь сектора* $S_{сект} = R^2\varphi/2$.

****

Из полученной формулы ясно, почему величину $1/c$ называют радиусом кривизны кривой в точке. Для ПЛОСКИХ кривых существует формула $R_{кр.} = \dfrac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}$. Радиус кривизны – это радиус окружности, сливающейся с данной кривой на бесконечно малом участке. Центр такой окружности называют центром кривизны в данной точке кривой.

Найдем $\dot{\vec{\tau}}$.



$$\dot{\vec{\tau}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 \cdot \Delta\varphi \cdot \vec{n}}{\Delta t} = \vec{n} \cdot \dot{\varphi},$$

где $\vec{n}$ - нормаль к кривой в точке, $\vec{n} \perp \vec{\tau}$. Тогда

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{R} = \frac{v\Delta t}{R} \Rightarrow \qquad \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v}{R} \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{v}{R} \Rightarrow \dot{\vec{\tau}} = \vec{n}\frac{v}{R} \Rightarrow \qquad \vec{w}_n = v \cdot \dot{\vec{\tau}} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

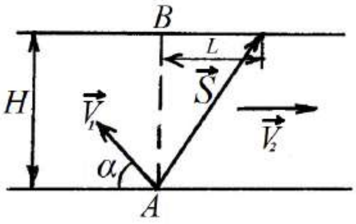
Итак, полное ускорение равно $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$, $\vec{w}_\tau = \dot{v} \cdot \vec{\tau}$, $\vec{w}_n = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$, $w = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$.

Тангенциальное ускорение $\vec{w}_\tau$ ответственно за изменение скорости по модулю, а нормальное ускорение $\vec{w}_n$ - за ее изменение по направлению.

§3. Равномерное прямолинейное движение.

При равномерном прямолинейном движении вектор скорости остается постоянным, поэтому для перемещения имеем формулу: $\vec{S} = \vec{v}t$.

Формула сложения скоростей. Абсолютная скорость равна векторной сумме переносной и относительной скоростей: $\vec{v}_a = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн}$.



Задача 1. Лодочник, переправляясь через реку шириной H, все время направляет лодку под углом α к берегу. На какое расстояние течение снесет лодку, если скорость лодки -$\vec{v}_1$, а скорость течения - $\vec{v}_2$?

Решение.

В этом случае переносная скорость – скорость реки, относительная – скорость лодки относительно воды. Тогда абсолютная - скорость лодки относительно берега - равна: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Поскольку оба слагаемых постоянны, то и она постоянна.

Запишем уравнение равномерного прямолинейного движения: $\vec{S} = \vec{v}t$, т.е. $\vec{S} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)t$. Проектируя на ось, направленную вдоль течения, и перпендикулярную к ней, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} L = (v_2 - v_1\cos\alpha)\cdot t_1 \\ H = v_1\sin\alpha\cdot t_1 \end{cases}$$

где t_1 - время переправы. Подставляя t_1 из второго в первое, получим

$$L = \frac{H(v_2 - v_1\cos\alpha)}{v_1\sin\alpha}.$$

Задача 2. Две лодки плывут по озеру со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ относительно воды. Чему равна скорость второй лодки относительно первой?

Решение.

Перейдем в систему, связанную с первой лодкой. Тогда переносная скорость – это скорость воды относительно нее, она равна ($-\vec{v}_1$), относительная – скорость второй лодки относительно воды – равна $\vec{v}_2$, абсолютная – скорость второй относительно первой - равна $\vec{v}_a = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн} = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Проверим: при $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ эта скорость равна нулю, как и должно быть.

§4. Равноускоренное прямолинейное движение.

Из $\vec{w} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ выразим $d\vec{v} = \vec{w}dt$ и, проинтегрировав обе части $\int\limits_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int\limits_0^t \vec{w}dt$, получим $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{w}t$ (*). Выражая перемещение $\int\limits_0^{\vec{S}} d\vec{S} = \int\limits_0^t \vec{v}dt$, получим $\vec{S} = \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{w}t^2}{2}$ (**).

Проектируя на ось x, совпадающую по направлению с $\vec{v}_0$, получим

$$v = v_0 + w_x t \qquad (1)$$

$$x = v_0 t + \frac{w_x t^2}{2} \qquad (2)$$

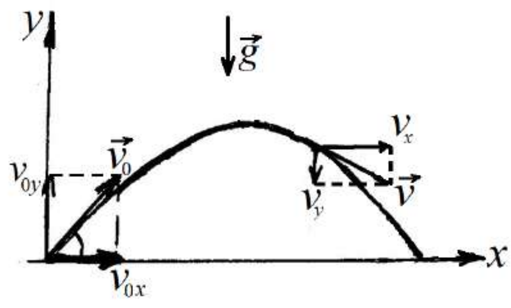
Эти формулы дают связи между двумя из трех меняющихся по ходу движения величин (x, v, t): первая связывает скорость и время, вторая – модуль перемещения и время. Выведем третью (недостающую) формулу, связывающую скорость и модуль перемещения: $dx = v \cdot dt,\ dt = dv / w_x \Rightarrow w_x dx = v \cdot dv$. Интегрируя, получим

$$\int\limits_o^S w_x dx = \int\limits_{v_0}^{v} v \cdot dv \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2 w_x S \qquad (3)$$

При $w_x > 0$ скорость возрастает, при $w_x < 0$ - убывает.

Формулы (1),(2),(3) являются основными для равноускоренного прямолинейного движения, из них можно получить все другие необходимые. Главное их достоинство: каждая из них связывает две из трех переменных. Поэтому поняв, что нужно найти и что дано, можно сразу определить, какая из формул потребуется.

Отметим, что полученные ранее формулы (*) и (**) справедливы не только для прямолинейного движения, но и для криволинейного, но с постоянным вектором ускорения, например, для движения тела, брошенного под углом к горизонту. При решении этой задачи надо обе части этих формул спроектировать на две оси: направленную вверх вертикальную (y), и горизонтальную (x):



ось x: $\quad v_x = v_{0x}$; $\quad x = v_{0x} t$

ось y: $\quad v_y = v_{0y} - gt$; $\quad y = v_{0y} t - \dfrac{gt^2}{2}$

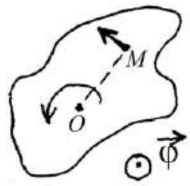
Легко видеть, что верхние уравнения описывают равномерное движение вдоль оси x, а нижние – равноускоренное с ускорением ($-g$) вдоль оси y. Брошенное тело совершает оба эти движения одновременно. К этим формулам можно добавить формулу (3): $v_{0y}^2 - v_y^2 = 2gy$.

В принципе, направление осей можно выбирать и по-другому, надо только правильно проектировать формулы (*) и (**). Для формулы (3) можно предложить такое правило: если справа оба числа положительны, то и слева должно получиться положительное число, т.е. впереди должна стоять большая из двух скоростей - v_y и v_{0y}. Обычно легко понять, увеличивается или уменьшается скорость.

§5. Кинематика вращательного движения.

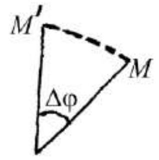
Раньше мы говорили о движении материальной точки, теперь – о теле. Поступательное и вращательное движения – простейшие виды движения твердого тела. Поступательное движение – такое, при котором все точки тела движутся одинаково, вращательное – все точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной оси.

При поступательном любая прямая, проведенная в теле, при движении остается параллельной самой себе.



На рисунке О – ось вращения, М – любая точка.

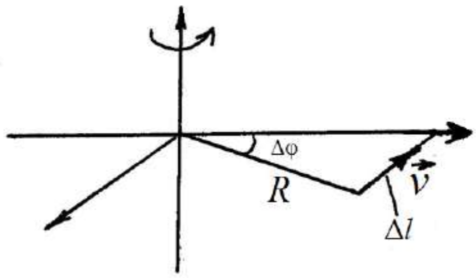
Введем вектор угла поворота $\vec{\varphi}$, $|\vec{\varphi}|$ равен углу, а направлен этот вектор перпендикулярно плоскости вращения, причем так, что, глядя с его конца, видим вращение происходящим против часовой стрелки. Строго говоря, $\vec{\varphi}$ - псевдовектор, так как при отражении в параллельном ему зеркале он изменяет направление на противоположное. Подлинный вектор сохраняет то же направление.



Введем вектор угловой скорости: $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$

При равномерном вращении $\vec{\omega} = \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{t}$, $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{t}$, $[\omega] = рад/c = 1/c = c^{-1}$, $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varphi}$ или $\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\varphi}$. Период вращения T – время одного полного оборота тела, частота вращения ν – количество оборотов за 1 секунду. $\nu = 1/T$ об/с, $[\nu] = c^{-1}$, $\omega = 2\pi\nu$ - модуль угловой скорости.

Будем считать ось вращения закрепленной. Тогда $\vec{\omega}$ сможет изменяться только за счет изменения ν. Угловое ускорение $\vec{\beta} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \dot{\vec{\omega}} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$. $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ - тоже псевдовекторы.



Линейные скорости $\vec{v}$ разных точек различаются:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

Учтем, что и $\vec{v}$, и $\vec{\omega}$ - векторы: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$, где $\vec{R}$ - радиус-вектор точки, проведенный от оси вращения.

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,\ \vec{w}_n = -\omega^2 \vec{R},\ w_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = R\beta\ .$$

Приведенные формулы позволяют найти скорости и ускорения различных точек. ω и β одинаковы для всех точек тела.

Глава 2. Динамика.

§1. Законы Ньютона

Первый закон Ньютона и его смысл.

Существуют такие системы отсчета (СО), называемые инерциальными, в которых, если на тело не действуют внешние силы или их действия скомпенсированы, то тело сохраняет состояние покоя или РПД.

Особая роль I-го закона Ньютона в том, что он определяет понятие ИСО, то есть системы, в которой будут справедливы все дальнейшие законы физики, и дает способ проверки инерциальности системы.

Важно, что именно этот закон начинает курс физики. Ведь все изучаемые в дальнейшем законы справедливы только в определенных системах отсчета. Например, предположим, что живем в трюме корабля, а на море сильная качка. Мы хотим установить аналог 1 з.Н. Кладем мяч в центр помещения и пишем в тетрадку: «Если на тело не действуют внешние силы, то… оно летит под углом 3,2 градуса к левому борту со скоростью 5,23 м/с, но, не долетев до него 1 м 27 см, поворачивает и летит со скоростью 9,51 м/с под углом 73, 45 градуса к заднему борту и т.д.». Никакой закон мы не установим. Почему? Неудачная система отсчета. Это относится и к другим разделам физики. Жидкость почему-то выплескивается из тарелки. Дует ветер. Давление в разных областях различается. Диван ездит туда-сюда, нагревая пол. Звук колокольчика распространяется с различными скоростями в разных направлениях, причем меняет свою частоту: то он выше, то ниже, в зависимости от того, в какую сторону мы движемся.

Значит, мы, прежде всего, должны сказать, в каких СО справедливы утверждаемые законы. Сам Ньютон об этом не говорил. У него были другие проблемы, ведь физика до Ньютона, по сути, еще не существовала. Галилей утверждал, что тела движутся, только если на них действует сила, а если ее нет, то тела покоятся. Повседневный опыт показывает, что это так, а абстрагироваться от сил трения Галилей не смог.

Только Ньютон смог понять природу. Его закон ничего не говорил о СО: «Если на тело не действуют силы, то оно покоится или движется равномерно и прямолинейно». Еще полвека назад так его преподавали в школе. И еще говорили, что СО, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, тоже является инерциальной. Но как же найти хотя бы одну, с которой связывать остальные? Ответ был: «Инерциальными являются СО, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно СИСТЕМЫ НЕПОДВИЖНЫХ ЗВЕЗД». Вот такое несовременное и не очень понятное определение.

Теперь же, с новой формулировкой 1 з.Н. все стало логично и понятно. Любая система, в которой «если на тело …, то оно сохраняет…», является инерциальной, а это значит, что в ней выполнены все законы физики. Вернемся к кораблю. Как проверить его инерциальность? Кладем мяч в центре и смотрим, остается ли он в покое при отсутствии внешних сил. Не остается? Значит, СО не инерциальная, наши законы неверны. Позже мы узнаем, как работать в неинерциальных СО.

Второй закон Ньютона.

2-й закон Ньютона: векторная сумма сил, действующих на тело, равна произведению его массы на ускорение.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\vec{w}$$

Особенность – введены сразу два новых физических понятия: сила и масса. Нам не очень трудно его понять, потому что мы в быту сталкивались со словами «сила» и «масса», так что интуитивно понимаем, о чем идет речь. А как бы вам понравился такой закон: «Векторная сумма всех плюм, действующих на тело, равна произведению кряки тела на ускорение»? Вы бы спросили, кто такие плюма и кряка, иначе ничего не понятно. Введены сразу две новых величины. Это редкий случай. Именно из-за этого в школе этому закону посвящено несколько параграфов: там тело режут на равные части, тянут несколькими пружинами и т.д. Все для того, чтобы почувствовать суть этих двух понятий.

В итоге можно дать следующие определения.

Масса – мера инертности тела, т.е. его способности изменять свою скорость под действием внешних факторов.

Сила – векторная величина, проявляющаяся в придании телам ускорений или деформаций.

Конечно, этого мало для полноценного понимания сущности закона, но понимание приходит по мере привыкания к этим понятиям.

****

<u>Напоминание о единицах измерения величин:</u>

Единицы физических величин бывают основные (которые имеют эталон) и производные (получаются из основных).

Основные – кг, м, с, А, моль, кд (кандела).

Производные – м/с, Н, Дж, и т.д.

Например, [m]=1 кг – основная, [F] = 1 Н – сила, которая, действуя на тело массой 1 кг, придает ему ускорение 1 м/с^2.

****

<u>Третий закон Ньютона.</u>

Тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по величине и противоположными по направлению.

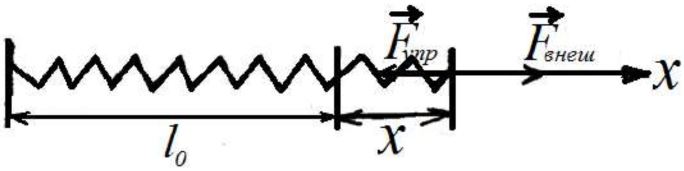
Важно: эти силы приложены к разным телам! Это очень важное замечание, которое надо всегда иметь в виду. Пример – штангист поднимает штангу. Он толкает ее вверх с какой-то силой. Но она, по III з.Н. давит на него с такой же (!) силой. Почему же она поднимается, ведь силы равны, то есть компенсируют друг друга? Представим себе, что ваш приятель дал вам щелбан. Вы обижаетесь, а он говорит: «По III з.Н. ты своим лбом действовал на мой палец с той же силой, что он на твой лоб, значит, силы скомпенсированы, так что я тебя не обидел». Но вы-то знаете, что было больно. Вы ему говорите, что вам нет дела до его пальца, а вот лоб, действительно, ваш, и ему больно.

Вы правы, нельзя компенсировать силы, приложенные к разным телам. Тела надо рассматривать по отдельности. Вернемся к штангисту и его штанге. На штангу действуют две силы: сила тяжести и сила рук штангиста. Если сила рук больше силы тяжести, то штанга пойдет вверх. При этом штанга действует на штангиста с силой, равной силе его рук, то есть большей, чем сила тяжести. Все логично, если разобраться. Просто силы в III з.Н. приложены к РАЗНЫМ телам!

Еще один пример для закрепления. Лошадь тянет сани вперед. При этом сани тянут лошадь назад с такой же силой. Почему же они едут в сторону лошади, ведь силы равны, то есть скомпенсированы? Ответ: равны, но не скомпенсированы, так как приложены к разным телам. Чтобы рассмотреть движение, надо анализировать тела по отдельности. На сани в горизонтальном направлении действуют две силы: сила трения о землю $\vec{F}_{тр.с}$ и сила тяги лошади $\vec{F}_л$. Если $F_л > F_{тр.с}$, сани поедут, причем с ускорением. Рассмотрим лошадь. На нее действуют тоже две силы: сила трения со стороны земли $\vec{F}_{тр.л}$, толкающая вперед, и сила со стороны саней $\vec{F}_c$. Если $F_{тр.л} > F_c$, то лошадь движется вперед. При этом, в согласии с III з.Н., сила со стороны саней на лошадь равна силе со стороны лошади на сани с обратным знаком $\vec{F}_c = -\vec{F}_л$.

§2. Силы в природе.

1) Сила упругости.



l_0 - длина пружины или проволоки в свободном состоянии, x – удлинение.

Если тело в покое, то $F_{упр} = F_{внеш}$.

Закон Гука: $F_{упр} = k|x|$.

k – жесткость (коэффициент упругости), зависит от длины, площади поперечного сечения и материала.

Введем величины: $F/S = \sigma$ - механическое напряжение, $|x|/l_0 = \varepsilon$ - относительное удлинение. Тогда закон Гука запишется в виде $\varepsilon = \sigma / E$, где E – модуль Юнга (зависит только от материала), $[E]$=1 Н/м^2=1 Па.

2) Закон всемирного тяготения.

Все тела во Вселенной притягиваются друг к другу. Сила взаимодействия двух точечных объектов прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

В поле Земли $F = \gamma \frac{m \cdot M_З}{r^2}$. У поверхности Земли $r = R_З$ и $F = mg$, откуда следует

$$g = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}$$

3) Сила тяжести и вес.

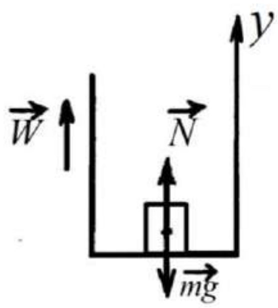
Сила тяжести – сила, с которой тело притягивается к Земле. Она действует на ТЕЛО, НЕ зависит от того, как движется тело.

$$\vec{F}_т = m\vec{g}$$

Вес – сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес.

Действует на ОПОРУ, ЗАВИСИТ от того, как движется тело.

Рассмотрим лифт, движущийся вверх с ускорением $\vec{w}$. На полу стоит тело m.



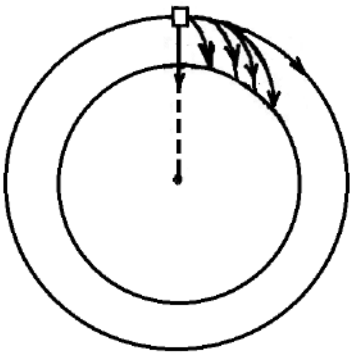
По III з.Н., вес $\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{N}\right|$.

По II з.Н., $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{w}$

$N - mg = mw \Rightarrow N = m(g + w) > mg$

Если $\vec{w}$ направлено вниз, то $N = m(g - w) < mg$, если же $\vec{w} = \vec{g}$, то N=0, значит, и P=0 – это невесомость. Сила тяжести нулю НЕ равна, но вес отсутствует! Это не просто слова. У находящихся в лифте ощущение полного исчезновения гравитации! Сердце не растягивает сосуды, жидкость в вестибулярном аппарате не давит на рецепторы и т.д. Человек, находящийся в лифте, может удивляться, почему вдруг пропала гравитация, но разбирающийся в физике поймет, что оборвался канат и лифт находится в состоянии свободного падения. Если нет окон, то ни один физический эксперимент не позволит различить ситуации свободного падения (невесомости) и отсутствия гравитации! Этот факт лежит в основе Общей теории относительности (ОТО) Альберта Эйнштейна (1916 год), которая является теорией гравитации.

Мы рассмотрели лифт, падающий вертикально, то есть без горизонтальной скорости. Но все вышесказанное относится к случаю падения по кривой, если пренебрегаем сопротивлением воздуха. Ведь это падение происходит с ускорением $\vec{g}$. На рисунке показана траектория лифта. При увеличении горизонтальной составляющей скорости лифт



будет падать все дальше. Земля круглая, поэтому при некоторой скорости лифт, «падая», не будет попадать на поверхность Земли, а будет лететь по круговой орбите, то есть станет спутником Земли. При этом его ускорение в каждый момент равно $\vec{g}$, то есть имеет место невесомость. Это как раз то, что происходит в искусственном спутнике Земли. Космонавты живут в невесомости! Отметим, что невесомость наблюдается в космическом корабле не только на круговой орбите, но всегда, когда выключен двигатель (дюзы), то есть нет ускорения. При полетах к дальним мирам космонавты всегда будут в невесомости за исключением моментов разгона, торможения и корректировки траектории при помощи двигателей.

4) <u>Сила трения.</u>

Некоторые считают, что сила трения равна произведению коэффициента трения на силу реакции опоры, то есть $F = \mu N$. Это неправда! Достаточно задуматься, куда направлена эта ненулевая (?) сила трения, если тело просто лежит на горизонтальной поверхности. Этот вопрос часто ставит в тупик. Разберемся в ситуации. Пусть тело лежит на горизонтальной плоскости. На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$. Их векторная сумма равна 0, поэтому тело покоится. Приложим небольшую силу $\vec{F}$, направленную вдоль поверхности. Тело остается в покое. Значит, возникла сила, равная приложенной и противоположно ей направленная. Это сила трения $\vec{F}_{тр} = -\vec{F}$. Причина ее возникновения – взаимодействие неровностей (пиков и впадин) двух трущихся поверхностей. Увеличиваем силу. Тело остается в покое, значит, выросла и сила трения. С ростом $\left|\vec{F}\right|$ наступает момент, когда тело начинает двигаться, то есть $\left|\vec{F}_{тр}\right|$ не может быть больше какого-то максимального значения. Это значения называется силой трения покоя: $F_{тр.\max} = \mu N$. При скольжении сила трения остается примерно такой же, поэтому ее можно назвать и силой трения скольжения. Эта формула верна, ТОЛЬКО когда тело скользит или находится на грани скольжения. В ситуации же, когда тело покоится, сила трения точно такая, какая нужна для компенсации всех остальных сил. Иначе говоря, ее величина и направление подстраиваются к ситуации.

5) Сила сопротивления среды.

В воде или в воздухе сила сопротивления направлена против скорости и задается формулой

$F_{сопр} = kv$ - при не очень больших скоростях

$F_{сопр} = kv^2$ - при больших скоростях.

Глава 3. Законы сохранения.

Замкнутая система – система, на которую не действуют внешние силы.

Интегралом движения называется функция координат и скоростей частиц, входящих в замкнутую систему, которая сохраняет при движении постоянное значение. В механике интегралов движения три: импульс, энергия и момент импульса.

Законы сохранения имеют глубокий философский смысл. Их первопричинами являются различные симметрии времени и пространства. Можно показать, что закон сохранения энергии - следствие однородности времени, то есть того факта, что эксперимент дал бы тот же результат в любой другой момент времени. Законы сохранения импульса и момента импульса выводятся из однородности и изотропности пространства соответственно, то есть из того, что эксперимент дал бы тот же результат, если его производить в другой точке пространства или в той же точке, но после произвольного поворота исходной конфигурации.

§1. Закон сохранения импульса.

Импульс тела – произведение массы на скорость $\vec{p} = m\vec{v}$.

Второй закон Ньютона для одного тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{w} = \sum_i \vec{F}_i \text{, то есть } \dot{\vec{p}} = \sum_i \vec{F}_i .$$

Рассмотрим систему из N частиц. Пусть на i-ю частицу со стороны j-й действует сила $\vec{F}_{ij}$ (это внутренние силы) и внешняя сила $\vec{F}_i$. По III з.Н. $\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} = 0$.

Запишем II з.Н. для всех частиц:

$$\dot{\vec{p}}_1 = \sum_{j=2}^{N} \vec{F}_{1j} + \vec{F}_1$$

$$\dot{\vec{p}}_2 = \sum_{j=1,\, j\neq 2}^{N} \vec{F}_{2j} + \vec{F}_2$$

…………..

$$\dot{\vec{p}}_N = \sum_{j=1}^{N-1} \vec{F}_{Nj} + \vec{F}_N$$

Просуммируем все уравнения:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Векторную сумму импульсов назовем импульсом системы $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$. Тогда

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Если система замкнута (все $\vec{F}_i = 0$), то имеет место закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

Импульс остается постоянным также, если $\vec{F}_i \neq 0$, но $\sum_i \vec{F}_i = 0$, например, на бильярдном столе: $m\vec{g} + \vec{N} = 0$. Если же $\sum_i \vec{F}_i \neq 0$, но проекция этой суммы на какую-то ось равна нулю, то выполняется закон сохранения проекции импульса на эту ось (хотя полный импульс не сохраняется). Например, пушка стреляет под углом к горизонту. Проекции внешних сил (тяжести и реакции Земли) на горизонтальную ось равны нулю, поэтому сохраняется горизонтальная проекция импульса.

Импульс системы можно записать в виде $\vec{P} = m\vec{V}_C$, где С – так называемый центр масс системы (или центр инерции) – точка с радиус-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m} ,$$

где m – полная масса системы. Координаты центра масс вычисляются по формуле

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m};\ y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m};\ z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}$$

В <u>однородном</u> поле тяжести центр масс совпадает с центром тяжести.

$$\vec{V}_C = \dot{\vec{r}}_C = \frac{\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i}{m} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{P}}{m},$$

откуда следует $\vec{P} = m\vec{V}_C$, чем доказывается исходное положение.

В замкнутой системе $\vec{P} = const$, значит $\vec{V}_C = const$. Центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно или покоится.

Система отсчета, в которой центр масс (инерции) покоится, называется системой центра инерции.

<u>§2.Кинетическая энергия и механическая работа.</u>

Рассмотрим сначала одну частицу. 2-й з.Н. имеет вид $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$, $\vec{F}$ - результирующая сила. Умножим обе части скалярно на $\vec{v}dt = d\vec{S}$:

$$m\dot{\vec{v}}\vec{v}dt = \vec{F}d\vec{S} \Rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \vec{F}d\vec{S} \Rightarrow \quad m\vec{v}d\vec{v} = d(\frac{m\vec{v}^2}{2})$$

$$d(\frac{m\vec{v}^2}{2}) = \vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad (*)$$

Если система замкнута, то есть $\vec{F} = 0$, то $T = \frac{m\vec{v}^2}{2} = const$. T называется кинетической энергией. Ее можно записать и в виде: $T = \frac{p^2}{2m}$, где $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс частицы. Если $\vec{F} \neq 0$, то $dT = \vec{F}\cdot d\vec{S}$, то есть $T \neq const$ (если сила не перпендикулярна перемещению). Величина $dA = \vec{F}\cdot d\vec{S}$ называется работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{S}$. Можно записать и так: $dA = F_S \cdot dS$, где dS - путь, F_S - проекция $\vec{F}$ на перемещение. Возьмем интеграл от начальной точки до конечной

$$\int_1^2 d(\frac{m\vec{v}^2}{2}) = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{S} = A_{12}$$ - работа силы $\vec{F}$ на пути 1-2, т.е. работа результирующей всех сил идет на приращение кинетической энергии частицы.

Если частиц несколько (N), то просуммируем все уравнения (*), записанные для каждой из частиц, и получим формулу для изменения полной кинетической энергии системы:

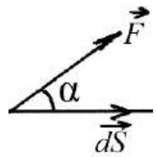
$$d\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\vec{v}_i^{\,2}}{2}\right)=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot d\vec{S}_i \qquad \Rightarrow \qquad dT=\sum_{i=1}^{N}dA_i\text{, где } T=\sum_{i=1}^{N}T_i$$

Проинтегрировав обе части полученного равенства по произвольно взятому промежутку времени между некоторыми t_1 и t_2, получим выражение теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T_2-T_1=\sum A_i$$

<u>Необходимо подчеркнуть, что здесь, в отличие от теоремы об изменении импульса системы, учитывается действие не только внешних, но и внутренних сил.</u>

Элементарной работой называется физическая величина, равная скалярному произведению векторов силы и элементарного перемещения



$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{S}=FdS\cos\alpha$$

Если угол α острый, то dA>0, если тупой, то dA<0, если прямой, то dA=0. Если $\vec{F}=const$, то $A=\int dA=\vec{F}\cdot\int d\vec{S}=\vec{F}\cdot\vec{S}$, в общем же случае $A=\int\vec{F}d\vec{S}$.

Работа за единицу времени называется мощностью.

$$P=\frac{dA}{dt}=\frac{\vec{F}d\vec{S}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

[A]=1 Дж (Джоуль); [P]=1 Вт (Ватт)

1 кВт-час – внесистемная единица работы – это работа, совершаемая устройством мощностью 1 кВт за 1 час. Подразумевается умножение кВт на час, а не деление, как иногда можно увидеть в газетах (кВт/час).

<u>§3. Потенциальное поле сил.</u>

Пусть в некоторой области пространства в каждой точке действует сила

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\,,$$

причем $F_x;F_y;F_z$ - функции координат.

Определим понятие «поле». Мы говорим, что в некоторой области задано поле какой-то величины, если эта величина в каждой точке имеет свое значение. Поле может быть скалярным (поле температур) и векторным (поле скоростей в потоке жидкости). Как видно из определения, поле не всегда связано с силами. Но в нашем случае оно как раз является силовым, то есть мы рассматриваем поле силы $\vec{F}$.

Силовое поле, которое можно описать функцией $\Pi(x, y, z, t)$, так что $F_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z}$, называется потенциальным. Π - потенциал. Если Π зависит от t явно, то поле нестационарное, $\Pi(x, y, z)$ - стационарное поле.

Вектор с компонентами (проекциями) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ называется градиентом φ:

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}, \text{ (}\nabla\text{ - набла).}$$

Тогда $\vec{F} = grad\Pi$. Вычислим работу потенциальной силы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz = d\Pi =$$
$$= \Pi(x + dx, y + dy, z + dz) - \Pi(x, y, z)$$

$d\Pi$ - приращение потенциала - разность значений потенциала в конечной и начальной точках, то есть оно не зависит от траектории перехода. Проинтегрировав $\int_1^2 dA = \int_1^2 d\Pi$, получим $A_{12} = \Pi_2 - \Pi_1$, то есть работа потенциальной силы по перемещению тела из одной точки в другую не зависит от траектории, а зависит только от положения начальной и конечной точек. Силы, работа которых не зависит от формы траектории, называются консервативными.

Легко показать, что работа консервативной силы на замкнутом пути равна нулю. $A = A_{12}^{I} + A_{21}^{II} = A_{12}^{I} - A_{12}^{II} = 0$, так как $A_{12}^{I} = A_{12}^{II}$, поскольку работа не зависит от формы пути. Поэтому 2-е определение: консервативные силы – такие, работа которых на замкнутом пути равна нулю.

Не все силы являются консервативными, например, сила трения, сопротивления среды. Сила тяжести консервативна, так как $\int_1^2 m\vec{g}d\vec{S} = m\vec{g}\int_1^2 d\vec{S} = m\vec{g}\vec{S}_{12} = mg(h_1 - h_2)$, то есть работа силы тяжести зависит только от положений начальной и конечной точек, но не зависит от траектории.

§4. Потенциальная энергия во внешнем поле сил.

Рассмотрим одну частицу во внешнем потенциальном поле сил.

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= \Pi_2 - \Pi_1 \\ A_{12} &= T_2 - T_1 \end{aligned}\right\} \Pi_2 - \Pi_1 = T_2 - T_1$$

Назовем функцию $U(x,y,z) = -\Pi(x,y,z)$ потенциальной энергией. Тогда

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 .$$

Значит, величина $E = T + U$ остается постоянной при движении, то есть является интегралом движения. Назовем E полной механической энергией.

Закон сохранения механической энергии: энергия частицы, на которую действуют только консервативные силы, остается постоянной.

$A_{12} = U_1 - U_2$ - работа, совершенная над частицей консервативными силами, равна убыли потенциальной энергии.

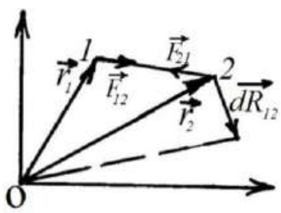
$$\vec{F} = \nabla\Pi = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

Теперь рассмотрим N частиц во внешнем поле, не взаимодействующих друг с другом. Тогда

$E_i = T_i + U_i = const$ (ЗСЭ для каждой частицы).

$\sum\limits_{i=1}^{N} E_i = \sum\limits_{i=1}^{N} T_i + \sum\limits_{i=1}^{N} U_i$ - полная механическая энергия системы невзаимодействующих частиц во внешнем поле остается постоянной. Введем обозначение $\sum\limits_{i=1}^{N} U_i = U$ - потенциальная энергия системы. Тогда $A_{12} = U_1 - U_2$, то есть, как и в случае одной частицы, работа, совершенная над системой внешними консервативными силами, равна убыли потенциальной энергии.

§5. Потенциальная энергия взаимодействия.



Рассмотрим две взаимодействующие частицы. Пусть сила $\vec{F}_{12}$ действует на первую частицу со стороны второй, а $\vec{F}_{21}$ - на вторую со стороны первой. По III з.Н., $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Введем вектор $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ - радиус-векторы частиц. Допустим, что $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ зависят только от расстояния между частицами и направлены вдоль прямой, соединяющей частицы. Например, электростатическое или гравитационное взаимодействие. Тогда $\vec{F}_{12} = f(R_{12})\vec{e}_{12}$. Запишем II з.Н. для каждой из частиц:

$\begin{cases} m_1\dot{\vec{v}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2\dot{\vec{v}}_2 = \vec{F}_{21} \end{cases}$ умножим соответственно на $\begin{cases} d\vec{r}_1 = \vec{v}_1 dt \\ d\vec{r}_2 = \vec{v}_2 dt \end{cases}$ и сложим:

$$m_1\vec{v}_1\dot{\vec{v}}_1 dt + m_2\vec{v}_2\dot{\vec{v}}_2 dt = \vec{F}_{12}d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_2 \qquad (*)$$

$$d\left(\frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2}\right) = dA_{внутр},$$

где $dA_{внутр} = f(R_{12})\vec{e}_{12}d\vec{r}_1 - f(R_{12})\vec{e}_{12}d\vec{r}_2 = -f(R_{12})\vec{e}_{12}d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -f(R_{12})\vec{e}_{12}d\vec{R}_{12}$

Можно показать, что это равно $-f(R_{12})dR_{12}$, где dR_{12}- изменение расстояния между частицами. Для простоты убедимся в этом не в общем случае, а когда движется только вторая частица: $\vec{e}_{12}d\vec{R}_{12}$- это проекция $d\vec{R}_{12}$ на $\vec{e}_{12}$, которая как раз и равна изменению расстояния между частицами.

Выражение $f(R_{12})dR_{12}$ можно считать приращением некоторой функции от R_{12}, то есть $dU(R_{12})$. Тогда

$$dA_{внутр} = -dU(R_{12}) \quad \Rightarrow dT = dA_{внутр} = -dU \;\Rightarrow\; d(T+U) = 0 \quad \Rightarrow \quad T + U = const$$

В замкнутой системе $E = T + U$ сохраняется, $U(R_{12})$ - потенциальная энергия взаимодействия.

Если, кроме сил взаимодействия, есть еще и внешние силы $\vec{F}_1^{\,*}$, действующая на первую частицу, и $\vec{F}_2^{\,*}$ - на вторую, то в формуле (*) добавятся члены

$$\vec{F}_1^{\,*}d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{\,*}d\vec{r}_2 = dA_{внешн} \qquad \Rightarrow \qquad d(T + U_{вз}) = dA_{внешн}$$

Если частиц три, то

$$dA_{внутр} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13})d\vec{r}_1 + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23})d\vec{r}_2 + (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32})d\vec{r}_3 =$$
$$-\vec{F}_{12}(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) - \vec{F}_{13}(d\vec{r}_3 - d\vec{r}_1) - \vec{F}_{23}(d\vec{r}_3 - d\vec{r}_2) = -\vec{F}_{12}d\vec{R}_{12} - \vec{F}_{13}d\vec{R}_{13} - \vec{F}_{23}d\vec{R}_{23},$$

где $\vec{R}_{ik} = \vec{r}_k - \vec{r}_i$.

В итоге получим $dA_{внутр} = -dU_{вз}$, где $U_{вз} = U_{12}(R_{12}) + U_{23}(R_{23}) + U_{13}(R_{13})$, а для случая N частиц $d(T + U_{вз}) = dA_{внешн}$, где $U_{вз} = \sum_{\substack{i,k=1,\\ i<k}}^{N} U_{ik}(R_{ik}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1,\\ i\neq k}}^{N} U_{ik}(R_{ik})$.

Рассмотрим частный случай: $f(R_{12}) = \dfrac{\alpha}{R_{12}^2}$ - закон всемирного тяготения, закон Кулона - $\alpha > 0$ - притяжение, $\alpha < 0$ - отталкивание. Тогда

$dU_{вз} = f(R_{12})dR_{12} = \dfrac{\alpha}{R_{12}^2}dR_{12}$, откуда следует: $U_{вз} = -\dfrac{\alpha}{R_{12}} + C$. C найдем из условия $U_{вз}(\infty) = 0$ - энергия взаимодействия частиц, находящихся на бесконечном расстоянии друг от друга $\Rightarrow$ C=0.

$U_{вз} = -\dfrac{\alpha}{R_{12}}$ - энергия гравитационного и электростатического взаимодействий.

****

<u>Напоминание определения понятия «энергия».</u> Энергия – это физическая величина, характеризующая способность системы совершить работу.

Хорошей аналогией является счет в банке или просто деньги в кармане. Они характеризуют способность делать покупки. Разные виды энергии можно сопоставить разным валютам. Эта аналогия удобна и для понимания закона сохранения энергии.

****

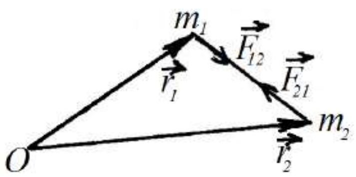
<u>§6.Закон сохранения механической энергии.</u>

Сведем воедино полученные результаты. Рассмотрим систему из N частиц, взаимодействующих друг с другом силами, модуль которых зависит только от расстояния между частицами. Также есть еще и внешние силы – консервативная $\vec{F}_i$ и неконсервативная $\vec{F}_i^{\,*}$. Тогда $d(T + U_{вз} + U_{внешн}) = dA^*_{внешн}$, или $dE = dA^*_{внешн}$, где $E = T + U_{вз} + U_{внешн}$ - полная механическая энергия системы.

За конечное время получим: $E_2 - E_1 = A^*_{12}$ - изменение энергии равно работе внешних <u>неконсервативных</u> сил.

Если неконсервативных сил нет, то энергия остается неизменной. Это закон сохранения механической энергии: полная механическая энергия системы тел, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной.

<u>§7. Закон сохранения момента импульса.</u>



$$m_1\dot{\vec{v}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 \qquad (1)$$

$$m_2\dot{\vec{v}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2 \qquad (2)$$

Умножим (1) слева векторно на $\vec{r}_1$, а (2) – на $\vec{r}_2$:

$$m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{v}}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \qquad (3)$$

$$m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{v}}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \qquad (4)$$

Покажем, что $\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v})$:

$\dfrac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \vec{r} \times \dot{\vec{v}}$, что и требовалось доказать.

$$m_1\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \qquad (5)$$

$$m_2 \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \qquad (6)$$

Сложим (5) и (6), учтя, что $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$:

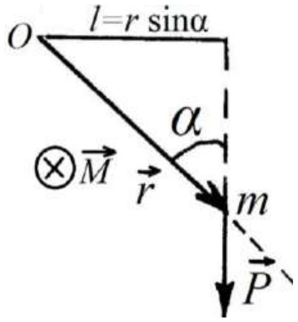
$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}}_{=0} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, \text{ где } \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i. \qquad (*)$$

Если система замкнута, то есть $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$, то $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = const$.

Для отдельной частицы назовем псевдовектор $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ моментом импульса частицы относительно точки О.

Моментом импульса системы относительно точки О называется векторная сумма моментов импульсов отдельных частиц, входящих в систему $\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$.

Проекция $\vec{M}$ на ось z, проходящую через точку О, называется моментом импульса относительно этой оси.



$$M_z = [\vec{r} \times \vec{p}]_z, \quad M_z = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]_z$$

Модуль вектора момента импульса равен $M = rp\sin\alpha = l \cdot p$, где l – плечо импульса относительно точки О, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки О на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы.

<u>Момент силы</u>

Псевдовектор $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ называется моментом силы относительно точки О (из которой исходит $\vec{r}$). Его модуль равен $N = lF$, где l – плечо силы относительно точки О.

Силы взаимодействия между частицами по III закону Ньютона равны и противоположно направлены вдоль одной прямой. Их моменты равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому сумма моментов всех внутренних сил равна нулю: $\sum \vec{N}_{внутр} = 0$.

Тогда полученное ранее уравнение (*) можно переписать так:

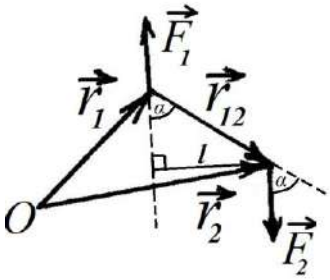
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \vec{N}_{внеш},$$

то есть производная по времени от суммарного момента импульса системы равна сумме моментов внешних сил. Это соотношение можно распространить на любое число частиц. Отметим схожесть этого закона с II з.Н.: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i$.

В замкнутой системе $\frac{d\vec{M}}{dt} = 0$, т.е. момент импульса замкнутой системы тел остается неизменным – закон сохранения момента импульса.

****

<u>Примечание</u>. Отметим частный случай двух равных противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой. Эта система называется «пара сил». Суммарный момент пары сил равен



$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2$ - это выражение не зависит от точки О, то есть момент пары сил один и тот же относительно любой точки. Он перпендикулярен плоскости, в которой лежат силы, и равен произведению модуля силы на плечо пары l (расстояние между прямыми, вдоль которых действуют силы): $N = r_{12} F_2 \sin\alpha = F_2 l$

<u>Глава 4. Неинерциальные системы отсчета.</u>

<u>§1. Силы инерции.</u>

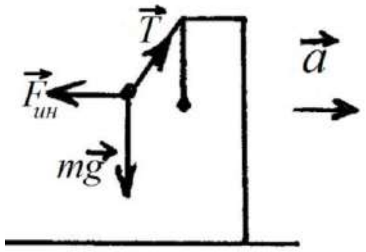
Законы Ньютона выполняются только в ИСО. Если тело имеет ускорение $\vec{w}$ относительно одной ИСО, то такое же ускорение оно имеет и относительно любой другой ИСО. Любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной с каким-то ускорением. Поэтому ускорение относительно неинерциальной СО $\vec{w}'$ не равно ускорению $\vec{w}$ относительно ИСО. Найдем связь между ними.

Из общего закона сложения скоростей $\vec{v}_a = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн}$ следует: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$, где $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ - скорости тела относительно ИСО и неИСО, а $\vec{v}_0$ - скорость неИСО относительно ИСО. Беря производную по времени, получим соотношение для ускорений: $\vec{w} = \vec{w}' + \vec{a}$. Для поступательного движения неИСО вектор $\vec{a}$ одинаков для всех точек пространства ($\vec{a} = const$) и представляет собой ускорение неинерциальной СО. Для вращающейся неинерциальной СО $\vec{a}$ в разных точках будет разным, т.е. $\vec{a}(\vec{r})$ зависит от $\vec{r}$.

Рассмотрим поступательно движущуюся систему. Пусть результирующая всех сил, действующих на тело, равна $\vec{F}$, тогда по II з.Н. $\vec{w} = \frac{\vec{F}}{m}$, а $\vec{w}' = \vec{w} - \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}$, где $\vec{a}$ - ускорение неинерциальной СО. Значит, даже при $\vec{F} = 0$ в неинерциальной СО тело движется с ускорением $\vec{w}' = -\vec{a}$, т.е. так, как если бы на него действовала сила, равная $-m\vec{a}$. Значит, при описании движения в неинерциальной СО можно пользоваться законами

Ньютона, если к системе сил, действующих на каждое тело, добавить так называемую силу инерции, равную произведению массы этого тела на взятое с противоположным знаком ускорение системы отсчета, в которой находятся тела.

$$m\vec{w}' = \vec{F} + \vec{F}_{инерции}, \text{ где } \vec{F}_{инерции} = -m\vec{a}$$



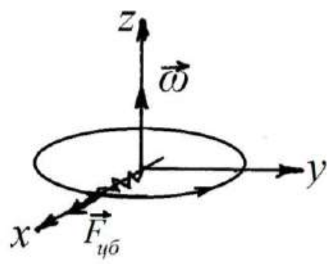
Рассмотрим, например, шарик на нити, находящийся на платформе, движущейся с ускорением $\vec{a}$. В ИСО шарик движется с ускорением $\vec{a}$, т.е. $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$. В неинерциальной СО, связанной с платформой, шарик покоится, но надо добавить силу инерции $\vec{F}_{инерции} = -m\vec{a}$, получим $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{ин} = 0$, т.е. $\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a} = 0$, пришли к тому же.

Примечания.

а) в принципе, можно перейти в ИСО и решать в ней, но иногда выгоднее и логичнее оставаться в неинерциальной СО.

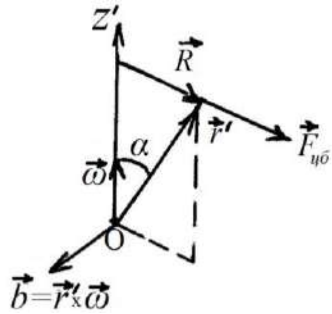
б) сила инерции пропорциональна массе, поэтому она аналогична силе тяготения. Например, пусть тяготения нет, а мы находимся в закрытом лифте, который движется вверх с ускорением, модуль которого равен g. Тогда все тела внутри лифта будут вести себя так, как если бы на них действовала сила инерции, по модулю равная mg и направленная вниз, т.е. $m\vec{g}$. Те же явления мы наблюдали бы при нахождении у поверхности Земли, где сила тяжести равна $m\vec{g}$. Никакие опыты не позволяют различить эти две ситуации. Можно говорить об эквивалентности сил инерции и тяготения. Это принцип эквивалентности, который лежит в основе общей теории относительности Эйнштейна.

§2. Центробежная сила инерции.



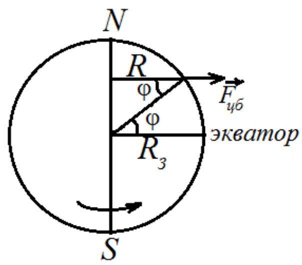
Рассмотрим диск, вращающийся вокруг перпендикулярной к нему оси z с угловой скоростью ω. Вместе с ним вращается надетый на спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной. Шарик займет такое положение, при котором $\vec{F}_{пруж} = m\vec{w}_{центростр} = -m\omega^2\vec{R}$. Относительно вращающейся СО шарик покоится. Это можно формально объяснить тем, что на шарик, кроме $\vec{F}_{пруж}$, действует сила инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{R}$. Ее называют центробежной силой инерции. Она действует на тело во вращающейся СО, независимо от того, покоится тело в этой СО или движется со скоростью $\vec{v}'$. $\vec{F}_{цб}$ - это частный случай силы инерции из предыдущего параграфа.

Рассмотрим объемное тело. Докажем, что для любой его точки справедлива формула $\vec{F}_{цб} = m\vec{\omega}\times[\vec{r}'\times\vec{\omega}]$. Обозначим выражение в квадратных скобках через $\vec{b}$. Тогда $|\vec{b}| = \omega r'\sin\alpha = \omega R$, а $F_{цб} = |m\vec{\omega}\times\vec{b}| = m\omega\cdot\omega R\sin 90° = m\omega^2 R$.



Подчеркнем, что $\vec{F}_{цб}$ - сила инерции, т.е. действует <u>только</u> в неинерциальной СО.

При решении задач о движении тел относительно земной поверхности надо учитывать $\vec{F}_{цб}$, так как Земля – неинерциальная СО из-за своего вращения.



Пусть φ - широта.

Тогда $|\vec{F}_{цб}| = m\omega^2 R_з \cos\varphi$,

$m\vec{g} = \vec{F}_{тяжести} + \vec{F}_{цб}$

$$\frac{F_{цб}}{mg} = \frac{m\omega^2 R_з\cos\varphi}{mg} = \frac{(\frac{2\pi}{T})^2 R_з\cos\varphi}{g} = \frac{\left(\frac{2\cdot 3.14}{86400}\right)^2 6.5\cdot 10^6\cos\varphi}{10} \approx 0.003\cdot\cos\varphi$$

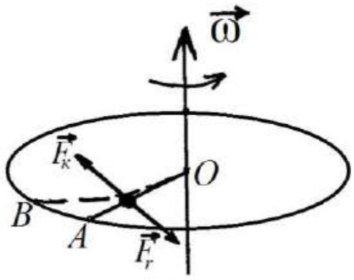
Учет вращения Земли дает поправку в 0,3%. Отметим, что линия отвеса не направлена к центру Земли!

<u>§3. Сила Кориолиса.</u>

Мы уже говорили о законе сохранения момента импульса. Из него неизбежно следует существование еще одного вида сил инерции. Рассмотрим пример с фигуристом, вращающимся по часовой стрелке вокруг своей оси с прижатыми к телу руками. Перейдем в систему координат, вращающуюся вместе с фигуристом. В этой системе он покоится. Теперь фигурист вытягивает руки в стороны. Из закона сохранения момента импульса следует, что скорость вращения должна уменьшиться. Это значит, что в рассматриваемой вращающейся системе фигурист начнет вращаться <u>против</u> часовой стрелки, т.е. возникнут силы, заставляющие его вращаться. Это и есть силы инерции, называемые силами Кориолиса.

Сила Кориолиса возникает при <u>движении</u> точки относительно вращающейся СО. Ее можно обнаружить на следующем примере.

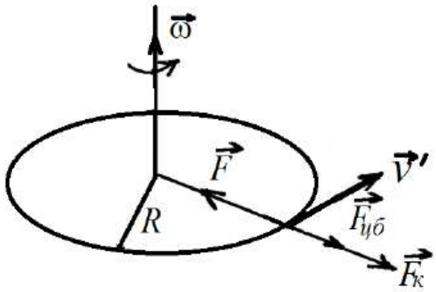
Возьмем горизонтально расположенный диск, вращающийся вокруг вертикальной оси. Запустим вдоль радиуса ОА от О к А шарик со скоростью v'. Если бы диск не вращался, то шарик покатился бы по прямой ОА. Если же диск вращается по стрелке, то шарик покатится по кривой ОВ, т.е. шарик ведет себя так, как будто на него действует сила $\vec{F}_k \perp \vec{v}'$.



Чтобы заставить шарик катиться по ОА, нужно сделать направляющую ОА. При движении шарика она действует на него с некоторой силой $\vec{F}_r$. Тогда относительно вращающейся СО шарик движется с постоянной скоростью. Это можно объяснить тем, что сила $\vec{F}_r$ уравновешивается силой инерции $\vec{F}_k$. $\vec{F}_k$ и есть кориолисова сила.

Рассмотрим еще одно доказательство существования $\vec{F}_k$. Если шарик движется от центра, то, чтобы он двигался равномерно и прямолинейно относительно вращающейся СО, его скорость должна увеличиваться, т.е. необходима ускоряющая сила.

Найдем выражение $\vec{F}_k$ для частного случая, когда частица движется в плоскости вращения по окружности с центром в точке О. Пусть скорость относительно вращающейся СО равна $\vec{v}'$. Тогда относительно ИСО $v = v' + \omega R$. Значит, на нее должна действовать сила $\vec{F}$, направленная к центру (например, сила натяжения нити), равная



$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R$$

Относительно вращающейся СО частица движется со скоростью v', т.е. имеет направленное к центру ускорение $w' = \frac{v'^2}{R} = \frac{F}{m} - 2v'\omega - \omega^2 R$. Значит, частица ведет себя так, как будто на нее действуют две силы, направленные от центра: 1) $F_{цб} = m\omega^2 R$ и 2) $F_k = 2mv'\omega$.

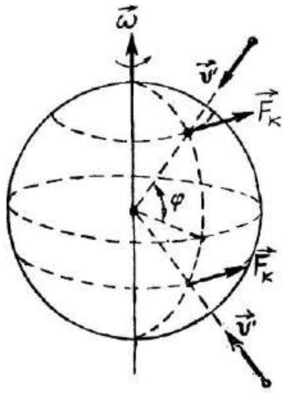
В векторном виде силу Кориолиса можно записать так: $\vec{F}_k = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$.

Отметим, что $F_{цб}$ не зависит от $\vec{v}'$.

Если $\vec{v}'$ направлена в противоположную сторону, то $v = v' - \omega R$, $F = \frac{mv'^2}{R} - 2mv'\omega + m\omega^2 R$ и мы снова получим $\vec{F}_k = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$. Можно показать, что при произвольном движении частицы относительно вращающейся СО (любая $\vec{v}'$) ускорение частицы относительно неподвижной ИСО равно $\vec{w} = \vec{w}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2 \vec{R}$.

Во вращающейся СО II-й з.Н. имеет вид $m\vec{w}' = m\vec{w} + 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} + m\omega^2 \vec{R}$, в покоящейся $m\vec{w} = \vec{F}$. Значит, при переходе во вращающуюся СО надо учитывать центробежную силу инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{R}$, а также кориолисову силу инерции $\vec{F}_k = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$.

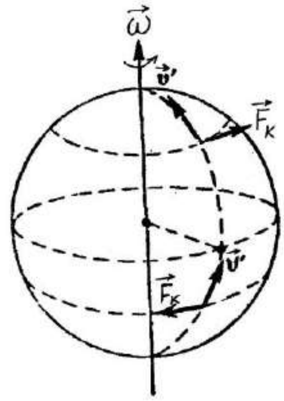
Мы живем во вращающейся СО – на Земле. Поэтому $\vec{F}_k$ необходимо учитывать.



1) При свободном падении тел на них действует $\vec{F}_k$, направленная на восток.

2) При выстреле вдоль меридиана на север летящий снаряд будет отклоняться в северном полушарии к востоку, а в южном – к западу.

3) На тело, движущееся вдоль меридиана, всегда действует сила: в северном полушарии вправо, а в южном – влево. Поэтому в северном полушарии у рек всегда подмыт правый берег, а в южном – левый. Этим же объясняется и различный износ рельсов.



4) При стрельбе вдоль экватора на запад снаряд будет прижиматься к Земле, а на восток – отталкиваться от нее.

5) Сила Кориолиса проявляется при качании маятников. Во вращающейся СО поворачивается плоскость качания (под действием силы $\vec{F}_k$), а в покоящейся плоскость качания остается постоянной, а поворачивается Земля. Эта конструкция называется маятником Фуко.

Глава 5. Механика твердого тела.

§1. Движение твердого тела.

Существуют два основных вида движения твердого тела – поступательное и вращательное. При поступательном все точки тела в данный момент движутся одинаково, т.е. у них одинаковые $\vec{v}$ и $\vec{w}$. Достаточно описать движение одной частицы, чтобы охарактеризовать движение всего тела. При вращательном все точки движутся по окружностям, центры которых находятся на одной оси вращения. Для описания такого движения достаточно задать ось вращения и угловую скорость в каждый момент времени.

Признак поступательного движения: любая прямая в теле остается параллельной самой себе.

Оказывается, любое движение твердого тела можно представить как наложение поступательного (вместе с произвольной точкой О) и вращательного - вокруг оси, проходящей через О. Тогда перемещение любой точки равно $d\vec{S} = d\vec{S}_{пост} + d\vec{S}_{вращ}$. При этом $d\vec{S}_{пост}$ для всех точек одно и то же.

Такое разбиение можно выполнить бесконечным числом способов (с разными О), но угол поворота φ будет всегда один и тот же, откуда следует, что угловая скорость фигуры не зависит от выбора точки О. При различных О $d\vec{S}_{пост}$ и $d\vec{S}_{вращ}$ всегда разные. Деля на dt, получим $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{вращ}$, причем $\vec{v}_0$ у всех точек тела одинакова.

Мы будем рассматривать ТОЛЬКО плоское движение твердого тела, т.е. такое, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой фиксированной плоскости. Изучение такого движения сводится к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

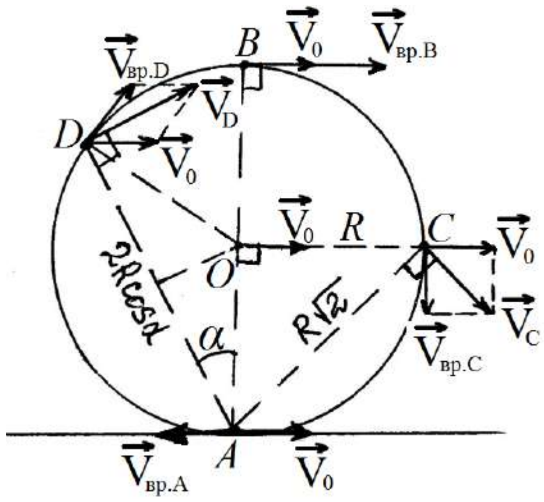
Таким образом, плоское движение тела относительно некоторой СО можно представить как вращение с угловой скоростью ω относительно неподвижной оси в СО, движущейся поступательно относительно исходной СО. Скорость любой точки М равна $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки М.

Элементарное (бесконечно-малое) перемещение твердого тела при плоском (!) движении всегда можно представить как поворот вокруг некоторой мгновенной оси вращения. Эта ось может лежать как внутри тела, так и вне его. Ее положение, в общем случае, меняется со временем. Например, катящийся цилиндр. Мгновенная ось вращения – линия соприкосновения цилиндра с плоскостью. Она перемещается как относительно цилиндра, так и относительно плоскости. Скорости всех точек в данный момент можно считать обусловленными вращением вокруг мгновенной оси. Плоское движение твердого тела можно рассматривать как ряд вращений вокруг мгновенных осей. При неплоском вращении элементарное перемещение твердого тела можно представить как поворот вокруг мгновенной оси вращения, только если $\vec{v}_0 \perp \vec{\omega}$. Если это не так, то движение есть наложение вращения вокруг некоторой мгновенной оси на поступательное движение вдоль нее.

Рассмотрим следующую задачу.

Шар радиуса R начинает катиться без скольжения по горизонтальной плоскости так, что его центр движется с постоянным ускорением w. Найти скорости и ускорения точек A, B, C в момент времени t.

Представим движение шара как сумму поступательного вместе с точкой О и вращательного вокруг нее. Тогда скорость любой точки М может быть записана как векторная сумма скорости точки О и скорости вращения вокруг нее: $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{вр.M}$. (*)



На рисунке показаны составляющие скоростей всех анализируемых точек. Видим, что $v_A = v_O - v_{вр.A}$. Но при отсутствии проскальзывания $\vec{v}_A$ равняется нулю, откуда получаем $v_{вр.A} = v_O$. Все остальные точки вращаются с такой же по модулю скоростью $v_{вр} = v_O$. Поэтому $v_B = v_O + v_{вр} = 2v_O$, $v_C = \sqrt{v_O^2 + v_{вр}^2} = v_O\sqrt{2}$.

Для ускорений имеем аналогичное (*) соотношение $\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{w}_{вр.M}$. Вектор $\vec{w}_O$ всегда горизонтален, а $\vec{w}_{вр.M}$ имеет и вертикальную составляющую, возникающую из проекций нормального ($w_n = v_{вр}^2 / R = v_O^2 / R = (wt)^2 / R$) или тангенциального ($w_\tau = \dot{v}_{вр} = \dot{v}_O = w$) ускорений:

$$w_{Ax} = w_O - w_\tau = w - w = 0, \qquad w_{Ay} = w_n = w^2t^2 / R, \qquad w_A = w_n = w^2t^2 / R$$

$$w_{Bx} = w_O + w_\tau = 2w, \qquad w_{By} = -w_n = -w^2t^2 / R, \qquad w_B = \sqrt{4w^2 + (w^2t^2 / R)^2}$$

$$w_{Cx} = w_O - w_n = w - w^2t^2 / R, \qquad w_{Cy} = -w_\tau = -w, \qquad w_C = \sqrt{(w - w^2t^2 / R)^2 + w^2}$$

Существует и другой полезный подход. В каждый момент тело без поступательного движения вращается вокруг некоторой оси, называемой мгновенной осью вращения. Такая ось вращения должна в данный момент покоиться, т.е. в нашем случае это ось, проходящая через точку А (перпендикулярно плоскости движения). Все точки тела в данный момент вращаются вокруг этой оси с одной и той же угловой скоростью ω. Точка О находится от оси на расстоянии R, поэтому $v_O = \omega R$, откуда находим $\omega = v_O / R$. Тогда придем к $v_B = \omega \cdot 2R = 2v_O$, $v_C = \omega \cdot R\sqrt{2} = v_O\sqrt{2}$, что совпадает с полученным ранее.

Этот подход удобен также тем, что позволяет легко определить направление скорости любой точки, например D. Оно перпендикулярно радиусу, проведенному из точки А. А модуль этой скорости равен произведению угловой скорости на расстояние от точки А, т.е. $v_D = \omega \cdot 2R\cos\alpha = 2v_O \cos\alpha$.

Сложнее дело обстоит с вычислением по этому методу ускорений. Казалось бы, все точки вращаются вокруг точки А, поэтому полное ускорение равно корню из суммы квадратов тангенциального и нормального ускорений. Однако это не так! Так мы найдем ускорение относительно системы отсчета, связанной с точкой А. Но необходимо учитывать также ускорение этой системы, т.е. точки А: $\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{вр.M}$. А $\vec{w}_A$ мы можем найти, только используя предыдущий метод: $w_A = w^2t^2 / R$. Зная его, мы легко можем найти и все остальные ускорения:

$$w_{Bx} = w_{B\tau} = \beta \cdot 2R = \dot{\omega} \cdot 2R = 2\dot{v}_O = 2w,$$

$$w_{By} = w_A - w_{Bn} = w^2t^2 / R - v_B^2 / 2R = w^2t^2 / R - (2wt)^2 / 2R = -w^2t^2 / R$$

$$w_{Cx} = w_{C\tau} \cos\pi/4 - w_{Cn} \cos\pi/4 = (\dot{\omega} \cdot R\sqrt{2} - \omega^2 R\sqrt{2})\cos\pi/4 =$$
$$= (w\sqrt{2} - w^2t^2\sqrt{2}/R)\sqrt{2}/2 = w - w^2t^2/R$$

$$w_{Cy} = w_A - w_{C\tau} \cos\pi/4 - w_{Cn} \cos\pi/4 = w^2t^2/R - (w\sqrt{2} + w^2t^2\sqrt{2}/R)\sqrt{2}/2 = -w$$

Мы пришли к тем же результатам, что и раньше.

§2. Движение центра масс (центра инерции).

Разбив тело на элементарные массы, можно представить его как систему материальных точек, взаимное расположение которых остается неизменным. Любая из этих точек может находиться под воздействием как внутренних, обусловленных взаимодействием с другими точками тела, так и внешних сил, например, $m_i\vec{g}$. Тогда для каждой точки с массой m_i выполнен закон Ньютона $m_i\vec{w}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i$, где $\vec{f}_i, \vec{F}_i$ - равнодействующие внутренних и внешних сил. Просуммировав по всем i, получим

$$\sum_i m_i\vec{w}_i = \sum_i \vec{f}_i + \sum_i \vec{F}_i .$$

Но по III з.Н. $\sum_i \vec{f}_i = 0$, поэтому $\sum_i m_i\vec{w}_i = \sum_i \vec{F}_i$ - результирующая всех сил, действующих на тело. Сумму $\sum_i m_i\vec{w}_i$ можно заменить на произведение массы тела на ускорение центра масс $\vec{w}_C$.

Покажем это. Радиус–вектор центра масс определяется так: $\sum_i m_i\vec{r}_i = m\vec{r}_C$. Взяв дважды производную по времени от обеих частей, получим $m\vec{w}_C = \sum_i m_i\vec{w}_i = \sum_i \vec{F}_i$.

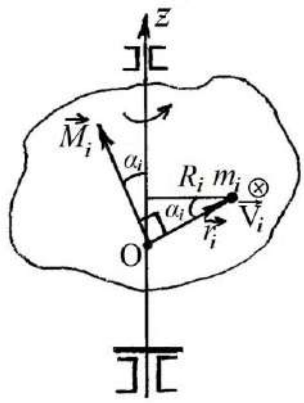
Центр масс тела всегда движется так, как двигалась бы материальная точка с массой тела под действием всех приложенных к телу сил. Если движение тела поступательное, то все точки тела движутся так же.

§3. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Чтобы удержать ось от перемещений, заключим ее в подшипники. Нижний фланец не дает оси двигаться по вертикали. Возьмем на оси точку О и будем характеризовать положения точек радиус-векторами, проведенными из нее.

Ранее было показано, что $$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \vec{N}_{внеш}, \qquad (*)$$

где $\vec{M}$ - суммарный момент импульса, $\vec{N}$ - моменты сил.



Момент импульса элементарной массы m_i равен $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i$. Для всех частиц $\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$; поэтому $M_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i$. Проектируя на ось вращения, получим

$$M_{zi} = M_i \cos\alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos\alpha_i = m_i R_i^2 \omega_z$$

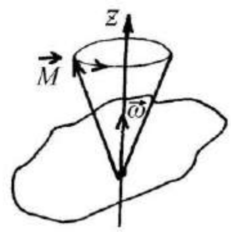
(индекс z у ω для общности). Просуммируем по всем i:

$$M_z = \sum M_{zi} = \omega_z \sum m_i R_i^2 \qquad (**)$$

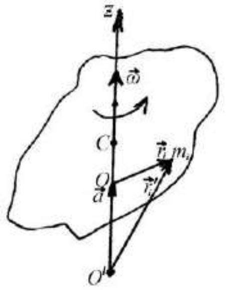
Величина $I = \sum m_i R_i^2$, равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции относительно этой оси. Тогда $M_z = I\omega_z$. Отметим аналогию с соотношением $p_z = mv_z$ в поступательном движении.

Из полученной формулы видно, что M_z не зависит от положения выбранной точки О на оси. Поэтому можно говорить о моменте M_z не относительно точки О, а относительно оси вращения z.

Проектируя (*) на ось z, получим $\frac{dM_z}{dt} = \sum N_{zвнеш}$, т.е. $I\beta_z = \sum N_{zвнеш}$, где $\beta_z = \dot{\omega}_z$ - проекция углового ускорения на ось z. Аналог этой формулы - $mw_z = \sum F_z$, т.е. I - это аналог массы, β - ускорения w, N – силы F.



Из соображений симметрии следует, что для однородного, симметричного относительно оси вращения тела вектор момента импульса относительно точки О на оси вращения совпадает по направлению с $\vec{\omega}$. Тогда $\vec{M} = I\vec{\omega}$, $M = I\omega$. Однако в общем случае вектор момента импульса тела относительно точки O $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$ не совпадает по направлению с осью вращения *z* и поворачивается вместе с телом вокруг нее, описывая конус.



Отметим, что $M_z = I\omega_z$ всегда, что следует из (**), а $\vec{M} = I\vec{\omega}$ только при вращении вокруг оси симметрии. M_z не зависит от положения точки O на оси всегда, а $\vec{M}$ - только если ось вращения проходит через центр симметрии.

<u>Доказательство.</u>

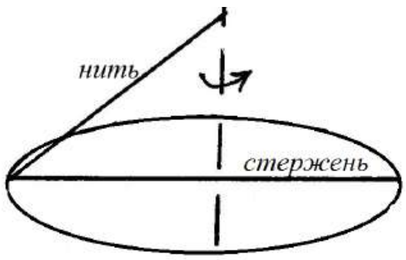
$$\vec{M}' = \sum m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{a} + \vec{r}_i) \times \vec{v}_i = \sum m_i \vec{a} \times \vec{v}_i + \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{a} \times \sum m_i \vec{v}_i + \vec{M} = \vec{a} \times m\vec{v}_C + \vec{M},$$

если центр масс лежит на оси вращения, то $\vec{v}_C = 0$, а $\vec{M}' = \vec{M}$.

При вращении симметричного тела силы бокового давления подшипников на ось тела не возникают, подшипники можно убрать (если нет сил тяжести). Ось будет сохранять свое положение. Ось, положение которой при отсутствии внешних сил остается неизменным при вращении, называется свободной осью тела. Можно доказать, что для тел любой формы с произвольным распределением масс существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, которые могут служить свободными осями. Эти оси называются главными осями инерции тела. У тел с осевой вращательной симметрией (когда при повороте на любой угол вокруг оси ситуация остается той же) фиксирована только одна главная ось (цилиндр). У тела с центральной вращательной симметрией не фиксирована ни одна главная ось вращения. Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции тела. В общем случае $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. При осевой вращательной симметрии тела $I_1 = I_2 \neq I_3$ (цилиндр), при центральной вращательной симметрии $I_1 = I_2 = I_3$ (шар). Такое тело называется шаровым волчком. В этом случае любая ось, проходящая через центр масс, является свободной осью вращения. Если $I_1 = I_2 \neq I_3$, то тело называется симметричным волчком. Если $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, то тело – асимметричный волчок. Равенство двух или трех главных моментов инерции может быть не только у цилиндра или шара. Например, однородный куб – шаровой волчок, правильная четырехугольная пирамида – симметричный. В общем случае такое может быть и у тел любой формы при соответствующем распределении масс.

Если тело вращается при отсутствии внешних сил, то устойчивыми оказываются только вращения вокруг главных осей, соответствующих максимальному и минимальному значениям момента инерции. Вокруг оси, соответствующей промежуточному значению *I*, вращение будет неустойчивым. Это значит, что при малейшем отклонении от оси вращения возникнут силы, ведущие к увеличению этого отклонения. На первый взгляд может показаться, что в результате тело перейдет к устойчивому вращению вокруг одной из двух других главных осей. Но это не так! Такой переход, как легко заметить, не может одновременно сохранить и кинетическую энергию, и момент импульса. Яркий пример такого перехода – эффект Джанибекова - можно увидеть в Youtube. Этот российский космонавт в состоянии невесомости наблюдал следующее явление. Шайба-барашек, приведенная во вращение и съехавшая с винта, некоторое время (до десятков секунд) вращается вокруг своей оси, а потом без видимых причин разворачивается на 180 градусов и начинает вращаться в этом положении, потом происходит обратный переход и т.д. Это означает, что неустойчивое состояние не переходит в устойчивое, а остается самим собой, т.е. периодическим переворачиванием тела. Правды ради, надо сказать, что нового Джанибеков ничего не открыл, он только привлек внимание широкой публики к эффекту, открытому еще Леонардом Эйлером в середине 18-го века. Этот эффект является решением системы дифференциальных уравнений Эйлера, описывающих движение твердого тела.

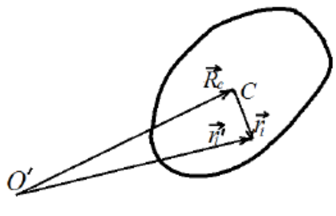
При наличии внешних сил, например со стороны нитей, на которых подвешено тело, устойчивым будет только вращение вокруг главной оси, соответствующей максимальному моменту инерции. Например, <u>при отсутствии силы тяжести</u> стержень, подвешенный на нитке за конец, при вращении в конечном итоге будет вращаться вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр масс.



Пока мы говорили о телах неизменной формы. Если форма изменяется, а внешние силы отсутствуют, то из закона сохранения момента импульса следует $I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \; (M_1 = M_2)$, что объясняет изменение частоты вращения фигуриста при разведении рук или прижатии их к телу.

<u>§4. Момент импульса произвольно движущегося тела</u>

Найдем момент импульса произвольно движущегося тела относительно точки O′. Для этого будем считать, что тело движется поступательно вместе с центром масс C и при этом вращается вокруг него.



$$\vec{M}_{O'} = \Sigma(\vec{r}_i{}' \times m_i \dot{\vec{r}}_i{}') = \Sigma(\vec{R}_C + \vec{r}_i) \times m_i (\dot{\vec{R}}_C + \dot{\vec{r}}_i) =$$

$$= \vec{R}_C \times \dot{\vec{R}}_C \underbrace{\sum m_i}_{=m} + \vec{R}_C \times \underbrace{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}_{=m\dot{\vec{r}}_c=0} + \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{=m\vec{r}_c=0} \times \dot{\vec{R}}_C + \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{R}_C \times m\vec{v}_C + \vec{M}_C$$

Мы пришли к выводу, что момент импульса произвольно движущегося тела относительно любой точки равен сумме момента импульса относительно нее центра масс и момента импульса относительно центра масс в системе центра масс.

При <u>плоском</u> движении в плоскости xy спроектируем это соотношение на ось z:

$$M_{zO'} = mv_C l_C + I_C \omega,$$

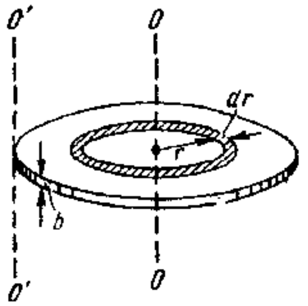
где l_C - плечо импульса центра масс С относительно оси z, проходящей через точку O′.

<u>§5. Момент инерции.</u>

Из определения $I = \sum \Delta m_i R_i^2$ следует, что I – величина аддитивная, т.е. $I_{тела} = \sum I_{частей}$. I - аналог массы, это мера инерции тела относительно его вращения вокруг соответствующей оси. Как и m, I существует у тела, даже если оно покоится.

$\Delta m_i = \rho_i \cdot \Delta V_i$, тогда $I = \sum \rho_i \Delta V_i R_i^2 = \int\limits_{(V)} \rho R^2 dV$ - интеграл по объему тела.

Вычислим, например, I однородного диска массой m и радиусом R относительно оси ОО, перпендикулярной диску и проходящей через его центр. Разобьем тело на «трубочки».



$$I = \rho \int\limits_0^R r^2 dV = \rho \int\limits_0^R r^2 2\pi r b dr = 2\pi b \rho \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi b \rho}{2} R^4 = \frac{mR^2}{2},$$

мы учли, что $V = \pi R^2 b$.

Итак, $I = \dfrac{mR^2}{2}$.

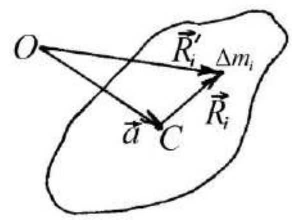
Вычисления были достаточно простыми, т.к. тело симметричное, а момент инерции искали относительно оси симметрии. Если бы мы захотели найти I относительно оси $O'O'$, все было бы сложнее. В таких случаях нахождение I упрощается, если воспользоваться теоремой Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_C + ma^2.$$

Тогда для диска $I_{O'} = \dfrac{mR^2}{2} + mR^2 = \dfrac{3}{2} mR^2$.

Доказательство теоремы Штейнера.

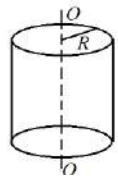
$$I_O = \sum \Delta m_i R'^2_i = \sum \Delta m_i (\vec{a} + \vec{R}_i)^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2\vec{a} \sum \Delta m_i \vec{R}_i + \sum \Delta m_i R_i^2 ,$$



$\sum \Delta m_i \vec{R}_i$ - это умноженная на m проекция радиус-вектора центра масс на плоскость, перпендикулярную оси. Поскольку начало координат в этой плоскости совпадает с точкой C, то эта проекция равна нулю. В итоге получили $I_O = I_C + ma^2$.

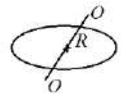
Приведем без вывода формулы для моментов инерции тел разной формы.

1) Тонкий длинный стержень длиной l с сечением любой формы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину - $I = \dfrac{1}{12} ml^2$



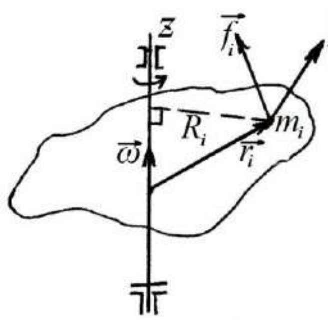
2) Диск или цилиндр относительно оси симметрии - $I = \dfrac{1}{2} mR^2$

3) Тонкий диск относительно диаметра - $I = \dfrac{1}{4} mR^2$



4) Шар относительно оси, проходящей через центр - $I = \dfrac{2}{5} mR^2$.

§6. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела и работа.



Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z. Линейная скорость любой точки равна $v_i = \omega R_i$. Кинетическая энергия равна

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i R_i^2 = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения.

Пусть на m_i действуют внутренняя сила $\vec{f}_i$ и внешняя сила $\vec{F}_i$. Тогда элементарная работа этих сил равна

$$dA_i = \vec{f}_i d\vec{S}_i + \vec{F}_i d\vec{S}_i = \vec{f}_i \vec{v}_i dt + \vec{F}_i \vec{v}_i dt = \vec{f}_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt + \vec{F}_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt = \vec{\omega}(\vec{r}_i \times \vec{f}_i) dt + \vec{\omega}(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) dt .$$

Так как смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на векторах, то мы поменяли их местами, сохраняя их последовательность (чтобы не изменился знак).

$$dA_i = \vec{\omega} \cdot \vec{N}_{i.внутр} dt + \vec{\omega} \cdot \vec{N}_{i,внеш} dt$$

Чтобы найти элементарную работу над телом за время dt, просуммируем все работы

$$dA = \sum dA_i = \vec{\omega} \sum \vec{N}_{i,внутр} dt + \vec{\omega} \sum \vec{N}_{i,внеш} dt = 0 + \vec{\omega} \sum \vec{N}_{внеш} dt = N_\omega \omega dt = N_\omega d\varphi ,$$

где N_ω - проекция $\vec{N}$ на ось $\vec{\omega}$. Эту же формулу можно получить иначе:

$$dT = d(\frac{I\omega^2}{2}) = d(\frac{I\vec{\omega}^2}{2}) = I\cdot\vec{\omega}\cdot d\vec{\omega} = I\cdot\vec{\omega}\cdot\vec{\beta}\cdot dt = I\omega\beta_\omega dt = I\beta_\omega d\varphi$$

Зная, что $I\beta_\omega = N_\omega$, получим $dT = N_\omega d\varphi$, а так как $dT = dA$, то $dA = N_\omega d\varphi$.

<u>Таблица аналогий поступательного и вращательного движений</u>

Поступательное	Вращательное
$\vec{v} = \dot{\vec{S}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
$\vec{w} = \dot{\vec{v}}$	$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$
m	I
$\vec{p} = m\vec{v}$	$M_z = I\omega_z$
$\vec{F}$	$\vec{N}$
$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$	$\dot{\vec{M}} = \vec{N}$
$m\vec{w} = \vec{F}$	$I\beta_z = N_z$
$T = mv^2/2$	$T = I\omega^2/2$
$dA = F_S dS$	$dA = N_\omega d\varphi$

Формулу $T = I\omega^2/2$ мы получили для случая вращения с частотой ω вокруг неподвижной оси вращения. Если же тело вращается произвольным образом вокруг неподвижной ТОЧКИ, эта формула усложняется: $T = I_x\omega_x^2/2 + I_y\omega_y^2/2 + I_z\omega_z^2/2$, где I_x, I_y, I_z - главные моменты инерции, а x, y, z – главные оси.

Таким образом, формула $T = I\omega^2/2$ верна в трех случаях:

1) вращение вокруг неподвижной оси;
2) вращение вокруг одной из главных осей;
3) тело является шаровым волчком ($I_x = I_y = I_z$).

§7. Кинетическая энергия при плоском движении.

Плоское движение тела может быть представлено как наложение поступательного движения со скоростью $\vec{v}_0$ и вращения вокруг соответствующей оси с $\vec{\omega}$.

Скорость i-й точки $\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_i$, где $\vec{v}_0$ - скорость любой выбранной нами точки O, $\vec{r}_i$ - радиус-вектор, проведенный из точки O.

$$T_i = m_i v_i^2/2 = m_i(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2/2 = m_i[v_0^2 + 2\vec{v}_0(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) + (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2]/2$$

$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right| = \omega r_i \sin\alpha = \omega R_i$$

$$T_i = m_i[v_0^2 + 2(\vec{v}_0\times\vec{\omega})\vec{r}_i + \omega^2 R_i^{\,2}]/2$$

$$T = \sum T_i = m v_0^2/2 + (\vec{v}_0\times\vec{\omega})\sum m_i\vec{r}_i + \omega^2\sum m_i R_i^{\,2}/2 == m v_0^2/2 + m\vec{r}_C(\vec{v}_0\times\vec{\omega}) + I_0\omega^2/2$$

Здесь мы учли, что $\sum m_i\vec{r}_i = m\vec{r}_C$ и $\sum m_i R_i^{\,2} = I_0$ - момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через точку О.

Если в качестве точки О взять центр масс С, то $\vec{r}_C = 0$ и $T = m v_C^2/2 + I_C\omega^2/2$

Таким образом, кинетическая энергия при плоском движении складывается из энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Еще раз обратим внимание на <u>особую роль центра масс</u>, подчеркнув следующие его свойства:

1) это точка, движущаяся в согласии со 2-м законом Ньютона, (в частности, при движении тела в поле тяжести именно центр масс движется по параболе);

2) момент импульса произвольно движущегося тела относительно любой оси равен сумме момента импульса относительно нее <u>центра масс</u> и момента импульса относительно <u>центра масс</u> в системе центра масс.

3) кинетическая энергия при плоском движении складывается из энергии поступательного движения со скоростью <u>центра масс</u> и энергии вращательного движения вокруг оси, проходящей через <u>центр масс</u>.

Для других точек пункты 2 и 3 не выполняются.

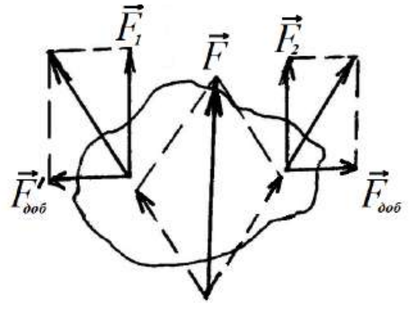
<u>§8. Применение законов динамики твердого тела.</u>

Движение тела описывается двумя уравнениями

$$m\vec{w}_C = \sum\vec{F}_{i,внеш.} \quad ; \qquad \dot{\vec{M}} = \sum\vec{N}_{i,внеш.}$$

<u>Примечания.</u>

1) Моменты $\vec{M}$ и $\vec{N}$ можно брать относительно любой неподвижной или движущейся точки; если эта точка движется с ускорением, то надо учитывать и силы инерции, действующие на каждое тело.



2) Точки приложения сил можно переносить вдоль линий действия сил; плечи сил при этом не меняются. Это позволяет заменить несколько сил одной, причем точку ее приложения можно перенести вдоль линии ее действия. В случае параллельных сил, казалось бы, этот способ не

применим, так как у линий сил нет точки пересечения. Но можно схитрить и добавить две взаимно скомпенсированные силы, которые ситуацию не меняют. Тогда суммарные силы уже не будут параллельны, что позволяет воспользоваться описанным ранее способом (см. рисунок).

3) Совокупность параллельных сил можно заменить равнодействующей силой, равной векторной сумме всех сил и приложенной в такой точке, чтобы момент равнодействующей равнялся сумме всех моментов (относительно любой оси).

4) Найдем равнодействующую сил тяжести. Она равна сумме элементарных сил тяжести $\sum m_i\vec{g} = m\vec{g}$, где $m = \sum m_i$. Суммарный момент сил тяжести относительно произвольной точки О равен $\vec{N} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \sum m_i\vec{r}_i \times \vec{g} = m\vec{r}_C \times \vec{g} = \vec{r}_C \times m\vec{g}$, т.е. моменту равнодействующей силы $m\vec{g}$, приложенной в центре масс, т.е. сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в центре масс. Значит, в однородном поле тяжести центр тяжести совпадает с центром масс. Отметим, что относительно центра масс $\vec{N} = 0$, т.е. центр тяжести – это точка, относительно которой сумма моментов элементарных сил тяжести равна нулю.

5) Силы инерции $-m\vec{w}$ при поступательном движении обладают тем же свойством, что и силы тяжести, т.е. пропорциональны массе и параллельны друг другу. Поэтому равнодействующая сил инерции приложена также в центре масс (тяжести).

6) Относительно оси, проходящей через центр масс, суммарный момент сил инерции равен нулю; поэтому, если уравнение моментов (п.1) составляется относительно оси, проходящей через центр масс, то силы инерции можно не учитывать.

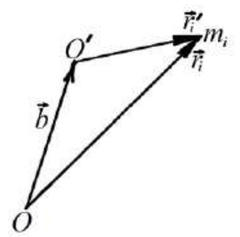
7) Для плоского движения одного тела $M_z = I\omega_z$, и проекция равенства $\dot{\vec{M}} = \sum \vec{N}_{i,внеш.}$ на ось z даст уравнение $I\beta = \sum N_{i,внеш.}$. Оно называется основным уравнением динамики вращательного движения (аналог II з.Н.).

<u>Условия равновесия твердого тела.</u>

1) Сумма внешних сил равна нулю: $\sum \vec{F}_{i,внеш.} = 0$.

2) Сумма моментов внешних сил относительно любой точки равна нулю:

$$\sum \vec{N}_{i,внеш.} = 0,$$



Из равенства $\sum \vec{N}_{i,внеш.} = 0$ относительно какой-нибудь точки (оси) следует (при $\sum \vec{F}_{i,внеш.} = 0$) его выполнение относительно любой другой.

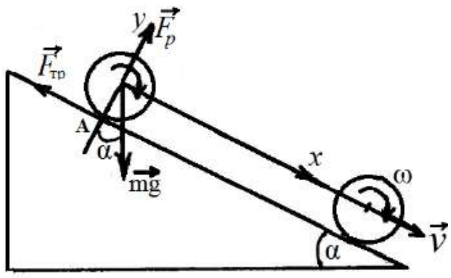
<u>Доказательство.</u> Пусть $\sum \vec{N}_{i,внеш.} = 0$ относительно точки О. Тогда

$\sum \vec{N}'_i = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum (\vec{r}_i - \vec{b}) \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{b} \times \sum \vec{F}_i = 0$, что и требовалось доказать.

Векторное уравнение $\sum \vec{N}_{i,внеш.} = 0$ в общем случае эквивалентно трем условиям: $\sum N_{x,i,внеш.} = 0, \sum N_{y,i,внеш.} = 0, \sum N_{z,i,внеш.} = 0$.

§9. Решение задачи о скатывании цилиндра (2 способа).

Цилиндр радиуса R и массы m скатывается без проскальзывания с высоты H по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти скорость центра масс в нижней точке.



Первый способ. 1) $\vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{F}_p = m\vec{w}_C$

Проекция на ОХ: $-F_{тр} + mg\sin\alpha = mw_C$ (1)

Проекция на ОУ: $-mg\cos\alpha + F_p = 0$, откуда $F_p = mg\cos\alpha$.

2)Отсутствие проскальзывания означает, что тело вращается вокруг мгновенного центра вращения А, т.е. движение центра масс есть вращение его вокруг А. Тогда $v_C = \omega R$. Беря производную по времени, получаем $w_C = \beta R$. (2)

3)Запишем основное уравнение динамики вращательного движения $I\beta = \sum N_i$ для цилиндра, выбрав в качестве оси вращения ось, проходящую через центр масс С:

$$I_C\beta = F_{тр}R \quad \Rightarrow \quad \frac{mR^2}{2}\beta = F_{тр}R \Rightarrow \quad F_{тр} = mR\beta/2 \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим $-mR\beta/2 + mg\sin\alpha = mR\beta$, откуда

$$\beta = \frac{2g}{3R}\sin\alpha, \quad w_C = \beta R = \frac{2}{3}g\sin\alpha, \quad F_{тр} = mR\beta/2 = \frac{mg\sin\alpha}{3}.$$

Теперь можно найти условие, при котором отсутствует проскальзывание: $F_{тр} \le F_{тр,макс}$, т.е. $\frac{mg\sin\alpha}{3} \le \mu mg\cos\alpha$, откуда следует условие для коэффициента трения μ: $\mu \ge \frac{tg\alpha}{3}$. Иначе будет проскальзывание.

Поскольку $w_C = const$, то центр масс движется равноускоренно. Зная пройденный путь $S = H/\sin\alpha$, найдем конечную скорость центра масс.

$$v_k^2 - 0 = 2w_C S \Rightarrow v_k = \sqrt{2\cdot\frac{2}{3}g\sin\alpha\cdot\frac{H}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{4}{3}gH} < \sqrt{2gH}$$ (если бы скользило).

Можно было в качестве оси выбрать проходящую через точку А. Тогда момент силы трения был бы равен нулю. Поскольку точка А в данный момент покоится, то и сил инерции не пришлось бы вводить. Остался бы только момент силы тяжести: $I_A\beta = mgR\sin\alpha$, где $I_A = I + mR^2 = 3mR^2/2$. Отсюда можно сразу найти $\beta = \dfrac{2g}{3R}\sin\alpha$. Нам не понадобился закон Ньютона. Для нахождения w_C всё-таки придется использовать условие отсутствия проскальзывания (см. пункт 2 выше): $v_C = \omega R$ и $w_C = \beta R$.

<u>Второй способ (через энергию)</u>

При отсутствии проскальзывания сила трения энергию в тепло не переводит, так как точка ее приложения в каждый момент времени неподвижна. Поэтому полная механическая энергия остается постоянной: $mgH + 0 = 0 + \dfrac{mv_C^2}{2} + \dfrac{I_C\omega^2}{2}$.

Так как скольжения нет, то $v_C = \omega R$ (как и в первом способе, через мгновенный центр вращения).

$$mgH = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2\cdot 2} \Rightarrow v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gH}.$$

<u>Примечание. О потенциальной энергии тела в однородном поле тяжести.</u>

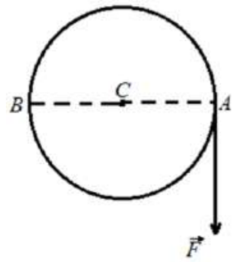
Разобьем тело на микроскопические элементы с массами m_i. Выбрав уровень отсчета высоты, запишем потенциальную энергию тела в виде $E_p = \sum_i m_i g h_i = g\sum_i m_i h_i = gMh_C$.

Итог: **потенциальная энергия тела равна энергии его центра тяжести**.

<u>§10. Решение задачи о катушке на льду.</u>

Рассмотрим еще одну задачу.

На гладкой (ледяной) плоскости находится стоящая на торце цилиндрическая катушка с нитками массой m и радиусом R. За нитку начинают тянуть с горизонтальной постоянной силой $\vec{F}$, касательной к поверхности катушки. Как будет двигаться катушка?

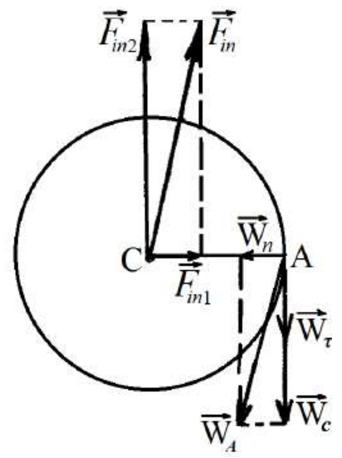


<u>Решение</u>. Запишем 2-й закон Ньютона для центра масс: $\vec{F} = m\vec{w}_C$.

Значит, центр масс, т.е. ось катушки, будет двигаться равноускоренно по прямой.

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс: $I_C\beta = FR$, где $I_C = mR^2/2$. Отсюда $\beta = 2F/mR$. Итак, ответ: катушка будет вращаться с постоянным угловым ускорением вокруг равноускоренно и прямолинейно движущегося центра масс.

Интересен другой вопрос. Уравнение $I\beta = \sum N_i$ мы можем писать относительно любой оси. Выбрав ось, проходящую через точку А приложения силы $\vec{F}$, получим $I\beta = 0$, т.е. $\beta = 0$, чего быть не должно, так как угловое ускорение, как и угловая скорость, одинаковы во всех поступательно движущихся системах отсчета (это доказывается тем фактом, что период вращения, т.е. время полного оборота, во всех системах отсчета одинаков). Мы пришли к кажущемуся парадоксу. Дело в том, что мы нарушили пункт 1 §8. Если ось вращения движется с ускорением, то надо добавить силу инерции. Согласно пункту 5 §8, она приложена к центру масс катушки и равна $\vec{F}_{in} = -m\vec{w}_A$. Ось А в данный момент движется с ускорением, которое складывается из ускорения поступательного движения вместе с центром масс и ускорения вращательного движения вокруг центра масс ($\vec{w}_A = \vec{w}_C + \vec{w}_n + \vec{w}_\tau$). Сила $\vec{F}_{in} = -m(\vec{w}_C + \vec{w}_n + \vec{w}_\tau)$ приложена в точке С и имеет составляющие, направленные вбок ($\vec{F}_{in1}$)и назад ($\vec{F}_{in2}$). Запишем основное уравнение динамики вращательного движения оносительно оси, проходящей через точку А:



$I_A\beta = F_{in1}\cdot 0 + F_{in2}\cdot R$, где $F_{in2} = m(w_C + w_\tau) = m(w_C + \beta R)$.

По формуле Штейнера $I_A = I_C + mR^2 = 3mR^2/2$. В итоге получим $3mR^2\beta/2 = m(w_C + \beta R)R$, откуда $\beta = 2w_C/R = 2F/mR$.

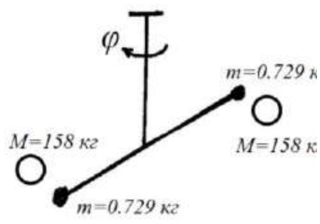
§11. Закон всемирного тяготения.

Все тела во Вселенной притягиваются друг к другу, причем для материальных точек силы притяжения прямо пропорциональны произведению их масс и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними.

$$F_{гр} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $\gamma = \dfrac{1}{15\ млрд} = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н м/кг^2 –гравитационная постоянная.

Формула справедлива для случая двух материальных точек или одной точки и шара (например, шар – Земля, а точка – предмет у ее поверхности), где r - расстояние между точками или от точки до центра шара. Для тел другой формы надо вычислять интеграл, представляющий собой сумму сил притяжения между разными частями тел.



В векторном виде закон можно записать так: $\vec{F}_{гр} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$.

Два тела массой 100 кг на расстоянии 1 м притягиваются с силой около 10^{-6} Н. Сила очень мала, но всё же её удалось измерить на крутильных весах (Кавендиш, 1798 год).

Гравитационное поле. Проведем аналогию с электростатикой. Отметим, что заряды бывают двух знаков, т.е. бывает и притяжение и отталкивание, а здесь только притяжение.

Напряженность гравитационного поля $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$, где m – это пробная масса. Для поля точечной массы $\vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^3}\vec{r}$. У поверхности Земли ($R = R_З$) $\vec{G} = \vec{g}$. Ранее мы показали, что в таком поле потенциальная энергия точки равна $U = -\gamma \frac{Mm}{r}$.

Отметим, что нельзя считать этот закон теорией гравитации, как нельзя закон Кулона считать теорией электрического поля – это только первый шаг. В электромагнетизме было еще много шагов - и в электростатике, и в магнитном поле, и в электромагнитной индукции – прежде чем Максвелл построил полную теорию электромагнетизма. Эта теория позволяет рассчитать изменение полей во времени. Например, мы переместили заряд в другую точку. Когда в других точках станет известно о произошедшем? Ведь изменились и величины сил, и их направления. Уравнения Максвелла показывают, что изменения распространяются со скоростью света. Можно сказать, что прежнюю картину «смывает» волна, и после ее прохождения устанавливается новая картина. Такие же вопросы должны возникать и в гравитации. Закон всемирного тяготения на них ответов не дает. Он говорит только о величинах сил в стационарной ситуации. Полная теория гравитации была построена Альбертом Эйнштейном в 1915 году. Она получила название «Общая теория относительности» (ОТО).

§12. Космические скорости.

Чтобы стать спутником Земли, т.е. двигаться вокруг нее по круговой орбите с радиусом, примерно равным радиусу Земли, тело должно иметь определенную скорость. Сила тяжести должна обеспечивать необходимое центростремительное ускорение:

$$mg = \frac{mv^2}{R_З} \Rightarrow v_1 = \sqrt{gR_З} \approx 8 \text{ км/с}$$

Это первая космическая скорость (скорость искусственных спутников Земли).

Вторая космическая скорость – скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло уйти из сферы земного притяжения, т.е. могло удалиться на бесконечное расстояние от Земли. Найдем ее из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}+(-\gamma\frac{M_З m}{r})=0$$

$$v_2=\sqrt{\frac{2\gamma M_З}{R_З}}=\sqrt{2gR_З}=v_1\sqrt{2}\approx 11 \text{ км/с.}$$

Мы здесь воспользовались соотношением $g=\frac{\gamma M_З}{R_З^2}\Rightarrow \gamma M_З=gR_З^2$. Эта скорость не зависит от направления, в котором запускают тело. Если запускать по ходу вращения Земли, то можно сэкономить, используя вращение Земли. Лучше это делать на экваторе, где скорость вращения больше. Она равна: $v_З=\frac{l}{T}=\frac{2\pi R_З}{T_{сутки}}=\frac{6{,}28\cdot 6300}{86400}\approx 0{,}5$ км/с.

Третья космическая скорость – скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно покинуло Солнечную систему. Вычислим ее так же, как 2-ю космическую скорость, из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}+(-\gamma\frac{M_З m}{R_З})+(-\gamma\frac{M_C m}{R_{орб}})=0$$

$$v_3=\sqrt{2\gamma\left(\frac{M_З}{R_З}+\frac{M_C}{R_{орб}}\right)}=v_2\cdot\sqrt{1+\frac{M_C}{M_З}\cdot\frac{R_З}{R_{орб}}}=v_2\cdot\sqrt{1+\frac{1{,}97\cdot 10^{30}}{5{,}96\cdot 10^{24}}\cdot\frac{6{,}37\cdot 10^{6}}{150\cdot 10^{9}}}\approx 42 \text{ км/с.}$$

Тут можно сэкономить, учитывая скорость Земли на орбите:

$$v_{Земли}=\frac{l}{T}=\frac{2\pi R_{орб}}{T_{год}}=\frac{6{,}28\cdot 150\cdot 10^6}{365\cdot 86400}\approx 30 \text{ км/с.}$$

Так что, если запускать ракету в направлении движения Земли по орбите, можно ограничиться скоростью 12 км/с вместо 42. Это серьезная экономия!

Глава 6. Релятивистская механика.

§1. Специальная теория относительности (СТО).

В 1873 году Джеймс Кларк Максвелл опубликовал свою теорию электромагнетизма. Из его уравнений следовало существование электромагнитных волн, движущихся со скоростью света c=300 000 км/с. Возник вопрос, что же колеблется в волне. Звук – колебания среды, например, воздуха. А электромагнитные волны – это колебания чего? Решили, что колеблется эфир, который заполняет всю Вселенную. Его свойства сразу показались странными. Например, тело, движущееся в воздухе, тормозится из-за силы сопротивления воздуха. Тело же, летящее относительно эфира, никаких воздействий с его стороны не испытывает и может лететь вечно с той же скоростью. Кроме того, электромагнитные волны поперечны (а звуковые в воздухе продольны), что означает существование поперечной упругости эфира. Странной являлась и огромная величина этой скорости, в сотни тысяч раз превосходящей скорость звука. Но пришлось смириться с этими несуразностями, ничего другого ученые предложить не могли.

Итак, эфир - это среда, заполняющая весь мир, в которой находятся звезды, планеты и все остальное. Естественно возник вопрос, с какой скоростью Земля движется относительно эфира. Это можно узнать, измерив скорость света в разных направлениях. Ясно, что Земля движется в том направлении, в котором эта скорость минимальна. Ведь получается, что Земля догоняет волну, так что ее скорость будет меньше, чем в покоящемся эфире, на величину скорости Земли. В противоположном направлении измерение даст максимальную скорость света, которая больше этой скорости в случае покоящейся Земли на ту же величину. В 1887 году был поставлен опыт Майкельсона-Морли, показавший, что скорость света не зависит от направления. Предположили, что случайно попали в такой момент, когда Земля покоилась относительно эфира. Повторили опыт через полгода, когда Земля прошла половину своей орбиты вокруг Солнца и ее скорость была направлена в противоположную сторону. Но и этот опыт подтвердил отсутствие движения Земли относительно эфира. Это заставило отказаться от этой теории, предполагающей существование выделенной системы отсчета, отличающейся от всех остальных своей изотропностью.

Но если все инерциальные СО равноправны, то законы физики в них должны быть одинаковы, иначе по виду закона можно отличать одну от другой. Переход из одной ИСО в другую рассчитывался по преобразованиям Галилея. Законы Ньютона при таком преобразовании переходили сами в себя, то же можно сказать о термодинамике и т.п. То есть эквивалентность ИСО этими явлениями подтверждалась. А вот уравнения Максвелла при переходе из одной ИСО в другую изменяли свой вид. Надо было отказаться либо от идеи равноправия всех ИСО, либо от уравнений Максвелла. Но они себя подтверждали везде и во всем!

И вот Альберт Эйнштейн нашел третий вариант выхода из тупика. Он сказал, что неверны сами преобразования Галилея, т.е. что мир устроен не так, как мы думали до этого. В 1905 году 26-летний Эйнштейн опубликовал свою работу, в которой сформулировал свои два постулата СТО и исследовал ряд выводов из них.

Постулаты СТО:

1. Все законы природы одинаковы во всех ИСО.

Или, иначе: уравнения, выражающие законы природы, инвариантны (неизменны) по отношению к преобразованиям координат и времени из одной ИСО к другой.

2. Скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от движения источников и приемников света.

Второй постулат является частным случаем первого. Действительно, из уравнений Максвелла легко вывести волновое уравнение, решением которого являются электромагнитные волны, распространяющиеся со скоростью c=300 000 км/с. Если уравнения Максвелла инвариантны относительно перехода из одной ИСО в другую, то и скорость этих волн одна и та же во всех ИСО. Значит, второй постулат является следствием первого, но выделен ввиду своей значимости.

Отметим, что в постулатах не говорится о том, что скорость света – максимально возможная скорость в природе. Это утверждение является <u>следствием</u> постулатов. Если кто-то хочет поставить под сомнение СТО (а такие люди существуют), то надо опровергать постулаты, точнее первый постулат, так как он содержит в себе и второй. Можно говорить, что не все законы природы…, или не во всех ИСО… Это звучит странновато. Кроме того, посмотрите, как красив первый постулат! И логичен! И нечего сказать против него!

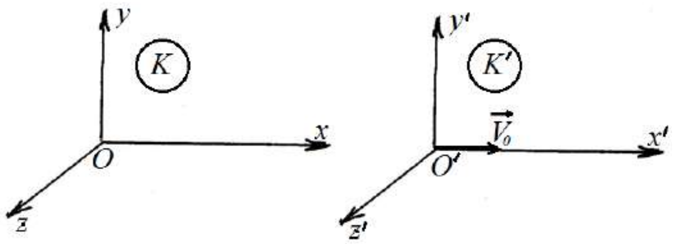
Почему кто-то не хочет соглашаться с таким четким и понятным постулатом? А потому, что он приводит к массе кажущихся парадоксов. Мир выглядит совсем не так, как мы считали раньше. Эти «парадоксы» мы еще рассмотрим, а пока ограничимся одним. Вагон едет мимо платформы. В какой-то момент в центре вагона загорается лампа. На концах вагона стоят фотореле. Как только свет падает на реле, оно открывает дверь. Какая дверь – передняя или задняя – откроется раньше? Если мы находимся в вагоне, то понятно, что свет дойдет до обеих дверей одновременно. А с точки зрения наблюдателя на платформе, свет распространяется в обе стороны с одной скоростью, но передняя дверь убегает от света, а задняя набегает на него. Поэтому задняя откроется раньше. Вывод: одновременность относительна! Что одновременно в одной ИСО, не одновременно в другой.

Эйнштейн обратил внимание на необходимость синхронизации часов в разных ИСО. Это делалось при помощи светового сигнала, испускаемого из какого-то источника. При этом время на часах в разных точках устанавливается с учетом запаздывания светового сигнала. В разных СО синхронизация приводит к разным результатам. Это следствие инвариантности скорости света.

Немецкий математик Герман Миньковский в 1909 году предложил четырехмерную систему координат: x, y, z, t (точнее ct). В этой системе координат событию отвечает точка («мировая»). Любой частице, даже неподвижной, соответствует линия («мировая линия»). 4-пространство отличается от 3-пространства. 3-пространство обладает евклидовой метрикой, т.е. квадрат расстояния между двумя точками равен $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. В 4-пространстве вводится понятие интервала $\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ - псевдоевклидова метрика.

В СТО особую роль играют инварианты – величины, не меняющиеся при переходе из одной СО в другую. Одна из таких величин – скорость света c, другая, как мы увидим, интервал ΔS.

§2. Преобразования Лоренца.



Рассмотрим две ИСО: K и K'.

K' относительно K движется со скоростью v_0 вдоль оси x:

$x_{O'} = v_0 t \qquad x_O' = -v_0 t'$

В нерелятивистской механике переход от x', y', z', t' к x, y, z, t осуществляется с помощью преобразований Галилея: $x = x' + v_0 t'$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$.

Отсюда следует закон сложения скоростей: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$, что противоречит постоянству скорости света. Значит, преобразования Галилея надо заменить на другие. Можно показать, что для инвариантности скорости света при переходе из K' в K надо:

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \frac{t' + v_0 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Это преобразования Лоренца. Введем обозначение $\beta = v_0/c$, тогда

$$x = \frac{x' + \beta(ct')}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y = y',\ z = z',\ t = \frac{t' + \beta x'/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad (ct) = \frac{(ct') + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

ct - четвертая координата. Последняя формула получается из формулы для x, если поменять местами x и ct.

Для перехода из K в K' преобразования имеют вид

$$x' = \frac{x - \beta(ct)}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\ .$$

§3. Следствия из преобразований Лоренца.

1) Одновременность событий в разных СО.

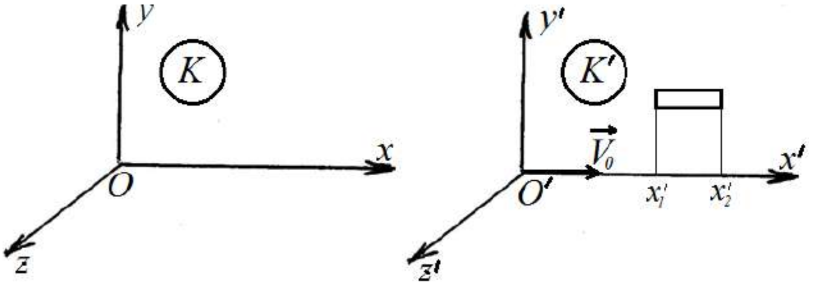
Пусть в K в точках x_1 и x_2 одновременно ($t_1 = t_2 = b$) произошли два события. Тогда

$$t'_1 = \frac{b - \beta x_1/c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t'_2 = \frac{b - \beta x_2/c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Как видим, $t'_2 \neq t'_1$, т.е. события не одновременны.

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}(x_1 - x_2)$$ - эта величина в разных СО разная. Может различаться и знак, т.е. в одной СО раньше произошло первое событие, а в другой – второе. Как же так? Мать не может родиться после сына. Это действительно так. Далее будет показано, что если события причинно связаны, то ни в одной СО они не будут одновременны и во всех СО первое событие будет раньше второго.

2) Длина тел в разных СО.



Пусть стержень покоится в системе K'. В системе K в момент $t_1 = t_2 = b$ имеем $l = x_2 - x_1$. Тогда в K' получим $x'_1 = \frac{x_1 - v_0 b}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $x'_2 = \frac{x_2 - v_0 b}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Разность этих координат – это длина стержня в K', относительно которой он покоится.

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ или } l = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Длина стержня l, измеренная в СО, относительно которой он движется, меньше его длины l_0 в СО, относительно которой он покоится. Длина l_0 называется собственной длиной. В направлениях y и z размеры одинаковы во всех СО.

Итак, у движущихся тел размеры в направлении движения сокращаются тем больше, чем больше скорость. Это сокращение длины называется лоренцевым.

Как можно измерить длину движущегося тела? Есть два способа.

а) В один момент времени засечь координаты начала и конца тела, а потом измерить расстояние между ними.

б) Засечь время прохождения начала и конца через одну точку и умножить его на скорость.

3)Промежуток времени между событиями.

Пусть в одной и той же точке $x'_2 = x'_1 = a$ системы K' происходят два события в моменты t'_1 и t'_2. Тогда в системе K получим:

$$t_1 = \frac{t'_1 + v_0 a / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad t_2 = \frac{t'_2 + v_0 a / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Промежуток $\Delta t'$ измеряется на одних и тех же часах, а Δt - на разных. Время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется собственным временем и обозначается τ. $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$

Таким образом, собственное время всегда меньше, чем время, отсчитанное в СО, относительно которой тело движется.

Экспериментальное подтверждение этого факта: покоящиеся мюоны живут $2\cdot10^{-6}$ с, а потом распадаются на электрон и два нейтрино. Даже двигаясь со скоростью, близкой к скорости света, они не могут пролететь больше 600 метров. Но в природе они образуются на высоте 20-30 километров и долетают до земной поверхности. Как это объяснить? $2\cdot10^{-6}$ с – это $\Delta\tau$, а $\Delta t = \dfrac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$ при $v \approx c$ много больше, чем $\Delta\tau$. Отметим, что с позиции наблюдателя, сидящего на мюоне, он пролетает как раз 600 метров.

4)Скорость света – максимальная скорость во Вселенной.

Из неотрицательности подкоренного выражения в полученных выше формулах следует, что $v \le c$, т.е. скорость объекта не может превысить скорость света в вакууме. Это утверждение не входит в систему постулатов СТО (как иногда ошибочно думают), а является следствием преобразований Лоренца. Отметим, что речь идет о скорости физического объекта, который может переносить информацию. Это создает ограничение на скорость сигнала, используемого при синхронизации часов, о которой шла речь в §1. Но в некоторых случаях «скорость» может превышать скорость света. Например, два объекта движутся навстречу друг другу со скоростями 0,6 c. Скорость их сближения будет равна 1,2 c, ведь за 1 секунду расстояние между ними убывает на 1,2 c. Здесь слово «скорость» не означает скорость какого-то объекта. Или другой пример. Скорость движения солнечного зайчика на стене при вращении зеркала может превышать скорость света. В этом нет ничего странного, ведь зайчик не является физическим объектом – это просто место, куда попадает свет. Принципиально важным является тот факт, что при помощи зайчика невозможно передать информацию из одной точки в другую.

Невозможность движения объекта быстрее света порождает целый ряд вопросов и сомнений. Например, почему нельзя получить такую скорость при сложении движений? Река течет со скоростью 0,6 c, а по ней плывет пароход со скоростью 0,7 c, разве скорость парохода относительно берега не будет больше скорости света? Ответ: нет, не будет. А почему, мы узнаем в одном из ближайших параграфов.

И еще вопрос: если запустить двигатель ракеты на долгое время, то что помешает ей набрать любую, сколь угодно большую, скорость? Сначала 100 м/с, потом 1000 м/с, потом 100 000 км/с, потом 300000 км/с, вот скорость света и превышена, разве не так? Не так! Об этом тоже поговорим потом.

§4. Парадокс близнецов.

На формуле $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$ основывается так называемый «парадокс близнецов». Один из близнецов (А) улетает на ракете со скоростью, сравнимой со скоростью света, и через некоторое время возвращается на Землю. Согласно СТО, время в движущейся системе идет медленнее, чем в покоящейся, т.е. летавший близнец оказывается моложе. Этот факт часто ошибочно называют парадоксом близнецов. Хотя такая ситуация и необычна, в ней нет внутреннего противоречия. Нас ведь не удивляет, что человек, пробежавший 10 км, худее того, кто не бегал. Многочисленные эксперименты по удлинению времени жизни элементарных частиц и замедлению хода макроскопических часов при их движении подтверждают теорию относительности. Это даёт основание утверждать, что замедление времени, описанное в истории с близнецами, произойдёт и при реальном осуществлении этого мысленного эксперимента.

Но рассмотрим следующий факт. С точки зрения А, летал В, поэтому моложе будет именно он. Кто же моложе на самом деле? Пока А и В находятся в разных точках пространства, они не могут сравнивать свои часы непосредственно, и парадокса нет: с точки зрения каждого моложе другой. Нас ведь не удивляет, что каждый из двух водителей видит свое лобовое стекло под большим углом, чем стекло встречного автомобиля. Но когда А вернулся и оба находятся в одной точке, то от вопроса не уйти: кто моложе? Казалось бы, ответ очевиден: поскольку братья равноправны, то и возрасты должны быть одинаковы. Но СТО приводит к результату, что один из них моложе. Как же объяснить это противоречие? Вот это и называется «парадоксом близнецов».

Ответ на этот вопрос состоит в том, что на самом деле они не равноправны. Один из близнецов (В) все время находился в инерциальной системе отсчета, поэтому его действительно можно считать покоившимся. А вот А в процессе полета был вынужден затормозить, развернуться и набрать скорость в обратном направлении, т.е. система отсчета, связанная с ним, какое-то время не являлась инерциальной. Поэтому его рассуждения не являются правильными.

В таком случае возникает следующий вопрос: почему кратковременное нарушение равноправия приводит к столь разительному результату? Ведь теоретически разворот мог длиться, например, час, а разница времен может составлять годы. Для ответа на этот вопрос необходимо проводить достаточно сложные вычисления.

Расчёт величины замедления времени с позиции каждого брата может быть выполнен разными способами: как в рамках элементарных вычислений в СТО, так и при помощи анализа неинерциальных систем отсчёта. Все эти вычисления согласуются друг с другом и показывают, что брат-путешественник окажется моложе своего брата-домоседа, причем разность возрастов определяется именно формулой $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$.

§5. Интервал.

Рассмотрим две мировые точки: x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2. Обозначим $\Delta x = x_2 - x_1$ и т.д. Назовем величину $\Delta S = \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$ интервалом между мировыми точками. Это аналог расстояния в 3-пространстве ($\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$).

$$\Delta S = \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta l^2}$$

В движущейся системе K' имеем $\Delta S' = \sqrt{(c\Delta t')^2 - \Delta l'^2}$. Подставив $\Delta x' = \dfrac{\Delta x - v_0\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

$\Delta y' = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$, $\Delta t' = \dfrac{\Delta t - v_0\Delta x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ в $\Delta S'$, получим $\Delta S' = \Delta S$.

Таким образом, интервал ΔS - инвариант по отношению к переходу из одной ИСО в другую. Величины Δl и Δt изменяются, а $\Delta S = \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta l^2}$ остается тем же.

В собственной системе отсчета $\Delta l = 0$, поэтому $\Delta S = c\Delta\tau$. Интервал может быть действительным, когда $\Delta S^2 > 0$, или мнимым, когда $\Delta S^2 < 0$, или $\Delta S = 0$.

$\Delta S = 0$ для событий, соответствующих испусканию светового сигнала из точки x_1, y_1, z_1 в момент t_1 и приходу сигнала в точку x_2, y_2, z_2 в момент t_2.

Поскольку ΔS - инвариант, то во всех СО он будет >0 (или <0, или =0).

Если интервал действительный ($\Delta S^2 > 0$), то $(c\Delta t)^2 - \Delta l^2 > 0$, т.е. можно найти СО, в которой $\Delta l = 0$, т.е. события происходят в одной точке, но нет СО, в которой $\Delta t = 0$, т.е. события одновременны. Такие интервалы называются времениподобными. Отметим, что события, происходящие с одной и той же частицей, могут быть разделены только времениподобными интервалами, т.к. $\Delta l = v\Delta t < c\Delta t$ и $(c\Delta t)^2 - \Delta l^2 > 0$.

Поскольку события, происходящие с одной и той же частицей, не могут быть одновременными ни в какой СО, т.е. Δt не проходит через ноль, то Δt всегда имеет один и тот же знак, т.е. события происходят в одной и той же последовательности (рождение раньше смерти, мать родилась раньше сына и т.д.).

Если интервал мнимый ($\Delta S^2 < 0$), то $(c\Delta t)^2 - \Delta l^2 < 0$, т.е. можно найти СО, в которой $\Delta t = 0$, т.е. события происходят одновременно, но нет СО, в которой $\Delta l = 0$, т.е. ни в какой СО события не происходят в одной точке. Такие интервалы называются пространственноподобными. $\Delta l^2 > (c\Delta t)^2$, значит, события не могут быть причинно связаны, т.к. сигнал не может двигаться быстрее света (поскольку в преобразованиях Лоренца в знаменателе стоит $\sqrt{1-v^2/c^2}$). Причинно связанные события разделены только времениподобным, или, в крайнем случае, нулевым, интервалом.

§6. Преобразования Лоренца и сложение скоростей.

Рассмотрим движение точки в *К*-системе: $v_x = dx/dt$. Тогда в K' имеем $v_{x'} = dx'/dt'$.

Из преобразований Лоренца следует

$$dx = \frac{dx' + v_0 dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz', \qquad dt = \frac{dt' + v_0 dx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Тогда $v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx' + v_0 dt'}{dt' + v_0 dx'/c^2} = \dfrac{v_x' + v_0}{1 + \dfrac{v_0 v_x'}{c^2}}$

Закон сложения скоростей

$$v_x = \frac{v_x' + v_0}{1 + \dfrac{v_0 v_x'}{c^2}}; \qquad v_y = \frac{v_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{v_0 v_x'}{c^2}}; \qquad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{v_0 v_x'}{c^2}}$$

где v_0 - это скорость системы K' вдоль оси *x*. Если $v_0 << c$, то получим привычные для нас формулы сложения скоростей: $v_x = v_x' + v_0$, $v_y = v_y'$, $v_z = v_z'$.

Если тело в системе K' движется вдоль оси x', то $v = \dfrac{v' + v_0}{1 + \dfrac{v_0 v'}{c^2}}$.

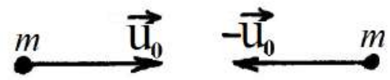
Если дана скорость в системе *К, а* нужно найти скорость в K', то $v' = \dfrac{v - v_0}{1 - \dfrac{v_0 v}{c^2}}$.

Убедимся в инвариантности скорости света. Пусть $v' = c$, тогда $v = \dfrac{c + v_0}{1 + \dfrac{v_0 c}{c^2}} = c$ - скорость света одинакова в обеих СО.

Теперь попробуем получить скорость больше скорости света путем сложения скоростей. Пусть $v' = v_0 = 3c/4$, тогда $v = \dfrac{3c/4 + 3c/4}{1 + 9/16} = \dfrac{24}{25}c$ - скорость не превзошла скорость света.

§7. Релятивистское выражение для импульса.

Уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея, значит, не инвариантны относительно преобразований Лоренца. То же можно сказать и о вытекающем из законов Ньютона законе сохранения импульса. Проверим это. Пусть в системе K две одинаковых частицы летят навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями u_0. Рассмотрим неупругий удар.



В K-системе $2m\vec{u} = m\vec{u}_0 - m\vec{u}_0 = 0$, т.е. частицы остановились.

Теперь рассмотрим ситуацию в системе K', движущейся вместе с первой частицей. Тогда скорость системы K' равна u_0, скорость 2-й частицы в системе K равна $-u_0$, имеем

$$v'_{1x} = 0,\ v'_{2x} = \frac{-u_0 - u_0}{1 + \frac{u_0^2}{c^2}} = -\frac{2u_0}{1 + \frac{u_0^2}{c^2}}.$$

До столкновения суммарный импульс равнялся $mv'_{1x} + mv'_{2x} = -\dfrac{2mu_0}{1 + \frac{u_0^2}{c^2}}$, после столкновения частицы летят вместе со скоростью $-u_0$, т.е. импульс равен $-2mu_0$. Закон сохранения импульса не выполняется.

Можно показать, что для инвариантности относительно преобразований Лоренца и для того, чтобы при малых скоростях получалось привычное выражение для импульса $\vec{p} = m\vec{v}$, импульс должен иметь вид $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Можно сказать, хотя сейчас эту трактовку используют редко, что $\vec{p} = m\vec{v}$, но масса зависит от скорости: $m_r = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Тогда массу m называют массой покоя и обозначают m_0, а m_r - релятивистская масса.

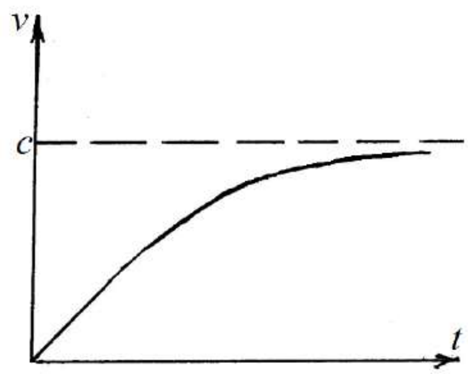
§8. Второй закон Ньютона в СТО.

Второй закон Ньютона в форме $m\vec{w} = \vec{F}$ неверен, даже если учесть зависимость массы от скорости. Правильно записывать закон Ньютона в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad \text{или} \qquad \frac{d}{dt}(m_r\vec{v}) = \vec{F}, \qquad \text{или} \qquad \frac{d}{dt}\left(m_0\vec{v}\Big/\sqrt{1 - v^2/c^2}\right) = \vec{F}.$$

Раскрывая производную, получим: $m_r\vec{w}+\vec{v}\dfrac{dm_r}{dt}=\vec{F}$. Таким образом, $\vec{w}$ и $\vec{F}$ могут быть даже не параллельны.

Попробуем разогнать ракету до скорости, превышающей скорость света в вакууме. Пусть сила тяги постоянна и равна $\vec{F}$, тогда закон Ньютона имеет вид $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$. Проектируя на ось и интегрируя, получим $\int\limits_0^p dp=\int\limits_0^t Fdt \Rightarrow \quad p=Ft \quad \Rightarrow \quad \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=Ft$. Решая относительно скорости v, получим $v=\dfrac{Ft}{\sqrt{m_0^2+(Ft/c)^2}}$. При малых t пренебрежем под корнем вторым членом, а при больших – первым. На рисунке изображен график $v(t)$. За сколь угодно большое время скорость не сможет стать больше скорости света, она только асимптотически к ней приблизится. Причиной этого является увеличение с ростом скорости массы m_r, которая при приближении скорости к скорости света становится бесконечно большой.



§9. Релятивистское выражение для энергии.

Умножим закон Ньютона $\dfrac{d}{dt}(m_0\vec{v}\big/\sqrt{1-v^2/c^2})=\vec{F}$ на $\vec{v}dt=d\vec{S}$:

$$\frac{d}{dt}(m_0\vec{v}\big/\sqrt{1-v^2/c^2})\cdot\vec{v}dt=\vec{F}d\vec{S}.$$

Справа dA - элементарная работа, равная приращению кинетической энергии dT, т.е.:

$$dT=\frac{d}{dt}(m_0\vec{v}\big/\sqrt{1-v^2/c^2})\cdot\vec{v}dt$$

Нетрудно показать, что правую часть можно записать в виде $dT=d\left(\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$.

Тогда, интегрируя, получим выражение для кинетической энергии:

$$T=m_0c^2\big/\sqrt{1-v^2/c^2}+const$$

При $v\to 0$ T должна тоже стремиться к нулю, значит, $const=-m_0c^2$.

Тогда $T=m_0c^2\big/\sqrt{1-v^2/c^2}-m_0c^2=m_0c^2(1\big/\sqrt{1-v^2/c^2}-1)$

При $v<<c$ получим $T=m_0c^2(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{v^2}{c^2}-1)=\dfrac{m_0v^2}{2}$, как и должно быть.

Рассмотрим полную энергию. Естественно ожидать закона сохранения энергии. Можно показать, что при столкновениях частиц сумма T не сохраняется. Для выполнения закона сохранения энергии следует приписать свободной частице кроме кинетической энергии еще и дополнительную энергию $E_0 = m_0c^2$. Тогда $E = T + m_0c^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Эта величина удовлетворяет закон сохранения энергии при столкновениях частиц. При $v = 0$ $E = m_0c^2$ - это так называемая энергия покоя.

Вычтем $m_0^2c^2$ из E^2/c^2:

$$E^2/c^2 - m_0^2c^2 = \frac{m_0^2c^4}{c^2(1-v^2/c^2)} - m_0^2c^2 = \frac{m_0^2c^2v^2}{c^2(1-v^2/c^2)} = \left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 = p^2 \qquad (*)$$

В итоге получаем $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$ - это связь между импульсом и энергией.

При $v << c$ $E = m_0c^2\sqrt{1+(p/m_0c)^2} \approx m_0c^2(1+p^2/2m_0^2c^2) = m_0c^2 + p^2/2m_0$, т.е. при $v << c$ энергия отличается от привычного нам выражения $E = p^2/2m_0$ только членом m_0c^2 - энергией покоя.

Отметим, что из формулы (*) следует $E^2 - c^2p^2 = m_0^2c^4 = const$, т.е. это инвариант. Можно показать, что и в общем случае системы из многих частиц $E^2 - c^2p^2$ является инвариантом (E и p - суммарные энергия и импульс системы), но он не равняется $m_0^2c^4$ или какой-то другой физической константе, а в каждой ситуации имеет свое значение.

§10. Связь массы и энергии.

Формулу для энергии можно записать в виде $E = m_rc^2$. Это связь массы тела и его полной энергии. Энергия тела пропорциональна его релятивистской массе. Изменение энергии ведет к изменению массы и наоборот. Например, энергия пружины при сжатии увеличивается, значит, увеличивается и ее масса, т.е. мера инертности. Иными словами, сжатую (и связанную невесомой ниткой) пружину труднее разгонять. Конечно, в данном примере изменение очень мало ($\Delta m = E_{упр}/c^2$), но теоретически оно существует.

В отличие от релятивистской массы m_r, масса покоя m_0 не сохраняется. При неупругом взаимодействии двух частиц (слипании) масса образовавшейся частицы в системе их центра масс равна $m_0 = m_{01} + m_{02} + \dfrac{T_1+T_2}{c^2} > m_{01} + m_{02}$, т.е. кинетическая энергия при слипании переходит во внутреннюю энергию образующейся частицы, т.е. в ее массу покоя.

В атомных электростанциях используется реакция деления урана ${}^{235}_{92}U$ (или плутония) при захвате медленных нейтронов:

$$ {}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{236}_{92}U \rightarrow {}^{140}_{55}Cs + {}^{94}_{37}Rb + 2\,{}^{1}_{0}n $$

Суммарная масса покоя исходных частиц больше, чем получившихся в итоге, на $4 \cdot 10^{-28}$ кг. Это означает, что выделилась энергия $\Delta E = c^2 \Delta m \approx 3{,}6 \cdot 10^{-11}$ Дж. Она превратилась в кинетическую энергию образовавшихся частиц и в энергию электромагнитного излучения.

§11. Частицы с нулевой массой покоя.

Из формулы $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ следует, что, если $m_0 = 0$, то

$$ E = cp = c \cdot m_r v = cv \cdot \frac{E}{c^2}. $$

Отсюда следует, что $v = c$, т.е. частица с $m_0 = 0$ всегда движется с $v = c$. Например, это фотоны. У фотона

$$ E = h\nu \Rightarrow p = E/c = h\nu / c,\ m_r = E / c^2 = h\nu / c^2. $$

Здесь h - постоянная Планка, ν - частота света.

При поглощении света изменяется импульс тела, т.е. оно испытывает давление со стороны светового пучка. Это давление измерил русский ученый Лебедев в 1900 году.

Глава 7. Механические колебания.

§1. Общие положения.

Колебания – это процессы, происходящие с той или иной степенью повторяемости. Они бывают механические, электромагнитные, электромеханические и т.д.

Различают свободные (собственные), вынужденные, автоколебания, параметрические колебания.

Свободные колебания – колебания, происходящие в системе, предоставленной самой себе, при выведении ее из положения равновесия (маятник).

Вынужденные – колебания, происходящие под действием периодически изменяющихся внешних сил (колебания моста под действием шагающих по нему людей).

Автоколебания, как и вынужденные, сопровождаются воздействиями внешних сил на систему, но моменты, когда эти воздействия происходят, управляются самой системой (часы с маятником).

Параметрические колебания возникают при периодическом изменении каких-либо параметров системы, например длины маятника.

Простейшие колебания – гармонические, т.е. такие, при которых колеблющаяся величина изменяется во времени по закону синуса или косинуса. Их изучение очень важно, так как а) они часто встречаются в природе, б) периодические процессы любой формы могут быть представлены как сумма нескольких гармонических (Фурье-разложение).

§2. Малые колебания.

Рассмотрим механическую систему, положение которой может быть задано одной координатой x, т.е. система имеет одну степень свободы (например, угол или расстояние вдоль кривой). Потенциальная энергия U – функция одной переменной $U(x)$. Пусть система имеет положение равновесия. В нем U имеет минимум. Условимся отсчитывать координату x и энергию U от этой точки. Тогда $U(0)=0$. Разложим $U(x)$ в степенной ряд

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + U''(0)x^2/2 + \ldots$$

Учтем, что $U(0)=0,$ и $U'(0)=0,$ $U''(0)=k>0,$ так как в точке равновесия энергия имеет минимум.

Ограничившись первыми членами, получим: $U(x)=kx^2/2$ - аналогичная формула была для упругой энергии. $F_x = -\dfrac{dU}{dx} = -kx$ - проекция силы на ось x. Далее индекс x можно опускать, так как движение происходит вдоль одной оси. Такие силы называют квазиупругими. Они пропорциональны смещению и всегда направлены к положению равновесия.

Запишем закон Ньютона: $m\ddot{x} = -kx$. Обозначив $k/m = \omega_0^2 > 0$, получим

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ - дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний. Если есть сила сопротивления движению, надо ввести член, пропорциональный скорости $F_{сопр} = -r\dot{x}$, где r – коэффициент сопротивления. Получим уравнение затухающих колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } 2\beta = r/m.$$

Рассмотрим вынужденные колебания, когда есть внешняя периодическая сила $F_{внеш} = F_0 \cos\omega t$. Обозначив $F_0/m = f_0$, придем к дифференциальному уравнению вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$$

Дифференциальные уравнения такого типа называются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Если в правой части ноль, то уравнение однородное, если не ноль – неоднородное.

§3. Гармонические колебания.

Решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ имеет вид $x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$, где a и α - произвольные постоянные. a - наибольшее отклонение от положения равновесия, называется амплитудой колебания. Величина, стоящая под знаком синуса или косинуса, т.е. $(\omega_0 t + \alpha)$, называется фазой, α - начальная фаза. Минимальное время, через которое состояние системы повторяется, называется периодом.

$$\omega_0(t + T) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi / \omega_0 \ .$$

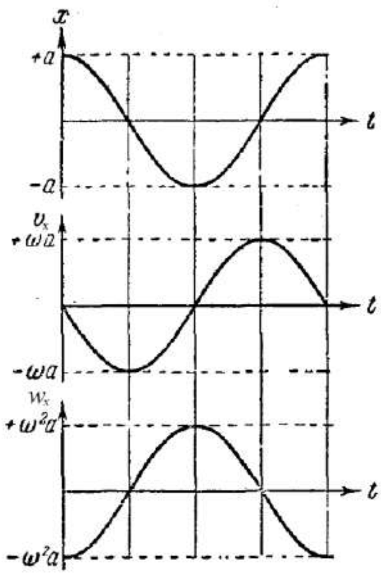
Число колебаний в единицу времени называется частотой колебаний: $\nu = 1/T = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$.

Величина $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi / T$ называется циклической или круговой частотой. Найдем скорость:

$$v_x = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2)\,.$$

Значит, скорость тоже меняется по гармоническому закону, но она на $\pi/2$ опережает по фазе смещение.

Ускорение $w_x = \dot{v}_x = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$ опережает смещение на π.



Графики на рисунке соответствуют случаю $\alpha = 0$.

Значение произвольных постоянных a и α находят из начальных условий: $x(0) = x_0;\ v(0) = v_0 \qquad \Rightarrow$

$$a\cos\alpha = x_0; \quad -a\omega_0 \sin\alpha = v_0\,.$$

$$\begin{cases} (a\cos\alpha)^2 = x_0^2; \\ (-a\omega_0 \sin\alpha)^2 = v_0^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \\ tg\alpha = -v_0 /(\omega_0 x_0) \end{cases}$$

Квазиупругая сила является консервативной, т.е. полная энергия должна оставаться постоянной. В процессе колебаний кинетическая энергия переходит в потенциальную и обратно. Проверим закон сохранения энергии. В положении равновесия $E_1 = E_{кин}$, а в точке максимального отклонения $E_2 = U$.

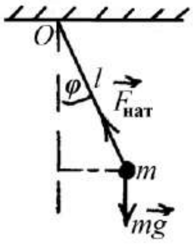
$$E_1 = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{m(a\omega_0)^2}{2}$$

$E_2 = U_{\max} = \dfrac{kx_{\max}^2}{2} = \dfrac{ka^2}{2} = \dfrac{m(\omega_0 a)^2}{2} = E_1$, что и требовалось доказать.

В произвольный момент

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha)}{2} + \frac{m\omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha)}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} = const$$

§4. Маятник.



Математический маятник – это материальная точка на невесомой нерастяжимой нити. Рассмотрим вращательное движение вокруг оси О. Вращающий момент равен $N = mgl\sin\varphi$, момент инерции - $I = ml^2$. Уравнение динамики вращательного движения выглядит так:

$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$, откуда следует $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0$ - уравнение колебаний маятника.

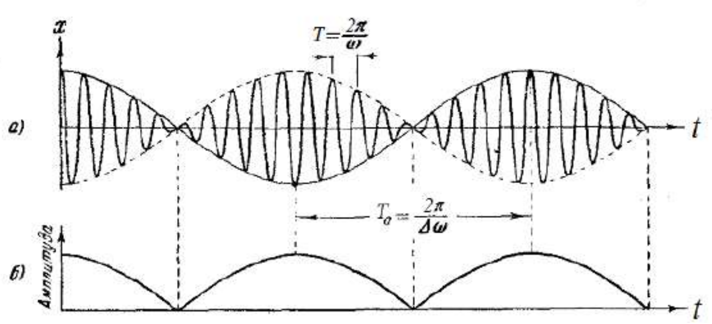
Колебания не гармонические, т.к. не φ, а $\sin\varphi$. При малых углах отклонения, когда $\sin\varphi \approx \varphi$, получим $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$, где $\omega_0 = \sqrt{g/l}; T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Если маятник не математический, а физический (или нить имеет массу, или тело - не точка), то $I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$, $\omega_0 = \sqrt{mgl/I}$. При малых φ имеем $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$, $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/mgl}$, где l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести.

§5. Биения.

Биения возникают, когда складываются два гармонических колебания одинаковой амплитуды и близких частот. Имеем два колебания: $x_1 = a\cos\omega t$ и $x_2 = a\cos(\omega + \Delta\omega)t$, причем $\Delta\omega << \omega$. Суммарное колебание имеет вид

$$x = x_1 + x_2 = 2a\cos(\Delta\omega t/2)\cos(\omega + \Delta\omega/2)t \approx \underbrace{2a\cos(\Delta\omega t/2)}\cos\omega t$$

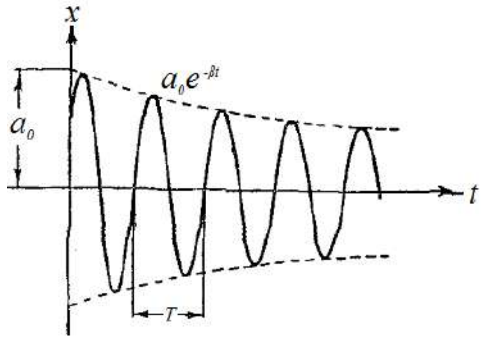


Его можно представить как колебание с частотой ω и меняющейся со временем амплитудой. Отметим, что амплитуда не равна подчеркнутому выражению, поскольку она должна быть больше нуля. Поэтому амплитуда $A = \left|2a\cos\dfrac{\Delta\omega t}{2}\right|$. Период изменения амплитуды равен $T = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$.

§6. Затухающие колебания.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний выглядит так:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



При не очень сильном затухании, когда $\beta < \omega_0$, решение имеет вид

$$x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad (*)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, a_0 и α - произвольные постоянные, значения которых можно найти из начальных условий.

Это колебания частоты ω с амплитудой $a_0 e^{-\beta t}$, где β - это коэффициент затухания.

Найдем время τ, за которое амплитуда убывает в e раз. Тогда $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, т.е. $\tau = 1/\beta$.

Период $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 2\pi/\omega_0$, если $\beta << \omega_0$.

Рассмотрим, во сколько раз убывает амплитуда за один период:

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T} \qquad - \qquad \text{декремент затухания.}$$

$$\lambda = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \qquad - \text{ логарифмический декремент затухания.}$$

Введем понятие добротности колебательной системы $Q = \pi/\lambda$. Можно показать, что добротность Q равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии за период.

Видно, что с ростом затухания ω убывает, а T растет. При $\beta = \omega_0$ период T обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим. Если $\beta > \omega_0$, то решение (*) не годится. Движение будет апериодическим. В обоих этих случаях выведенная из положения равновесия система возвращается в него за бесконечное время.

§7. Вынужденные колебания.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний выглядит так:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t \qquad (*)$$

Решение представляет собой сумму свободного затухающего колебания и вынужденного незатухающего с частотой ω:

$$x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \alpha) + \frac{f_0\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Здесь a_0 и α - произвольные постоянные, значения которых можно найти из начальных условий. Обозначим величину $\dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$ буквой a. Угол φ удовлетворяет условию $tg\varphi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$.

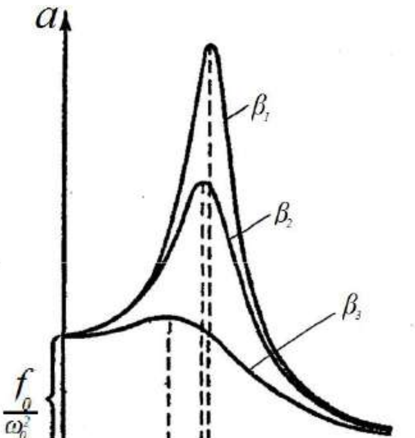
Видно, что с течением времени первый член затухает, и остается только второй, с частотой вынуждающей силы. Найдем частоту, при которой амплитуда a вынужденного колебания максимальна. Она соответствует минимуму подкоренного выражения в знаменателе: $(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2=\min$, т.е. производная равна нулю:

$$2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+8\beta^2\omega=0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2-\omega^2=2\beta^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

При $\beta << \omega_0$ имеем $\omega_{рез} \approx \omega_0$.

Резонанс – это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при некоторой частоте вынуждающей силы. Амплитуда в резонансе равна:

$$a_{рез}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$



При малом затухании ($\beta << \omega_0$) резонанс проявляется наиболее ярко. Он возникает при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой системы ($\omega_{рез}=\omega_0$), а его амплитуда равна $a_{рез}=\dfrac{f_0}{2\beta\omega_0}$ и стремится к бесконечности при $\beta \to 0$.

Нарисуем резонансную кривую, т.е. зависимость амплитуды установившегося вынужденного колебания от частоты вынуждающей силы $a(\omega)$ ($\beta_1<\beta_2<\beta_3$).

Найдем отношение амплитуды $a_{рез}$ к смещению x_0 при постоянной силе той же величины, что и амплитуда вынуждающей. Его мы найдем из уравнения (*), положив в нем $\omega=0$, т.е. $\omega_0^2 x_0 = f_0$:

$$\frac{a_{рез}}{x_0}=\frac{f_0\omega_0^2}{2\beta\omega_0 f_0}=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{2\pi}{2\beta T}=\frac{\pi}{\lambda}=Q,$$

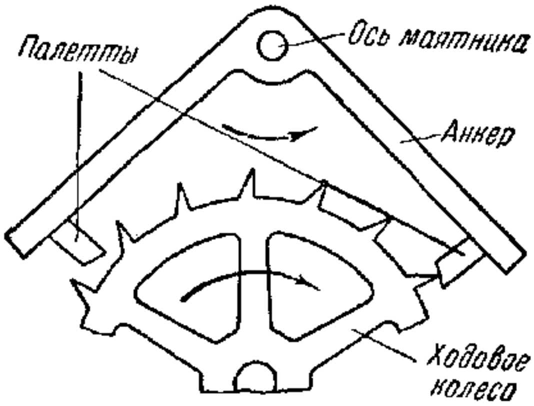
т.е. добротность имеет еще один смысл.

§8. Параметрический резонанс.

Рассмотренный в предыдущем параграфе резонанс возникал из-за периодичности вынуждающей силы. Есть и другой вид воздействия, позволяющий сильно раскачать систему (качели). Это изменение в такт с колебаниями какого-либо параметра системы, например длины маятника. Если увеличивать ее в крайних положениях (приседать) и уменьшать (вставать) в среднем, то маятник (качели) раскачается.

Увеличение энергии происходит за счет работы силы натяжения нити (в случае качелей сила реакции пола). Эта сила меньше в крайних положениях, где скорость равна нулю, и больше внизу, где скорость максимальна. Поэтому отрицательная работа при удлинении меньше положительной при уменьшении длины. Конечно, на качелях эта работа совершается за счет мускульной энергии человека.

§9. Автоколебания.



При затухающих колебаниях энергия системы расходуется на преодоление сопротивления среды. Если восполнять эту убыль энергии, колебания станут незатухающими. Пополнение энергии может осуществляться за счет толчков извне, однако эти толчки должны происходить в такт с колебаниями системы, иначе они могут ослабить эти колебания или даже прекратить совсем. Можно сделать так, чтобы колеблющаяся система сама управляла внешним воздействием, обеспечивая согласованность толчков со своим движением. Такая система называется автоколебательной, а ее колебания – автоколебаниями.

В качестве примера рассмотрим часовой механизм. Маятник часов насажен на одну ось с изогнутым рычагом – анкером. На концах анкера имеются выступы специальной формы – палетты. Зубчатое ходовое колесо находится под воздействием цепочки с гирей или закрученной пружины, которые стремятся повернуть его по часовой стрелке. Однако большую часть времени колесо упирается одним из зубьев в боковую поверхность той или иной палетты, скользящей при качании маятника по поверхности зуба. Только в моменты, когда маятник находится вблизи среднего положения, палетты перестают преграждать путь зубьям, и колесо проворачивается, толкая анкер зубом, скользящим своей вершиной по скошенному торцу палетты. За полный цикл качаний маятника (за период) ходовое колесо проворачивается на два зуба, причем каждая из палетт получает по толчку. Через посредство этих толчков за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины и восполняется убыль энергии маятника, возникающая из-за трения.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

§1. Статистическая физика и термодинамика.

Основные положения молекулярно-кинетической теории (МКТ)

1) Все тела состоят из молекул.
2) Молекулы находятся в постоянном хаотическом движении.

Молекулярная физика истолковывает свойства тел как суммарный результат действий молекул. При этом она интересуется не движением отдельных молекул, а лишь средними величинами, характеризующими движение огромного количества частиц. Отсюда другое название – «Статистическая физика».

Изучением тех же свойств занимается термодинамика, но она, в отличие от молекулярной физики, изучает макроскопические свойства тел и явлений и не интересуется микроскопической картиной. Она основывается на фактическом материале.

§2.Давление.

В механике давление вводилось как отношение силы к площади. Например, лыжник создает давление на снег под ним. В физике жидкостей и газов удобнее иначе подойти к определению этого понятия. Дело в том, что в механике чаще всего исходной являлась сила, а давление было ее результатом. В жидкостях и газах исходным является именно давление, а сила – его следствие.

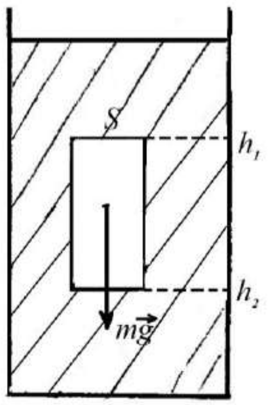
Рассмотрим сосуд с водой. Представим себе, что вместо воды в него насыпаны маленькие поролоновые шарики. Одинаково ли сжаты шарики на разных высотах? Ответ очевиден: чем ниже, тем сильнее сжаты шарики, ведь им приходится держать на себе все расположенные над ними. Сунем в сосуд руку. Сжатые шарики будут давить на нее со всех сторон. При любом расположении руки сила давления будет перпендикулярна поверхности руки. Давлением назовем отношение модуля этой, перпендикулярной к поверхности, силы, к площади, на которую она действует: $p = \frac{F}{S}$. (Строго говоря, надо рассматривать предел этого отношения при стремлении площадки к нулю, т.е. производную: $p = \frac{dF}{dS}$).

Таким образом, давление – это «степень сжатия шариков». Конечно, это только образ, но он весьма близок к реальности. Давление можно считать степенью сжатия жидкости или газа в данной точке.

Надо различать понятия «давление» и «сила давления». Давление – скаляр, измеряется в Н/м^2 (Паскалях), сила давления – вектор, направленный перпендикулярно площадке, измеряется в Ньютонах. Неправильно говорить о «давлении на дно», это «давление у дна». «На дно» давит сила давления.

Кроме системных единиц – Паскалей, для давления существуют и несистемные: 1 миллиметр ртутного столба = 133 Па и 1 атмосфера (атм)=760 мм рт.ст.=$1{,}013 \cdot 10^5$ Па.

§3. Распределение давления в покоящихся жидкости и газе.

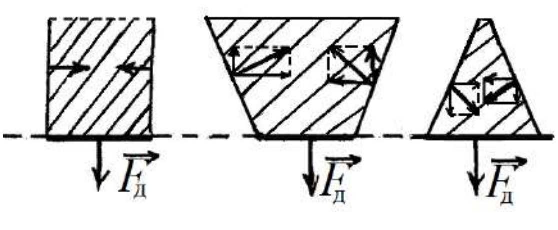


Рассмотрим жидкость в сосуде. Выделим в ней вертикальный цилиндр из жидкости высотой h. Он покоится, значит, силы, действующие на него, уравновешены. На боковую поверхность снаружи действуют горизонтально направленные силы давления жидкости со всех сторон. Других горизонтальных сил нет, значит, эти силы компенсируют друг друга. По вертикали действуют три силы: сила тяжести с модулем $mg = \rho S(h_2 - h_1)g$ и силы давления жидкости сверху $p_2 S$ и снизу $p_1 S$. Условие равновесия имеет вид: $p_2 S + mg - p_1 S = 0$, откуда получаем $p_1 = p_2 + \rho g h$. Давления в жидкости на разных уровнях различаются на величину, численно равную весу вертикального столба жидкости между этими уровнями с площадью сечения 1 м^2.

Вывод. Давление жидкости на глубине h равно сумме атмосферного и гидростатического давлений $p = p_{атм} + \rho g h$.

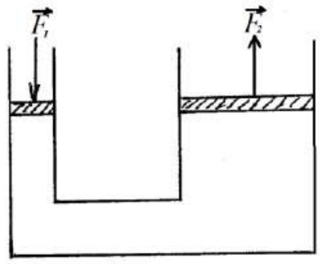
Давление – весьма тонкое физическое понятие. Часто оно приводит к кажущимся парадоксальными результатам. В 1648 г. такой парадокс продемонстрировал Блез Паскаль. Он вставил в закрытую бочку, наполненную водой, узкую трубку и, поднявшись на балкон второго этажа, влил в эту трубку кружку (!) воды. Из-за малой толщины трубки вода в ней поднялась до большой высоты, и давление в бочке, определяемое высотой столба, увеличилось настолько, что крепления бочки не выдержали, и она треснула.

Рассмотрим еще один кажущийся парадокс. Нальем воду в несколько сосудов разной формы, но одной высоты и с одинаковой площадью дна. Пусть для убедительности донышки не прикреплены, и мы должны прижимать их к сосудам снизу руками. Давление около дна во всех



случаях одинаково - $p = \rho g h$ (мы не учитываем атмосферное, так как его сила давления действует на дно и снизу тоже). Сила давления воды на дно $F = pS$ также одинакова. Это значит, что сила, которую мы прикладываем, чтобы удержать донышки, во всех случаях одна и та же. Но ведь количества залитой воды заметно различаются. Как это объяснить? Здесь надо учитывать не только дно, но и стенки сосудов. В сосуде №1 вода давит на стенки, а стенки по III з.Н. – на воду. Эти силы перпендикулярны стенкам, т.е. имеют только горизонтальную составляющую. Сила тяжести компенсируется только силой со стороны дна. Поэтому сила давления воды на дно равна весу налитой воды.

В сосуде №2 на воду со стороны стенок действуют силы, имеющие вертикальную составляющую, направленную вверх, т.е. стенки берут на себя часть веса воды, поэтому сила давления на дно меньше веса воды. В сосуде №3 стенки создают вертикальную силу, направленную вниз, поэтому дно должно компенсировать и ее, т.е. сила давления на дно больше веса налитой воды.



Еще одним впечатляющим примером является гидравлический пресс. Он состоит из двух сообщающихся цилиндров с поршнями разного диаметра. Цилиндры заполняются водой, маслом или другой подходящей жидкостью. По закону Паскаля давление в любом месте неподвижной жидкости одинаково по всем направлениям и одинаково передается по всему объёму. Силы давления, действующие на поршни, пропорциональны их площадям. Так что выигрыш в силе, создаваемый идеальным гидравлическим прессом, равен отношению площадей поршней. $p = F_1 / S_1, \qquad F_2 = pS_2 = S_2 / S_1 \cdot F_1 >> F_1$

§4. Закон Архимеда.

Различие давлений на разных глубинах приводит к закону Архимеда. В рассмотренном выше случае с цилиндром понятно, что на его поверхность снаружи действуют силы со стороны жидкости, результирующая которых направлена вверх и равна $p_1S - p_2S = mg$. К такому же выводу легко прийти и в общем случае. Поместим в жидкость тело произвольной формы. Представим себе, что мы забрали это тело, а его объем заполнили той же жидкостью. Понятно, что эта жидкость будет находиться в равновесии. Значит, сила тяжести ее скомпенсирована силами давления на ее поверхность снаружи. Но эти силы не изменятся, если вместо жидкости вернуть тело.

Вывод – закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости.

Поскольку рассмотренный объем жидкости находится в покое при любом повороте, то сила Архимеда приложена в той же точке, что и сила тяжести этого объема, т.е. в его центре тяжести. Сила тяжести самого тела приложена в его центре тяжести, который, вообще говоря, не совпадает с центром тяжести жидкости. Если сила тяжести тела меньше выталкивающей силы в объеме всего тела, то оно будет погружено не полностью. При этом в состоянии равновесия центр тяжести тела должен быть строго под центром тяжести вытесненного объема жидкости, иначе силы создадут вращательный момент, и равновесие будет нарушено.

§5. Масса и размер молекулы.

Атомной единицей массы (а.е.м.) называется 1/12 массы атома углерода С12. В таблице Менделеева все массы атомов даны в а.е.м.

Относительной атомной (молекулярной) массой вещества называется отношение массы атома (молекулы) к 1 а.е.м.

1 моль – количество вещества, в котором содержится столько частиц, сколько атомов углерода содержится в 12 граммах его. Число частиц в моле называется числом Авогадро:

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль (моль$^{-1}$).

Масса одного моля называется молярной массой *M*.

$M = N_A m$, где m – масса атома или молекулы.

Другое, более удобное определение моля: 1 моль – это количество вещества в граммах, равное молекулярной массе в а.е.м. Например, для CO_2: 12+2x16=44 г.

Оценим размер одной молекулы. Один моль воды, т.е. 18 граммов=0,018 литра=18x10^{-6} м^3, содержит $6.02 \cdot 10^{23}$молекул. Значит, на 1 молекулу приходится объем $30 \cdot 10^{-30}$м^3. Если это кубик, то его сторона равна $\sqrt[3]{30 \times 10^{-30}} \approx 3 \times 10^{-10} \, м = 3$ Ангстрема.

§6. Равновесные и неравновесные системы.

Введем понятия равновесной и неравновесной систем.

Равновесное состояние системы – такое, при котором все параметры имеют определенные значения, остающиеся неизменными сколь угодно долго. Процесс, состоящий из непрерывной последовательности равновесных состояний, называется равновесным, или квазистатическим. Ясно, что равновесным может быть только очень медленный процесс. Равновесный процесс можно провести и в обратном порядке (через те же состояния), поэтому равновесные процессы называют также обратимыми.

§7. Внутренняя энергия.

Внутренней энергией тела называется сумма кинетических энергий хаотического движения молекул и потенциальных энергий их взаимодействия друг с другом. Кинетическая энергия тела как целого (или например энергия ветра) во внутреннюю энергию не входит.

Внутренняя энергия тела является аддитивной величиной, т.е. внутренняя энергия всего тела равна сумме энергий его частей.

Внутренняя энергия тела является функцией состояния системы. Это значит, что, каким бы способом мы ни привели систему в некое состояние, энергия всегда будет одной и той же, т.е. изменение внутренней энергии при переходе из одного состояния в другое всегда равна разности энергий в этих двух состояниях и не зависит от процесса перехода.

§8. Первое начало термодинамики.

Люди давно задумывались над тем, почему одно тело горячее другого, т.е. что такое температура. Еще Ломоносов говорил о существовании особого вещества – теплорода, или флогистона, от количества которого зависит температура тела. Передача телу дополнительного количества теплорода приводила к повышению температуры. Логика в этом есть, вспомним о заряде в электростатике. Потом эту субстанцию стали называть теплотой. Единицей измерения количества теплоты была выбрана калория – это количество теплоты, которое надо передать 1 грамму воды, чтобы нагреть его на 1 градус Цельсия. Но потом обнаружили, что нагреть тело можно без передачи ему теплоты, просто совершая работу, например, побить молотком. Возник термин «механический эквивалент теплоты», сопоставляющий одной калории 4,18 Джоуля.

После создания МКТ стало ясно, что при повышении температуры увеличивается внутренняя энергия – «внутренней» ее назвали потому, что снаружи ее не видно. Эту энергию можно изменять как путем совершения механической работы, так и путем контакта с более горячим телом. В этом случае энергия передается от молекулы к молекуле, так что снаружи ничего не видно. Этот процесс называется теплопередачей. **Количество теплоты – это энергия, переданная телу путем теплопередачи.**

Первое начало термодинамики: изменение внутренней энергии равно сумме работы, совершенной над телом, и переданного телу количества теплоты.

$$\Delta U = A' + Q$$

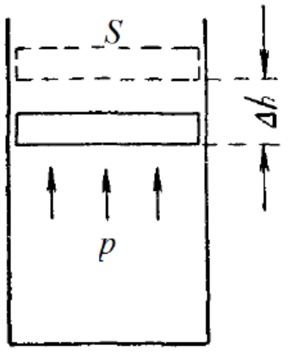
A' - работа внешних сил, совершенная над системой, $A = -A'$- работа самой системы. Тогда I-е начало термодинамики можно записать так: $Q = \Delta U + A$

Количество теплоты, поступившее в систему, идет на приращение ее внутренней энергии и совершение ею работы.

Первое начало термодинамики – это закон сохранения энергии в термодинамике.

В дифференциальной форме его можно записать так: $\delta Q = dU + \delta A$. Величины δQ и δA нельзя рассматривать как приращение величин Q и A. Изменение какой-либо величины можно рассматривать как ее приращение, только если это приращение не зависит от пути, по которому совершался переход, т.е. данная величина является функцией состояния, например dU. δQ и δA - не изменения Q и A, а просто элементарные (бесконечно малые) значения Q и A.

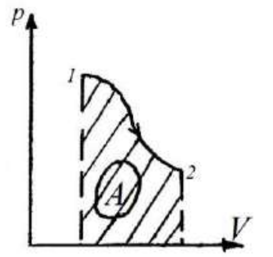
§9. Работа, совершаемая газом.

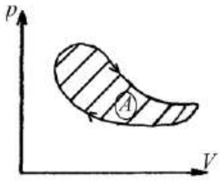


Работа при перемещении поршня на Δh равна $\Delta A = F\Delta h = pS\Delta h = p\Delta V$. Для бесконечно малых $\delta A = pdV$.

Если $p = const$, то $A_{12} = p\Delta V = p(V_2 - V_1)$,

если $p \neq const$, то $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV$.





- движение по циклу.

§10. Уравнение состояния идеального газа.

Идеальный газ – газ, состоящий из материальных точек, не взаимодействующих друг с другом.

В 18 веке экспериментально были установлены законы Бойля-Мариотта ($pV = const$ при $T = const$), Гей-Люссака ($V/T = const$ при $p = const$) и Шарля ($p/T = const$ при $V = const$). В каждом из этих процессов одна из трех величин – объем, давление, температура – оставалась постоянной. Выведем закон, справедливый при изменении всех трех величин. Пусть в начальный момент система характеризовалась значениями p_1, V_1, T_1, а в конечный - p_2, V_2, T_2. Поскольку состояние системы не зависит от процесса перехода, то проведем его удобным для нас образом: сначала при постоянном давлении изменим объем до V_2, при этом температура станет равна T', а потом изменим температуру до T_2.

$$\begin{array}{ccc} p_1, V_1, T_1 & \Rightarrow & p_2, V_2, T_2 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & p_1, V_2, T' & \end{array}$$

На первом этапе (закон Гей-Люссака) $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T'}$, а на втором (закон Шарля) $\dfrac{p_1}{T'} = \dfrac{p_2}{T_2}$.

Перемножив уравнения, получим $\dfrac{p_1 V_1}{T_1} = \dfrac{p_2 V_2}{T_2}$, т.е. $\dfrac{pV}{T} = const$ - уравнение Клапейрона, или уравнение состояния идеального газа.

Закон Авогадро: при нормальных условиях (p_0=1 атм, T_0=273 К) один моль любого газа занимает объем 22,4 литра.

Для одного моля $\frac{pV}{T}=\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{1{,}013\cdot10^5\,Па\cdot22{,}4\cdot10^{-3}\,м^3}{273K}=R=8{,}31\frac{Дж}{моль\cdot K}$ - универсальная газовая постоянная.

Если молей ν, то $\frac{pV}{T}=\nu R$, т.к. p и T останутся теми же, а объем вырастет в ν раз. Величина ν называется количеством вещества – это число молей, содержащихся в данной массе. Получили закон Менделеева-Клапейрона $pV=\nu RT$. В отличие от предыдущих законов, связывающих два состояния, закон Менделеева-Клапейрона является «точечным», т.е. связывает значения физических величин в одном состоянии.

§11. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа.

Из опыта было установлено, что внутренняя энергия идеального газа прямо пропорциональна абсолютной температуре $U=BT$.

Теплоемкость тела – количество теплоты, необходимое, чтобы нагреть его на 1 К

$C_{тела}=\frac{\delta Q}{dT}$ (Дж/К)

Удельная теплоемкость вещества – количество теплоты, необходимое, чтобы нагреть 1 килограмм вещества на 1 К. Будем обозначать ее маленькой буквой c.

Молярная теплоемкость вещества C – количество теплоты, необходимое, чтобы нагреть 1 моль вещества на 1 К: $C=cM$.

Теплоемкость газа зависит от того, какой процесс проводится. Выделяют две основных теплоемкости – при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_V.

$C_V=\frac{dU}{dT}=B_{моля}$, откуда получаем $U_{моля}=C_VT$, т.е. $U=\frac{m}{M}C_VT$.

В процессе с постоянным давлением газ расширяется, т.е. совершается работа: $\delta Q=dU+\delta A$, значит, $C_p=\frac{\delta Q}{dT}=\frac{dU_{моля}}{dT}+p\frac{dV_{моля}}{dT}$. Для нахождения $\frac{dV_{моля}}{dT}$ учтем, что для 1 моля $pV=RT\Rightarrow V=RT/p$, откуда при $p=const$ получим $\left.\frac{dV}{dT}\right|_{p=const}=\frac{R}{p}$.

Подставляя в выражение для C_p, получим $C_p=C_V+R$.

Введем обозначение $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ - эта характерная для каждого газа величина называется показателем адиабаты. Тогда $\gamma = 1 + \dfrac{R}{C_V} \Rightarrow C_V = \dfrac{R}{\gamma - 1}$.

Внутренняя энергия газа массы m может быть записана так: $U = \dfrac{m}{M}\dfrac{RT}{\gamma - 1} = \dfrac{PV}{\gamma - 1}$

§12. Уравнение адиабаты.

Адиабатическим называется процесс, протекающий без теплообмена, т.е. $\delta Q = 0$. Такими являются, например, быстротекущие процессы, т.к. в них теплообмен не успевает произойти, или процессы в теплоизолированном сосуде.

$$\delta Q = dU + \delta A \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \frac{m}{M} C_V dT + pdV$$

Учтя, что $p = \dfrac{m}{M}\dfrac{RT}{V}$, получим $\dfrac{C_V dT}{T} + \dfrac{RdV}{V} = 0$, т.е. $d(C_V \ln T + R \ln V) = 0$, откуда $\ln T + \dfrac{R \ln V}{C_V} = const$. Учтя, что $\dfrac{R}{C_V} = \gamma - 1$, получим $TV^{\gamma - 1} = const$, и подставляя $T = \dfrac{MpV}{mR}$, придем к окончательному результату: $pV^{\gamma} = const$ - уравнение адиабаты (Пуассона). Отсюда ясно, почему γ назвали показателем адиабаты.

§13. Политропические процессы.

Политропическими называются процессы, в течение которых теплоемкость остается постоянной: $C=const$. Запишем первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A, \text{ т.е. } CdT = C_V dT + pdV \quad (*)$$

Чтобы получить уравнение сразу в p,V ,избавимся от T. Для 1 моля $pV = RT$, откуда $pdV + Vdp = RdT$. Подставляем в (*): $(C - C_V)(pdV + Vdp) = RpdV$

$(C - C_V - R)pdV + (C - C_V)Vdp = 0$ - поделим на Vp:

$$(C - C_V - R)\frac{dV}{V} + (C - C_V)\frac{dp}{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad d[(C - C_p)\ln V + (C - C_V)\ln p] = 0$$

$(C - C_p)\ln V + (C - C_V)\ln p = const$, делим на $(C - C_V)$.

$\dfrac{C - C_p}{C - C_V}\ln V + \ln p = const$, обозначим $\dfrac{C - C_p}{C - C_V} = n$, тогда

$pV^n = const$, где $n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V}$ - уравнение политропического процесса.

Можно выразить C: $C = \dfrac{nC_V - C_p}{n-1} = \dfrac{R}{\gamma - 1} - \dfrac{R}{n-1}$

Все рассмотренные ранее процессы являются политропическими:

1) изобарический: $p = const, \quad n = 0$

2) изотермический: $pV = const, \quad n = 1$

3) изохорический: $V = const, \quad n = \infty$, т.к. $Vp^{1/n} = const$

4) адиабатический: $pV^{\gamma} = const, \quad n = \gamma$.

§14. Работа газа при различных процессах.

Для политропического процесса $pV^n = p_1V_1^n = p_2V_2^n$, откуда $p = \dfrac{p_1V_1^n}{V^n}$.

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p_1V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}$$

1) $n \neq 1$ $A_{12} = \dfrac{p_1V_1^n}{1-n}(V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) = \dfrac{p_1V_1}{n-1}\left(1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right) = \dfrac{m}{M}\dfrac{RT_1}{n-1}\left(1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right)$

Адиабатический процесс $n = \gamma$: $A_{12} = \dfrac{m}{M}\dfrac{RT_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$;

изохорический $n = \infty$: $A_{12} = 0$; изобарический $n = 0$: $A_{12} = \dfrac{m}{M}\dfrac{RT_1}{V_1}(V_2 - V_1) = p(V_2 - V_1)$

2) $n = 1$, изотермический процесс, другой интеграл $A_{12} = p_1V_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{m}{M}RT_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1}$.

§15. Ван-дер-Ваальсовский газ.

Все, о чем говорилось ранее, было идеальным газом, т.е. мы пренебрегали объемами молекул, считая их материальными точками, и их взаимодействием. Уравнение для 1 моля имеет вид: $pV_M = RT$. Реальные газы при высоких давлениях не подчиняются закону Бойля-Мариотта. В таблице приведены результаты эксперимента для азота при высоких давлениях и постоянной температуре.

Ван-дер-Ваальс предложил эмпирически выведенный закон: $(p + \dfrac{a}{V_M^2})(V_M - b) = RT$

Здесь V_M - объем 1 моля, a и b - параметры Ван-дер-Ваальса (свои для каждого газа – сведены в таблицу). Для перехода к ν молей надо подставить $V_M = V/\nu$, получим

$$(p+\frac{\nu^2 a}{V^2})(V-\nu b)=\nu RT$$

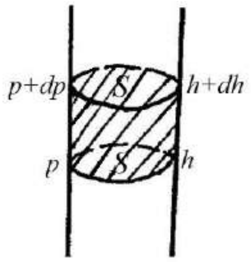
p, атм	pV, атм*л	$(p+\frac{a}{V_M^2})(V_M-b)$
1	1,000	1,000
100	0,994	1,000
200	1,048	1,009
500	1,390	1,014
1000	2,369	0,893

Из-за взаимного притяжения молекул газ как бы сжимается большим давлением, чем давление на стенках. Отсюда поправка $\frac{a}{V_M^2}$, добавленная к p. Заметное воздействие молекул друг на друга происходит в пределах небольших расстояний, называемых радиусом молекулярного взаимодействия. Сила взаимного притяжения двух элементарных объемов примерно такого радиуса пропорциональна количествам молекул, заключенных в этих объемах. Каждое из них пропорционально числу молекул в единице объема, т.е. обратно пропорционально объему V. Поэтому поправка пропорциональна $1/V_M^2$. Свободный объем для движения молекул меньше объема сосуда на величину суммарного объема молекул, поэтому в формуле поправка $-b$.

Внутренняя энергия Ван-дер-Ваальсовского газа должна включать в себя, кроме кинетической,, еще и потенциальную энергию взаимодействия молекул. Силы взаимодействия в уравнении учтены членом a/V_M^2. При расширении газа работа, совершенная им против этих сил, равна

$dA=\frac{a}{V_M^2}dV_M$. Эта работа идет на приращение энергии взаимодействия: $E_p=\int dE_p=\int a/V_M^2 dV_M=-\frac{a}{V_M}+const$. Внутренняя энергия газа зависит от температуры: $U=f(T)-\frac{a}{V_M}$. При $V_M\to\infty$ внутренняя энергия должна стремиться к $C_V T$, т.к. газ можно считать идеальным. В итоге получаем $U_M=C_V T-\frac{a}{V_M}$ для одного моля. Для газа массы m формула принимает вид: $U_m=\nu C_V T-\frac{\nu^2 a}{V}$.

§16.Барометрическая формула.



Рассмотрим газ в поле тяжести. Запишем условие равновесия для заштрихованного объема, т.е. сила давления снизу должна равняться сумме силы тяжести и силы давления сверху: $pS = (p+dp)S + \rho g \underbrace{dhS}_{dV}$,

откуда получаем $dp = -\rho g dh$.

Далее будем считать, что температура не зависит от высоты – это частный случай.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh \Rightarrow \ln p = -\frac{Mgh}{RT} + \ln C \Rightarrow p = C\exp(-\frac{Mgh}{RT})$$

Пусть $p(0) = p_0$, тогда окончательно получим $p = p_0 \exp(-\frac{Mgh}{RT})$.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

§1.Некоторые сведения из теории вероятностей.

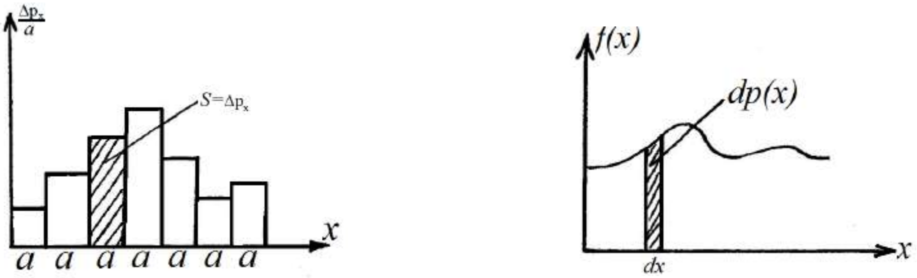
Пусть имеется некоторая макроскопическая система, состоящая из большого числа частиц. Пусть какая-то характеристика может иметь дискретные значения $x_1, x_2, ...x_S$. Можно сделать N (большое число) измерений x, каждый раз возвращаясь в исходное состояние. Вместо этого можно взять N одинаковых систем в том же состоянии и одновременно провести измерения x. Такой набор систем называется статистическим ансамблем. Пусть N_1 дали значение x_1, N_2 - x_2..., $N_S - x_S$, причем $\sum_{i=1}^{S} N_i = N$. Величина N_i/N называется относительной частотой появления результата x_i, а ее предел при $N \to \infty$ называется вероятностью p_i появления результата x_i. При этом $\sum_{i=1}^{S} p_i = 1$, как и должно быть.

Вероятность получить x_i или x_k равна $p_{i,k} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i + N_k}{N} = p_i + p_k$ - теорема о сложении вероятностей. При больших N далее мы будем опускать значок $\lim$.

Пусть система характеризуется значением двух величин: x и y. Тогда $p(x_i) = N(x_i)/N, p(y_k) = N(y_k)/N$. Найдем вероятность того, что при некотором измерении получится x_i и y_k. Значение x_i мы получим в $N(x_i) = p(x_i)N$ опытов. Из этого числа значение y_k будет в $N(x_i, y_k) = p(y_k)N(x_i) = p(y_k)p(x_i)N$, т.е. $p(x_i, y_k) = p(x_i)p(y_k)$ - вероятность одновременного появления НЕЗАВИСИМЫХ событий равна произведению вероятностей этих событий.

Найдем среднее значение величины x: $\langle x \rangle = \dfrac{\sum x_i N_i}{N} = \sum p_i x_i$.

Пусть теперь величина x имеет непрерывный спектр значений от 0 до ∞. Возьмем очень малую величину a и найдем число измерений ΔN_0, при котором $0 \le x < a$, ΔN_1, при котором $a \le x < 2a$ и т.д. Тогда вероятность величине x иметь значение от 0 до a равна $\Delta p_0 = \Delta N_0 / N$, от a до $2a$ - $\Delta p_1 = \Delta N_1 / N$ и т.д. Построим гистограмму:



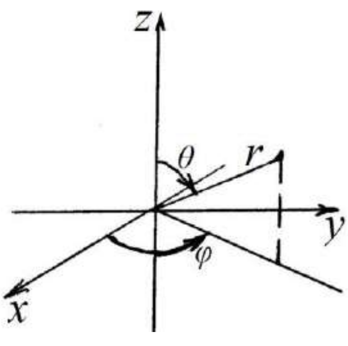
$$dP_x = f(x)dx, \quad \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty dP_x = 1$$ - площадь под кривой $f(x)$.

Найдем $\langle x \rangle$: $\langle x \rangle = \int_0^\infty x dP_x = \int_0^\infty x f(x) dx$. Среднее значение любой функции от x ищется по формуле: $\langle \varphi(x) \rangle = \int_0^\infty \varphi(x) dP_x = \int_0^\infty \varphi(x) f(x) dx$. Например, $\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 f(x) dx$.

<u>Примечание.</u> На вопрос «Сколько молекул в комнате летят со скоростью 100 м/с?» правильным ответом будет: «Ноль!» Дело в том, что спектр скоростей непрерывный. Поэтому ТОЧНОЕ значение 100 м/с не имеет ни одна молекула. Если обнаружится частица со скоростью 100 м/с, то возникнет вопрос про десятые доли, если 100,0, то про сотые и т.д. Правильным вопросом будет такой: «Сколько молекул имеет скорость от 100,00 до 100,01 м/с?». Иначе говоря, надо считать вероятности для скоростей внутри какого-то диапазона, как это и сделано выше.

§2. Число ударов молекул о стенку.

Найдем число ударов молекул о площадку площадью ΔS за время Δt.



Будем вести расчеты в сферических координатах: r, θ, φ, которые могут изменяться в следующих диапазонах: $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta < \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Из аналогии с географией Земли видим, что φ - это долгота, а $(\pi/2 - \theta)$ - это широта.

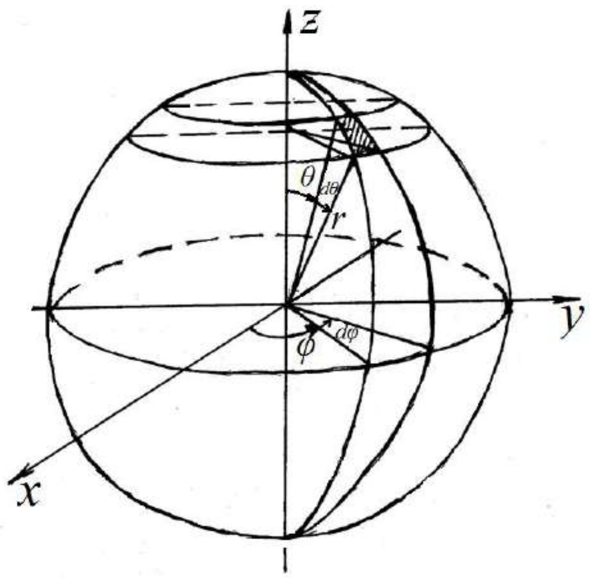
****

Напоминание о телесном угле.

Телесный угол – область пространства, вырезаемая лучом, проведенным из некоторой точки, после его возвращения в начальное положение (например, конус). Измеряется в стерадианах: 1 стерад – телесный угол, вырезающий на сфере радиусом R площадку площадью R^2. Таким образом, любой телесный угол равен отношению площади площадки, вырезаемой на сфере радиуса R, к R^2. Полный телесный угол равен $S_{сф}/R^2 = 4\pi R^2/R^2 = 4\pi$. (Вспомните определение обычного угла и радиана).

****

Вывод формулы для телесного угла



Найдем площадь области, расположенной на сфере радиуса r между двумя близкими параллелями: θ и $\theta + \Delta\theta$ и двумя близкими меридианами: φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Она равна произведению сторон «прямоугольничка», т.е. $\Delta S_{\theta,\varphi} = r\sin\theta \cdot \Delta\varphi \cdot r\Delta\theta$, тогда телесный угол равен $\Delta\Omega_{\theta,\varphi} = \Delta S_{\theta,\varphi}/r^2 = \sin\theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi$.

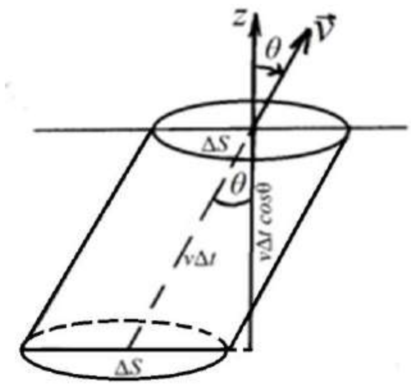
Переходя к бесконечно малым, получим

$$d\Omega_{\theta,\varphi} = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Заодно получим формулу для элемента объема dV в сферических координатах, т.е. объема области $r_0 \le r < r_0 + dr, \quad \theta_0 \le \theta < \theta_0 + d\theta, \quad \varphi_0 \le \varphi < \varphi_0 + d\varphi$:

$$dV = dS \cdot dr = r_0^2 \cdot \sin\theta_0 \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr$$

****



Из общего числа молекул N скорость от v до $v+dv$ имеют dN_v штук. Из них в телесном угле $d\Omega_{\theta,\varphi}$ летит $dN_{v,\theta,\varphi} = dN_v \dfrac{d\Omega_{\theta,\varphi}}{4\pi}$. За время Δt до стенки долетают все молекулы, заключенные в косом цилиндре с основанием ΔS и высотой $v\Delta t\cos\theta$. Их доля равна отношению объема этого цилиндра ко всему объему V, т.е. их количество равно

$$dK_{v,\theta,\varphi} = dN_v \frac{d\Omega_{\theta,\varphi}}{4\pi} \frac{\Delta S v \Delta t \cos\theta}{V} = dN_v \frac{\sin\theta}{4\pi} \frac{\Delta S v \Delta t \cos\theta \Delta\theta \Delta\varphi}{V}$$

Количество ударов о площадку ΔS за время Δt молекул, летящих со скоростью от v до $v+dv$ со всех возможных направлений, получим, проинтегрировав (просуммировав) все $dK_{v,\theta,\varphi}$ по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до $\pi/2$ (а не до π, так как часть молекул летит от стенки, а не к ней).

$$dK_v = dN_v \frac{v\Delta S \Delta t}{4\pi V} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Вычислим интеграл: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \, d(\sin\theta) = \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$, тогда

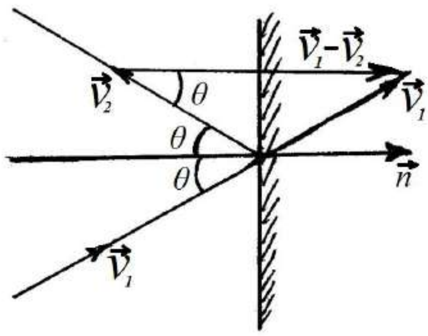
$dK_v = dN_v \dfrac{v\Delta S \Delta t}{4V}$ - количество молекул со скоростью от v до $v+dv$, ударяющихся о площадку ΔS за время Δt.

Чтобы узнать общее количество ударов о площадку молекул с любыми скоростями, надо проинтегрировать по всем скоростям:

$$K(\Delta S, \Delta t) = \frac{\Delta S \Delta t}{4V} \int_0^{\infty} v dN_v = \frac{\Delta S \Delta t}{4V} N \underbrace{\int_0^{\infty} v \frac{dN_v}{N}}_{\langle v \rangle = \int v dp} = \frac{\Delta S \Delta t}{4V} N \langle v \rangle = \frac{\Delta S \Delta t}{4} n \langle v \rangle,$$

где $n = \dfrac{N}{V}$- концентрация молекул. Считая $\Delta S = 1$ м^2, $\Delta t = 1$ с, найдем количество ударов за единицу времени (1 секунду) о площадку единичной площади (1 м^2): $K = \dfrac{1}{4} n \langle v \rangle$.

§3. Основное уравнение МКТ.



Рассмотрим абсолютно упругий удар одной молекулы о стенку ($v_2 = v_1 = v$). Импульс, отданный молекулой стенке, равен $\Delta\vec{P} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_2 = 2mv\cos\theta \cdot \vec{n}$.

Все $dK_{v,\theta,\varphi}$ ударов отдадут стенке импульс $dP_{v,\theta,\varphi} = dK_{v,\theta,\varphi} 2mv\cos\theta$. Импульс, имеющий модуль dP, направлен вдоль $\vec{n}$, т.е. «давит» на стенку. Просуммируем по углам:

$$dP_v = dN_v \frac{mv^2}{2\pi V}\Delta S \Delta t \underbrace{\int_0^{\pi/2} cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}_{-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = dN_v \frac{mv^2}{3V}\Delta S \Delta t$$

Проинтегрируем по скоростям: $\Delta P = \frac{m}{3V} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \cdot N \int_0^{v_{\max}} v^2 \frac{dN_v}{N} = \frac{m \cdot \Delta S \cdot \Delta t \cdot N}{3V} \left\langle v^2 \right\rangle$

Найдем давление:

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta t \cdot \Delta S} = \frac{1}{3} mn \left\langle v^2 \right\rangle = \frac{2}{3} n \left\langle \varepsilon_{пост} \right\rangle,$$

при выводе мы учли, что $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$. Здесь $\left\langle \varepsilon_{пост} \right\rangle$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

Мы получили основное уравнение МКТ $p = \frac{1}{3} mn \left\langle v^2 \right\rangle$, связывающее макроскопическую величину p с микроскопическими m, n и v молекул.

§4. Средняя энергия молекул.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT = \frac{N}{N_A} RT$ следует:

$$p = \frac{N}{N_A} \frac{RT}{V} = nkT,$$

где $k = R / N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, n – концентрация.

Из соотношений $p = \frac{2}{3} n \left\langle \varepsilon_{пост} \right\rangle$ и $p = nkT$ следует, что $\left\langle \varepsilon_{пост} \right\rangle = \frac{3}{2} kT$.

Эта формула позволяет понять, что же такое температура. Абсолютная температура – это величина, прямо пропорциональная средней энергии молекул. В принципе, коэффициент можно было бы положить равным 1, тогда температура измерялась бы в Джоулях. Но исторически сложилось так, что температуру измеряют в Кельвинах, так что постоянная Больцмана k – это всего лишь коэффициент для пересчета Кельвинов в Джоули.

Введем понятие числа степеней свободы. Числом степеней свободы механической системы называется минимальное количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы. Например, точка – 3 координаты, абсолютно твердое тело – 6 (3 поступательных – координаты какой-то точки, например центра масс, и 3 вращательных – углы поворота вокруг трех осей).

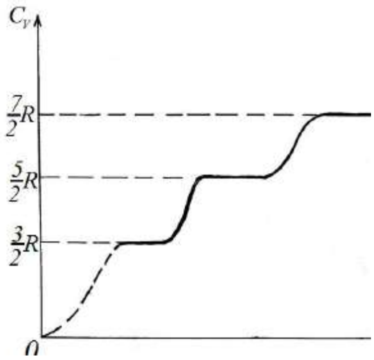
Система из N точек имеет $3N$ степеней свободы. Любая жесткая связь уменьшает их число на единицу. Например, молекула из двух атомов имеет 6-1=5 степеней свободы, т.к. расстояние между атомами остается постоянным. Из этих пяти степеней свободы 3 поступательных и 2 вращательных, т.к. вокруг продольной оси молекулы вращения нет. Если связь не жесткая, а упругая, то степеней свободы будет 6, добавится 1 колебательная. Если все N точек связаны упругими связями, то из $3N$ степеней свободы будут 3 поступательных, 3 вращательных и остальные $3N$-6 – колебательные. Для линейной молекулы число вращательных на одну меньше, значит, колебательных на одну больше.

В классической (не квантовой) статистической физике доказывается закон равнораспределения (Больцман), согласно которому на каждую степень свободы молекулы приходится энергия $kT/2$, т.е. $\langle\varepsilon\rangle = ikT/2$, где $i = n_{пост} + n_{вращ} + 2n_{кол}$. Коэффициент 2 соответствует тому, что колебательное движение имеет кинетическую и потенциальную составляющие и на каждую приходится по $kT/2$.

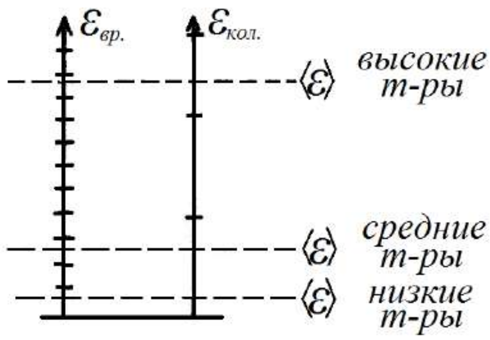
Для идеального газа, в котором отсутствует взаимодействие молекул, внутренняя энергия моля равна $U_M = N_A\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{iRT}{2}$. Тогда

$$C_V = \frac{i}{2}R, \qquad C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2}R, \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

Однако все не совсем так. Причина тому – квантовая механика. Для трехатомной молекулы $i = 3_{пост} + 3_{вращ} + 2(3\cdot 3 - 6)_{колеб} = 12$, для 4-атомной i=3+3+2(12-6)=18, для 2-атомной i=3+2+2(6-5)=7. А на опыте теплоемкости соответствуют значениям i=6, 6 и 5. Мало того, с ростом температуры C меняется, соответствуя увеличивающимся значениям i. На рисунке изображена экспериментальная кривая зависимости теплоемкости C_V от температуры для водорода H_2.



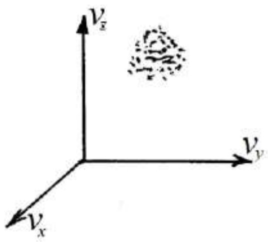
Причина в том, что при малых T задействованы только поступательные степени свободы, с ростом T подключаются вращательные, и только при больших T начинают проявляться колебательные. При этом, как следует из характера графика, во вращение, а потом и в колебания вовлекаются не сразу все молекулы, сначала небольшая их доля, потом больше и больше, пока не вовлекутся все. Объяснение состоит в том, что вращательная и колебательная энергии квантуются, т.е. энергия может меняться только скачками. Поступательная скачков не имеет.



Величина кванта колебательной энергии на порядок выше, чем вращательной. При низких $\langle\varepsilon\rangle$, т.е. T, очень мало молекул может иметь энергию порядка $E_{вращ,1}$. Далее с ростом $\langle\varepsilon\rangle$ вовлекается вращательное движение, а потом и колебательное. У разных многоатомных молекул характерные значения энергий различны, поэтому при одной и той же T у одних веществ какие-то степени свободы уже задействованы, а у других – нет. У большинства при комнатных температурах задействованы поступательные и вращательные, а колебательные подключаются при высоких температурах.

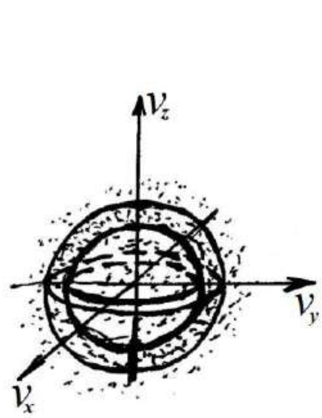
§5. Распределение Максвелла.

Мы знаем, что молекулы газа находятся в непрерывном движении. Но с какими скоростями они движутся? Как они распределены по скоростям? Ответы на эти вопросы дает распределение Максвелла, выведенное теоретически в 1860 году. Эта теория является ярким примером научной изобретательности и мощи человеческого разума. На первый взгляд, не за что даже зацепиться, чтобы получить ответы на интересующие нас вопросы. И, тем не менее, Джеймс Кларк Максвелл построил свою теорию, пользуясь только карандашом и бумагой. Никаких дополнительных экспериментов!



Рассмотрим так называемое пространство скоростей. Скорости каждой молекулы соответствует точка в этом пространстве. Из-за столкновений эти точки движутся, но их плотность (концентрация) в каждом месте остается постоянной (газ в равновесии). Из-за равноправия всех направлений движения расположение точек будет сферически симметрично, т.е. плотность (концентрация) точек в пространстве скоростей зависит только от модуля скорости $v = |\vec{v}|$. Обозначим эту концентрацию через $N \cdot f(v)$, где N – полное количество молекул. Тогда количество молекул с проекциями скорости между v_x и $(v_x + dv_x)$, v_y и $(v_y + dv_y)$, v_z и $(v_z + dv_z)$ можно записать в виде (все молекулы в кубике):

$$dN_{v_x, v_y, v_z} = Nf(v)dv_x dv_y dv_z$$



Молекулы со скоростями от v до $v + dv$ находятся внутри шарового слоя. Количество их равно $dN_v = Nf(v)4\pi v^2 dv$ (площадь поверхности сферы на толщину слоя). Вероятность молекуле иметь такую скорость равна $dp_v = \dfrac{dN_v}{N} = f(v)4\pi v^2 dv$.

Вид функции $f(v)$ и установил Максвелл в 1860 году. Вероятности молекуле иметь проекции скорости между v_x и $(v_x + dv_x)$, v_y и $(v_y + dv_y)$, v_z и $(v_z + dv_z)$ равны:

$$dp_{v_x} = \varphi(v_x)dv_x; \quad dp_{v_y} = \varphi(v_y)dv_y; \quad dp_{v_z} = \varphi(v_z)dv_z$$

Из-за равноправности направлений движения вид φ один и тот же. Максвелл предположил, что вероятности dp_{v_x}, dp_{v_y}, dp_{v_z} являются независимыми. Тогда

$$dp_{v_x,v_y,v_z} = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_y dv_z,$$

как произведение вероятностей независимых событий, а $f(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$.

Возьмем логарифм от обеих частей:

$$\ln f(v) = \ln\varphi(v_x) + \ln\varphi(v_y) + \ln\varphi(v_z) \qquad (*)$$

Продифференцируем обе части по v_x:

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}$$

Из формулы $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ найдем частную производную: $\dfrac{\partial v}{\partial v_x} = \dfrac{2v_x}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \dfrac{v_x}{v}$.

Тогда $$\frac{f'(v)}{f(v)} \cdot \frac{v_x}{v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(v)}{f(v)v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)v_x}$$

Правая часть не зависит от v_y и v_z, значит, и она, и левая часть являются функциями только от v_x. Аналогично, беря производные по v_y и v_z, докажем, что левая часть является функцией только от v_y и v_z. Иначе говоря, она не зависит ни от v_x, ни от v_y, ни от v_z, т.е. является константой $(-\alpha)$.

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)v_x} = -\alpha \Rightarrow \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha v_x \Rightarrow \frac{d\ln\varphi(v_x)}{dv_x} = -\alpha v_x \Rightarrow \ln\varphi(v_x) = \frac{-\alpha v_x^2}{2} + \ln A$$

Окончательно: $\varphi(v_x) = A \cdot \exp(\dfrac{-\alpha v_x^2}{2})$. Аналогично можно показать, что

$$\varphi(v_y) = A \cdot \exp(\frac{-\alpha v_y^2}{2}) \text{ и } \varphi(v_z) = A \cdot \exp(\frac{-\alpha v_z^2}{2}).$$

Тогда $f(v) = A^3 \cdot \exp(\dfrac{-\alpha v^2}{2})$.

Постоянную A найдем из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_{v_x} = 1 \;\Rightarrow\; A\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdot \exp(\frac{-\alpha v_x^2}{2}) dv_x = 1$

Для взятия интеграла воспользуемся формулой для интеграла Эйлера-Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

и получим: $A \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = 1$, т.е. $A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}$ и $\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \cdot \exp(\frac{-\alpha v_x^2}{2})$

Запишем выражение для средней энергии:

$$\langle \varepsilon \rangle = \left\langle \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} \right\rangle = \frac{m}{2}(\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{3m}{2}\langle v_x^2 \rangle .$$

Приравнивая эту величину к $3kT/2$, получим: $\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$

Чтобы найти α, вычислим $\langle v_x^2 \rangle$ и приравняем к значению kT/m.

Чтобы найти $\langle v_x^2 \rangle$, возьмем производную от интеграла Пуассона по β:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \Rightarrow -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\beta x^2) dx = \sqrt{\pi}(-\frac{1}{2})\beta^{-3/2}$$

Мы получили формулу для другого интеграла Эйлера-Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\beta x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta^{3/2}}$.

С ее помощью можно вычислить $\langle v_x^2 \rangle$:

$$\langle v_x^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \underbrace{\varphi(v_x) dv_x}_{dp_{v_x}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp(-\alpha v_x^2/2) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2(\alpha/2)^{3/2}} = \frac{1}{\alpha}$$

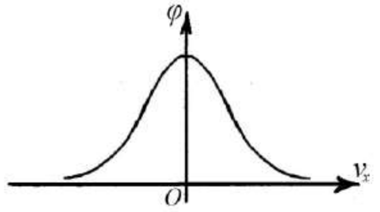
Приравнивая $\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$, получим $\alpha = m/kT$. Окончательно:

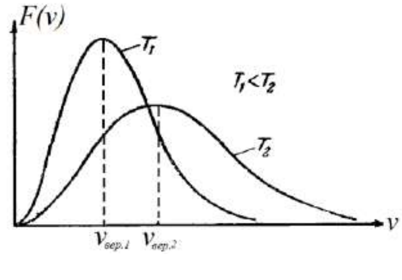
$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \exp(\frac{-mv_x^2}{2kT}) \qquad \Rightarrow \qquad dN_{v_x} = N\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \exp(\frac{-mv_x^2}{2kT}) dv_x$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \exp(\frac{-mv^2}{2kT}) \qquad \Rightarrow \qquad dN_v = N \underbrace{f(v) 4\pi v^2}_{F(v)} dv$$

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \exp(\frac{-mv^2}{2kT}) 4\pi v^2$$

Нарисуем графики $\varphi(v_x)$ и $F(v)$:





Площади под кривыми $F(v)$ равны друг другу, так как полная вероятность равна 1.

Найдем некоторые характеристики распределений.

1)Средняя скорость: $\langle v \rangle = \int\limits_0^\infty vF(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int\limits_0^\infty v^3 \exp(\frac{-mv^2}{2kT})dv$

Перейдя к переменной v^2 и интегрируя по частям, получим $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}}$.

2)Средняя квадратичная скорость.

$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$ (из $\langle \varepsilon \rangle = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3kT}{2}$) $\Rightarrow$ $v_{ср.кв.} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$.

3)Наиболее вероятная скорость.

Она соответствует максимуму кривой $F(v)$, т.е. $F' = 0$ $\Rightarrow$ $v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

Оценим величину средней скорости молекул кислорода при T=300 К.

$$\langle v \rangle_{O_2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{3{,}14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} \approx 500 \text{ м/с.}$$

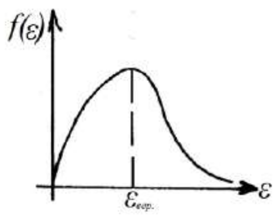
Найдем распределение молекул по энергии:

$$dN_v = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \exp(\frac{-mv^2}{2kT})4\pi v^2 dv$$

Перейдем от переменной v к ε: $\varepsilon = mv^2/2 \Rightarrow v = \sqrt{2\varepsilon/m} \Rightarrow dv = d\varepsilon/\sqrt{2m\varepsilon}$:

$$dN_\varepsilon = N\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (kT)^{-3/2} \exp(\frac{-\varepsilon}{kT})\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon = f(\varepsilon)d\varepsilon,$$

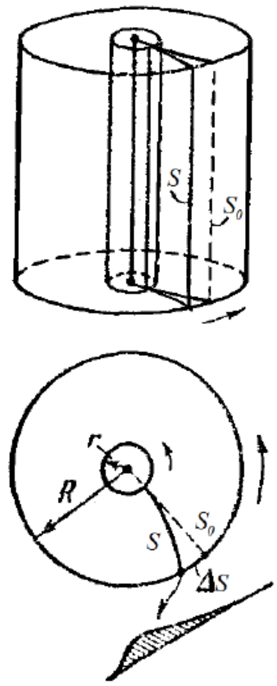
где $f(\varepsilon) = Ae^{-\varepsilon/kT}\sqrt{\varepsilon}$.



§6. Экспериментальная проверка закона распределения Максвелла. Опыты Штерна и Ламмерта.

Опыт Штерна - опыт, впервые проведённый немецким физиком Отто Штерном в 1920 году. В нём были непосредственно измерены скорости теплового движения молекул и подтверждено наличие распределения молекул газов по скоростям.

Для проведения опыта был подготовлен прибор, состоящий из двух цилиндров разного радиуса, ось которых совпадала и на ней располагалась платиновая проволока с нанесённым слоем серебра. В пространстве внутри цилиндров посредством непрерывной откачки воздуха поддерживалось достаточно низкое давление. При пропускании электрического тока через проволоку достигалась температура плавления серебра, из-за чего серебро начинало испаряться и атомы серебра летели к внутренней поверхности малого цилиндра равномерно и прямолинейно со скоростью v, определяемой температурой нагрева платиновой проволоки. Во внутреннем цилиндре была проделана узкая щель, через которую атомы могли беспрепятственно пролетать далее. Стенки цилиндров специально охлаждались, что способствовало оседанию попадающих на них атомов. В таком состоянии на внутренней поверхности большого цилиндра образовывалась достаточно чёткая узкая полоса серебряного налёта, расположенная прямо напротив щели малого цилиндра. Затем всю систему начинали вращать с достаточно большой угловой скоростью ω. При этом полоса налёта смещалась в сторону, противоположную направлению вращения, и теряла чёткость. Измерив смещение s наиболее тёмной части полосы от её положения, когда система покоилась, Штерн определил время полёта, через которое нашёл скорость движения молекул:

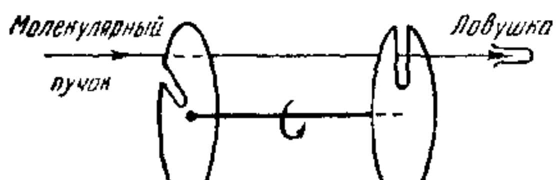


$$t = \frac{s}{u} = \frac{l}{v} \Rightarrow s = \frac{ul}{v} = \frac{\omega R(R-r)}{v} \approx \frac{\omega R^2}{v}$$

где s - смещение полосы, l - расстояние между цилиндрами, а u - скорость движения точек внешнего цилиндра.

Найденная таким образом скорость движения атомов серебра совпала со скоростью, рассчитанной по законам молекулярно-кинетической теории, а тот факт, что получившаяся полоска была размытой, говорил о том, что скорости атомов различны и распределены по некоторому закону - закону распределения Максвелла: атомы, двигавшиеся быстрее, смещались относительно полосы, полученной в состоянии покоя, на меньшие расстояния, чем те, которые двигались медленнее.

Более точно закон распределения был проверен в опыте Ламмерта (1929), в котором молекулярный пучок пропускался через два вращающихся параллельных диска с радиальными щелями, смещенными на некоторый угол. Из числа молекул, пролетевших через щель в первом диске, через второй пролетят только те, которые подлетят к нему в тот момент, когда на пути пучка встанет прорезь во втором диске.



Более быстрые молекулы достигнут диска слишком рано, медленные, наоборот, слишком поздно. Таким образом, это устройство позволяет выделить из пучка атомы, обладающие определенным значением скорости. Меняя скорость вращения прибора, можно выделять из пучка атомы, обладающие различными скоростями. Число этих атомов для каждого интервала скоростей определяется по времени, которое требуется для того, чтобы на пластинке появился осадок, видимый в микроскоп. Результаты опытов Ламмерта и других опытов, проводившихся с той же целью, подтвердили справедливость распределения по скоростям, теоретически установленного Максвеллом.

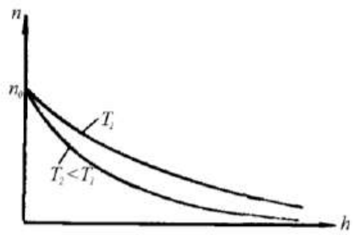
§7. Распределение Больцмана.

Используя соотношение $p = nkT$, барометрическую формулу $p = p_0 e^{-Mgh/RT}$ можно записать в виде $n = n_0 e^{-mgh/kT}$, где n – концентрация молекул. При малых температурах n резко убывает с ростом высоты. При T=0 все молекулы находятся на высоте h=0. При высоких T концентрация почти не зависит от высоты.

Физически это ясно. Каждое распределение формируется под действием двух тенденций:

1) притяжение молекул к Земле, которое стремится расположить их все на поверхности Земли;

2) тепловое движение с характерной энергией kT, которое стремится разбросать молекулы равномерно по высоте.



Чем больше m и меньше T, тем сильнее первая тенденция, и молекулы сгущаются около Земли, и наоборот.

Введя потенциальную энергию $\varepsilon_p = mgh$, запишем формулу в виде $n = n_0 e^{-\varepsilon_p/kT}$. Больцман доказал, что эта формула справедлива в любом потенциальном поле для совокупности любых одинаковых частиц. Эту формулу называют распределением Больцмана. Это распределение молекул по потенциальной энергии, в то время как закон Максвелла дает их распределение по кинетической энергии. Эти формулы похожи: существует экспоненциальный множитель, в показателе которого стоит отношение энергии одной молекулы к величине kT.

$dN_{x,y,z} = n_0 e^{-\varepsilon_p/kT} dx\,dy\,dz$ - количество молекул в объеме $dx\,dy\,dz$, расположенном около точки (x, y, z).

Объединим оба распределения в одно распределение Максвелла-Больцмана:

$$dN_{v_x,v_y,v_z,x,y,z} = Ae^{-(\varepsilon_p + \frac{mv^2}{2})/kT} dv_x\,dv_y\,dv_z dx\,dy\,dz, \text{ где } A = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

Здесь полная энергия $\varepsilon = \varepsilon_p + mv^2/2$ может принимать непрерывный ряд значений. Если же этот ряд дискретный, как, например, в атоме, то $N_i = Ae^{-\varepsilon_i/kT}$, где N_i - число атомов в состоянии с энергией ε_i. Коэффициент A находится из условия нормировки $\sum_i N_i = A\sum e^{-\varepsilon_i/kT} = N$.

§8. Макро-и микросостояния. Статистический вес.

Состояние макроскопического тела может быть задано с помощью объема V, давления p, температуры T, внутренней энергии U и других величин, характеризующих тело в целом. Это состояние называется макросостоянием. Состояние макроскопического тела, охарактеризованное столь подробно, что известно состояние всех его молекул, называется микросостоянием.

Число различных микросостояний, соответствующих данному макросостоянию, называется статистическим весом (статвесом) данного макросостояния. Это число микроскопических способов, которыми может быть осуществлено данное макросостояние.

Как пример рассмотрим ситуацию со счастливым билетом. Счастливым называется такой билет, у которого сумма первых трех цифр номера (из шести) равна сумме последних трех. Какой счастливый билет бывает чаще: с суммой 8 или 5? Вероятность любого номера одна и та же и равна 1/1 000 000. Но билет с суммой 27 (или 0) всего один – 999999 (000000), с суммой 26 (или 1) существует 9 билетов: в первой тройке 8 на первом месте: 899899, 899989, 899998, и затем - на втором и третьем местах. С суммой 25 (или 2) существует больше билетов: в каждой тройке есть варианты двух восьмерок (3) или одной семерки (3) при остальных девятках, всего этих вариантов 6. Каждому из них соответствует один вариант во второй тройке. Итого, разных билетов 6х6=36. Это и есть статвес этого состояния. Так можно рассчитать статвеса для любой суммы. Легко видеть, что они возрастают с ростом суммы от 0 до 13 (или симметрично с убыванием от 27 до 14). Максимальный статвес имеют суммы 13 и 14, эти билеты самые частые из счастливых и поэтому наименее «ценные». Чем дальше сумма от 13 и 14, тем менее вероятен успех. Значит, ответ на исходный вопрос таков: билет с суммой 8 бывает чаще, чем с суммой 5.

Для справки, расчет показывает, что общая вероятность получить счастливый билет (сумма неважна) равна 1/15, т.е. не очень мала.

Рассмотрим более «физический» пример. Какими способами могут распределиться молекулы газа между двумя половинами сосуда? Пусть молекул всего 4.

Состояние (число молекул)		Способы реализации (номера молекул)		Число способов реализации (статвес)
Слева	Справа	Слева	Справа	
0	4	-	1,2,3,4	1
1	3	1	2,3,4	4
		2	1,3,4	
		3	1,2,4	
		4	1,2,3	
2	2	1,2	3,4	6
		1,3	2,4	
		1,4	2,3	
		2,3	1,4	
		2,4	1,3	
		3,4	1,2	
3	1	2,3,4	1	4
		1,3,4	2	
		1,2,4	3	
		1,2,3	4	
4	0	1,2,3,4	-	1

Всего способов 2^4=16.

Рассмотрим вероятность какого-либо микросостояния, например 1,3 – 2,4. Вероятность частице №1 быть слева равна 1/2, №3 быть слева – 1/2, №2 быть справа – 1/2, №4 быть справа - 1/2. Итого, вероятность данного состояния равна $(1/2)^4 = 1/16$. Такая же она для любого другого микросостояния.

Для получения вероятности макросостояния надо сложить вероятности всех микросостояний, соответствующих ему или, иначе говоря, умножить 1/16 на число этих микросостояний. Таким образом, вероятность макросостояния пропорциональна его статистическому весу. Общая вероятность равна 1/16 x 16=1, как и должно быть.

Найдем число способов реализации (статвес) макросостояния, в котором слева n молекул, а справа – $(N\text{-}n)$. Для этого пронумеруем места молекул в каждой половине: $\underbrace{1,2,3...n}_{n},\underbrace{(n+1),(n+2),...N}_{N-n}$. На место №1 может попасть любая молекула от 1 до N, на место №2 – любая из оставшихся (N-1), и т.д. Общее число возможных ситуаций равно числу перестановок из N, т.е. $N!$. Однако перестановки в одной половине не меняют макросостояние, поэтому искомый статистический вес равен

$$\Omega(n, N-n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} = C_N^n .$$

Это, по сути, вывод формулы для числа сочетаний из N по n - C_N^n. Легко видеть, что в рассмотренном примере $\Omega(2,4-2)=6$, $\Omega(1,4-1)=4$.

Уже из таблицы видно, что наибольший статвес, т.е. наибольшую вероятность, имеет состояние, соответствующее распределению поровну. Эта вероятность убывает по мере увеличения отклонения от этого состояния. Эта закономерность становится еще резче при увеличении числа молекул N. При N=24 вероятности равны:

12,12 – 0,161

11,13 – 0,149

10,14 – 0,117

9,15 – 0,078

1,23 – 1,4 x 10^{-6}

0,24 – 6 x 10^{-7}

Таким образом, число молекул в одной половине сосуда колеблется около средней величины N/2. Случайное отклонение некоторой величины от ее среднего значения называется флуктуацией этой величины.

$\Delta x = x-\langle x\rangle$; $\langle\Delta x\rangle=\langle x-\langle x\rangle\rangle=\langle x\rangle-\langle x\rangle=0$, т.е. среднее значение флуктуации равно нулю, поэтому в качестве характеристики флуктуаций используют среднюю квадратичную $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}$ и относительную среднюю $\dfrac{\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}}{\langle x\rangle}$ флуктуации. В статистической физике доказывается, что относительная флуктуация аддитивной величины (для которой значение для всего тела равно сумме значений для его частей) обратно пропорциональна квадратному корню из числа частиц $\sqrt{N}$. При большом N можно считать, что значение величины практически не отклоняется от среднего. Это относится ко многим макроскопическим величинам: давление (импульс, передаваемый за единицу времени единице площади), плотность (масса в единице объема), концентрация (число частиц в единице объема) и т.д.

Равновесным является состояние системы, не меняющееся со временем. При большом числе частиц это состояние с наибольшей вероятностью, т.е. с наибольшим статвесом. Система в равновесном состоянии самопроизвольно отклоняется от него, но незначительно и кратковременно.

Статистическая физика объясняет причину необратимости процессов природы. Механика обратима (2-й закон Ньютона не изменяется при изменении знака времени). Но статистические процессы идут в сторону повышения вероятности, т.е. статвеса. Обратный процесс крайне маловероятен. Пусть газ был в одной половине сосуда. Далее он распространяется на весь сосуд. Возврат всех молекул в одну половину имеет очень малую вероятность. Всякий необратимый процесс – такой, обратный которому маловероятен.

§9. Энтропия.

Вероятность макросостояния прямо пропорциональна статвесу Ω. Поэтому в качестве характеристики вероятности состояния можно было бы взять сам Ω. Но он не аддитивен. Убедимся в этом. Возьмем две подсистемы, находящиеся в состояниях с Ω_1 и Ω_2. Число способов реализации данного состояния всей системы равно $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$, т.е. статвес не аддитивен. А вот его логарифм аддитивен: $\ln\Omega = \ln\Omega_1 + \ln\Omega_2$. Иметь дело с аддитивной величиной удобнее, поэтому в качестве характеристики вводится новая величина – энтропия: $S = k\ln\Omega$, постоянная Больцмана k для удобства.

Из определения следуют свойства энтропии.

1) Энтропия изолированной системы при необратимых процессах растет.

2) В равновесном состоянии энтропия максимальна, т.к. максимален Ω (еще раз подчеркнем, что пренебрегаем флуктуациями).

Утверждение: «энтропия изолированной системы может только возрастать» называется законом возрастания энтропии или вторым началом термодинамики. При необратимых процессах в изолированной системе $dS > 0$. В статфизике доказывается, что при <u>обратимом</u> процессе, сопровождающемся передачей в систему количества теплоты δQ, энтропия получает приращение $dS = \frac{\delta Q}{T}$. δQ - не полный дифференциал, а dS полный, т.е. энтропия является функцией состояния (не зависит от предыстории). Из этой формулы ясно, зачем k в определении энтропии.

Энтропия характеризует беспорядок в системе, т.е. она говорит о количестве возможных микросостояний. Ясно, что при подаче в систему δQ усиливается тепловое движение молекул, т.е. растет беспорядок. Чем выше T, тем меньше относительный рост беспорядка. В формуле $dS = \frac{\delta Q}{T}$ очень существенна обратимость процесса. Если процесс необратим, то энтропия растет как за счет δQ, так и вследствие необратимости, так что в общем случае $dS > \frac{\delta Q}{T}$.

Отсюда следует, что, поскольку при равновесном процессе энтропия самопроизвольно не возрастает, то $dS = \frac{\delta Q}{T}$, т.е. все равновесные процессы являются обратимыми.

Что же делать, если происходящий процесс необратимый? Воспользуемся тем, что энтропия – функция состояния, т.е. не зависит от того, каким способом систему привели в данное состояние. Поэтому, для того чтобы рассчитать изменение энтропии при необратимом процессе, можно рассмотреть какой-нибудь воображаемый обратимый процесс, приводящий систему в то же конечное состояние, и рассчитать изменение энтропии по нему, с полным правом пользуясь формулой $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

При абсолютном нуле температуры все молекулы находятся в основном состоянии, статвес которого равен 1, т.е. S=0. Приходим к теореме Нернста: энтропия всякого тела при стремлении T к 0 стремится к нулю: $\lim\limits_{T \to 0} S = 0$. Это называют также третьим началом термодинамики.

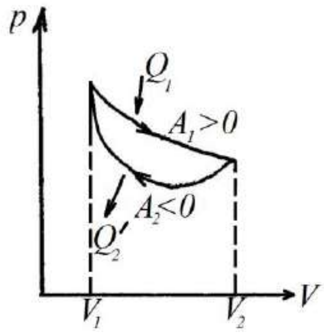
Проводя обратимый процесс, получим: $S(T) - S(0) = \int_0^T \frac{dQ}{T} = \int_0^T \frac{cdT}{T}$, но так как $S(0) = 0$, то $S(T) = \int_0^T \frac{cdT}{T}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{T \to 0} c = 0$, так как иначе интеграл стремился бы к бесконечности в области малых T. При стремлении температуры к нулю теплоемкость стремится к нулю при ЛЮБОМ процессе!

§10. Основные законы термодинамики. Тепловые машины.

Первое начало термодинамики - $Q = \Delta U + A$, или $\delta Q = dU + \delta A$.

Или иначе: невозможно создать вечный двигатель первого рода, т.е. периодически действующий двигатель, совершающий работу в большем количестве, чем полученная им энергия.

Всякий двигатель должен работать в циклическом режиме, т.е. возвращаться в исходное состояние. Чтобы работа за цикл была положительна, надо чтобы давление газа при расширении было больше, чем при сжатии (см. рисунок). Для этого нужно при расширении сообщать газу тепло, а при сжатии отбирать.



$$A = Q_1 - Q_2'$$

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет полученного извне тепла, называется тепловой машиной.

При любом циклическом процессе необходимо отдать $Q_2' > 0$. Введем коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины: $\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} < 1$.

Тепловая машина работает по прямому циклу, т.е. идущему по часовой стрелке на графике $p(V)$. Если обратить цикл, т.е. провести в обратном направлении, то получим холодильник. В этом случае устройство отбирает у тела с T_2 количество теплоты Q_2 и отдает Q_1' телу с $T_1 > T_2$. При этом внешние силы совершают работу A'. У холодильника не существует КПД (!), у него есть холодильный коэффициент, определяемый как $Q_2 / A' = Q_2 / (Q'_1 - Q_2)$. Это логично, так как Q_2 - принесенная польза, а A' - затраченная энергия.

Второе начало термодинамики можно сформулировать разными способами.

1) Энтропия изолированной системы не может убывать: $dS \geq 0$.

2) Клаузиус: невозможны такие процессы, единственным результатом которых являлся бы переход тепла от более холодного тела к более нагретому. Можно показать, что такой процесс шел бы с уменьшением энтропии.

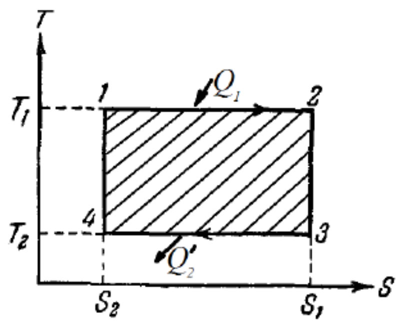
3) Кельвин: невозможны такие процессы, единственным результатом которых явилось бы отнятие количества теплоты у тела и превращение его в работу. Казалось бы, именно это имеет место при изотермическом процессе, но при этом есть изменение объема, т.е. результат не единственный. Из формулировки Клаузиуса легко перейти к Кельвину: перевели тепло в работу, а затем эту работу в тепло путем трения и отдали его более нагретому телу.

4) Невозможен вечный двигатель второго рода, т.е. такой периодически работающий двигатель, который получал бы тепло из резервуара и превращал его полностью в работу.

Тепловой резервуар – тело, теплоемкость которого бесконечно велика, т.е. его T не меняется при получении или отдаче тепла.

Процесс обмена теплом обратим только тогда, когда оба тела имеют одинаковую температуру. Допустим, что T тела меньше, чем резервуара. Но при обратном процессе тело сможет вернуть резервуару взятое у него ранее тепло, только если его $T \geq T_{резервуара}$, т.е. процесс проходит туда и обратно через разные стадии, т.е. не является обратимым. Таким образом, единственный обратимый процесс, сопровождающийся теплообменом с резервуаром – это изотермический процесс при температуре резервуара. Здесь подразумевается, что резервуар имеет постоянную температуру. Обратимый теплообмен с ним возможен только при его температуре. Если же температура резервуара может изменяться, то обратимыми будут любые равновесные процессы, а не только изотермический. Главное, чтобы передача тепла происходила при равенстве температур рабочего тела и резервуара. Это важно для понимания предложенной в предыдущем параграфе идеи о замене необратимого процесса воображаемым обратимым для расчета изменения энтропии.

§11. Цикл Карно.

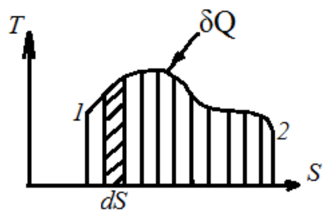


Из вышесказанного ясно, что для работы теплового двигателя нужны два тепловых резервуара. От одного, с большей T, называемого «нагреватель», двигатель получает в ходе цикла некоторое количество теплоты Q_1, второму с более низкой T («холодильнику») двигатель отдает Q_2'. Будем рассматривать обратимые циклы, которые может совершить рабочее вещество, которое мы будем называть рабочим телом. Отметим, что это не обязательно газ!

В 1824 г. французский инженер Сади Карно проанализировал обратимый цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, и показал, что такой процесс имеет максимальный КПД из всех процессов, происходящих при тех же температурах нагревателя и холодильника. Такой цикл называется циклом Карно.

Адиабатический процесс происходит при постоянной энтропии ($\Delta S = 0$) и называется также изоэнтропическим. На графике T - S цикл Карно имеет вид прямоугольника.

Количество теплоты при обратимом процессе найдем по формуле $dQ = TdS$ и



$Q = \int_1^2 TdS$. В осях $T - S$ при обратимом процессе количество теплоты Q равно площади под кривой, а за весь цикл $Q_1 - Q_2'$ равно площади фигуры.

Найдем КПД η цикла Карно, для чего вычислим следующие величины:

$$\Delta S_{1,2} = \int_1^2 \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1}\int_1^2 dQ = \frac{Q_1}{T_1}$$

$$\Delta S_{3,4} = \int_3^4 \frac{dQ}{T_2} = \frac{1}{T_2}\int_3^4 dQ = -\frac{Q_2'}{T_2}\ ,\ (Q_2' > 0)$$

$$\Delta S_{2,3} = \Delta S_{4,1} = 0$$

Полное приращение энтропии за цикл: $\Delta S=\Delta S_{1,2}+\Delta S_{2,3}+\Delta S_{3,4}+\Delta S_{4,1}=\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2'}{T_2}=0$,

так как вернулись в исходную точку.

$$\frac{Q_2'}{Q_1}=\frac{T_2}{T_1} \qquad \Rightarrow \qquad \eta=\frac{Q_1-Q_2'}{Q_1}=1-\frac{Q_2'}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}$$

При выводе мы не делали предположений о свойствах рабочего тела и устройстве тепловой машины, т.е. КПД всех тепловых машин, работающих по циклу Карно и имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, одинаковы и определяются только этими температурами. Это теорема Карно.

Покажем, что, если бы в процессах были необратимости, то КПД был бы меньше.

$$\Delta S_{1,2}>\frac{Q_1}{T_1}\ ,\ \Delta S_{3,4}>-\frac{Q_2'}{T_2}\ ,\ \Delta S_{2,3}>0\ \ ,\ \Delta S_{4,1}>0$$

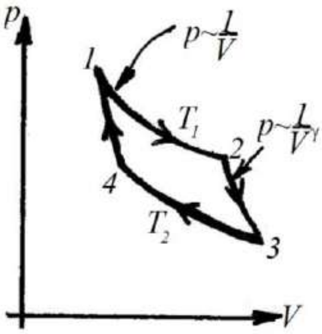
Пусть $\Delta S_{1,2}=\frac{Q_1}{T_1}+\alpha_{12}$, $\Delta S_{3,4}=-\frac{Q_2'}{T_2}+\alpha_{34}$, $\Delta S_{2,3}=\alpha_{23}$, $\Delta S_{4,1}=\alpha_{41}$, где все $\alpha\ge 0$.

Полное приращение энтропии за цикл: $\Delta S=\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2'}{T_2}+\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{41}=0$,

так как вернулись в исходную точку.

$$\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2'}{T_2}<0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q_2'}{Q_1}>\frac{T_2}{T_1} \qquad \Rightarrow \qquad \eta=1-\frac{Q_2'}{Q_1}<1-\frac{T_2}{T_1}$$

Пусть рабочим телом является газ. Проверим формулу Карно. При изотермических процессах:



$$Q_1=A_{12}=\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1};\quad Q_2'=A_{34}'=\frac{m}{M}RT_2\ln\frac{V_3}{V_4}.$$

На адиабате $pV^\gamma=const$.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV=\frac{mRT}{M}\ \Rightarrow p\propto\frac{T}{V}\ \Rightarrow TV^{\gamma-1}=const$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_4^{\gamma-1} \\ T_1V_2^{\gamma-1}=T_2V_3^{\gamma-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{V_4}{V_3}\ \Rightarrow \eta=1-\frac{Q_2'}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$$, что и требовалось доказать.

§12. Фазовые равновесия и превращения.

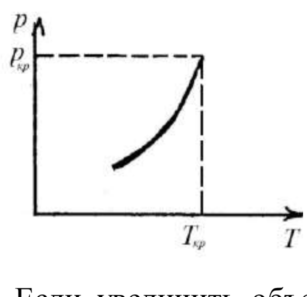
В термодинамике фазой называется совокупность однородных, одинаковых по своим свойствам частей, например, две фазы - вода и смесь воздуха и пара. Если в воду добавить кусок льда, будут три фазы. Разные модификации какого-либо вещества – это разные фазы, например, алмаз и графит – разные фазы углерода.

При определенных условиях разные фазы одного вещества могут находиться в равновесии, соприкасаясь друг с другом. Это равновесие может быть только в некотором диапазоне температур, причем каждой температуре соответствует некоторое давление, при котором равновесие возможно, например вода и пар. Таким образом, на графике p-T состояния равновесия лежат на кривой $p = f(T)$. Три фазы будут в равновесии только в одной точке, называемой тройной точкой. Она лежит в точке пересечения кривых равновесия фаз, взятых по две. Переход из одной фазы в другую обычно сопровождается поглощением или выделением некого количества теплоты, которое называется скрытой теплотой перехода, например испарение, плавление. Такие переходы называются фазовыми переходами первого рода. Существуют и переходы, не связанные с поглощением или выделением тепла – это переходы второго рода. Например, переходы между разными кристаллическими модификациями. Таким же является и переход металла из обычного состояния в сверхпроводящее.

§13. Испарение и конденсация.

Суть испарения – наиболее быстрые молекулы покидают жидкость, т.е. средняя энергия молекул жидкости уменьшается, ее температура снижается. Переход из жидкости в газ – испарение, из твердого состояния в газ – возгонка (сублимация). При этом поглощается скрытая теплота испарения или сублимации. При конденсации эта теплота отдается, т.е. образующаяся жидкость нагревается.

Рассмотрим процесс установления равновесия в замкнутом объеме. Молекулы вылетают из жидкости, а другие в то же время возвращаются в нее из пара. Пока плотность пара мала, возвращается меньше молекул, чем вылетает, т.е. плотность пара $\rho_{пара}$ растет. При некоторой $\rho_{пара}$ устанавливается динамическое равновесие: количество вылетающих молекул равно количеству возвращающихся. Пар, находящийся в динамическом равновесии



со своей жидкостью, называется насыщенным. Давление пара при равновесии называют давлением насыщенного пара. При увеличении температуры число молекул, вылетающих из жидкости, быстро растет, число возвращающихся из пара растет медленнее. Поэтому с ростом T давление (и плотность) насыщенного пара увеличивается. Если увеличить объем сосуда, то давление пара упадет, число возвращающихся молекул снизится, и жидкость будет испаряться, пока не наступит насыщение и давление не вернется к $p_{нас}$. Аналогично все происходит в случае пара и твердого тела.

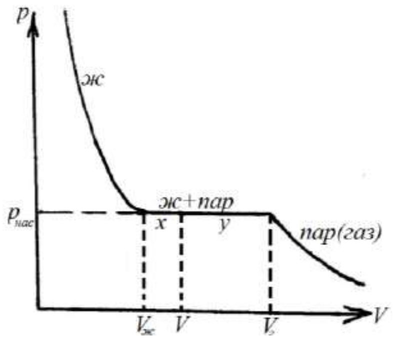
В воздухе всегда находится какое-то количество водяных паров. Абсолютная влажность – масса пара в одном кубометре воздуха, она измеряется в г/м^3. Относительная влажность –

отношение реальной плотности водяного пара в воздухе к максимально возможной при данной температуре, т.е. к плотности насыщенного пара. Измеряется в процентах.

Рассмотрим пример. Днем температура поднималась до $20^o C$. При этой температуре $\rho_{нас}(20) = 17{,}3$ г/м^3 (данные из справочника). Пусть при этом плотность пара равнялась 13,8 г/м^3, т.е. относительная влажность была 13,8/17,3=0,8=80%. Ночью температура упала до $15^o C$, $\rho_{нас}(15) = 12{,}8$ г/м^3. Именно столько пара осталось в воздухе, при этом пар насыщенный, т.е. его относительная влажность равна 100%, а избыточная масса 13,8-12,8=1 г в каждом м^3 выпала росой.

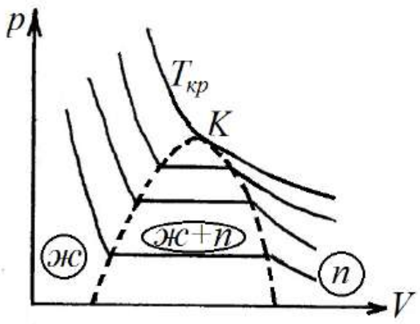
§14. Равновесие жидкости и насыщенного пара.

Сжимаем пар при постоянной температуре. Сначала он ведет себя как идеальный газ, т.е. по закону Бойля-Мариотта. Но после достижения давления, равного давлению насыщенного пара при данной *T*, избыток пара начинает конденсироваться, так что пар имеет фиксированное давление (и плотность) до того момента, пока весь не конденсируется в жидкость, а дальше давление жидкости резко растет при ее сжатии.



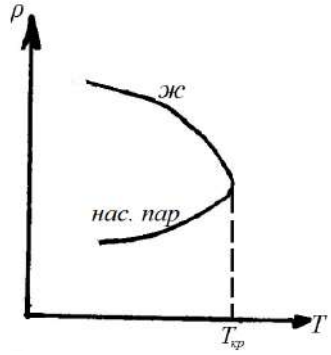
Существует формула, позволяющая вычислить отношение массы пара к массе жидкости: $\dfrac{m_п}{m_ж} = \dfrac{x}{y}$ (см. рисунок).

§15. Критическое состояние.



Построим семейство кривых $p(V)$ для данного количества вещества при разных температурах. Видно, что с ростом T длина горизонтального участка уменьшается и при некоторой $T_{кр}$ обращается в ноль. При $T > T_{кр}$ нет участка сосуществования двух фаз.

Для понимания причины построим графики зависимостей плотностей жидкости и пара от температуры. Плотность пара растет с ростом T, так как динамическое равновесие смещается в сторону большей плотности. Плотность жидкости падает, так как при нагревании жидкость расширяется. В конце концов, при $T = T_{кр}$ кривые сомкнутся. При $T > T_{кр}$ нет разницы между жидкостью и паром, поэтому понятие насыщенного пара теряет смысл.

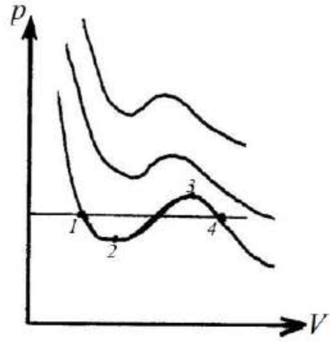


Из графиков можно сделать важный вывод: при $T > T_{кр}$ вещество нельзя ожижить сжатием (уменьшением объема). Паром часто называют то, что можно ожижить при данной температуре, а газом – то, что нельзя.

§16. Пересыщенный пар и перегретая жидкость.

Реальные газы описываются уравнением Ван-дер-Ваальса:

$$(p + \frac{a}{V_M^2})(V_M - b) = RT$$



Нарисуем график этой зависимости:

Участок 2-3 неустойчив, т.к. при росте V должно расти p. Участки 1-2 и 3-4 метастабильны: 1-2 – перегретая жидкость, 3-4 – пересыщенный пар.

Для перехода пересыщенного пара в жидкость нужны центры конденсации. Ведь нужно чтобы значительное число молекул сблизилось до расстояний, характерных для жидкости. Это маловероятно. Внесение пылинок или заряженных частиц (ионов) делает это реальным. То же можно сказать о перегретой жидкости и кипении.

§17. Кипение.

Кипение – это процесс парообразования во всем объеме жидкости. Оно происходит, когда давление насыщенного пара равно внешнему.

Рассмотрим процесс кипения подробнее. В начале вода насыщена воздухом и имеет комнатную температуру. При нагревании воды растворенный в ней газ выделяется на дне и стенках сосуда, образуя воздушные пузырьки. Они начинают появляться задолго до кипения. В эти пузырьки испаряется вода, так что они содержат и воздух, и насыщенный пар. При не очень высоких температурах, пока давление насыщенного пара мало, пузырек удерживается на стенке за счет сил сцепления. При такой температуре, при которой давление насыщенного пара равно внешнему, пар начинает раздувать пузырек. Достигнув определенных размеров, он отрывается от стенки за счет силы Архимеда, поднимается к поверхности воды и лопается. При этом пар покидает жидкость.

Если вода прогрета недостаточно, то пузырек, поднимаясь в холодные слои, резко уменьшается в размере (схлопывается) за счет конденсирования пара, т.к. там давление насыщенного пара меньше внешнего. При схлопывании пузырьков в жидкости распространяются ударные волны, сопровождаемые слышимым шумом. Возникающие при этом колебания воды приводят к появлению во всем объеме воды огромного количества мелких пузырьков воздуха, внутрь которых также начинает испаряться вода. При этом происходит интенсивное перемешивание воды, температура выравнивается, схлопывание пузырьков и вызываемый им шум прекращаются.

Далее необходимость в растворенном воздухе исчезает, любая образовавшаяся полость резко увеличивается в размере за счет испарения внутрь, выталкивается на поверхность и выбрасывает содержащийся в ней пар. Чем интенсивнее нагрев, тем больше таких пузырей, тем больше поглощение тепла на парообразование. Все поступающее тепло идет на парообразование, поэтому температура остается постоянной, пока не выкипит вся жидкость.

Отметим, что кипяченая вода уже не содержит растворенного воздуха, поэтому пузырьки на стенках не образуются, начало кипения затрудняется и смещается к более высоким температурам, т.е. происходит перегрев жидкости. Правда, после начала кипения температура жидкости снижается до обычной температуры кипения.

Из сказанного ясно, что температура кипения зависит от внешнего давления. Поэтому в горах, где атмосферное давление намного меньше, кипение происходит при более низких, чем на уровне моря, температурах. Например, на высоте 5 километров температура кипения воды около 80 градусов. Поэтому сварить обед там, если и удастся, то на это потребуется намного больше времени.

С другой стороны, на этом принципе построена скороварка. Это кастрюля с герметической крышкой. Там нагрев происходит не при постоянном давлении, как в обычной кастрюле, а при постоянном объеме. Давление воздуха в скороварке при повышении температуры растет, поэтому кипение происходит при более высоком «внешнем» давлении, т.е. при более высокой температуре (около 120 градусов), что позволяет быстрее приготовить обед.

§18. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса.

Две любые фазы находятся в равновесии при некотором давлении, зависящем от температуры. Общий вид этой зависимости описывается уравнением Клапейрона-Клаузиуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V_2 - V_1)},$$

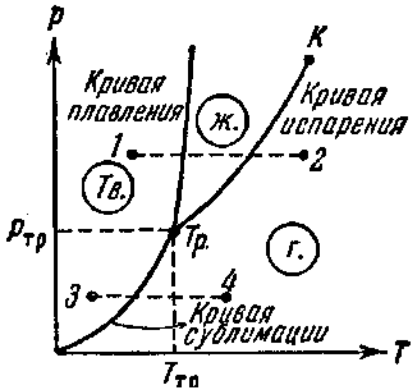
где q_{12} - удельная (на 1 кг) теплота, поглощаемая при переходе 1-2 при температуре T; V_1, V_2 - удельные объемы первой и второй фаз.

Таким образом, знак dp/dT определяется тем, какое изменение объема – возрастание или убывание – происходит при фазовом переходе, сопровождаемом поглощением тепла.

Для воды: теплота поглощается при переходе из льда в воду. Тогда $V_1 > V_2$, т.е. $dp/dT < 0$.

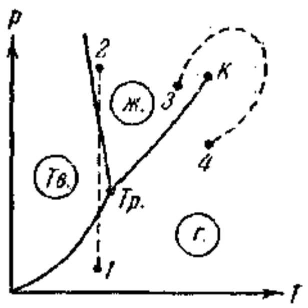
При испарении и сублимации объем растет всегда, поэтому $dp/dT > 0$. При плавлении в большинстве случаев объем растет, поэтому $dp/dT > 0$. Но есть исключения, например вода, для которой $dp/dT < 0$. Сильно сжимая лед, можно расплавить его при температуре ниже нуля. Именно это происходит при катании на коньках. Под коньком давление очень большое, лед плавится, возникающая вода дает смазку, способствующую скольжению.

<u>§19. Тройная точка. Диаграмма состояния</u>

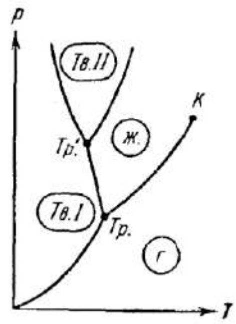


Изобразим на одном графике все кривые равновесия фаз. $p_{тр}$ и $T_{тр}$ - единственные значения, при которых в равновесии находятся все три фазы. Поэтому эта точка называется тройной. Она лежит на пересечении двух линий равновесия двух фаз.

По графику можно определить характер перехода из одной его точки в другую. 1-2 – твердое - жидкость – газ, 3-4 – твердое – газ (минуя жидкость).



На участках сублимации и испарения $dp/dT > 0$ всегда. Участок плавления может иметь и $dp/dT < 0$ (вода), как показано на рисунке слева.



Если несколько кристаллических модификаций, то может быть и так, как показано на рисунке справа.

Этот график называется диаграммой состояния. У большинства веществ тройная точка значительно ниже $p_{атм}$, поэтому переход из твердого состояния в газ идет через жидкость. Например, у воды $p_{тр} = 4{,}6$ мм рт.ст., $t_{тр} = 0{,}0075°C$. Но для углекислоты (сухой лед) $p_{тр} = 5{,}1$ атм, $t_{тр} = -57°C$, т.е. при $p_{атм}$ только твердое или газ. Температура сублимации при $p_{атм}$ равна $t_c = -78°C$.

В обход точки K (из 3 в 4) имеем непрерывный переход жидкость-газ через последовательность однофазных состояний. Непрерывный переход жидкость-газ возможен, т.к. строение жидкости и газа в принципе одинаково. Различия количественные, а не качественные. Упорядочение отсутствует. Из твердого в жидкость или в газ непрерывный переход без пересечения кривой равновесия невозможен, т.к. кристаллическая решетка или есть, или нет. Поэтому кривые плавления и сублимации конца не имеют.

ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

Это область физики, изучающая процессы, происходящие при нарушении равновесия.

§1. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

В термодинамически неравновесных системах возникают особые необратимые процессы, называемые явлениями переноса, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса.

Явление, обусловленные переносом энергии, называется теплопроводностью.

Явление, обусловленное переносом массы, называется диффузией.

Явление, обусловленное переносом импульса, называется внутренним трением (вязкостью).

Сначала запишем эмпирические уравнения для любых сред, а потом выведем подробнее для газов из МКТ.

Для простоты ограничимся одномерными явлениями переноса. Систему отсчёта выберем так, чтобы ось z была ориентирована в направлении переноса.

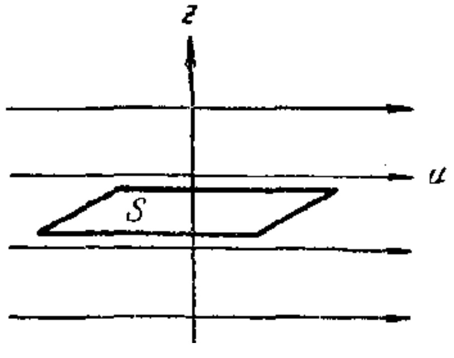
1) Внутреннее трение (вязкость).

Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее – увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется закону Ньютона:

$$F_{тр} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S$$

где η - динамическая вязкость (вязкость), du/dz - градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении z, перпендикулярном направлению движения слоёв; S – площадь, на которую действует сила $F_{тр}$.



Взаимодействие двух слоёв согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передаётся импульс, по модулю равный действующей силе. Теперь выражение можно переписать так:

$$K = -\eta \frac{du}{dz} S$$

где K - импульс, передаваемый за 1 секунду в положительном направлении оси z через площадку S, перпендикулярную оси z. Знак минус указывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости.

2) Теплопроводность.

Если температура, т.е. средняя кинетическая энергия молекул, зависит от координаты z, то с течением времени, вследствие постоянных столкновений молекул, происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т.е., иными словами, процесс выравнивания температур.

Возникает поток тепла q, который подчиняется закону Фурье:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} S$$

где S - площадка, перпендикулярная оси z, κ - коэффициент теплопроводности; dT/dz - градиент температуры. Знак минус показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры.

3) Диффузия.

Пусть в единице объема газа содержится n_1 молекул одного вида и n_2 - второго, полная концентрация $n = n_1 + n_2$. Чтобы не было ветра, надо чтобы $\frac{dn}{dz} = 0$, т.е. $\frac{dn_1}{dz} = -\frac{dn_2}{dz}$. Хотя ветра нет, концентрации постепенно выравниваются. Этот процесс называется диффузией. Она существует и в жидкостях, и даже в твердых телах.

Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникали противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах распространяется очень медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега, и, сталкиваясь с другими молекулами, в основном «стоят» на месте.

Возникают потоки числа частиц разных газов через площадку S, описываемые законом Фика:

$$N_i = -D \frac{dn_i}{dz} S$$

Умножив на массу молекулы, получим для потока массы этого вида молекул

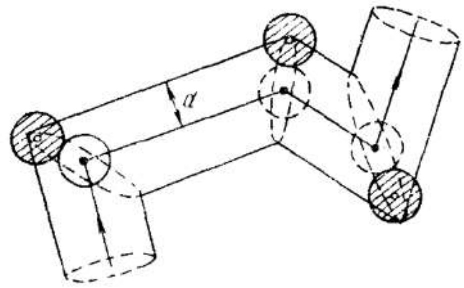
$$M_i = -D \frac{d\rho_i}{dz} S,$$

где ρ_i - парциальная плотность.

§2. Средняя длина свободного пробега в газе

Будем рассматривать молекулы как шарики с эффективным диаметром d. На самом деле, это не так, поскольку d зависит от скорости и т.д. Будем также считать, что длина свободного пробега $\lambda >> d$ (это будет показано позже).

За 1 секунду молекула проходит путь $\langle v \rangle$. За это время она столкнется со всеми молекулами, центры которых попадают внутрь коленчатого цилиндра длины $\langle v \rangle$ и радиуса d. $V_{цил} = \pi d^2 \langle v \rangle$.

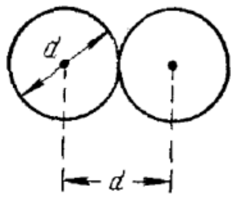


Число столкновений равно $N = nV_{цил} = \pi d^2 \langle v \rangle n$.

Но надо учесть, что молекулы не стоят на месте, а движутся, т.е. $\langle v \rangle$- это средняя скорость движения молекул относительно друг друга, а не относительно стенок сосуда. $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, $v_{отн}^2 = v_2^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2 + v_1^2$, $\langle v_{отн}^2 \rangle = 2\langle v^2 \rangle$, поскольку $\langle \vec{v}_1\vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1 \rangle \langle \vec{v}_2 \rangle = 0$, так как $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - независимые величины. Итак, $v_{отн.ср.кв} = \sqrt{2\langle v^2 \rangle} = v_{ср.кв.}\sqrt{2}$.

Средняя квадратичная скорость пропорциональна среднему модулю скорости, поэтому $\langle v_{отн} \rangle = \langle v \rangle \sqrt{2}$, и окончательно $N = \sqrt{2}\pi d^2 \langle v \rangle n$.

Средняя длина свободного пробега есть средняя скорость, деленная на число столкновений $\lambda = \dfrac{\langle v \rangle}{N} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$, где $\sigma = \pi d^2$ - эффективное сечение молекулы, т.е. площадь, в которую не может проникнуть центр другой молекулы (см. рисунок).



Оценим λ и N для газа:

Пусть $d = 2\,\text{Å} = 2 \cdot 10^{-10}\,м$

$$n_{норм} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22.4 \cdot 10^{-3}} \approx 3 \cdot 10^{25}\,м^{-3}$$

$\lambda \approx 2 \cdot 10^{-7}\,м >> d$, что подтверждает правильность исходного предположения.

$$N = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} \approx \frac{500}{2 \cdot 10^{-7}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{9}\,с^{-1}$$

В таблице приведены значения λ при нормальных условиях и эффективные диаметры молекул для некоторых газов.

Газ	λ, м при 0° С и 760 мм рт. ст.	d, Å	Газ	λ, м при 0° С и 760 мм рт. ст.	d, Å
H_2	$1{,}10 \cdot 10^{-7}$	2,75	N_2	$0{,}59 \cdot 10^{-7}$	3,75
He	$1{,}75 \cdot 10^{-7}$	2,18	Воздух	$0{,}60 \cdot 10^{-7}$	3,74
O_2	$0{,}63 \cdot 10^{-7}$	3,64	CO_2	$0{,}39 \cdot 10^{-7}$	4,65

При $p \approx 10^{-3}$ мм.рт.ст. $\lambda \approx 10\ см$. Если сосуд имеет размеры в несколько сантиметров, то молекулы пролетают от стенки до стенки, не сталкиваясь.

§3. Вероятности различных длин свободного пробега

Вероятность dp соударения на пути ds прямо пропорциональна пути ds и не зависит от уже пройденного пути: $dp = \alpha \cdot ds$. Количество молекул, испытавших соударение на этом пути, равно $N \cdot dp = N \cdot \alpha \cdot ds$, где N - количество молекул, пока не испытавших соударений. Эта величина равна убыли N, т.е. $-dN$:

$$dN = -N \cdot \alpha \cdot ds \quad \Rightarrow \int\limits_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\int\limits_0^S \alpha \cdot ds \quad \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\alpha S \quad \Rightarrow N = N_0 e^{-\alpha S}$$

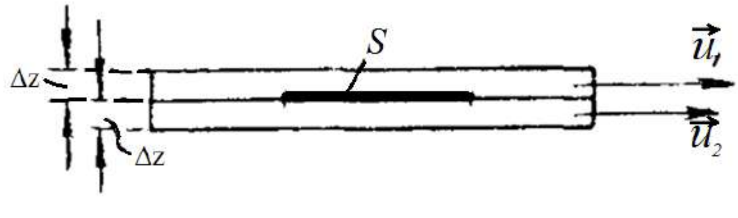
Чтобы вычислить α, найдем среднюю длину свободного пробега: $\lambda = \langle l \rangle$. Вероятность пролететь путь S без столкновений равна $p = \dfrac{N(S)}{N_0} = e^{-\alpha S}$. Чтобы длина пробега равнялась l, надо чтобы молекула пролетела длину l без столкновений и столкнулась на участке $l \div l + dl$. Эти два события независимы, поэтому вероятности надо перемножить: $dp_l = e^{-\alpha l} \cdot \alpha \cdot dl$.

$$\lambda = \langle l \rangle = \int\limits_0^\infty l \cdot dp_l = \alpha \int\limits_0^\infty e^{-\alpha l} l \cdot dl = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-y} \cdot y \cdot dy = \frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда следует $\alpha = \dfrac{1}{\lambda}$. Окончательно $N(S) = N_0 e^{-S/\lambda}$, т.е. $p = e^{-S/\lambda}$.

§4. Вязкость газов.

Чтобы понять происхождение силы внутреннего трения, рассмотрим два соприкасающихся слоя газа. Предположим, что слои двигаются со скоростями u_1 и u_2.



Каждая молекула участвует в двух движениях: хаотическом тепловом, со средней скоростью $\langle v \rangle$, и упорядоченном - со скоростью u, которая значительно меньше, чем $\langle v \rangle$.

Пусть в какой-то момент времени слои обладают импульсами K_1 и K_2. Эти импульсы не могут оставаться неизменными, так как вследствие теплового движения молекулы переходят из одного слоя в другой. Там молекула сталкивается с молекулами этого слоя, в результате чего она либо отдает избыток своего импульса другим молекулам (если она прилетела из слоя, движущегося с большей скоростью), либо увеличивает свой импульс за счет других молекул (если она прилетела из слоя, движущегося с меньшей скоростью). В итоге импульс более быстро движущегося слоя убывает, а более медленно движущегося – растет.

Найдем поток импульса через площадку. Число молекул, проходящих за время Δt через площадку S, равно

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t$$

Коэффициент 1/6 появляется из-за того, что вдоль каждой оси (x,y,z) летит 1/3 всех молекул, из них в каждую сторону 1/2. Мало существенным влиянием упорядоченного движения на величину скорости молекул можно пренебречь.

Из формулы для ΔN видно, что в обе стороны проходит одинаковое число молекул. Из первой области во вторую переносится горизонтальная компонента импульса, равная $\Delta K_1 = \Delta N \cdot m u_1$, а из второй в первую $\Delta K_2 = \Delta N \cdot m u_2$.

Поток импульса равен $K = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta K_1 - \Delta K_2}{\Delta t} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m (u_2 - u_1) S$.

Можно сказать, что движение происходит так, как если бы на первый слой действовала сила $F_1 = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m (u_2 - u_1) S$, а на второй $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Однако скорость не меняется скачком с u_1 на u_2, а является функцией координаты z. Поэтому $u_2 - u_1 = u(z-\lambda) - u(z+\lambda) \approx -\frac{\partial U}{\partial z} \cdot 2\lambda$. Тогда $K = -\frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda \frac{\partial U}{\partial z} S$, где ρ - плотность.

Таким образом, $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda$ - для газа.

§5. Теплопроводность газов.

Как и раньше, за время Δt через площадку S проходит $\Delta N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t$ молекул. Каждая молекула переносит среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle = \frac{ikT}{2}$. Тогда количество теплоты, проходящее в положительном направлении оси z равно $Q = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t \frac{ik}{2}(T_1 - T_2)$, где T_1 и T_2 - температуры на расстояниях λ от площадки: $T_1 - T_2 = T(z-\lambda) - T(z+\lambda) = \frac{dT}{dz}(-2\lambda)$, так как $\Delta z = (z-\lambda)-(z+\lambda) = -2\lambda$.

Поток тепла, т.е. Q за 1 секунду, равен $q = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle S \frac{i}{2} k \frac{dT}{dz} \lambda$. Умножим и разделим на $M = mN_A$: $q = -\frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_V \frac{dT}{dz} S$, где $c_V = \frac{1}{M}\frac{i}{2}R$ - удельная теплоемкость.

Итак, коэффициент теплопроводности газа равен $\kappa = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_V$.

§6. Диффузия в газах.

Для простоты будем считать, что компоненты газовой смеси МАЛО различаются по массе m и эффективному сечению σ. Длины свободного пробега примерно одинаковы и описываются формулой $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$.

Число молекул газа №1, проходящих через площадку S за время Δt, равно

$$\Delta N_1 = \frac{1}{6}(n_1 - n_2)\langle v \rangle S \Delta t = \frac{1}{6}(n(z-\lambda) - n(z+\lambda))\langle v \rangle S \Delta t$$

Поток числа частиц 1-го газа равен $N_1 = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \frac{dn_1}{dz} S$, откуда $D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda$.

Для газа №2 всё аналогично, и D примерно такой же (если газы не сильно различаются). Если же различие велико, то $D_1 = D_2 = \frac{n_1 \langle v_1 \rangle \lambda_1 + n_2 \langle v_2 \rangle \lambda_2}{3(n_1 + n_2)}$. При выводе этих формул учитывалось отсутствие ветра, т.е. полная концентрация не зависит от z: $\frac{dn_1}{dz} = -\frac{dn_2}{dz}$. Отсюда следует, что коэффициенты диффузии должны быть одинаковы.

Из сопоставления формул, описывающих явления переноса, следует, что их закономерности сходны между собой. Эти зависимости были установлены задолго до выводов молекулярно-кинетической теории. Из полученных формул вытекают простые зависимости между η, κ, D: $\eta = \rho D$, $\kappa = c_V \eta = \rho c_V D$.

В общем случае произвольной геометрии во всех трех законах вместо производной по координате (как в одномерном случае) должен стоять градиент соответствующей величины.

Формулы для коэффициентов, полученные на основе МКТ, являются приближенными. Точные выражения могут быть получены путем решения так называемого кинетического уравнения. Оно имеет весьма сложный вид и не входит в рамки курса общей физики.

ТВЕРДЫЕ ТЕЛА.

Твердые тела бывают разных типов: монокристаллические, поликристаллические, аморфные, органические (дерево, кость, кожа, пластик).

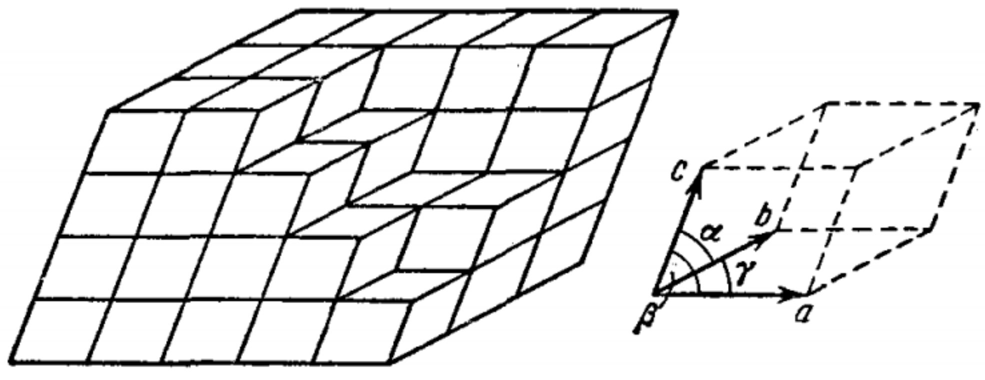
Аморфные – застывшие (переохлажденные) жидкости (стекло, янтарь, парафин, вар – застывшая смола).

Различить аморфные и кристаллические можно путем нагревания (например, лед и стекло). Лед при температуре плавления начинает таять, т.е. резко переходить из твердого состояния в жидкое. Пока все не растает, температура остается неизменной (при нормальном атмосферном давлении 0ºC). При нагревании стекла нет резкого перехода твердое тело – жидкость, оно постепенно размягчается, температура растет равномерно. Понятие температура плавления в случае аморфных тел не существует. Аморфные тела изотропны, т.е. их свойства одинаковы во всех направлениях. Поликристаллические тоже изотропны, а монокристаллы анизотропны.

§1. Кристаллические тела.

Причина анизотропии - периодическое расположение узлов. Обычно анизотропия не проявляется, так как большинство кристаллических тел – поликристаллы, т.е. конгломерат сросшихся, беспорядочно ориентированных кристаллов. Но существуют и монокристаллы, например, специально выращенные. Примером встречающихся в природе монокристаллов являются драгоценные камни: бриллианты, изумруды и т.д.

Упорядоченность атомов кристалла проявляется в том, что атомы или молекулы располагаются в узлах периодической, геометрически правильной решетки. Весь кристалл может быть получен путем многократного повторения в трех направлениях одного и того же структурного элемента, называемого элементарной ячейкой кристалла.



Длины ребер элементарной ячейки a, b, c называются периодами кристалла. Элементарная ячейка – это призма, характеризующаяся 6 величинами: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. По форме этой ячейки кристаллы делятся на 7 кристаллографических систем – сингоний:

1) триклинная, $a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma$;

2) моноклинная – прямая призма, $a \neq b \neq c, \alpha = \gamma = 90°, \beta \neq 90°$;

3) ромбическая – прямоугольный параллелепипед, , $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$;

4) тетрагональная, $a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90°$;

5) ромбоэдрическая (тригональная), $a = b = c, \alpha = \beta = \gamma \neq 90°$;

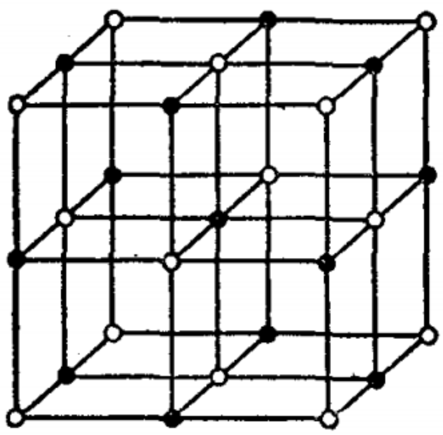
6) гексагональная, $a = b \neq c, \alpha = \beta = 90°, \gamma = 120°$;

7) кубическая, $a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90°$.

§2. Физические типы кристаллических решеток.

В зависимости от природы частиц в узлах и характера сил взаимодействия различают 4 типа решеток: ионные, атомные, металлические, молекулярные.

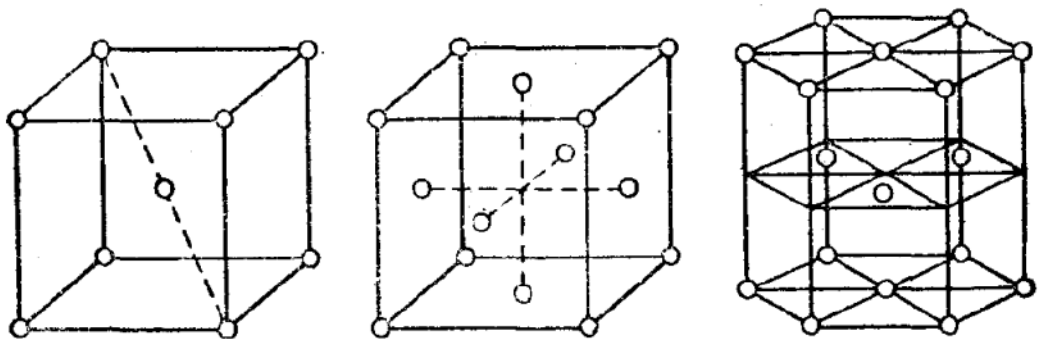
1) Ионные – в узлах ионы разных знаков. Взаимодействие, в основном, кулоновское, связь называется гетерополярной (разных знаков) или ионной. Пример: поваренная соль (хлорид натрия) - в газообразном состоянии молекула NaCl, кристалл состоит из ионов – его можно считать гигантской молекулой. На рисунке темные кружочки – ионы Na, светлые – ионы Cl. Сингония – кубическая.



2) Атомные - в узлах находятся нейтральные атомы. Связь – гомеополярная, или ковалентная. Силы тоже электрические, но не кулоновские. Объяснение только на языке квантовой физики. Гомеополярная связь осуществляется парами электронов, в ней принимают участие по одному электрону из каждого узла. Взаимодействие направленное. При гетерополярной связи каждый ион воздействует на все ионы, достаточно близкие к нему. При гомеополярной связи атом взаимодействует только с тем соседом, с которым у

него общая пара электронов. Эта связь осуществляется только валентными электронами, т.е. наименее связанными с ядром. Поэтому число связей равно валентности атома. Примеры: алмаз и графит – кристаллы углерода (С), но с разной формой элементарной ячейки; германий, кремний - валентность равна 4.

3) Металлические – во всех узлах положительные ионы, между ними беспорядочные электроны (подобно газу). Они и играют роль «цемента», удерживающего ионы от разлета, благодаря кулоновским силам. С другой стороны, ионы удерживают электроны внутри кристалла. Большинство металлов имеют решетки трех типов: а) кубическая объемноцентрированная (рис.а - узлы в вершинах куба и в его центре), б) кубическая гранецентрированная (рис.б - узлы в вершинах куба и в центрах всех граней), в) *полная* гексагональная, это гексагональная с $c/a=\sqrt{8/3}$ (рис.в).

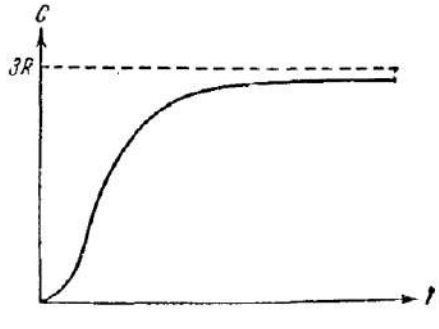


а) б) в)

4) Молекулярные – в узлах определенным образом сориентированные молекулы. Силы связи имеют ту же природу, что и силы, приводящие к отклонению газа от идеального, поэтому они называются ван-дер-ваальсовскими. Примеры: H_2, N_2, CO_2, H_2O. Лёд и сухой лёд – молекулярные кристаллы.

§3. Теплоемкость кристаллов.

Каждая частица в кристалле (не считая молекулярных, в которых есть вращательные степени свободы) имеет 3 колебательных степени свободы. На каждую из них приходится энергия $2\cdot\frac{kT}{2}=kT$. На каждый атом ионной, атомной или металлической решетки приходится средняя энергия $3kT$. Энергия моля $U_M = N_A \cdot 3kT = 3RT$. Это верно только для химически простых веществ. В случае NaCl 1 моль дает $2N_A$ частиц, так как в кристалле молекула распадается на атомы. Для простых веществ или для металлической решетки имеем $C=3R$ - это подтверждает установленный опытным



путем закон Дюлонга и Пти (1819 г.). Но у алмаза при комнатной температуре $C = 0.7R$, а $C = 3R$ достигается только при $1000°C$. Вблизи абсолютного нуля C пропорциональна T^3 и только при достаточно высоких температурах, разных для разных веществ, кривая выходит на насыщение (см. рисунок).

Строгая теория теплоемкости твердых тел, созданная Эйнштейном и Дебаем, учитывает квантование энергии колебательного движения. Она хорошо согласуется с опытом.

ЖИДКОЕ СОСТОЯНИЕ

§1. Строение жидкостей

Жидкости занимают промежуточное положение между газом и твердым телом и сочетают в себе свойства и того, и другого. Как твердые тела, она занимает не весь объем, а как газ, принимает форму заполняемого сосуда.

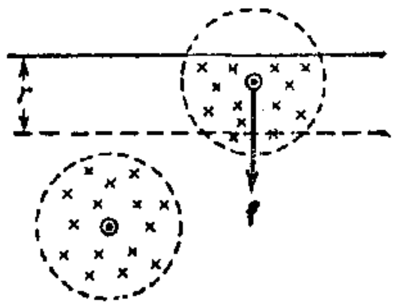
В кристаллах имеет место полная упорядоченность, в газах – полный хаос. В жидкостях имеется так называемый «ближний порядок». Это означает, что по отношению к любой частице расположение ближайших к ней соседей является упорядоченным. Однако по мере удаления от данной частицы порядок в расположении частиц довольно быстро полностью исчезает. В кристаллах имеет место «дальний порядок» – упорядоченность наблюдается в пределах значительного объема.

Жидкости изотропны, т.е. все направления равноправны. Но существуют так называемые «жидкие кристаллы» - состоящие из длинных молекул, которые стремятся сориентироваться одинаково, т.е. встать вдоль одной оси, что приводит к анизотропии оптических и других свойств. Выделяются три типа жидких кристаллов: а) нематические – в них нет упорядоченности в расположении центров тяжести вдоль оси расположения молекул, их молекулы могут скользить в направлении своих длинных осей; б) смектические – в них существует периодичность вдоль осей молекул, они имеют слоистую структуру; в) холестерические (образуются, в частности, соединениями холестерина) – вдоль оси выстраиваются спиральные структуры.

Из-за промежуточности свойств жидкости ее описание затруднено, поэтому ее теория менее развита. Значительные заслуги принадлежат нашему земляку Якову Ильичу Френкелю, который всю жизнь проработал в Ленинградском физико-техническом институте. Согласно ему, каждая молекула некоторое время колеблется около положения равновесия. В какой-то момент она скачком перескакивает в новое положение равновесия, отстоящее от предыдущего не больше, чем на размер молекулы. Так молекулы странствуют внутри жидкости, ведя кочевой образ жизни, при котором кратковременные переезды сменяются долгими периодами осёдлой жизни. При повышении температуры длительность осёдлой жизни снижается, что ведет к повышению подвижности и снижению вязкости. Всё вышесказанное относится и к аморфным телам.

§2. Поверхностное натяжение

Молекулы жидкости расположены так близко друг к другу, что силы притяжения между ними значительны. Поскольку они быстро убывают с расстоянием, то, начиная с некоторого расстояния ими можно пренебречь. Это расстояние r называется радиусом молекулярного взаимодействия. Оно равно нескольким эффективным диаметрам молекулы.



Рассмотрим поверхность жидкости. Над ней находится пар. Если расстояние от поверхности до молекулы жидкости больше r, то равнодействующая сила равна нулю. Если оно меньше r, то есть сила $\vec{F}$, направленная внутрь жидкости. Чем ближе молекула к поверхности, тем больше величина силы. Переход молекулы из глубины на поверхность связан с совершением работы против этих сил. Эта работа совершается молекулой за счет ее кинетической энергии и идет на увеличение потенциальной энергии.

Таким образом, поверхностный слой обладает дополнительной потенциальной энергией, входящей в состав внутренней энергии. Поскольку положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии, то жидкость стремится принять форму с минимальной площадью поверхности, т.е. шар. Это происходит в состоянии невесомости. Если же есть силы тяжести (точнее, вес), то минимизируется суммарная энергия – в поле тяжести и поверхностная. При увеличении размеров тела объем пропорционален кубу «размера», а площадь поверхности – квадрату. Поэтому с ростом размеров энергия в поле тяжести растет быстрее. У малых капель большая роль поверхностной энергии, поэтому они близки по форме к шару. Большие сплющиваются под действием веса, хотя при этом поверхностная энергия растет. Большие массы принимают форму сосуда с горизонтальной свободной поверхностью.

Жидкость стремится сократить свою поверхность, как если бы она была заключена в упругую растянутую пленку. Конечно, никакой пленки на самом деле нет. Поверхностный слой состоит из тех же молекул, что и вся жидкость, и взаимодействие между молекулами имеет тот же характер, что и внутри жидкости. Дело лишь в том, что молекулы в поверхностном слое обладают дополнительной энергией по сравнению с молекулами внутри жидкости.

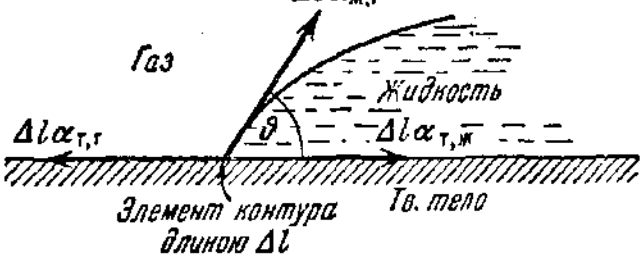
Любой участок поверхности действует на граничащие с ним участки силами, распределенными по всему контуру. Они называются силами поверхностного натяжения. Они направлены по касательной к поверхности и перпендикулярны участку контура, на который действуют. Сила поверхностного натяжения, приходящаяся на единицу длины (1 м) называется коэффициентом поверхностного натяжения жидкости α. Размерность α - Н/м. Примеси сильно влияют на величину α. У воды мыло снижает α, а поваренная соль увеличивает. С ростом температуры различие в плотностях пара и воды уменьшается, поэтому α снижается, и при $t = t_{кр}$ $\alpha = 0$.

§3.Давление под изогнутой поверхностью жидкости.

Рассечем мысленно сферическую каплю на два полушария. Они притягиваются друг к другу с силой $F = l\alpha = 2\pi R\alpha$. Эта сила прижимает полушария друг к другу по площади $S = \pi R^2$, т.е. создает дополнительное давление $\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\alpha}{R}$. В общем случае несферической поверхности имеем $\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ - формула Лапласа, где R_1 и R_2 - радиусы кривизны для любой пары взаимно перпендикулярных сечений. R_1 и R_2 - алгебраические величины, они могут иметь разные знаки: если поверхность выпуклая, то плюс, если вогнутая, то минус.

§4. Явления на границе жидкости и твердого тела.

Сказанное ранее о взаимном притяжении молекул относится и к твердым телам, т.е. они тоже обладают поверхностным натяжением. При рассмотрении явлений на границе двух сред надо учитывать, что поверхностная энергия зависит не только от самого вещества, но и от того, с каким оно граничит. Только если одно вещество газообразно, можно пренебречь его поверхностной энергией и говорить о поверхностной энергии данной жидкости или твердого тела. Если имеется три тела, то система примет конфигурацию, соответствующую минимуму суммарной энергии (поверхностной, в поле сил тяжести и др.). В частности, контур, по которому граничат все три вещества, располагается на поверхности твердого тела так, чтобы сумма проекций сил поверхностного натяжения, приложенных к элементам контура, на направление, вдоль которого элемент контура может перемещаться (т.е. на направление касательной к поверхности твердого тела), была равна нулю: $\Delta l \cdot \alpha_{Т,Г} = \Delta l \cdot \alpha_{Ж,Г} \cos\vartheta + \Delta l \cdot \alpha_{Т,Ж}$, откуда следует



$$\cos\vartheta = \frac{\alpha_{Т,Г} - \alpha_{Т,Ж}}{\alpha_{Ж,Г}}.$$

ϑ называется краевым углом. Поскольку $|\cos\vartheta| \le 1$, то это условие может быть выполнено, только если $\dfrac{|\alpha_{Т,Г} - \alpha_{Т,Ж}|}{\alpha_{Ж,Г}} \le 1$. (*)

Если условие (*) не выполняется, то равновесие установиться не может. Это имеет место в двух случаях:

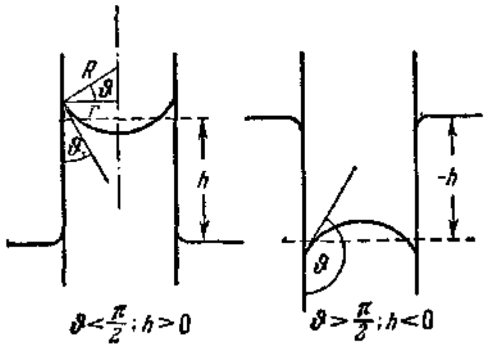
1) $\alpha_{Т,Г} > \alpha_{Т,Ж} + \alpha_{Ж,Г}$, жидкость неограниченно растечется по поверхности твердого тела – это полное смачивание, $\vartheta = 0$;

2), $\alpha_{Т,Ж} > \alpha_{Т,Г} + \alpha_{Ж,Г}$, как бы ни был ϑ близок к π, условие равновесия выполнено не будет. В этом случае поверхность, по которой жидкость граничит с твердым телом, стягивается в точку – это полное несмачивание, $\vartheta = \pi$.

Если же условие равновесия (*) выполнено, то ϑ может быть острым (частичное смачивание) или тупым (частичное несмачивание).

§5.Капиллярные явления.

Существование краевого угла приводит к тому, что у стенок сосуда поверхность жидкости искривляется. При смачивании она вогнутая, при несмачивании – выпуклая. Эти поверхности называются менисками. Под поверхностью жидкости в узкой трубке (капилляре) давление отличается от давления под плоской поверхностью в широком сосуде на $\Delta p = \dfrac{2\alpha}{R}$. Из условия равенства давлений на уровне ниже которого жидкость однородна, получим, что в случае смачивания уровень жидкости в капилляре выше, чем в широком сосуде, а при несмачивании – наоборот.



$\rho g h = \dfrac{2\alpha}{R}$ (R- радиус кривизны мениска).

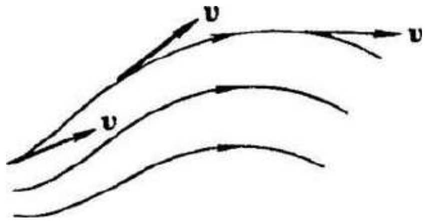
Из рисунка видно, что $r = R\cos\vartheta$ (r- радиус капилляра), т.е. $h = \dfrac{2\alpha}{\rho g r}\cos\vartheta$. При смачивании $\vartheta < \pi/2$ и $h > 0$, при несмачивании $\vartheta > \pi/2$ и $h < 0$.

Отметим, что в растениях жидкость поднимается не за счет капиллярности, а за счет явления осмоса (мембран, пропускающих только в одну сторону).

ГИДРОДИНАМИКА

§ 1. Линии и трубки тока. Неразрывность струи.

Состояние движения жидкости можно определить, указав для каждой точки пространства вектор скорости как функцию времени. Совокупность векторов $\vec{v}$, данных для всех точек пространства, образует поле вектора скорости, которое можно изобразить следующим образом. Проведем в движущейся жидкости линии так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала по направлению с вектором $\vec{v}$. Эти линии называются линиями тока.

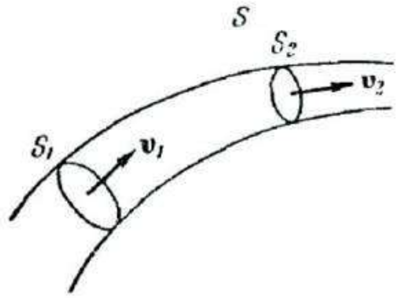


Условимся проводить линии тока так, чтобы густота их была пропорциональна величине скорости в данном месте. Тогда по картине линий тока можно будет судить не только о направлении, но и о величине вектора $\vec{v}$ в разных точках пространства: там, где скорость больше, линии тока будут гуще и, наоборот, где скорость меньше, линии тока будут реже.

Поскольку величина и направление вектора $\vec{v}$ в каждой точке могут меняться со временем, то и картина линий тока может непрерывно меняться. Если $\vec{v}$ в каждой точке пространства остается постоянным, то течение называется установившимся, или стационарным. Картина линий тока при стационарном течении остается неизменной, и линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется трубкой тока. Вектор $\vec{v}$, будучи в каждой точке касательным к линии тока, будет касательным и к поверхности трубки тока; следовательно, частицы жидкости при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

Возьмем перпендикулярное к направлению скорости сечение трубки тока S. Предположим, что скорость движения частиц жидкости одинакова во всех точках этого сечения. За малое время Δt через сечение S пройдут все частицы, расстояние которых от S в начальный момент не превышает значения $v\Delta t$,



Следовательно, за время Δt через сечение S пройдет объем жидкости, равный $Sv\Delta t$, а за единицу времени через сечение S пройдет объем жидкости, равный Sv. Возьмем трубку тока, настолько тонкую, что в каждом ее сечении скорость можно считать одной и той же. Если жидкость несжимаема (т. е. плотность ее всюду одинакова и изменяться не может), то количество жидкости между сечениями S_1 и S_2 (см. рисунок) будет оставаться неизменным.

Отсюда следует, что объемы жидкости, протекающие за единицу времени через сечения S_1 и S_2, должны быть одинаковы: $S_1 v_1 = S_2 v_2$ (через боковую поверхность трубки тока частицы жидкости не проходят).

Приведенное выше рассуждение применимо к любой паре сечений S_1 и S_2. Следовательно, для несжимаемой жидкости величина Sv в любом сечении одной и той же трубки тока должна быть одинакова: $Sv = const$.

Полученный результат называется теоремой о неразрывности струи.

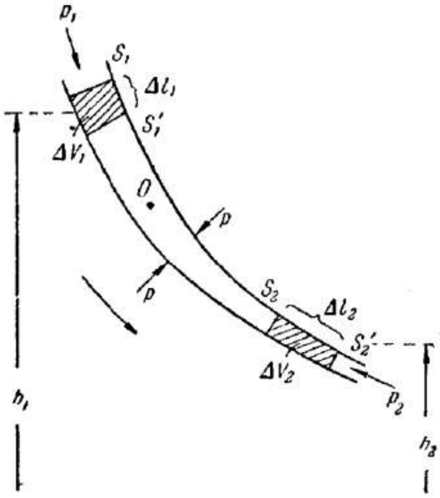
Из нее следует, что при переменном сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением. Это ускорение может быть обусловлено только непостоянством давления вдоль оси трубки — в местах, где скорость меньше, давление должно быть больше, и наоборот.

Теорема о неразрывности струи применима к реальным жидкостям и даже к газам в том случае, когда сжимаемостью их можно пренебречь. Соответствующий расчет показывает, что при движении жидкостей и газов со скоростями, меньшими скорости звука, их с достаточной степенью точности можно считать несжимаемыми.

§2. Уравнение Бернулли

Рассматривая движение жидкостей, во многих случаях можно считать, что перемещение одних частей жидкости относительно других не связано с возникновением сил трения. Жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) полностью отсутствует, называется идеальной.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока малого сечения. Рассмотрим объем жидкости, ограниченный стенками трубки тока и и перпендикулярными к линиям тока сечениями S_1 и S_2. За время Δt этот объем переместится вдоль трубки тока, причем сечение S_1 переместится в положение S_1', пройдя путь Δl_1, а сечение S_2 - в положение S_2', пройдя путь Δl_2. В силу неразрывности струи заштрихованные объемы будут иметь одинаковую величину: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.



Энергия каждой частицы жидкости складывается из ее кинетической энергии и потенциальной энергии в поле сил земного тяготения. Вследствие стационарности течения частица, находящаяся спустя время Δt в любой из точек незаштрихованной части рассматриваемого объема (см., например, точку О на рисунке), имеет такую же скорость (а следовательно, и кинетическую энергию), какую имела частица, находившаяся в той же точке в начальный момент времени. Поэтому приращение энергии ΔE всего рассматриваемого объема можно вычислить как разность энергий заштрихованных объемчиков ΔV_1 и ΔV_2.

Возьмем сечение трубки тока и отрезки Δl настолько малыми, чтобы всем точкам каждого из заштрихованных объемчиков можно было приписать одно и то же значение скорости v, давления p и высоты h. Тогда приращение энергии запишется следующим образом:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right),$$

где ρ - плотность жидкости.

В идеальной жидкости силы трения отсутствуют. Поэтому приращение энергии должно равняться работе, совершаемой над выделенным объемом силами давления. Силы давления на боковую поверхность перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц, к которым они приложены, вследствие чего работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил, приложенных к сечениям S_1 и S_2. Эта работа равна

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$$

Приравнивая A и ΔE, сокращая на ΔV и перенося члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \quad (*)$$

Сечения S_1 и S_2 были взяты совершенно произвольно. Поэтому можно утверждать, что в любом сечении трубки тока выражение $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p$ имеет одинаковое значение. В соответствии со сделанными нами при его выводе предположениями уравнение (*) становится вполне точным лишь при стремлении поперечного сечения S к нулю, т. е. при стягивании трубки тока в линию. Таким образом, величины p, v и h, фигурирующие в левой и правой частях уравнения (*), следует рассматривать как относящиеся к двум произвольным точкам <u>одной и той же</u> линии тока.

Полученный нами результат можно сформулировать следующим образом: в стационарно текущей идеальной жидкости <u>**вдоль любой линии тока**</u> выполняется условие

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$$

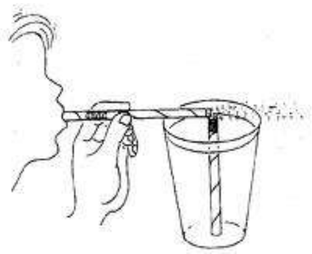
Это уравнение называется уравнением Бернулли. Несмотря на то, что это уравнение было получено нами для идеальной жидкости, оно достаточно хорошо выполняется для реальных жидкостей, внутреннее трение в которых не очень велико.

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из уравнения Бернулли.

Для горизонтальной ($h_1 = h_2$) линии тока условие (*) принимает вид

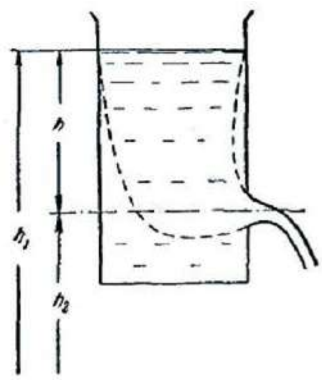
$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2,$$

т. е. давление меньше в тех точках, где скорость больше (качественно это уже было показано в предыдущем параграфе).



Этот факт положен в основу устройства пульверизатора (см. рисунок). Дуя в трубочку, мальчик придает воздуху скорость. Чем быстрее он движется, тем меньше давление. Атмосферное давление воздуха в комнате действует на воду в стакане, и вода поднимается вверх по соломинке, откуда и выдувается в виде мельчайших капелек.

Применим уравнение Бернулли к случаю истечения жидкости из маленького отверстия в широком открытом сосуде. Выделим в жидкости трубку тока, имеющую своим сечением с одной стороны открытую поверхность жидкости в сосуде, а с другой стороны – отверстие, через которое жидкость вытекает. Давления в обоих сечениях равны атмосферному и поэтому одинаковы. Кроме того, скорость перемещения открытой поверхности в широком сосуде можно положить равной нулю, С учетом всего сказанного, уравнение Бернулли применительно к данному случаю можно написать в виде



$$\rho g h_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2,$$

откуда получаем $v = \sqrt{2gh}$, где h – разность высот. Эта формула называется формулой Торричелли. Итак, скорость истечения жидкости из отверстия, расположенного на глубине h под открытой поверхностью, совпадает со скоростью, которую приобретает любое тело, падая с высоты h. Следует помнить, что этот результат получен в предположении, что жидкость идеальна. Для реальных жидкостей скорость истечения будет меньше, поскольку часть энергии будет переходить в тепло из-за внутреннего трения.

§3. Ламинарное и турбулентное течение

Можно выделить два вида течения жидкости (или газа). В одних случаях жидкость как бы разделяется на слои, которые скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Такое течение называется ламинарным (слоистым). Если в ламинарный поток ввести подкрашенную струйку, то она сохраняется, не размываясь, на всей длине потока, так как частицы жидкости в ламинарном потоке не переходят из одного слоя в другой. Ламинарное течение стационарно.

При увеличении скорости или поперечных размеров потока характер течения существенным образом изменяется. Возникает энергичное перемешивание жидкости. Такое течение называется турбулентным. При турбулентном течении скорость частиц в каждом данном месте все время изменяется беспорядочным образом — течение нестационарно. Если в турбулентный поток ввести окрашенную струйку, то уже на небольшом расстоянии от места ее введения окрашенная жидкость равномерно распределяется по всему сечению потока.

Английский ученый Рейнольдс установил, что характер течения зависит от значения безразмерной величины:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta},$$

где ρ — плотность жидкости (или газа), v — средняя (по сечению трубы) скорость потока, η — коэффициент вязкости жидкости, l — характерный для поперечного сечения размер, например, сторона квадрата при квадратном сечении, радиус или диаметр при круглом сечении и т. д.

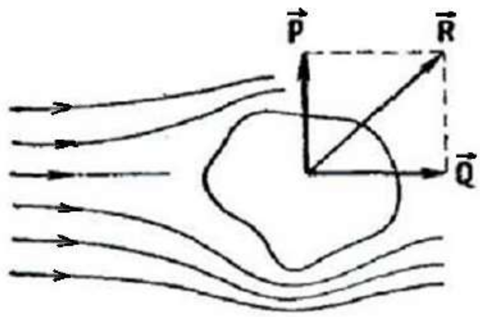
Величина Re называется числом Рейнольдса. При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение. Начиная с некоторого определенного значения Re, называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Если в качестве характерного размера для круглой трубы взять ее радиус, то критическое значение числа Рейнольдса оказывается равным примерно 1000.

Число Рейнольдса может служить критерием подобия для течения жидкостей в трубах, каналах и т.д. Характер течения различных жидкостей (или газов) в трубах разных сечений будет совершенно одинаков, если каждому течению соответствует одно и то же значение Re.

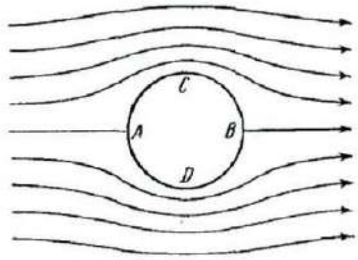
§4. Движение тел в жидкостях и газах. Сила сопротивления среды.

При движении тела в жидкости или газе на него действуют силы, равнодействующую которых мы обозначим буквой $\vec{R}$.

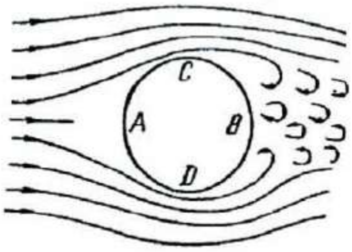
Силу $\vec{R}$ можно разложить на две составляющие, одна из которых $\vec{Q}$ направлена в сторону, противоположную движению тела (или в сторону движения потока, набегающего на тело), а вторая $\vec{P}$ перпендикулярна к этому направлению. Составляющие $\vec{Q}$ и $\vec{P}$ называются соответственно лобовым сопротивлением и подъемной силой. Очевидно, что на тело, симметричное относительно направления движения, может действовать только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае будет равна нулю.



Как показывают расчеты, при отсутствии вязкости равномерное движение тел должно было бы происходить без лобового сопротивления. Не обладающая вязкостью жидкость должна свободно скользить по поверхности тела, полностью обтекая его. Это кажется удивительным, но строгие расчеты показывают, что это так. Этот факт даже получил название «парадокс Даламбера».

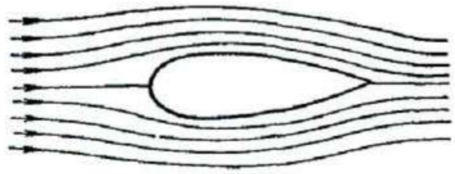


Иначе протекают явления при движении тела в жидкости, обладающей вязкостью. В этом случае очень тонкий слой жидкости прилипает к поверхности тела и движется с ним как одно целое, увлекая за собой из-за трения последующие слои. По мере удаления от поверхности тела скорость слоев становится все меньше и, наконец, на некотором расстоянии от поверхности, жидкость оказывается практически не возмущенной движением тела. Таким образом, тело оказывается окруженным слоем жидкости, в котором имеется градиент скорости. Этот слой называется пограничным, В нем действуют силы трения, которые в конечном итоге оказываются приложенными к телу и приводят к возникновению лобового сопротивления. Но дело не исчерпывается только этим. Наличие пограничного слоя в корне изменяет характер обтекания тела жидкостью. Полное обтекание становится невозможным. Действие сил трения в поверхностном слое приводит к тому, что поток отрывается от поверхности тела, в результате чего позади тела возникают вихри (см.рисунок).



Вихри уносятся потоком и постепенно затухают вследствие трения; при этом энергия вихрей расходуется на нагревание жидкости. Давление в образующейся за телом вихревой области оказывается пониженным, поэтому результирующая сил давления будет отлична от нуля, обусловливая лобовое сопротивление.

Таким образом, лобовое сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. При данных поперечных размерах тела сопротивление давления сильно зависит от формы тела. По этой причине его называют также сопротивлением формы. Наименьшим сопротивлением давления обладают тела хорошо обтекаемой каплевидной формы. Такую форму стремятся придать фюзеляжу и крыльям самолетов; кузову автомобилей и т. п.



Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления определяется значением введенного в §3 числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}$. В данном случае l — некоторый характерный размер тела (например, радиус для тела шаровой формы), v — скорость тела относительно жидкости. При малых Re основную роль играет сопротивление трения, так что сопротивление давления можно не принимать во внимание. При увеличении Re роль сопротивления давления растет. При больших значениях Re в лобовом сопротивлении преобладают силы давления.

Определяя характер сил, действующих на тело в потоке, число Рейнольдса может служить критерием подобия явлений. Это обстоятельство используется при моделировании. Например, модель самолета будет вести себя в потоке газа таким же образом, как и ее «прообраз», если, кроме геометрического подобия модели и самолета, будет соблюдено также равенство для них чисел Рейнольдса.

При малых Re, т. е. при небольших скоростях движения и небольших l, сопротивление среды обусловлено практически только силами трения. Согласно закону, установленному Стоксом, сила сопротивления в этом случае пропорциональна коэффициенту динамической вязкости η, скорости v движения тела относительно жидкости и характерному размеру тела l: $f \sim \eta l v$. Коэффициент пропорциональности зависит от формы тела. В случае шара сила сопротивления движению шарика в жидкостях при небольших скоростях, в соответствии с законом Стокса, равна $f = 6\pi\eta r v$. Это объясняет, почему при небольших скоростях силы сопротивления пропорциональны первой степени скорости.

При увеличении скорости тела вокруг него возникают вихри, слои перемешиваются, движение в какой-то момент становится турбулентным, и сила сопротивления резко возрастает. Внутреннее трение (вязкость) перестает играть сколько бы то ни было заметную роль. Возникновение силы сопротивления можно тогда представить себе следующим образом. Пусть тело прошло в среде путь L. При силе сопротивления F_r на это затрачивается работа $A = F_r L$. Если площадь поперечного сечения тела равна S, то тело «натолкнется» на частицы, занимающие объем SL. Полная масса частиц в этом объеме равна $\rho_0 SL$. Представим, что эти частицы полностью увлекаются телом, приобретая скорость v. Тогда их кинетическая энергия становится равной $K = \frac{\rho_0 SLv^2}{2}$. Эта энергия создана за счет работы внешних сил по преодолению силы сопротивления. Стало быть, $A = K$, откуда $F_r = \frac{\rho_0 Sv^2}{2}$. Теперь сила сопротивления сильнее зависит от скорости движения, становясь пропорциональной ее второй степени.

Рассмотрим небольшой шарик радиуса r, падающий вертикально в жидкости или газе. На него действуют три силы: 1) сила тяжести $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (ρ — плотность шарика), направленная вниз, 2) выталкивающая сила $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g$ (ρ_0—плотность жидкости или газа), направленная вверх, 3) сила сопротивления среды $6\pi\eta rv$, направленная в сторону, противоположную направлению движения, т. е. вверх.

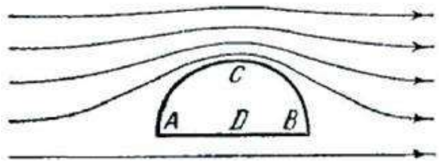
По достижении некоторой скорости v_0 выталкивающая сила и сила сопротивления в сумме уравновешивают силу тяжести, вследствие чего шарик начинает двигаться без ускорения, т. е. равномерно. Скорость v_0 равномерного движения оказывается равной:

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0) g r^2}{9\eta}.$$

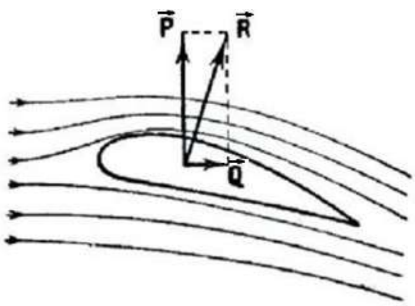
Как видно из формулы, скорость равномерного падения шарика в вязкой среде пропорциональна квадрату его радиуса. Эта формула годна только для малых шариков.

<u>§5. Подъемная сила.</u>

Из предыдущего мы сделали вывод, что сила сопротивления среды при отсутствии вязкости равна нулю. А вот для возникновения подъемной силы вязкость жидкости не имеет существенного значения. На рисунке показаны линии тока при обтекании идеальной жидкостью полуцилиндра. Вследствие полного обтекания линии тока будут симметричны относительно прямой CD. Однако относительно прямой AB картина будет несимметричной. Линии тока сгущаются вблизи точки C, т.е. скорость тут больше, поэтому давление здесь будет меньше, чем вблизи точки D, и возникает подъемная сила $\vec{P}$. Таким образом, подъемная сила есть результат разницы давлений снизу и сверху из-за различия скоростей среды. Аналогичным образом возникает подъемная сила и в вязкой жидкости.



Силой, поддерживающей самолет в воздухе, служит подъемная сила, действующая на его крылья. Лобовое сопротивление играет при полете самолета вредную роль. Поэтому крыльям самолета и его фюзеляжу придают хорошо обтекаемую форму. Профиль крыла должен вместе с тем обеспечивать достаточную по величине подъемную силу. Оптимальным для крыла является показанный на рисунке профиль, найденный русским ученым Н. Е. Жуковским.



Он же вывел формулу для определения величины подъемной силы. Подъёмная сила единицы длины крыла бесконечного размаха равна произведению циркуляции скорости вокруг профиля крыла на плотность среды и скорость набегающего потока:

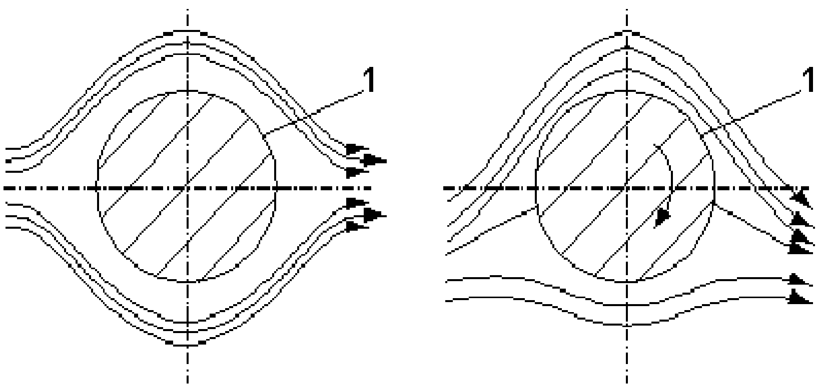
$$F = \rho v_{\infty} \Gamma$$

где $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ – циркуляция скорости воздуха вокруг профиля крыла.

§6.Эффект Магнуса.

Еще одним проявлением формулы Бернулли является эффект, с которым мы сталкиваемся и в обыденной жизни. Все видели, как в футболе или теннисе, вращающийся мяч летит по непривычной для нас траектории. Почему так происходит?

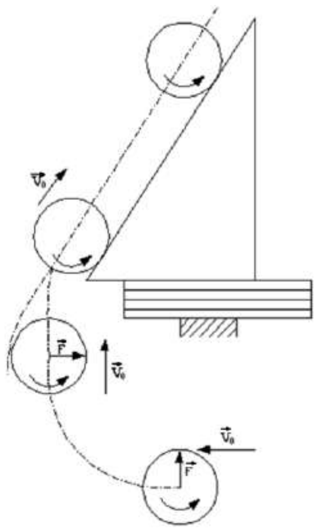
Этот эффект открыл немецкий физик Генрих Магнус в 1853 году. Он имеет ту же природу, что и возникновение подъемной силы. Суть явления в том, что мяч при вращении создает вокруг себя вихревое движение воздуха. С одной стороны мяча направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока и скорость движения среды с этой стороны увеличивается. С другой его стороны направление вихря противоположно направлению движения потока, и скорость движения среды уменьшается. Эта разность скоростей порождает поперечную силу, которая меняет траекторию полета.



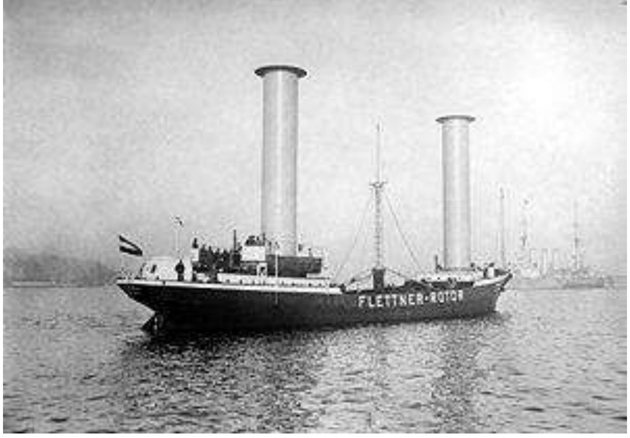
На левом рисунке показан движущийся поступательно (невращающийся) шар (1). В связанной с шаром системе отсчета он обтекается ламинарным потоком, скорости которого с обеих сторон шара одинаковы, поэтому разность давлений не возникает.

На правом рисунке шар вращается и одновременно движется поступательно. При вращении шара, вследствие внутреннего трения (вязкости), приходит в движение и приповерхностный слой окружающей его среды (жидкости или газа). Сверху шара направление потока совпадает с направлением вращения, а снизу — противоположно ему. Частицы в пограничном слое сверху шара ускоряются потоком. Снизу поток тормозит движение в пограничном слое. Скорость сверху больше, чем снизу, т.е., согласно закону Бернулли, давление в точках под шаром больше, чем над ним. В результате возникает сила, аналогичная подъемной силе крыла, направленная вверх. Понятия «вниз» и «вверх» в этом случае условные, они определяются выбором рисунка. Направление силы определяется направлением вращения и траекторией полета. Например, в настольном теннисе при ударе с «накатом», т.е. при вращении верхней точки шарика вперед (при ударе ракетка движется вверх), сила во время полета будет направлена вниз и заставит шарик лететь по более закругленной вниз траектории. При «подрезке» же шарик будет лететь по более плоской, чем обычная парабола, траектории.

Эффект Магнуса можно наблюдать на опыте со скатывающимся по наклонной плоскости легким цилиндром. После скатывания по наклонной плоскости центр масс цилиндра движется не по параболе, как двигалась бы материальная точка, а по кривой, уходящей под наклонную плоскость.

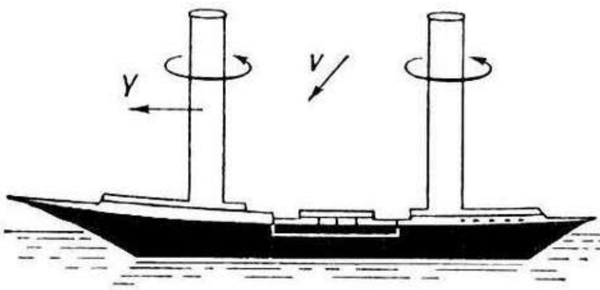


Эффект Магнуса был продемонстрирован на одной из дамб в Австралии. Этот опыт можно увидеть в интернете (https://shazoo.ru/2015/07/16/31787/chto-takoe-effekt-magnusa). Сначала мяч просто отпустили, не придавая ему вращения, в этом случае он падал вниз практически по вертикали. Затем мяч сбросили с дамбы второй раз, при этом слегка подкрутив его на себя. В этом случае он полетел по траектории, удаляющей его от стены дамбы, и приземлился в сотнях метров от нее.



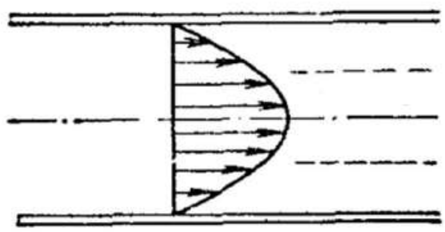
Эффект Магнуса был использован в 1922—26 г. немецким инженером А. Флетнером при постройке роторного корабля с вращающимися цилиндрами (ветросиловыми башнями) вместо парусов. При боковом ветре на эти цилиндры действует сила, которая по отношению к кораблю является тягой (см. рисунок ниже).

Направление и частота вращения могли регулироваться.



Во время плавания не требовалось вызывать на палубу членов команды, чтобы они меняли паруса в зависимости от силы или направления ветра, так как управление движением мог осуществлять вахтенный. Ранее команда трёхмачтовой шхуны состояла как минимум из 20 матросов, после её переделки в роторный корабль хватило 10 человек. В 1926 году роторный корабль прошел через Атлантику. Однако применения такие корабли не получили из-за неэкономичности.

§7. Поток несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе. Формула Пуазейля.



Вязкая несжимаемая жидкость течет вдоль прямолинейной цилиндрической трубы радиусом R и длиной l. Так как жидкость несжимаемая, скорость u не меняется вдоль трубы. Но она зависит от r, т.е. $u = u(r)$. Выделим в трубе цилиндрическую часть с радиусом r и длиной l. На ее боковую поверхность действует касательная сила вязкости $F = -\eta 2\pi r l \dfrac{du}{dr}$. На цилиндр действует сила, равная разности сил давления с торцов $F_{давл} = \pi r^2 (p_1 - p_2)$, где p_1 – давление на входе трубы, p_2 – давление на выходе трубы.

Если движение стационарно, то силы должны быть равны друг другу: $\eta 2\pi r l \dfrac{du}{dr} = \pi r^2 (p_2 - p_1)$. Получаем $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{r(p_2 - p_1)}{2\eta l} \le 0$. Интегрируем, учитывая, что молекулы на стенке трубы имеют нулевую скорость: $\int_0^u du = \int_R^r \dfrac{(p_2 - p_1)}{2\eta l} r dr$. Получаем $u = \dfrac{(p_1 - p_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l}$. Скорость максимальна на оси трубы: $u_0 = \dfrac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta l}$.

Тогда зависимость скорости от расстояния до оси цилиндра имеет параболический вид

$$u(r) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Найдем поток жидкости через сечение трубы. Объем жидкости, проходящей за время dt через кольцевую площадку с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$, равен

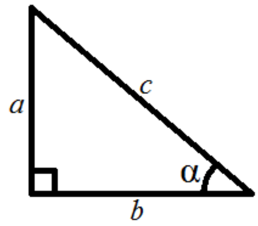
$dQ = 2\pi r dr \cdot u dt$, т.е. поток (за 1 секунду) равен $dq = 2\pi r dr \cdot u$. Интегрируем по всем кольцевым сечениям:

$$q = 2\pi u_0 \int_0^R r(1 - \frac{r^2}{R^2})dr = 2\pi u_0 (\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}) = \pi \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} R^4$$

Это формула Пуазейля.

Поток жидкости пропорционален перепаду давлений на единицу длины и четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален коэффициенту вязкости жидкости. В этой формуле обращает на себя внимание четвертая степень радиуса трубы. Можно было бы ожидать пропорциональности потока значению площади сечения S, т.е. R^2. Такая пропорциональность имеет место, например, в формуле для силы тока: $I = \dfrac{U}{\rho l} S$. В данном же случае большую роль играет неравномерность распределения скоростей по сечению трубы.

Формула Пуазейля справедлива только для ламинарных течений, когда все молекулы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, параллельных оси трубы.



$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $tg\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha=1/ctg\alpha$

$1+tg^2\alpha=1/\cos^2\alpha$; $1+ctg^2\alpha=1/\sin^2\alpha$

****

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$;

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\beta\sin\alpha$; $tg(a\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$

$\sin\alpha=a/c,\ \cos\alpha=b/c,$

****

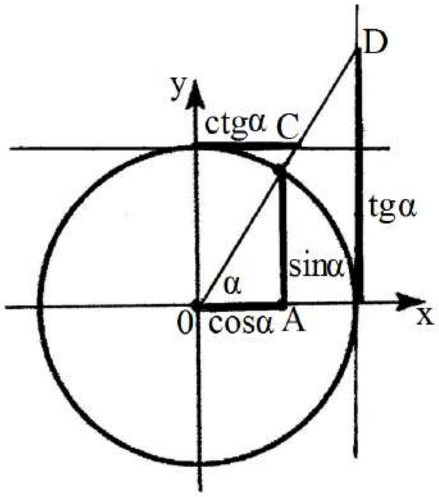
$tg\alpha=a/b,\ ctg\alpha=b/a,$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$tg2\alpha=2tg\alpha/(1-tg^2\alpha)$

****



$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

****

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

α	30°	45°	60°
sin	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$

****

$1+\cos\alpha=2\cos^2\alpha/2$; $1-\cos\alpha=2\sin^2\alpha/2$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ - формулы понижения показателя.

****

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$ или

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$, где $\sin\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$

****

$-\pi/2\le\arcsin x\le\pi/2$ (как и $arctgx$), $0\le\arccos x\le\pi$ (как и $arcctgx$)

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$; $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$; $arctg(-x)=-arctgx$

****

$\sin x=a\Rightarrow x=\pi k+(-1)^k\arcsin a$; $\cos x=a\Rightarrow x=2\pi k\pm\arccos a$

$tgx=a\Rightarrow x=\pi k+arctga$

$\sin x=0\Rightarrow x=\pi k$; $\sin x=\pm1\Rightarrow x=2\pi k\pm\pi/2$

$\cos x=0\Rightarrow x=\pi k+\pi/2$; $\cos x=1\Rightarrow x=2\pi k$; $\cos x=-1\Rightarrow x=2\pi k+\pi$

****

$\sin, tg, ctg$ - нечетные, $\cos$ - четный. $\sin$ и $\cos$ - период 2π, tg и ctg - π.

Правило для формул приведения:

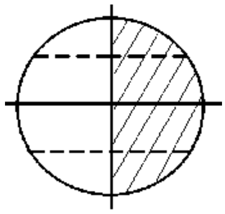
если выбрасываем целое число раз по π, то функция остается прежней, а если полуцелое, то меняется на кофункцию. Знак определяется знаком исходной функции.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

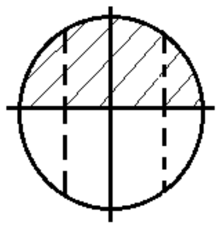
Что такое $\arcsin(x)$? Вы скажете, что это угол, синус которого равен *x*. Но таких углов бесконечно много. Например, чему равен $\arcsin(-1)$? $-\pi/2, 3\pi/2, 7\pi/2...$?

Еще один вопрос. Что такое $\sqrt{x}$? Вы скажете, что это число, квадрат которого равен *x*. Но таких чисел два. Например, что такое $\sqrt{4}$? Это 2 или -2? Уравнение $x^2 = 3$ имеет решения $x = +\sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$, что же такое $\sqrt{3}$?

Это АРИФМЕТИЧЕСКИЙ корень, т.е. ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ число, квадрат которого равен 3. Мы выбрали из всех чисел одно, чтобы не было неясностей.

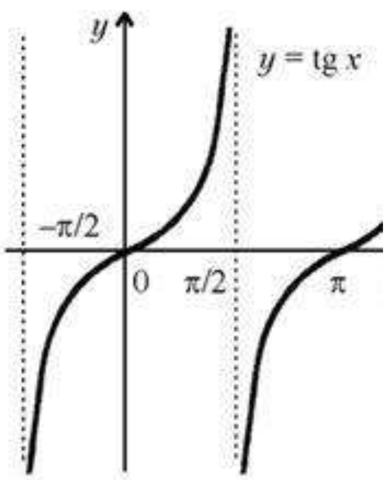


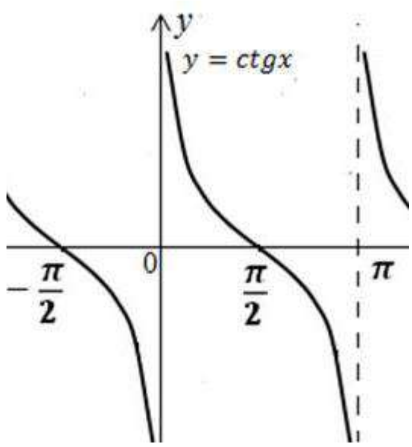
То же надо сделать и с $\arcsin(x)$. $\arcsin(x)$ - это угол в интервале $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, синус которого равен *x*. Каждому значению синуса соответствует угол, причём только один! Так что $\arcsin(-1) = -\pi/2$, и ничему больше! Только одно значение!



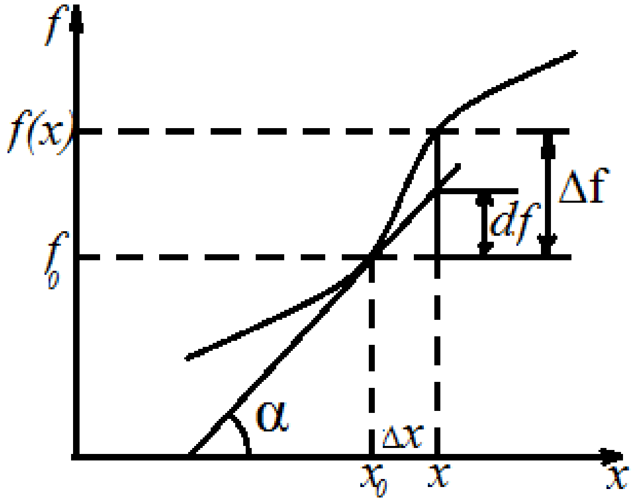
Аналогично $\arccos(x)$ - это угол в интервале $0 \le x \le \pi$, косинус которого равен *x*. Опять только одно значение! Функции однозначны! Эти интервалы надо иметь в виду.

Для $arctg(x)$ диапазон тот же, что для $\arcsin(x)$, а для $arcctg(x)$ - как для $\arccos(x)$. В данном случае мог быть выбран любой диапазон длиной π - функция была бы однозначна. Но выбраны такие, в которых функция является непрерывной, т.е. не испытывает разрыва.





О СМЫСЛЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ



Под дифференциалом dx независимого аргумента понимается приращение аргумента: $dx = \Delta x$. Дифференциал функции df - это линейная часть приращения, т.е. приращение, вычисленное по касательной. Из рисунка видно, что истинное приращение функции Δf не равно ее дифференциалу df. Но при малых Δx их равенство примерно выполняется. Обычно dx считается, строго говоря, бесконечно малым. Если это не так, то пишут Δx.

$df = tg\alpha \cdot \Delta x$, $tg\alpha = f'(x_0)$, отсюда следует $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$, т.е. производная равна отношению двух величин.

$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$$

$$f(x) = f(x_0) + \Delta f \neq f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$$

Но при $\Delta x \to 0$ (т.е. при малых Δx) имеем $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$

Примеры.

1) Вычислить $\sqrt{37}$.

$$f(x) = \sqrt{x},\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x_0 = 36,\ \Delta x = 1 << 36,\ f(x_0) = 6,\ f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{36}} = \frac{1}{12}$$

$\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = 6 + \dfrac{1}{2\sqrt{36}} \cdot 1 = 6{,}0833\ldots$ Истинное значение $\sqrt{37} = 6{,}0828\ldots$

2) Вычислить $tg\,46°$.

$$f(x) = tg(x),\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ x_0 = 45° = \pi/4,\ \Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}\,рад << \frac{\pi}{4},$$

$$f(x_0) = 1,\ f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2(\pi/4)} = 2$$

$tg\,46° = tg(45° + 1°) = 1 + 2 \cdot \dfrac{\pi}{180} = 1 + \dfrac{\pi}{90} = 1{,}0349\ldots$ Истинное значение $1{,}0355\ldots$

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} f' + a_n f = 0, \qquad (1)$$

где все a_i – постоянные.

Будем искать частные решения уравнения (1) в виде $f(x) = e^{\lambda x}$. Подставив это выражение в (1), после сокращения обеих частей уравнения на $e^{\lambda x}$, получим алгебраическое уравнение n-й степени:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (2)$$

Это уравнение определяет те λ, при которых функция $e^{\lambda x}$ является решением уравнения (1), и называется его характеристическим уравнением. Для простоты рассмотрим случай, когда (2) не имеет КРАТНЫХ корней. Зная все корни уравнения (2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, строим решение уравнения (1), используя следующие правила:

1) Каждый вещественный корень λ_i вносит в решение член $c_i e^{\lambda_i x}$.

2) Если коэффициенты уравнения (2) вещественные, то его комплексные корни будут попарно комплексно сопряженными. Паре комплексных корней $\eta \pm i\mu$ в общем решении соответствуют два члена $a e^{\eta x}\cos \mu x$ и $b e^{\eta x}\sin \mu x$ или, после преобразований, один член $\mathrm{A} e^{\eta x}\cos(\mu x + \varphi)$ с двумя произвольными постоянными A и φ.

Рассмотрим дифференциальное уравнение затухающего колебания (§6 главы 7)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (3)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$. Если $\beta < \omega_0$, то его решения имеют вид $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Решение уравнения (3) имеет вид $x = Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi)$.

Если $\beta \ge \omega_0$, то решение характеристического уравнения является вещественным

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

В этом случае решение дифференциального уравнения не содержит синусов или косинусов, т.е. не является колебательным.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Механика

1. Векторы и их свойства.
2. Скорость.
3. Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорения. Кривизна плоской кривой.
4. Равномерное прямолинейное движение. Формула сложения скоростей. Равноускоренное движение.
5. Кинематика вращательного движения.
6. Законы Ньютона.
7. Силы в природе (сила упругости, закон всемирного тяготения, сила тяжести и вес, сила трения, сила сопротивления среды).
8. Импульс тела. Закон сохранения импульса. Центр инерции.
9. Кинетическая энергия. Работа.
10. Потенциальное поле сил. Консервативные силы. Работа консервативных сил.
11. Потенциальная энергия во внешнем поле сил.
12. Потенциальная энергия взаимодействия.
13. Закон сохранения механической энергии.
14. Закон сохранения момента импульса.
15. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.
16. Центробежная сила инерции.
17. Сила Кориолиса.
18. Движение твердого тела. Мгновенная ось вращения. Шар на плоскости.
19. Движение центра инерции.
20. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Основное уравнение динамики вращения тела вокруг неподвижной оси.
21. Момент импульса произвольно движущегося тела. Главные оси инерции тела.
22. Момент инерции. Теорема Штейнера. Моменты инерции стержня, цилиндра, шара.
23. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
24. Кинетическая энергия тела при плоском движении.
25. Применение законов динамики твердого тела.
26. Пример с цилиндром - 2 способа.
27. Задача о катушке на льду.
28. Гравитационное поле. Закон всемирного тяготения. Космические скорости.
29. Постулаты СТО. Преобразования Лоренца.

31. Следствия из преобразований Лоренца: одновременность, длина тел, промежуток времени между событиями в разных системах отсчета.
32. Интервал. Преобразования Лоренца и сложение скоростей.
33. Релятивистские выражения для импульса и энергии. Взаимосвязь массы и энергии. Частицы с нулевой массой.
34. Колебательное движение. Малые колебания.
35. Гармонические колебания. Маятник. Биения.
36. Затухающие колебания.
37. Вынужденные колебания. Автоколебания. Параметрический резонанс.

Молекулярная физика и термодинамика

1. Статистическая физика и термодинамика. Масса и размер молекулы. Равновесные и неравновесные процессы.
2. Давление.
3. Распределение давления в покоящихся жидкости и газе.
4. Закон Архимеда.
5. Внутренняя энергия. Первое начало термодинамики. Работа, совершаемая газом.
6. Уравнение состояния идеального газа.
7. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа.

8. Уравнение адиабаты идеального газа.
9. Политропические процессы.
10. Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах.
11. Ван-дер-Ваальсовский газ.
12. Барометрическая формула.
13. Некоторые сведения из теории вероятностей.
14. Число ударов молекул о стенку.
15. Давление газа на стенку (основное уравнение МКТ).
16. Средняя энергия молекул. Степени свободы. Закон равнораспределения. Учет вращательных и колебательных степеней свободы.
17. Распределение Максвелла. Опыты Штерна и Ламмерта.
18. Распределение Больцмана.
19. Макро- и микросостояния. Стат. вес.
20. Энтропия. Второе начало термодинамики. Теорема Нернста.
21. Основные законы термодинамики в разных формулировках. Тепловая машина. КПД тепловой машины. Холодильный коэффициент.
22. Цикл Карно. КПД цикла Карно.
23. Фазовые равновесия и превращения
24. Испарение и конденсация
25. Равновесие жидкости и пара, критическое состояние, пересыщенный пар и перегретая жидкость, кипение
26. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса, тройная точка, диаграмма состояния.

Физическая кинетика

27. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах
28. Средняя длина свободного пробега в газе
29. Вероятности различных длин свободного пробега
30. Вязкость газов
31. Теплопроводность газов
32. Диффузия в газах

Твердые тела

33. Твердые тела. Кристаллические тела. Деление кристаллов по форме ячейки.
34. Физические типы кристаллических решеток
35. Теплоемкость кристаллов

Жидкое состояние

36. Строение жидкостей
37. Поверхностное натяжение. Давление под изогнутой поверхностью жидкости
39. Явления на границе жидкости и твердого тела. Капиллярные явления

Гидродинамика

41. Линии и трубки тока. Неразрывность струи
42. Уравнение Бернулли
43. Ламинарное и турбулентное течение
44. Движение тел в жидкостях и газах. Сила сопротивления среды
45. Подъемная сила
46. Эффект Магнуса
47. Поток несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе. Формула Пуазейля.

<u>**ОГЛАВЛЕНИЕ**</u>