

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

М.А.Зеликман
Курс лекций по физике
3-й семестр

Оптика.
Атомная физика.
Физика твердого тела.
Физика атомного ядра
и элементарных частиц

Учебник для студентов
физических специальностей

Санкт-Петербург
2023

ОПТИКА.

Глава 1. Геометрическая оптика.

§1. Световые волны.

Свет – это и корпускулы, и волны одновременно. Об этом мы будем говорить позже. А в этой главе будем рассматривать его только как электромагнитную волну.

В световой волне колеблются и \vec{E} , и \vec{H} . Но физиологические, фотоэлектрические и другие практические действия света определяются вектором \vec{E} , поэтому будем говорить о световом векторе, имея в виду именно \vec{E} .

Показателем преломления среды будем называть отношение скоростей света в вакууме и в среде: $n = c/v = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}$, так как для большинства веществ $\mu \approx 1$. У воды $\epsilon = 81$, а показатель преломления $n = 1,5$. Почему? Значение $\epsilon = 81$ получено из статических экспериментов, а в быстропеременных полях оно другое, причем зависит от частоты света. Зависимость n или v от частоты f (или от длины волны λ) называется дисперсией.

Длины волн видимого света в вакууме λ_0 (от фиолетового до красного) лежат в диапазоне $(0,40 \div 0,76)$ мкм. В среде частота такая же, как в вакууме, поэтому $\lambda = v/f = c/nf = \lambda_0/n$.

Частоты f видимого света (от красного до фиолетового) лежат в интервале $(0,39 \div 0,75) \cdot 10^{15}$ Гц. Ни глаз, ни иной приемник не могут уследить за такой частотой, они регистрируют лишь средние значения.

Линии, вдоль которых распространяется световая энергия, называются лучами. Они перпендикулярны волновым поверхностям.

§2. Основные законы оптики.

С давних времен известны пять основных законов оптических явлений: 1) закон прямолинейного распространения света; 2) закон независимости световых лучей; 3) закон обратимости световых лучей; 4) закон отражения света; 5) закон преломления света.

В однородной среде свет распространяется прямолинейно. Этот закон является приближенным: при прохождении света через малые отверстия наблюдаются отклонения от прямолинейности.

Независимость световых лучей заключается в том, что при пересечении они не возмущают друг друга. Это верно при не слишком больших интенсивностях света. При интенсивностях, получаемых с помощью лазера, независимость перестает соблюдаться.

Обратимость заключается в том, что, если луч после серии преломлений и отражений в некоторой точке отразить и направить в противоположном направлении, то он пойдет по той же траектории, по которой пришел.

При прохождении света через границу двух прозрачных сред падающий луч разделяется на два – отраженный и преломленный (рис.1). Направления их определяются законами отражения и преломления света.

Закон отражения света: отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим и нормалью, восстановленной в точке падения; угол отражения равен углу падения: $\alpha' = \alpha$.

Закон преломления света: преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим и нормалью, восстановленной в точке падения; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных веществ:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{12}.$$

Величина n_{12} называется

относительным показателем преломления второй среды относительно первой. Он равен отношению показателей преломления сред $n_{12} = n_2 / n_1 = v_1 / v_2$ ($n = c/v$ - см. §1).

Из закона преломления видно, что при переходе в оптически менее плотную среду (с меньшим n) луч удаляется от нормали. При достижении углом падения значения $\alpha_{пред} = \arcsin n_{12}$ угол β становится равным $\pi/2$. $\alpha_{пред}$ называется предельным углом (рис.2).

Энергия, которую несет падающий луч, распределяется между отраженным и преломленным. С увеличением угла падения интенсивность отраженного луча растет, а преломленного падает, обращаясь в нуль при $\alpha_{пред}$. При углах падения больше $\alpha_{пред}$ свет во вторую среду не попадает, точнее говоря, волна проникает туда на длину порядка λ , а затем возвращается в первую среду. Это явление называется полным внутренним отражением.

§3. Световой поток.

Достаточно очевидно, что характеризовать свет потоком энергии неправильно. Представим себе абсолютно темную комнату. Света в ней нет, но поток энергии есть. Он

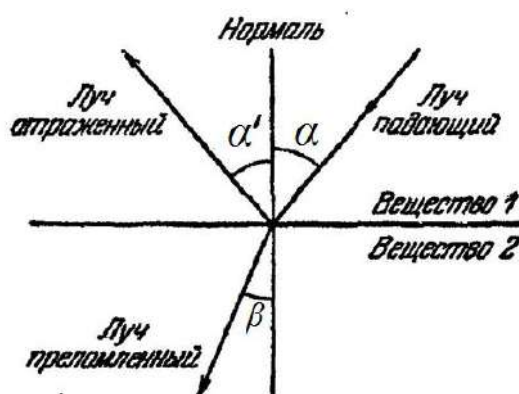


Рис.1

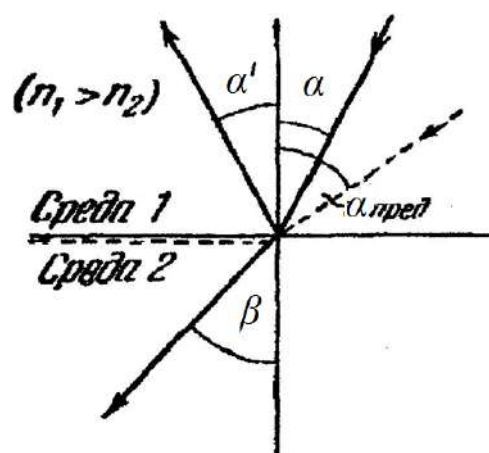


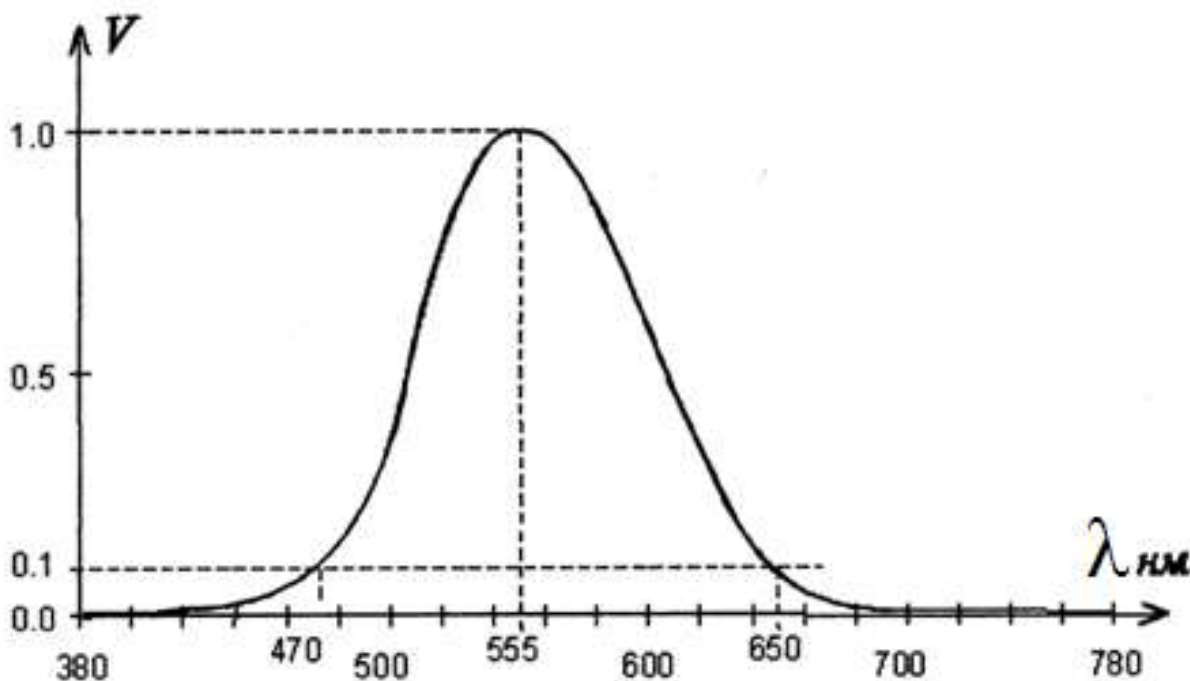
Рис.2

переносится электромагнитными волнами, не входящими в диапазон видимого света: инфракрасными, ультрафиолетовыми, радиоволнами и т.д. Световой поток – это поток лучистой энергии, оцениваемый по зрительному ощущению.

Всякая световая волна представляет собой наложение волн с длинами λ в некотором диапазоне $\Delta\lambda$. Распределение потока энергии по λ характеризуют с помощью функции распределения

$$\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_{\lambda}}{d\lambda} \Rightarrow \text{Поток энергии } \Phi_{\lambda} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) d\lambda$$

Глаз по-разному ощущает разные λ . Например, $\lambda < 0,40$ мкм и $\lambda > 0,76$ мкм он не воспринимает вообще. Внутри видимого диапазона естественно ожидать максимума восприимчивости где-то в середине и снижение к краям. Чувствительность глаза среднего человека характеризуют универсальной кривой относительной спектральной чувствительности, называемой иногда функцией видности.



Световой поток учитывает эту кривую: $\Phi = \int_0^{\infty} V(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) d\lambda$. Он измеряется в особых

единицах – люменах (лм) и связан с энергетическим потоком соотношением:

$$d\Phi(\lambda) = \frac{d\Phi_{\lambda}}{A} V(\lambda), \text{ где } A = 1,6 \text{ мВт/лм.}$$

§4. Нормальное падение на границу двух сред.

Интенсивностью света называется модуль среднего по времени значения плотности светового потока. Плотность потока энергии равна среднему значению модуля вектора

Пойнтинга $\langle \vec{S} \rangle = \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle$. В прошлом семестре из равенства энергий $\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}$

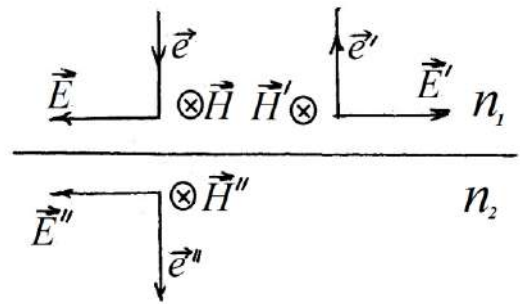
мы получили, что амплитуды удовлетворяют соотношению: $E_m \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}$, откуда в

случае неферромагнитных сред ($\mu \approx 1$) следует $H_m = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m = n E_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sim n E_m$, а

значит, $\langle S \rangle \sim n E_m^2$. Интенсивность света I , т.е. плотность светового потока, равна плотности потока энергии $\langle S \rangle$, умноженной на функцию видности $V(\lambda)$, т.е. $I \sim n E_m^2$. В этом соотношении следует обратить внимание на множитель n .

Рассмотрим волну, падающую на границу раздела двух однородных и изотропных прозрачных сред. Найдем соотношения между

амплитудами и фазами падающей, отраженной и преломленной волн. Для простоты ограничимся только случаем нормального падения $\alpha = 0$. Пусть \vec{E} и \vec{H} соответствуют падающей волне, \vec{E}' и \vec{H}' - отраженной, \vec{E}'' и \vec{H}'' - преломленной.



Из соображений симметрии ясно, что \vec{E}' и \vec{E}'' колеблются вдоль того же направления, что и \vec{E} , а \vec{H}' и \vec{H}'' - что и \vec{H} . Нормальные компоненты равны нулю, поэтому тангенциальные компоненты всех векторов совпадают с ними самими. Пусть \vec{e} , \vec{e}' , \vec{e}'' - орты направлений распространения волн. Зададимся направлением \vec{E} в плоскости рисунка, тогда \vec{H} направлен от нас. Предположим, что \vec{E}' и \vec{E}'' направлены, как на рисунке. Тогда направления \vec{H}' и \vec{H}'' показаны на рисунке. Действительные направления определяются расчетами.

Поскольку $H = nE \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, то в векторном виде можно записать

$$\vec{H} = n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e} \times \vec{E}; \quad \vec{H}' = n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}' \times \vec{E}'; \quad \vec{H}'' = n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}'' \times \vec{E}''$$

Запишем условие непрерывности на границе тангенциальных составляющих \vec{E} и \vec{H}

$$\vec{E} + \vec{E}' = \vec{E}'' \quad (*)$$

$$\vec{H} + \vec{H}' = \vec{H}'' \Rightarrow n_1 \vec{e} \times \vec{E} + n_1 \vec{e}' \times \vec{E}' = n_2 \vec{e}'' \times \vec{E}''$$

Учтем, что $\vec{e} = \vec{e}'' = -\vec{e}'$: $n_1 \vec{e} \times \vec{E} - n_1 \vec{e} \times \vec{E}' = n_2 \vec{e} \times \vec{E}''$, т.е.

$$\vec{e} \times n_1 \vec{E} = \vec{e} \times (n_1 \vec{E}' + n_2 \vec{E}'')$$

Поскольку $\vec{e} \perp \vec{E}$, то $n_1 \vec{E} = n_1 \vec{E}' + n_2 \vec{E}''$ (**)

Решая (*) и (**) как систему, получим $\vec{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}$; $\vec{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \vec{E}$

Отсюда следует, что \vec{E}'' всегда параллельна \vec{E} , т.е. прошедшая волна не испытывает скачка фазы, а направление \vec{E}' зависит от соотношения n_1 и n_2 : при $n_1 > n_2$ фаза при отражении не меняется, а при $n_1 < n_2$ фаза меняется на π . Значит, показанные на рисунке направления векторов соответствуют случаю $n_1 < n_2$.

При отражении от оптически более плотной среды фаза меняется на π , а от менее плотной - не меняется.

Используя полученные для \vec{E}' и \vec{E}'' выражения, получим для мгновенных значений (и аналогично для амплитудных): $n_1 E^2 = n_1 E'^2 + n_2 E''^2$. (***)

Найдем коэффициенты отражения и преломления

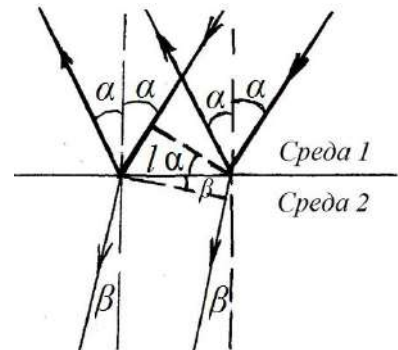
$$\rho = \frac{I'}{I} = \frac{n_1 E'^2}{n_1 E^2} = \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2; \quad \tau = \frac{I''}{I} = n_{12} \left(\frac{2}{n_{12} + 1} \right)^2, \text{ где } n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

При замене n_{12} на $n_{21} = 1/n_{12}$ коэффициент отражения ρ не меняется, т.е. коэффициент отражения для обоих направлений один и тот же.

Для стекла $n = 1,5$ и $\rho = 0,04$. Каждая стеклянная поверхность при нормальном падении отражает 4% падающего светового потока. Линза имеет две поверхности, поэтому отражает 8%.

Формулу (***) можно трактовать как сохранение интенсивностей. Это получилось из-за нормального падения, поскольку площадь пучка не меняется. В общем случае такого сохранения нет. Если падение наклонное, то площадь пучка изменяется при преломлении. Должен соблюдаться закон сохранения потока энергии, т.е. произведения интенсивности на площадь пучка. В случае, изображенном на рисунке, имеем

$$I \cdot h \cdot l \cos \alpha = I' \cdot h \cdot l \cos \alpha + I'' \cdot h \cdot l \cos \beta,$$



где h - ширина пучка в направлении, перпендикулярном плоскости падения. После упрощений получаем $I = I' + I'' \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$, т.е. интенсивность падающего не равна сумме интенсивностей отраженного и преломленного.

§5. Фотометрические величины.

1) Сила света – световой поток, испускаемый в единицу телесного угла: $I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$.

Эта величина используется для характеристики точечных источников света.

Для изотропного источника $I = \Phi / 4\pi$, где Φ - полный световой поток, излучаемый источником во всех направлениях.

$[I] = 1$ кд (кандела) – основная единица – определяется через яркость: яркость абсолютно черного излучателя при температуре затвердевания платины должна равняться 60 кд/см².

2) Световой поток.

При изотропном источнике равен $\Phi = I\Omega$. $[\Phi] = 1$ лм (люмен) = 1 кд x 1 ср.

$$\Phi = \int_0^{\infty} V(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) d\lambda$$

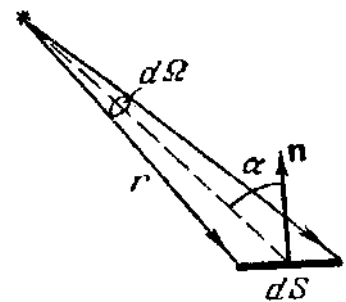
При $\lambda = 555$ нм (в максимуме кривой видности) 1 лм = 0,0016 Вт, при других λ

$$1 \text{ лм} = \frac{0,0016}{V(\lambda)} \text{ Вт.}$$

3) Освещенность – это отношение светового потока, проходящего через площадку, к ее площади $E = \frac{d\Phi}{dS}$. Она характеризует степень освещенности некоторой поверхности падающим на нее световым потоком.

$$[E] = 1 \text{ лк (люкс)} = 1 \text{ лм/1 м}^2.$$

Освещенность, создаваемую точечным источником, можно выразить через силу света I , расстояние от поверхности до источника r и угол α между нормалью к поверхности и направлением на источник. На площадку dS падает световой



поток $d\Phi = Id\Omega$, заключенный в пределах телесного угла $d\Omega = dS \cos \alpha / r^2$. Получаем

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}.$$

4) Протяженный источник характеризуют светимостью – это световой поток, испускаемый единицей площади во всех направлениях (лм/м²): $M = d\Phi_{\text{истук}} / dS$.

5) Яркость – отношение силы света от поверхности ΔS в данном направлении к проекции ΔS на плоскость, перпендикулярную этому направлению (кд/м^2). Светимость характеризует излучение по всем направлениям, а яркость – в заданном направлении.

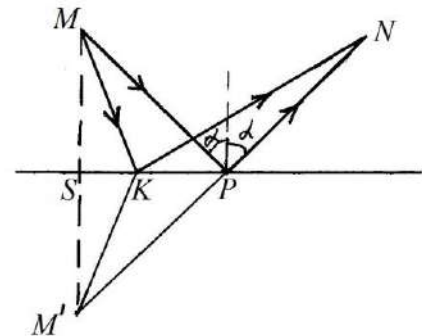
$$L = \frac{I}{\Delta S \cos \vartheta} = \frac{d\Phi}{d\Omega \Delta S \cos \vartheta}$$

§6. Геометрическая оптика.

Длина волны световых волн мала (0,4-0,8 мкм). Поэтому распространение света можно в первом приближении рассматривать, отвлекаясь от волновой природы и полагая, что свет распространяется вдоль прямых, называемых лучами. Этот раздел называют геометрической оптикой.

Она базируется на пяти основных законах: 1) закон прямолинейного распространения света; 2) закон независимости световых лучей; 3) закон обратимости световых лучей; 4) закон зеркального отражения света; 5) закон преломления света.

В основу геометрической оптики можно положить принцип Ферма: свет идет по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время. Пусть S - путь, проходимый светом. Величина $L = \int n dS$ называется оптической длиной. В однородной среде

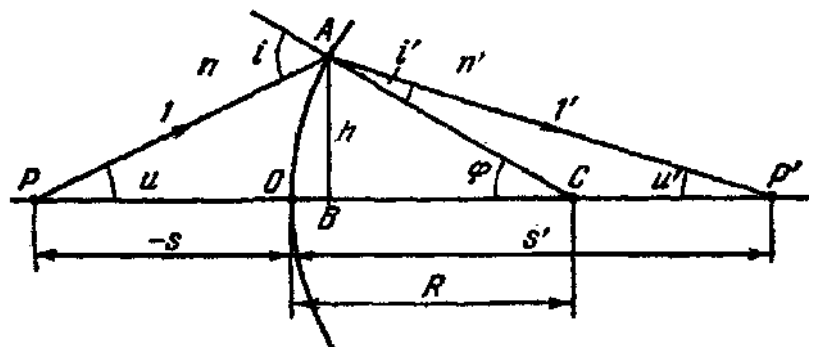


$L = nS$. $\tau = \int_1^2 \frac{dS}{v} = \frac{1}{c} \int_1^2 n dS = \frac{L}{c}$ - время прохождения траектории. Проверим принцип Ферма для случая отражения. М - источник, N - наблюдатель.

$$MKN = MK + KN = M'K + KN > M'PN = MPN$$

§7. Преломление на сферической поверхности.

Пусть два однородных прозрачных вещества с коэффициентами преломления n и n' разделены сферической поверхностью с радиусом R . Прямую, проведенную через точечный источник света P и центр сферы C , назовем осью системы. Примем за начало отсчета точку O пересечения поверхности с осью. Координаты источника P и изображения P' обозначим s и s' . Тогда расстояние от источника до преломляющей поверхности равно $(-s)$.



Рассмотрим произвольный луч 1, идущий из источника под углом u к оси. Он падает на преломляющую поверхность в точке A под углом i . После преломления луч идет под углом i' и попадает в точку P' . Обычно считают, что все лучи, вышедшие из источника, приходят в его изображение, т.е. все лучи после преломления попадают в точку P' . Однако это не так! Это утверждение справедливо только для лучей, образующих с осью небольшие углы u . Такие лучи называются параксиальными (приосевыми). Для них все углы на рисунке будут малыми, т.е. их синусы и тангенсы можно считать равными самим углам.

Согласно закону преломления $n \sin i = n' \sin i'$, т.е. $n \cdot i = n' \cdot i'$ (1).

Из треугольников PAC и $P'AC$ следует, что $i = u + \varphi$, $i' = \varphi - u'$. Подставив это в (1), получим $n(u + \varphi) = n'(\varphi - u')$. (2)

Для параксиальных лучей длиной отрезка OB можно пренебречь в сравнении с s, s' и R и считать $PB = -s$, $BP' = s'$, $BC = R$. Считая углы равными их тангенсам, получим $u = -\frac{h}{s}$, $u' = \frac{h}{s'}$, $\varphi = \frac{h}{R}$. Подставив в (2) и сократив на h , получим

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R} = \Phi \quad (3)$$

Радиус R - алгебраическая величина: для выпуклой поверхности, когда центр C лежит справа от O , его надо считать положительным, а для вогнутой (C слева от O) - отрицательным.

Величина $\Phi = \frac{n' - n}{R}$ называется оптической силой преломляющей поверхности, в СИ она измеряется в диоптриях (дптр). Из формулы (3) следует, что расстояние s' не зависит от угла u , т.е. одно и то же для всех параксиальных лучей.

Найдем фокусные расстояния преломляющей поверхности. Из (3) следует, что параллельные оси параксиальные лучи ($s = -\infty$), пересекутся в точке $s' = \frac{n'}{\Phi}$. Это расстояние до правого фокуса, т.е. заднее фокусное расстояние. Положив $s' = \infty$, найдем переднее фокусное расстояние $f = -s = \frac{n}{\Phi}$. Значит, фокусные расстояния равны отношению коэффициента преломления соответствующей среды к оптической силе.

§8. Тонкая линза.

Тонкой называется линза, толщина которой много меньше ее радиусов кривизны R_1 и R_2 . После прохождения первой сферической поверхности все параксиальные лучи от источника идут в его изображение, координата которого s' удовлетворяет уравнению (3) §7:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \Phi_1, \text{ откуда получаем } \frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \Phi_1.$$

Это изображение является источником при прохождении второй сферической поверхности. В результате изображение, сформированное линзой, будет расположено в точке s'' , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{n''}{s''} - \frac{n'}{s'} = \Phi_2 \Rightarrow \frac{n''}{s''} - \left(\frac{n}{s} + \Phi_1\right) = \Phi_2 \Rightarrow$$

В итоге получаем формулу $\frac{n''}{s''} - \frac{n}{s} = \Phi$, аналогичную формуле (3), но оптическая

сила тонкой линзы равна $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2}$. Если с обеих сторон линзы находится одна и та же среда с коэффициентом преломления n , то оптическая сила тонкой линзы равна $\Phi = (n' - n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Знаки радиусов определяются по тому же правилу,

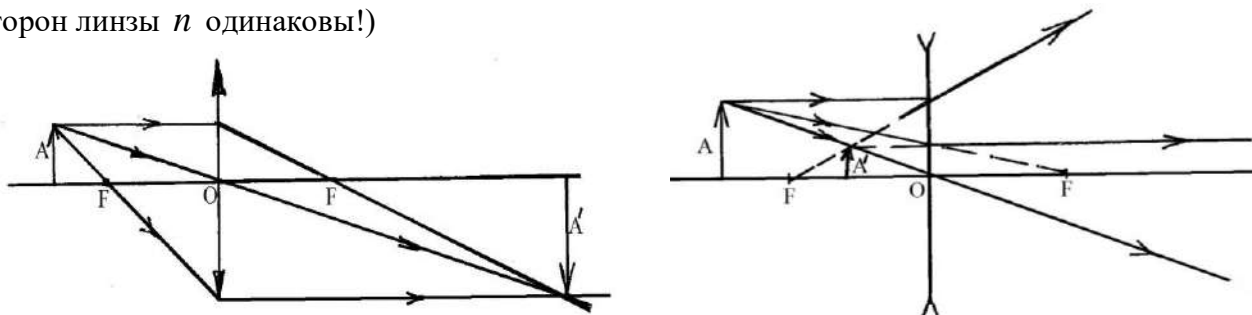
что раньше. Зная оптическую силу, можно найти фокусные расстояния по формуле $f_i = \frac{n_i}{\Phi}$. Отметим, что в этом случае фокусы с разных сторон линзы расположены не симметрично (!):

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

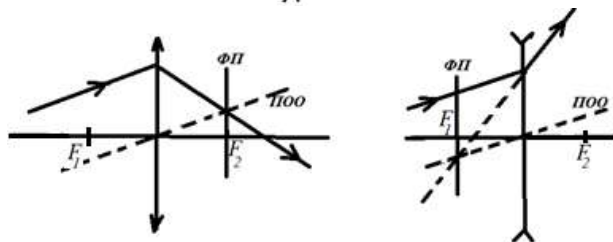
Лучи, используемые при построении изображения в тонкой линзе:

- 1) параллельный главной оптической оси (ГОО) - выйдет через соответствующий фокус;
- 2) падающий через соответствующий фокус – выйдет параллельно ГОО;
- 3) проходящий через центр линзы – пройдет без преломления (только если с обеих

сторон линзы n одинаковы!)



Кроме того, если с обеих сторон линзы среды одинаковы, можно построить ход любого дополнительного луча: после преломления он пройдет через точку



пересечения параллельной ему побочной оптической оси (ПОО) с соответствующей фокальной плоскостью (ФП).

В случае, когда с обеих сторон линзы показатели преломления одинаковы, из подобия треугольников легко видеть, что поперечное увеличение линзы равно $\beta = \frac{s'}{s}$. Легко видеть, что $\beta > 0$, если изображение прямое, и $\beta < 0$, если изображение перевернутое.

Если по разные стороны от линзы среды различны (n_1 и n_2), то луч, проходящий через центр линзы, преломляется, поэтому им пользоваться нельзя. По той же причине нельзя использовать побочные оптические оси. Используются только фокусы! Подобие треугольников отсутствует, и вышеприведенная формула для увеличения β неприменима. В этом случае поперечное увеличение линзы равно $\beta = \frac{s'}{s} \cdot \frac{n_1}{n_2}$.

Примечание. В школьном курсе знаки расстояний выбирались иначе, поэтому уравнение тонкой линзы в среде с n_0 имело немного другой вид: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = \frac{\Phi}{n_0}$,

причем $\Phi = (n - n_0) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Фокусное расстояние F положительно, если линза собирающая, и отрицательно, если рассеивающая. d, f - расстояния от предмета и его изображения до плоскости линзы. Радиус R_i считается положительным, если соответствующая поверхность линзы выпуклая, и отрицательным, если она вогнутая. Для реального предмета $d > 0$ (но бывают и ситуации с мнимым источником). $f > 0$, если изображение действительное, т.е. образовано пересечением лучей, $f < 0$, если изображение мнимое, т.е. образовано не лучами, а их продолжениями. Поперечное увеличение линзы равно $\Gamma = \frac{f}{d}$. При $\Gamma > 0$ изображение действительное, т.е. создано пересечением реальных лучей, а при $\Gamma < 0$ изображение мнимое, т.е. создано пересечением продолжений лучей, а не самими лучами.

Из рисунка легко видеть, что $\beta = -\Gamma$.

§9. Сферическое зеркало.

У него только один фокус, лежащий в середине радиуса. Формула зеркала имеет вид

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}. \quad (*)$$

Знак R , как и в предыдущих параграфах, определяется расположением центра зеркала: $R < 0$, если зеркало вогнутое, и $R > 0$, если выпуклое.

Поперечное увеличение зеркала определяется так: $\beta = -\frac{s'}{s}$

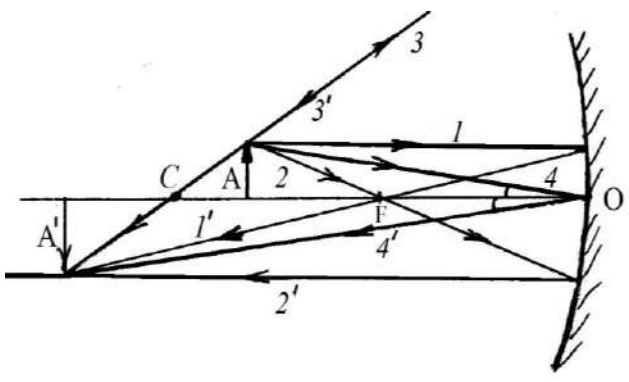
Примечание. В школьном курсе уравнение сферического зеркала давалось в виде:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R},$$

причем знаки d, f определялись действительностью или мнимостью источника и изображения; $R > 0$, если зеркало вогнутое, и $R < 0$, если выпуклое. Легко видеть, что величины d, f, R и величины в формуле (*) имеют противоположные знаки.

Лучи, используемые при построении изображения в сферическом зеркале:

- 1) параллельный главной оптической оси (ГОО) - выйдет через фокус;
- 2) падающий через фокус – выйдет параллельно ГОО;
- 3) проходящий через центр сферической поверхности C - отразится назад без преломления.
- 4) падающий в узел O – отразится под тем же углом.

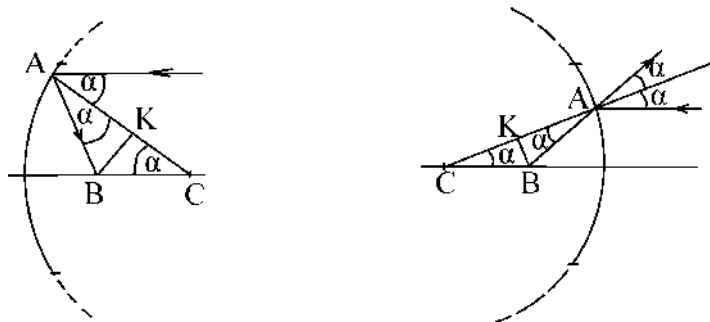


Также могут использоваться побочные оптические оси, проходящие через точку C .

В случае зеркала легко убедиться, что, как и в случае линзы, в одной точке соберутся только параксиальные лучи.

$BC = CK / \cos \alpha = R / 2 \cos \alpha$. При малых α $\cos \alpha \approx 1$ (например, $\cos(\pi/12) \approx 0.97$),

и точка B находится в середине радиуса.



§10. Центрированная оптическая система.

Это система, образованная сферическими (в частности плоскими, $R = \infty$) поверхностями, центры которых лежат на одной прямой. Каждая ЦОС имеет оптическую ось, передний и задний фокусы, переднюю и заднюю фокальные плоскости. Для ЦОС существуют формулы, похожие на формулу тонкой линзы, но d и f отсчитываются от двух так называемых ГЛАВНЫХ плоскостей: предмет, находящийся в одной из них,

изображается в другой, причем его изображение не перевернуто и равно ему по величине. В тонкой линзе обе главные плоскости совпадают с плоскостью линзы. Вместо центра линзы в ЦОС существуют два УЗЛА: луч, входящий в один из них, выйдет из другого параллельно падающему.

Если две ЦОС разместить одну за другой так, чтобы их оси совпадали, то они образуют единую ЦОС, оптическая сила которой может быть рассчитана по формуле $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2$, где d – расстояние от задней главной плоскости первой ЦОС до передней главной плоскости второй ЦОС, n – показатель преломления среды между системами. В случае тонкой линзы $d = 0$ и $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, первой ЦОС можно считать первую поверхность линзы, а второй – вторую. В случае системы из двух плотно сложенных линз оптическая сила равна сумме их оптических сил.

§11. Зрение и очки.

Наибольшее преломление лучи света, попадающие в глаз, испытывают на поверхности роговицы. Небольшое дополнительное преломление осуществляет хрусталик. В целом оптическую систему глаза можно рассматривать как собирающую линзу с переменным фокусным расстоянием и постоянным расстоянием от линзы до экрана. “Экраном”, на котором образуется действительное перевернутое изображение предмета, является сетчатка. Раздражение нервных окончаний (палочек и колбочек) светом вызывает зрительное ощущение. Размер изображения на сетчатке тем больше, чем больше угол, под которым глаз видит предмет.

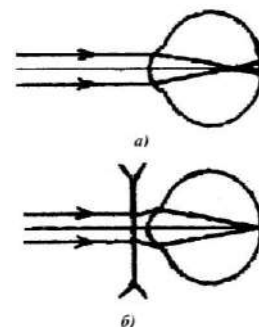
Глаз не может одновременно четко видеть предметы, расположенные от него на разных расстояниях. Это можно понять, если вспомнить, что, когда изменяется расстояние d от предмета до линзы, то изменяется и расстояние f от линзы до изображения. Глаз имеет механизм наводки на резкость. Хрусталик весьма эластичен. Под действием специальных мышц он меняет свою кривизну, а значит, и фокусное расстояние, так чтобы изображение всегда оказывалось на сетчатке. Это приспособление глаза к резкому видению на разных расстояниях называется *аккомодацией*.

Когда предмет приближается к глазу, хрусталик увеличивает свою кривизну. Однако это увеличение имеет предел. Нормальный глаз может длительное время без напряжения рассматривать предметы на расстоянии не ближе 25 см. Это расстояние называется расстоянием наилучшего зрения.

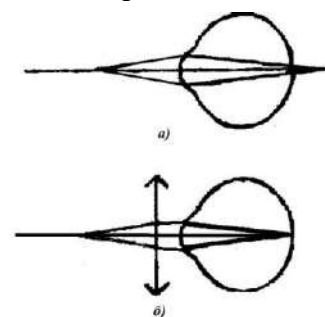
Глаз человека снабжен мышцами, поворачивающими его так, чтобы ось глаза была направлена на рассматриваемый предмет. Напряжения мышц левого и правого глаза

различаются тем сильнее, чем ближе предмет. Кроме того, изображения на сетчатках правого и левого глаз несколько различаются. Это дает возможность оценивать расстояния до предмета, а также создает впечатление объемности.

У многих людей глаза в ненапряженном состоянии создают изображение удаленного предмета не на сетчатке, а перед ней. Такие люди не могут четко видеть удаленные предметы. В этом случае хрусталик не может уменьшить свою кривизну до нормального значения. Это близорукость. Ее исправляют ношением очков с рассеивающими линзами. Параллельные лучи от удаленного предмета после этих линз становятся слегка расходящимися и после преломления лучей в хрусталике изображение оказывается на сетчатке.



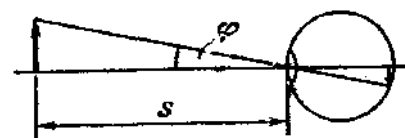
Дефект зрения, при котором человек не может четко видеть близко расположенные предметы, называется дальнозоркостью. Причиной является недостаточная эластичность хрусталика. Он не может повысить свою кривизну до требуемой. Предел аккомодации исчерпывается при расстоянии до предмета, большем 25 см. Изображение предметов, расположенных ближе, оказывается за сетчаткой. Поэтому для четкости изображения человеку приходится, например, держать книгу на расстоянии 50 см. При этом размер изображения на сетчатке уменьшается, и шрифт становится неразборчивым. Дальнозоркость исправляют ношением очков с собирающими линзами, которые помогают глазу сформировать изображение на сетчатке. Лучи от предмета, находящегося на расстоянии $S=25$ см, пройдя сквозь линзу, становятся менее расходящимися, и предмет кажется глазу удаленным на расстояние $S' > 25$ см, при котором дальнозоркий человек может рассматривать предмет без напряжения.



Таким образом, и при близорукости, и при дальнозоркости назначение очков – помочь глазу сформировать изображение точно на сетчатке.

§12. Лупа.

Кажущаяся величина рассматриваемого предмета определяется величиной его изображения на сетчатке глаза.

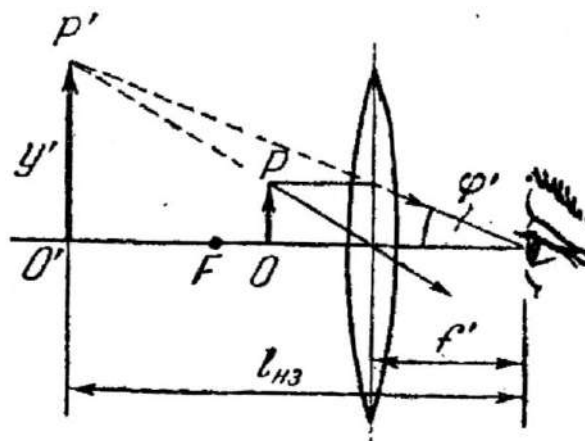


Размер изображения на сетчатке зависит от угла, под которым виден предмет. Угол зрения не может быть меньше некоторого минимального значения, примерно равного $1'$, в противном случае глаз не может различить две точки, т.е. видеть их раздельно.

Угол зрения можно увеличить, приближая глаз к предмету. Для нормального глаза это имеет смысл до расстояния не менее, чем 25 см, т.е. до расстояния наилучшего зрения. При

меньших расстояниях человек с нормальным зрением с трудом аккомодирует свой глаз. Но если перед глазом поставить собирательную линзу (лупу), то рассматриваемый предмет можно приблизить к глазу значительно и тем самым увеличить угол зрения. Отношение угла зрения при наблюдении предмета через оптический прибор к углу зрения при наблюдении невооруженным глазом на расстоянии наилучшего зрения называется увеличением прибора.

Задача любой лупы состоит именно в максимальном увеличении угла зрения. При этом предмет P располагается как можно ближе к глазу, что обеспечивает максимальный угол зрения, а лупа создает его мнимое изображение P' на расстоянии наилучшего зрения, которое без труда рассматривается глазом. При этом предмет помещается перед линзой на расстоянии, немного меньшем фокусного, а глаз практически располагается сразу за задним фокусом. Легко видеть, что увеличение лупы равно отношению расстояния наилучшего зрения к фокусному расстоянию линзы: $\Gamma = l_{нз} / f'$.



Окуляр (линза, ближайшая к глазу) любого оптического прибора - бинокля, телескопа, микроскопа и т.д. - представляет собой именно лупу.

Глава 2. Волновая оптика.

§13. Интерференция света.

Пусть две волны возбуждают в точке колебания одной частоты:

$$\begin{aligned}
 x &= A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = \\
 &A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)) = \\
 &A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_1) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - A_2 \sin(\omega t + \alpha_1) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \\
 &[A_1 + A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)] \cos(\omega t + \alpha_1) - A_2 \sin(\omega t + \alpha_1) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \\
 &\{no\ формуле : a \cos x - b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x - \sin \varphi \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \varphi)\} \\
 &= \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + A_2^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) + A_2^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cos(\omega t + \alpha_1 + \varphi) = \\
 &\sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + A_2^2} \cos(\omega t + \alpha_1 + \varphi)
 \end{aligned}$$

То есть точка совершает гармонические колебания с частотой ω и амплитудой

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos \delta + A_2^2}, \text{ где } \delta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Если $\delta = const$, то колебания когерентные. Когерентные волны - волны, имеющие одинаковую частоту и постоянную разность фаз.

В §4 говорилось, что интенсивность света I в выбранной точке – это среднее по времени значение модуля плотности потока энергии $\langle S \rangle$, которую световая волна переносит, умноженное на значение функции видности $V(\lambda)$ при данной длине волны.

В дальнейшем изложении мы не будем указывать в формулах для интенсивности света функцию видности, однако надо не забывать, что световой поток – это не просто поток энергии, а люмены получаются из ватт умножением на $V(\lambda)$.

В §4 получена формула: $I = \frac{\epsilon_0 c}{2} n A^2$, откуда следует:

$$I = \frac{\epsilon_0 c}{2} n (\langle A_1^2 \rangle + 2\langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle \langle \cos \delta \rangle + \langle A_2^2 \rangle) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \delta \rangle.$$

Если волны некогерентные, то $\langle \cos \delta \rangle = 0$, и везде $I = I_1 + I_2$. Во всех точках интенсивность света у некогерентных волн равна сумме их интенсивностей.

Если же волны когерентные, то в каждой точке интенсивность своя. Там, где $\cos \delta > 0$, $I > I_1 + I_2$, а где $\cos \delta < 0$, $I < I_1 + I_2$. Происходит перераспределение энергии в пространстве. Это явление называют интерференцией.

Интерференция – это наложение двух или нескольких когерентных волн, при котором в пространстве устанавливается не зависящее от времени распределение амплитуд колебаний.

Это похоже на стоячую волну, которую можно считать результатом интерференции двух встречных бегущих волн.

Особенно ярко интерференция проявляется, если $I_1 = I_2$. Тогда в точках максимума $I = 4I_1$, а в точках минимума $I = 0$. Для некогерентных было бы везде $I = 2I_1$.

Казалось бы, при нескольких источниках мы всегда должны иметь интерференцию. Этого нет, так как естественные источники не когерентны. Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых его атомами. Процесс излучения атомом длится примерно 10^{-8} секунды. За это время образуется так называемый «цуг» волн длиной примерно 3 метра. «Погаснув», атом опять «вспыхивает» через некоторое время. Фаза нового цуга не связана с фазой предыдущего.

Когерентные волны можно получить, разделив с помощью отражений и преломлений волну, излучаемую одним источником, на две части. Если заставить эти волны пройти разные оптические пути, а потом наложить одну на другую, то будет интерференция. Разность оптических длин не должна быть большой, так как складываться должны волны, принадлежащие одному цугу.

Но излучающих атомов множество, и они каждые 10^{-8} секунды меняют фазу испускаемых волн. Казалось бы, суммарное значение никак не связано с тем, которое было в предыдущие моменты, т.е. о цуге говорить не правомерно. Покажем, что это не так и понятие «цуг» справедливо не только для одного атома, но и в случае, когда их много.

Результирующее колебание в какой-то точке представляет собой сумму N колебаний с одной частотой ω , но с различными начальными фазами:

$$\sum_i A_i \cos(\omega t + \alpha_i) = \cos \omega t \sum_i A_i \cos \alpha_i - \sin \omega t \sum_i A_i \sin \alpha_i = a \cos \omega t - b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Значит, колебание в любой момент является гармоническим с какой-то начальной фазой φ .

Рассмотрим поведение φ в течение промежутка времени $\tau < 10^{-8} c$. В начальный момент в колебании в данной точке принимают участие N цугов, возникших в промежуток времени от 0 до $10^{-8} c$ до этого момента. Через τ секунд доля закончившихся (и новых начавшихся) цугов равна $\tau / 10^{-8}$. Если $\tau \ll 10^{-8} c$, их вкладом в общее колебание (по сравнению со всеми оставшимися) можно пренебречь, т.е. фаза останется той же, и понятие «цуг» применимо. Таким образом, при разности хода порядка сантиметров волны остаются когерентными.

Рассмотрим ситуацию на рисунке. Первый луч, прошедший в среде с n_1 путь S_1 , в точке Р внесет вклад

$$A_1 \cos \omega \left(t - \frac{S_1}{v_1} \right), \text{ а второй луч - } A_2 \cos \omega \left(t - \frac{S_2}{v_2} \right).$$

Тогда разность фаз в точке Р равна

$$\delta = \omega \left(\frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 S_2 - n_1 S_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1),$$

где Δ - разность оптических длин, λ_0 - длина волны в вакууме.

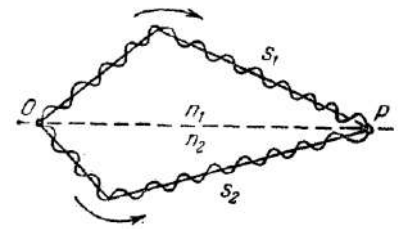
Если $\Delta = \pm m \lambda_0$, т.е. $\delta = \pm 2m\pi$, то колебания в точке Р происходят в фазе – условие максимума. Если же $\Delta = \pm (m + 1/2) \lambda_0$, т.е. $\delta = \pm (2m + 1)\pi$, то колебания в противофазе – условие минимума. Здесь $m = 0, 1, 2, \dots$

Для максимума оптическая разность хода должна равняться целому числу длин волн в вакууме (четному числу полуволен), а для минимума – нечетному числу длин полуволен.

Рассмотрим 2 узкие щели S_1 и S_2 , перпендикулярные плоскости рисунка.

Пусть $x \ll l$. Для пройденных путей получим

$$S_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2 \quad \text{и} \quad S_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2,$$



$$S_2^2 - S_1^2 = 2xd \Rightarrow \underbrace{(S_2 + S_1)}_{2l} \underbrace{(S_2 - S_1)}_{\Delta S} = 2xd \Rightarrow \Delta S = \frac{xd}{l}$$

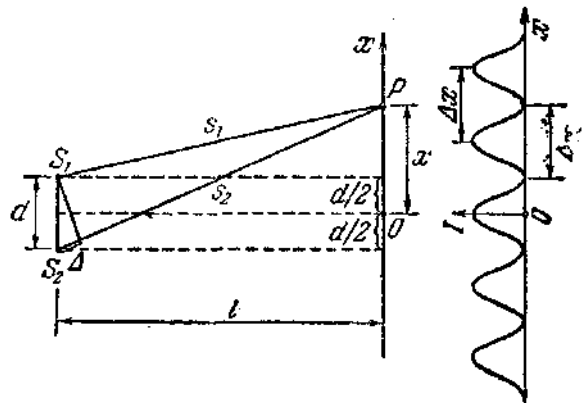
Оптическая разность хода равна

$$\Delta = n\Delta S = \frac{nxd}{l}. \text{ При максимуме она равна}$$

$\pm m\lambda_0$, при минимуме $\pm(m + 1/2)\lambda_0$, откуда находим

$$x_{\max} = \pm \frac{m\lambda_0 l}{nd} = \pm m \frac{l}{d} \lambda, \quad x_{\min} = \pm(m + \frac{1}{2}) \frac{l}{d} \lambda,$$

где λ - длина волны в среде.



Назовем расстояние между двумя соседними максимумами расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами – шириной полосы (см. рисунок). Они одинаковы и равны $\Delta x = \frac{l}{d} \lambda$.

При расстоянии между щелями d , сравнимом с расстоянием до экрана l , величина Δx имеет порядок длины волны λ , и интерференционная картина плохо различима. Надо, чтобы было $d \ll l$.

Если $I_1 = I_2 = I_0$, то $I = 2I_0(1 + \cos\delta) = 4I_0 \cos^2(\delta/2)$. Поскольку $\delta \sim \Delta \sim x$, то I зависит от $x/2$ как косинус в квадрате (см. рисунок).

Если свет монохроматический, то имеем чередующиеся темные и светлые полосы. Если свет белый, то разные длины волн имеют максимумы в разных точках, и картина смазывается.

Измерив $\Delta x, l$ и d , можно найти длину волны λ .

Примечание.

Все изложенные соображения справедливы для волн, колебания в которых происходят вдоль одной оси. Рассмотренная интерференция имеет место в случае волн, либо линейно поляризованных вдоль одной и той же оси, либо неполяризованных (тогда условия выполняются для всех направлений в плоскости, перпендикулярной направлению распространения). В других случаях, рассматривая возможную интерференцию, необходимо учитывать характер поляризации волн.

§14. Временная и пространственная когерентность.

Описанное выше – идеальная абстракция. Всякая реальная волна представляет собой наложение волн с частотами в конечном диапазоне. Кроме того, амплитуда и фаза претерпевают случайные изменения. Поэтому за какое-то время колебание забывает начальную фазу и становится некогерентным самому себе начальному. Это время называется временем когерентности $t_{\text{ког}}$.

Предположим, что частоты колебаний, возбуждаемых в точке двумя пришедшими волнами, различаются на величину $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$. Тогда разность фаз $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 + t\Delta\omega$ не будет постоянной, она будет расти со временем. Время когерентности $t_{\text{ког}}$ определим как время, за которое изменение разности фаз достигает значения π :

$$t_{\text{ког}} = \pi / \Delta\omega = \pi / \Delta(2\pi c / \lambda_0) = \lambda_0^2 / 2c\Delta\lambda$$

Величина $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$ называется длиной когерентности. Мы показали, что она по порядку величины равна $l_{\text{ког}} = \lambda_0^2 / \Delta\lambda$. Квазимонохроматический свет с $\lambda \approx 500$ нм и $\Delta\lambda \approx 1$ нм имеет длину когерентности порядка 0,25 мм, излучение He-Ne лазера – 2,5 метра.

Разность хода при интерференции для максимума m -го порядка равна $\Delta_m = \pm m\lambda_0$. Когда она достигнет значения $l_{\text{ког}}$, полосы станут неразличимы. Поэтому предельный порядок различимых полос равен $m_{\text{пред}} = \lambda_0 / \Delta\lambda$.

Вышесказанное можно сравнить с семейным сходством. Дети похожи на родителей – это естественно. Они могут быть похожи на дедушек и бабушек. Но похожесть на далеких предков уже почти исключена. Временной период, на котором похожесть еще существует, аналогичен времени когерентности. Не надо принимать эту аналогию слишком буквально. В генетике бывают всякие чудеса. Например, ген раскосости может проявляться очень долго. В физике все проще.

Еще одна аналогия из той же оперы. Мы похожи на родных братьев и сестер, иногда на двоюродных, но похожесть на пяти- или шести- юродных уже исключена. Речь идет о похожести не вдоль времени, а в одном поколении. В физике это называют пространственной когерентностью. Пусть волна падает на две щели. Будем ли мы наблюдать интерференцию? Если щели далеко друг от друга, то интерференции не будет. Сближая их, мы в какой-то момент добьемся когерентности. Значит, колебания в достаточно близких точках когерентны. Назовем это расстояние радиусом когерентности. Можно показать, что $\rho_{\text{ког}} = \lambda / \varphi$, где φ - угловой размер источника света. Например, угловой размер Солнца

равен примерно 0,01 радиана, $\lambda \approx 0,5$ мкм, значит, $\rho_{\text{ког}} \approx 50$ мкм=0,05 мм. Значит, если щели освещать от Солнца, их надо располагать на расстоянии 50 мкм, что трудно.

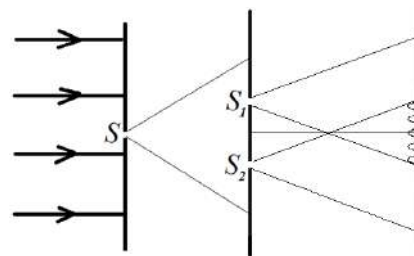
Все пространство, занимаемое волной, можно разбить на части, в которых волна сохраняет когерентность. Объем такой части, называемый объемом когерентности, равен произведению длины когерентности на площадь круга радиусом $\rho_{\text{ког}}$.

$\rho_{\text{ког}}$ световой волны около поверхности светящегося тела порядка нескольких длин волн. По мере удаления он растет. Излучение лазера обладает огромной временной и пространственной когерентностью. У выходного отверстия лазера пространственной когерентностью обладает все сечение пучка!

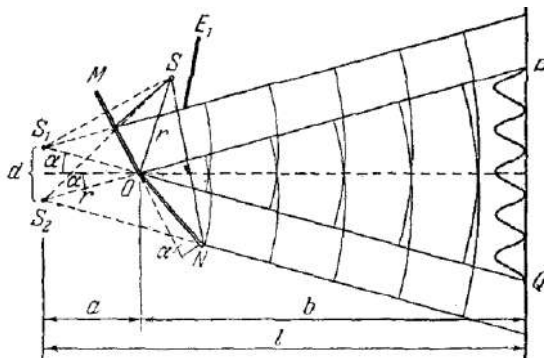
§15. Способы наблюдения интерференции.

1) Опыт Юнга.

Юнг был первым, кто понял, что нельзя наблюдать интерференцию при сложении волн от двух независимых источников. Если бы не было первого экрана, а освещение было бы, например, от Солнца, то волны в щелях не были бы когерентными. Поэтому в его опыте щели S_1 и S_2 освещались светом одного источника S .

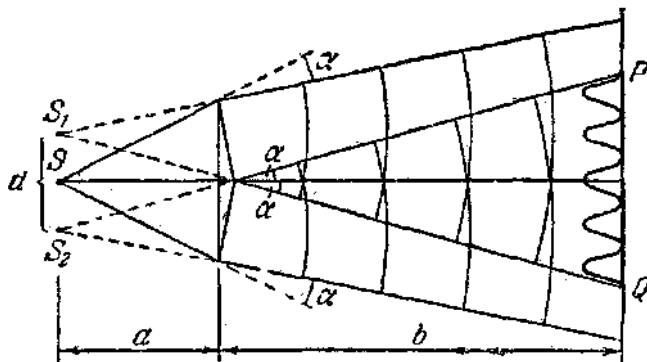


2) Зеркала Френеля - два плоских пересекающихся зеркала MO и ON.



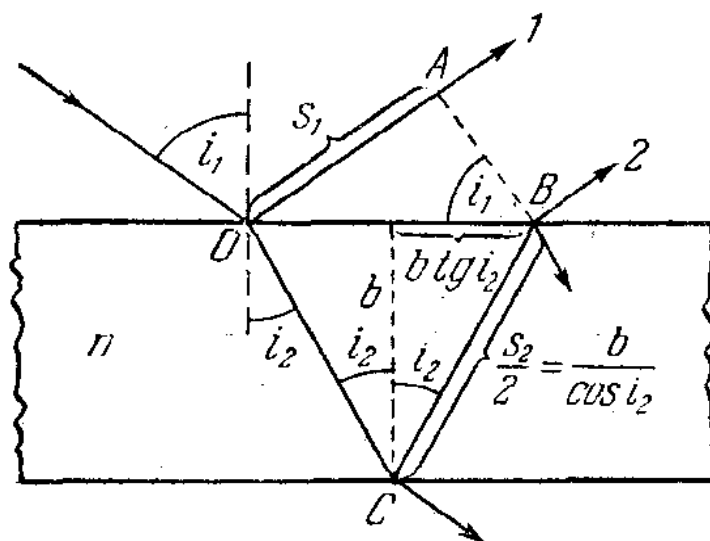
3) Бипризма Френеля.

Как и в предыдущем случае, создаются две когерентные волны, исходящие из мнимых источников S_1 и S_2 .



§16. Интерференция при отражении от тонких пленок.

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$$



Если на пути лучей 1 и 2 поставить собирающую линзу, то они сойдутся в одной из точек фокальной плоскости и будут интерферировать. Роль линзы может выполнять глаз. Найдем разность фаз этих лучей.

$$\Delta = n \cdot (OC + CB) - 1 \cdot AO = nS_2 - S_1$$

$$\frac{S_2}{2} = \frac{b}{\cos i_2}, S_1 = OB \sin i_1 = 2b \cdot \operatorname{tg} i_2 \sin i_1$$

$$\Delta = n \frac{2b}{\cos i_2} - 2b \cdot \operatorname{tg} i_2 \sin i_1 = \frac{2b}{\cos i_2} (n - \sin i_2 \sin i_1) = \frac{2b}{n \cos i_2} (n^2 - \sin^2 i_1)$$

Учтя, что $n \cdot \cos i_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 i_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}$, получим окончательно

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}$$

. Мы нашли оптическую разность хода лучей 1 и 2. Но при вычислении разности фаз этих лучей надо учесть еще и возможность изменения фазы при отражении. Луч 1 отражается от оптически более плотной среды, поэтому его фаза меняется на π , луч 2 отражается от менее оптически плотной среды, поэтому фазу не меняет. Дополнительную разность фаз можно учесть, прибавив к разности хода (или вычтя из нее) $\lambda_0 / 2$. Итоговая оптическая разность хода равна $\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \lambda_0 / 2$.

Результат интерференции зависит от величины Δ : если она равна $m\lambda_0$, то будет максимум, а если $(m + 1/2)\lambda_0$ - то минимум. Таким образом, условие максимума имеет вид:

$$2b \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} = (m + 1/2)\lambda_0$$

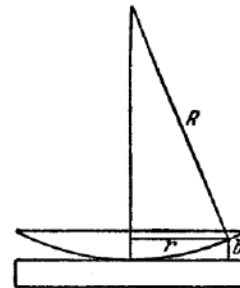
Для временной когерентности надо $\Delta < l_{\text{ког}}$, откуда $2b < \lambda_0^2 / \Delta \lambda_0$. Если $\lambda_0 = 500$ нм, $\Delta \lambda_0 = 10$ нм, то $b < 10^{-5}$ м (10 мкм). Для пространственной когерентности надо, чтобы

расстояние между лучами было меньше радиуса когерентности. Как мы видели, $\rho_{\text{ког}}$ солнечного света $\approx 0,05$ мм, т.е. при немалых углах падения толщина b должна быть меньше 50 мкм.

Кольца Ньютона.

Это еще один пример интерференции в тонких пленках. На плоскость кладется плоско-выпуклая линза с большим радиусом кривизны. Роль тонкой пленки играет зазор между линзой и плоскостью.

При нормальном падении света мы увидим чередующиеся темные и светлые кольца. Нетрудно показать, что их радиусы описываются формулой $r_m = \sqrt{0,5R\lambda_0(m-1)}$.



Четным значениям m соответствуют светлые кольца, а нечетным – темные.

Просветление оптики.

Как было показано ранее, при прохождении света через каждую поверхность линзы отражается примерно 4% падающего света. В сложных объективах такие отражения многократны, и в результате теряется значительная часть светового потока. Кроме того, возникают мешающие работе блики. Для уменьшения отражения на свободные поверхности линзы наносится пленка с другим коэффициентом преломления n . Ее толщина подобрана так, чтобы волны, отраженные от обеих ее плоскостей, гасили друг друга. Особенно хорошо отражение гасится, если $n = \sqrt{n_{\text{линзы}}}$. В этом случае интенсивности обеих отраженных волн одинаковы, и гашение становится более эффективным.

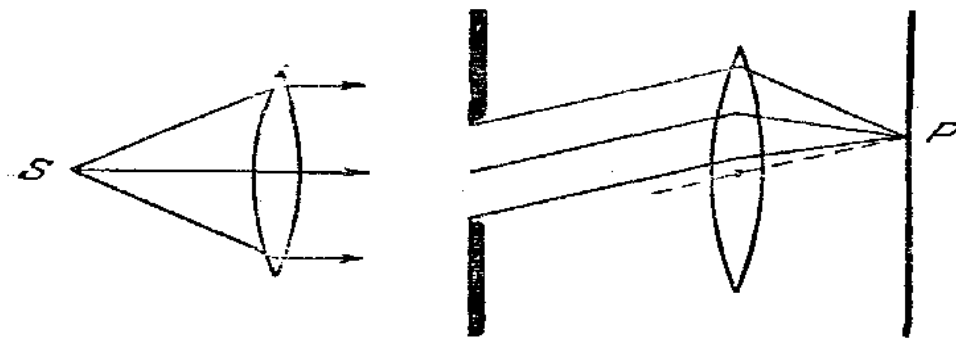
§17. Дифракция света.

Дифракция – это совокупность явлений при распространении света в среде с препятствиями, связанных с отклонениями от геометрической оптики. Различия между дифракцией и интерференцией, по сути, нет. Суть в перераспределении световых потоков при суперпозиции волн. Принято называть интерференцией случай наложения конечного числа лучей, а дифракцией – бесконечного, т.е. источники расположены непрерывно. Поэтому говорят об интерференции от двух узких щелей, но о дифракции на щели.

Наблюдают дифракцию обычно так: на пути световой волны ставится непрозрачная преграда, закрывающая часть волновой поверхности, за ней расположен экран.

Различают два вида дифракции – по Френелю и по Фраунгоферу. Если лучи, падающие на препятствие и уходящие от него, образуют параллельные пучки, то это дифракция в параллельных лучах, т.е. дифракция по Фраунгоферу. Для наблюдения дифракции по

Фраунгоферу за источником света S и перед точкой наблюдения P располагают по линзе, причем так, чтобы точки S и P располагались в фокальных плоскостях линз.

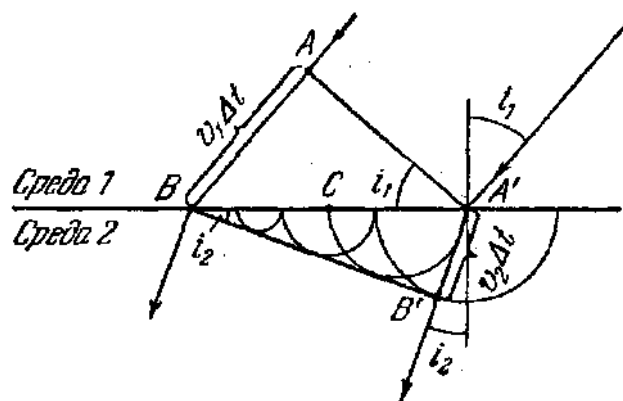


Пример на рисунке. В противном случае имеем дифракцию по Френелю.

§18. Принцип Гюйгенса-Френеля.

Гюйгенс: каждая точка, до которой доходит волна, становится источником вторичных волн; огибающая вторичных волн дает положение фронта волны в последующие моменты.

Из принципа Гюйгенса можно вывести, например, закон преломления. На границу двух сред падает плоская волна с фронтом AA' . Фронт преломленной волны можно найти как огибающую вторичных волн, источники которых находятся на поверхности раздела сред. Различные участки AA' достигнут границы не одновременно. Поэтому возбуждение



вторичной волны в точке A' начнется раньше, чем в точке B , на время, необходимое для того, чтобы волна дошла от точки A до точки B . Из рисунка видно, что преломленная волна

плоская и отношение синусов углов равно отношению скоростей света в средах: $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

Если первая среда – вакуум, то $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{c}{v_2} = n_2$. Закон доказан.

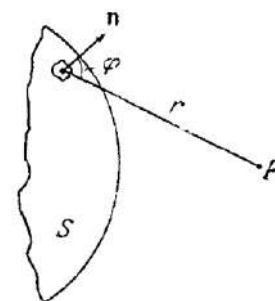
Физические основания принципа Гюйгенса вполне очевидны. Теория электромагнитных волн утверждает, что переменное поле в точке приводит к излучению из нее сферических волн во всех направлениях. Значит, каждая точка, до которой дошла волна, излучает вторичные волны, и все эти волны накладываются друг на друга, что и формирует фронт в следующие моменты. Однако этот принцип не дает информации об амплитудах, или интенсивностях волн, распространяющихся в разных направлениях.

Кроме того, он создает ряд парадоксов. Рассмотрим, например, луч от фонарика. Тогда каждая точка его волновой поверхности становится источником вторичных волн. Эти волны идут от нее во все стороны. Почему же мы не видим лучей, идущих вбок, а также назад? Как из принципа Гюйгенса получить закон прямолинейного распространения света?

Ситуация кажется совсем запутанной. Ведь если каждая точка излучает вторичные волны, а каждая точка, до которой дошла вторичная волна, излучает третичные и т.д., то все пространство будет заполнено бегущими во всех направлениях волнами.

Все эти вопросы снимаются, если учесть дополнение к принципу Гюйгенса, которое сделал Френель: амплитуду результирующей волны в любой точке надо искать, учитывая интерференцию вторичных волн.

В прошлом семестре мы показали, что амплитуда сферической волны убывает с расстоянием как $1/r$. Поэтому амплитуда вторичной волны, излученной площадкой dS , (см. рис.) пропорциональна dS/r . В точке P создается колебание $dE = K \frac{a_0 \cdot dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$. Коэффициент K зависит от угла φ . Тогда полная амплитуда в точке P равна



$$E = \int_{(S)} K(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS \quad (*)$$

Это математическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля.

В обоснование принципа Гюйгенса-Френеля можно привести следующие рассуждения. Пусть на пути волны стоит непрозрачный экран. Всюду за ним интенсивность света равна нулю. Это вызвано тем, что упавшая на экран волна вызывает колебания электронов экрана. Они излучают электромагнитные волны. Поле за экраном равно сумме первичной волны и всех вторичных. Значит, амплитуды и фазы вторичных волн таковы, что при суперпозиции с первичной волной везде за экраном получается ноль. То есть, если в точке P первичная волна дает $A_{перв} \cos(\omega t + \alpha)$, то все вторичные в сумме дают $A_{втор} \cos(\omega t + \alpha - \pi)$, причем $A_{перв} = A_{втор}$. Это значит, что при вычислении амплитуды в точке P, порождаемой волной от реального источника, ее можно заменить совокупностью вторичных источников, расположенных на волновой поверхности. Это и есть принцип Гюйгенса-Френеля.

Разобьем экран на две части: пробку произвольной формы и остальную часть. Пока пробка на месте, амплитуда в точке P равна нулю:

$$E_P = A_{перв} \cos(\omega t + \alpha) + A_{пробки} \cos(\omega t + \alpha') + A_{незграды} \cos(\omega t + \alpha'') = 0$$

Если уберем пробку, получим

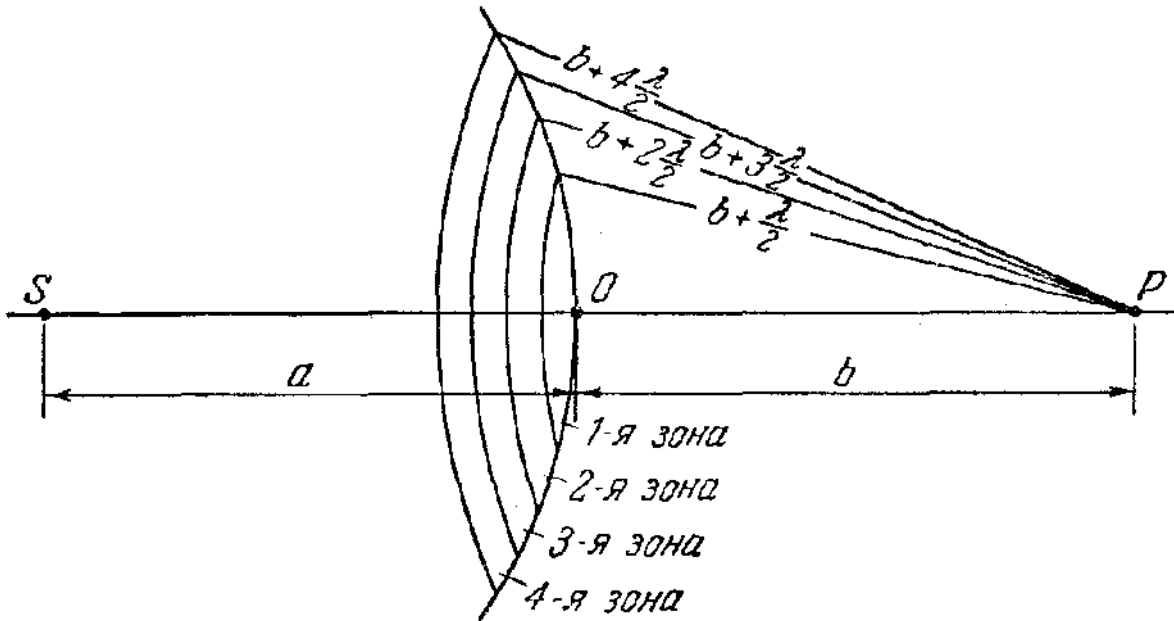
$$E_P = A_{\text{перв}} \cos(\omega t + \alpha) + A_{\text{преграды}} \cos(\omega t + \alpha'') = \\ - A_{\text{пробки}} \cos(\omega t + \alpha') = A_{\text{пробки}} \cos(\omega t + \alpha' - \pi)$$

Таким образом, можно считать, что колебания в точке создаются вторичными источниками в отверстии, ХОТЯ ЭЛЕКТРОНОВ ТАМ НЕТ.

§19. Зоны Френеля.

Вычисления по формуле (*) в общем случае трудны. Но Френель показал, что в случаях с симметрией амплитуду результирующего колебания можно найти простым алгебраическим или геометрическим суммированием.

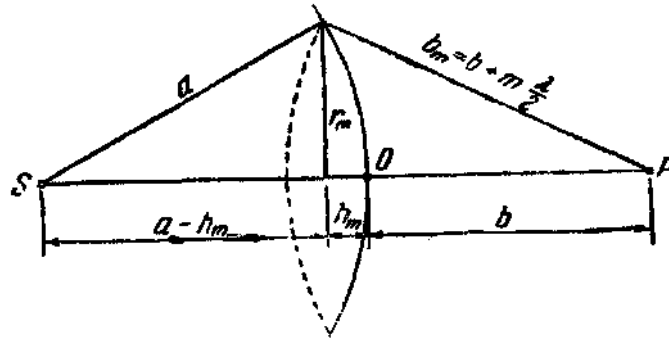
Рассмотрим сферическую волну, идущую из источника S, и найдем амплитуду в точке P. Волновые поверхности симметричны относительно прямой SP. Разобьем поверхность на кольцевые зоны, такие, что расстояния от краев каждой зоны до точки P различаются на $\lambda/2$. Расстояние от внешнего края m-й зоны до точки P равно $b_m = b + m \frac{\lambda}{2}$. Колебания, приходящие в P от аналогичных точек соседних зон, находятся в противофазе. Поэтому и результирующие колебания, создаваемые в P соседними зонами, различаются по фазе на π .



Вычислим площадь m-й зоны ΔS_m : $\Delta S_m = S_m - S_{m-1}$.

Напоминание из геометрии: площадь сферического пояса равна произведению длины большой окружности на высоту пояса.

Найдем высоту сферического пояса h_m (см. следующий рисунок). Выразим r_m по теореме Пифагора из двух треугольников:



$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m \frac{\lambda}{2})^2 - (b + h_m)^2$$

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + \frac{m^2 \lambda^2}{4} - 2bh_m - h_m^2$$

$$h_m = \frac{mb\lambda + m^2 \lambda^2 / 4}{2(a + b)}$$

Поскольку λ мала, пренебрегаем $m^2 \lambda^2 / 4$ и получаем $h_m = \frac{mb\lambda}{2(a + b)}$.

$$S_m = 2\pi a \cdot h_m = \frac{\pi ab}{a + b} m\lambda, \quad \Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab}{a + b} \lambda \text{ не зависит от } m.$$

Площади зон Френеля при не очень больших m одинаковы.

При не очень больших m величина $h_m \ll a$, поэтому $r_m^2 = 2ah_m$ и $r_m = \sqrt{\frac{ab}{a + b} m\lambda}$.

Если $a = b = 1$ м, а $\lambda = 0,5$ мкм, то $r_1 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a + b}} = 0,5$ мм, r_m пропорционален \sqrt{m} .

Расстояния до P растут с ростом m , угол тоже. Все это ведет к тому, что амплитуды в точке P от m -й зоны убывают с ростом m : $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$

Фазы отличаются на π , поэтому $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$

$$\text{Запишем в виде } A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots$$

Будем считать, что m -я амплитуда равна среднему арифметическому $(m-1)$ -й и $(m+1)$ -й:

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}. \text{ Тогда } A = \frac{A_1}{2}. \text{ Амплитуда, созданная всей волновой поверхностью,}$$

равна половине амплитуды от первой зоны Френеля, т.е., если оставить открытой только 1-ю зону, то амплитуда в точке P будет в 2 раза, а интенсивность – в 4 раза больше, чем если бы открыто было все! Иначе говоря, действие всей поверхности эквивалентно половине

действия центральной зоны Френеля. По произведенной выше оценке она имеет размеры порядка долей мм. Следовательно, свет от точки S к точке P распространяется как бы в пределах очень узкого прямого канала, т.е. практически прямолинейно.

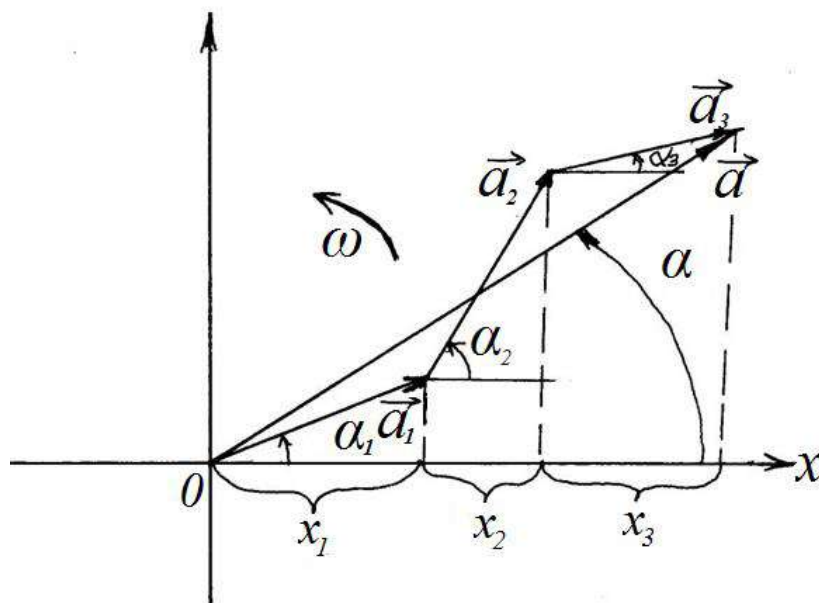
Метод векторных диаграмм.

Явления дифракции и интерференции представляют собой сложение некоторого количества гармонических колебаний одной частоты. При решении таких задач часто пользуются методом векторных диаграмм.

Гармоническое колебание $x = a \cos(\omega t + \alpha)$ геометрически может быть представлено проекцией на произвольное направление x вектора \vec{a} , вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω . Длина этого вектора равна амплитуде колебания, а его первоначальное направление образует с осью x угол, равный начальной фазе колебания α . Используя это геометрическое толкование, решим задачу о сложении трех гармонических колебаний одинаковой частоты и направления.

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2) + a_3 \cos(\omega t + \alpha_3)$$

Построим вектор \vec{a}_1 (под углом α_1 к оси x), изображающий первое колебание. Прибавим к нему по правилу треугольника вектор \vec{a}_2 , образующий угол α_2 с осью x , и вектор \vec{a}_3 , образующий с ней угол α_3 . Сумма проекций этих векторов на ось x равна проекции на эту ось вектора $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$: $x = x_1 + x_2 + x_3$.



Приведем эту векторную диаграмму во вращение против часовой стрелки с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через начало координат - точку O. При этом

равенство $x = x_1 + x_2 + x_3$ сохранится неизменным во времени, хотя сами проекции x, x_1, x_2 и x_3 будут теперь пульсировать по гармоническому закону с одинаковой частотой ω и с начальными фазами $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ и α_3 соответственно.

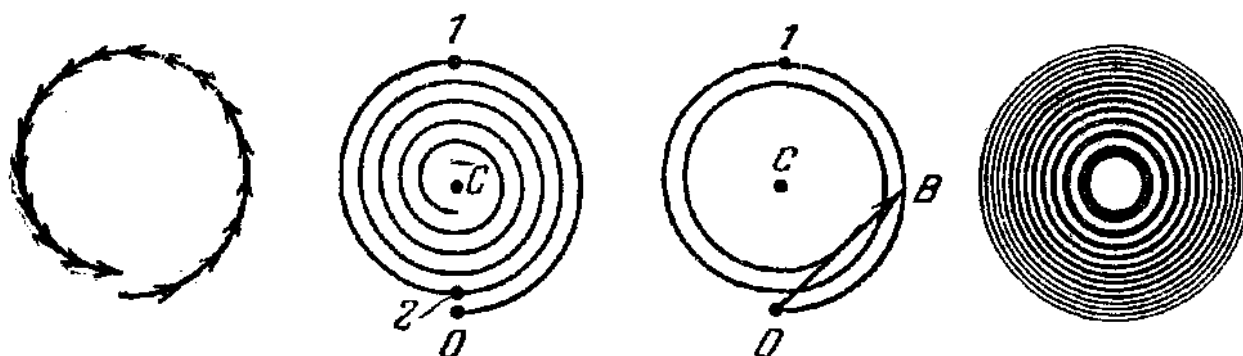
Таким способом можно складывать любое количество гармонических колебаний одной частоты. Сложение векторов можно производить как по правилу треугольника (как на рисунке), так и по правилу параллелограмма.

В результате сложения трех колебаний

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2) + a_3 \cos(\omega t + \alpha_3)$$

возникает новое колебание $x = a \cos(\omega t + \alpha)$, частота которого ω совпадает с частотой складываемых колебаний. Его амплитуда равна модулю вектора $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Используем метод векторных диаграмм для рассмотрения дифракции. Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны, аналогичные зонам Френеля, но гораздо меньшие по ширине, так что разность хода от краев зоны до точки Р равна $\delta \ll \lambda$. Колебания от каждой зоны изобразим вектором с длиной, равной амплитуде, а угол между этим вектором и направлением, принятым за начало отсчета, будем считать равным начальной фазе. Выше показано, что амплитуда медленно убывает при переходе от зоны к зоне. Каждый следующий вектор повернут относительно предыдущего на один и тот же угол $\delta\varphi$. При $\delta\varphi \rightarrow 0$ получим спираль.



Участок 0-1 – первая зона Френеля, вектор 01 изображает колебание, возбужденное этой зоной в точке Р. Колебания от 1-й и 2-й зон находятся в противофазе, поэтому 01 и 12 направлены в противоположные стороны. Вектор ОС создан всей волновой поверхностью:

$$|OC| = \frac{1}{2}|01|, \text{ как и ранее. } OB - \text{ первая половина первой зоны: } |OB| = |OC|\sqrt{2}.$$

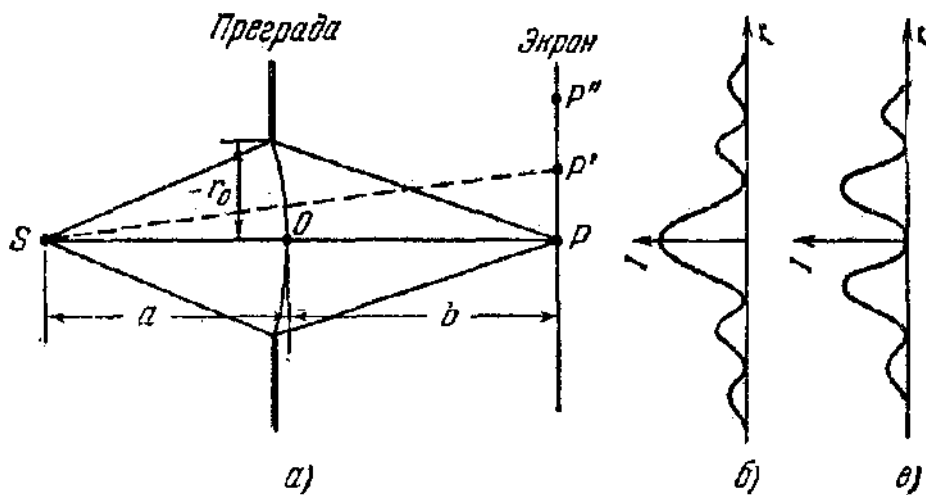
Колебания от четных и нечетных зон находятся в противофазе, т.е. ослабляют друг друга. Если поставить на пути волны пластины, закрывающие четные или нечетные зоны, то интенсивность в точке Р резко возрастет. Такая пластинка называется зонной и работает как

собирающая линза. На последнем рисунке изображена такая пластинка, перекрывающая четные зоны Френеля.

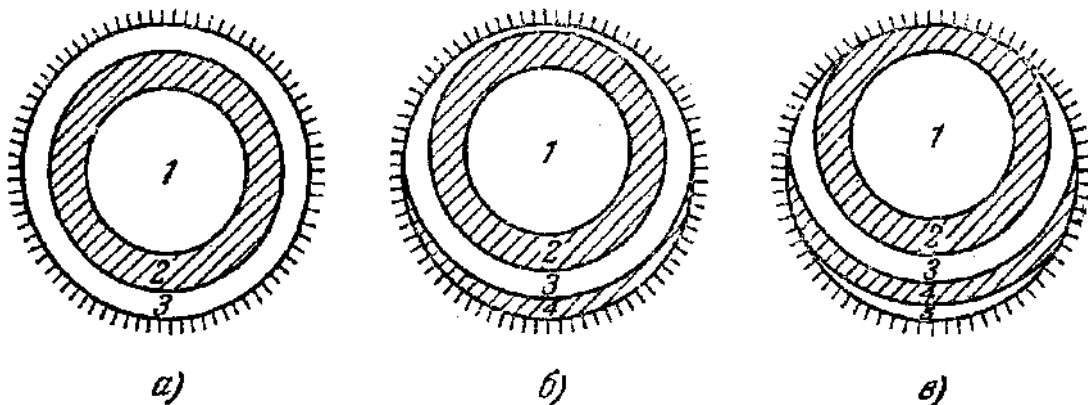
Еще больший эффект, если не перекрывать эти зоны, а изменить их фазы на π . Это можно сделать с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным или нечетным m , отличается на определенную величину. Это дает удвоение амплитуды, т.е. учетверение интенсивности по сравнению с зонной пластинкой. Такая пластинка называется фазово-зонной.

§20. Дифракция от круглого отверстия и диска.

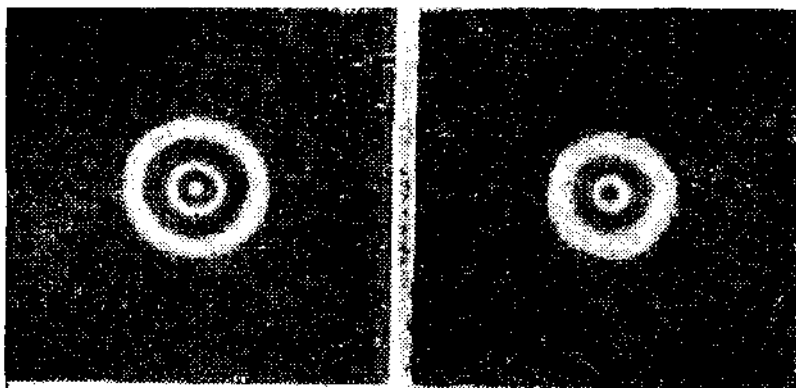
1) Поставим на пути сферической волны непрозрачную преграду с вырезанным в ней отверстием радиуса r_0 . Выясним характер дифракционной картины, которая будет наблюдаться на экране, удаленном от преграды на расстояние b .



Вследствие симметрии картины относительно SP интенсивность на экране зависит только от расстояния до точки P . В самой точке P будет максимум или минимум, в зависимости от того, нечетное или четное число зон открыто. Пусть, например, открыто 3 зоны. Тогда в точке P максимум (следующий рис.а). В точке P' края отверстия закроют часть 3-й зоны, появится часть 4-й (рис.б), в итоге интенсивность света уменьшится и при некотором положении P' станет равна нулю.



В точке P'' уйдет часть 2-й, и появится часть 5-й, в итоге интенсивность вырастает. Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия представляет собой чередование светлых и темных колец. В центре будет либо светлое, либо темное пятно (см. рисунок).



Если отверстие так мало, что открывает только часть 1-й зоны, то на экране будет размытое светлое пятно, чередования колец не будет. Если в отверстии укладывается много зон Френеля, то чередование светлых и темных колец будет только на границе геометрической тени, а в центре интенсивность будет примерно постоянна.

Если двигать экран вдоль SP , то число зон в отверстии будет меняться, так как r_1 зависит от a и b , и в центре будет то максимум, то минимум.

2) Пусть теперь между источником и экраном находится круглый непрозрачный диск радиуса r_0 . Если он закрывает первые m зон Френеля, то амплитуда в точке P равна

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2}\right) + \left(\frac{A_{m+3}}{2} - A_{m+4} + \frac{A_{m+5}}{2}\right) + \dots$$

Все выражения в скобках равны нулю. Поэтому $A = A_{m+1} / 2$.

При небольшом числе закрытых зон $A = A_{m+1} / 2 \approx A_1 / 2 = A_0$, т.е. интенсивность в точке P будет примерно такая же, как при отсутствии диска. При переходе к точке P' диск будет перекрывать часть $(m+1)$ -й зоны, одновременно с этим откроется часть m -й зоны. Это приведет к уменьшению интенсивности. При некотором положении P' интенсивность станет равной нулю. При дальнейшем удалении от точки P интенсивность будет расти, и в точке P'' достигнет максимума. Таким образом, дифракционная картина от круглого диска представляет собой чередование светлых и темных колец, причем в центре всегда будет светлое пятно.

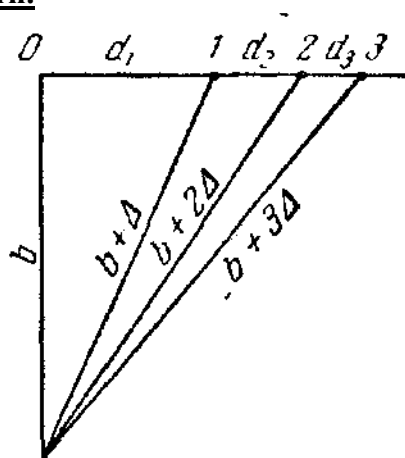
Если диск закрывает только небольшую часть первой зоны, то он совсем не отбрасывает тени, т.е. освещенность везде такая, какая была при отсутствии преграды. Если

диск закрывает много зон Френеля, то $A_{m+1} \ll A_0$ и светлого пятна в центре нет, что соответствует привычной для нас картине. Чередование колец, если и будет, то только у границы геометрической тени.

В 1818 году на конкурсе работ, посвященных дифракции, произошел инцидент между Пуассоном и Френелем. Устроители конкурса были сторонниками корпускулярной теории света. Френель представил на конкурс работу, защищающую волновую природу. Пуассон обратил внимание на то, что из расчетов Френеля следует “нелепый” вывод: в центре тени, отбрасываемой непрозрачным диском, всегда должно быть светлое пятно. Араго тут же произвел опыт, и оказалось, что такое пятно действительно есть. Это принесло победу и всеобщее признание волновой природы света.

§21. Дифракция от прямолинейного края полуплоскости.

Пусть на непрозрачную полуплоскость нормально к ней падает плоская волна (на рисунке сверху вниз). За полуплоскостью на расстоянии b находится экран. Найдем интенсивность в произвольной точке P .



Разобьем открытую часть волновой поверхности на зоны, имеющие вид полосок, параллельных краю полуплоскости (рис.1). Пусть расстояния от точки P до краев соседних зон различаются на величину Δ . Каждая из зон вносит вклад в амплитуду волны в точке P . При этом колебания, создаваемые соседними зонами, отличаются по фазе на величину $\Delta\varphi$. Для выяснения зависимости амплитуды вклада зоны от ее номера t оценим площади зон.

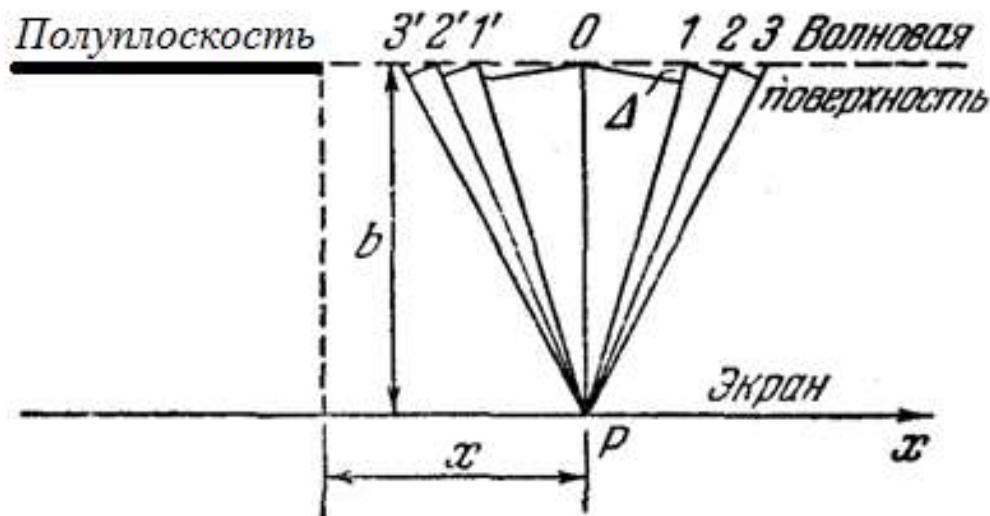


Рис.1

Легко видеть, что

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_m = \sqrt{(b + m\Delta)^2 - b^2} = \sqrt{2mb\Delta + m^2\Delta^2} = \sqrt{2mb\Delta}.$$

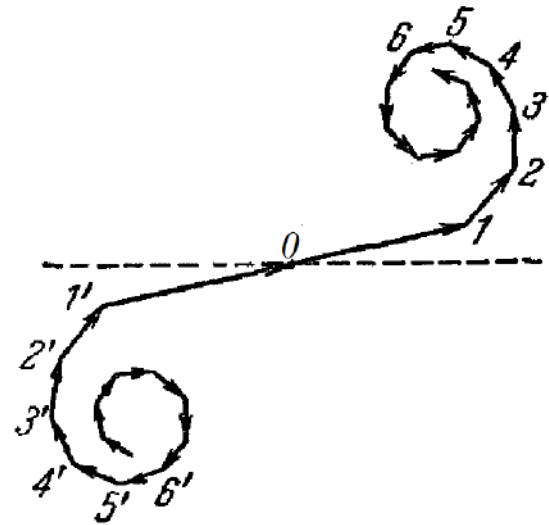
(Мы учли, что зоны узкие, т.е. $\Delta \ll b$).

При $m = 1$ имеем $d_1 = \sqrt{2b\Delta}$.

Вычтя из $d_1 + d_2 + \dots + d_m = d_1\sqrt{m}$ равенство $d_1 + d_2 + \dots + d_{m-1} = d_1\sqrt{m-1}$, получим $d_m = d_1(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})$.

Расчет по этой формуле дает $d_1 : d_2 : d_3 : d_4 \dots = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 \dots$

В таких же соотношениях находятся и площади зон. Поэтому амплитуды колебаний, создаваемых зонами в точке P , при малых m убывают быстро, потом – медленнее. Поворот при каждом изломе происходит на один и тот же угол $\Delta\varphi$, а длины векторов последовательно убывают в согласии с найденной выше пропорцией.



Устремляя $\Delta\varphi$ к нулю, получим гладкую кривую, называемую спиралью Корню

(следующая страница). Уравнение этой спирали можно найти теоретически:

$$\begin{cases} \xi = \int_0^v \cos \frac{\pi u^2}{2} du; \\ \eta = \int_0^v \sin \frac{\pi u^2}{2} du \end{cases}$$

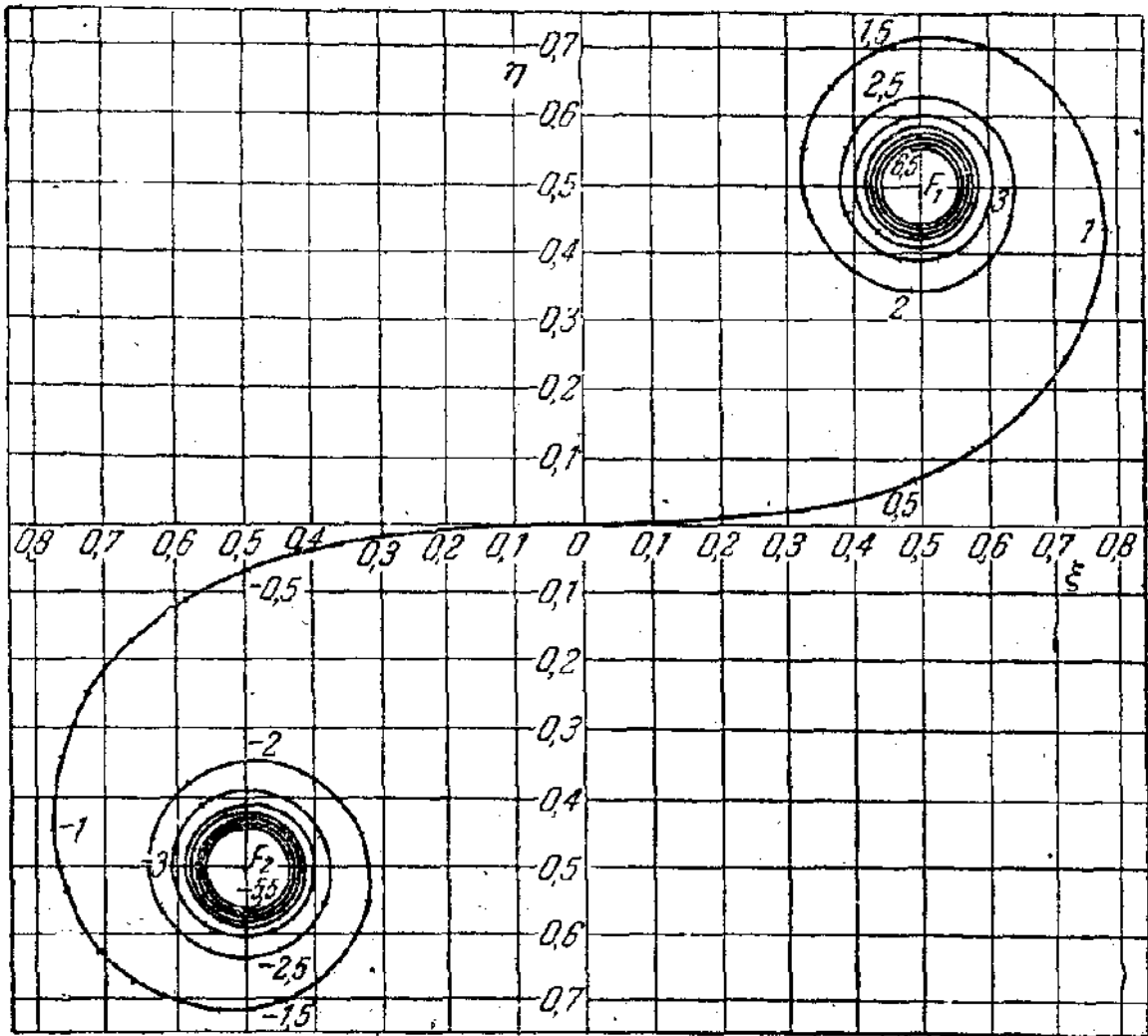
где v - длина кривой от начала координат. Эти выражения называются интегралами Френеля. Они не берутся в элементарных функциях, однако существуют таблицы, по которым можно находить значения интегралов при разных v .

Числа, отмеченные на кривой, соответствуют значениям длины кривой v . В случае плоской волны эта длина связана с расстоянием x' от точки наблюдения P до проекции на

экран бесконечно узкой зоны следующим соотношением: $v = x' \sqrt{\frac{2}{b\lambda}}$. Можно показать, что

угол θ между касательной к кривой и осью абсцисс определяется простой формулой

$$\theta = \frac{\pi}{2} v^2, \text{ т.е. } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ соответствует } v = 1, \theta = \pi \Rightarrow v = \sqrt{2}, \theta = 2\pi \Rightarrow v = 2.$$



Спираль Корню.

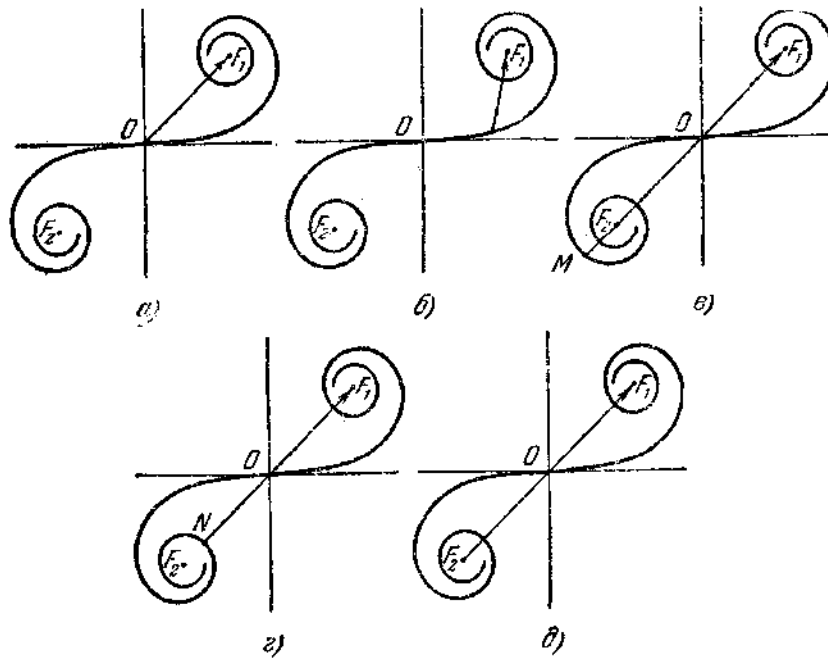


Рис.2.

Спираль Корню дает возможность найти амплитуду светового колебания в любой точке экрана, находящейся на расстоянии x от края геометрической тени. Если точка P находится прямо под краем полуплоскости, т.е. $x = 0$ (рис.1), то все зоны слева от нее будут закрыты полуплоскостью. Колебаниям, создаваемым

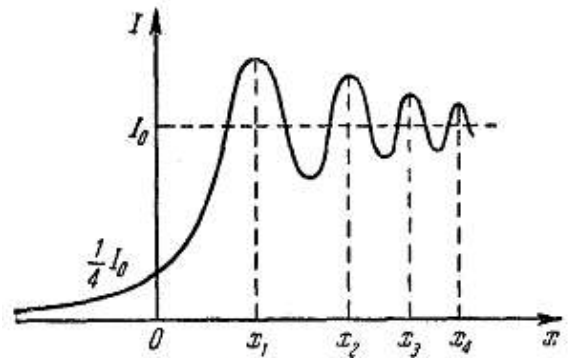


Рис.3

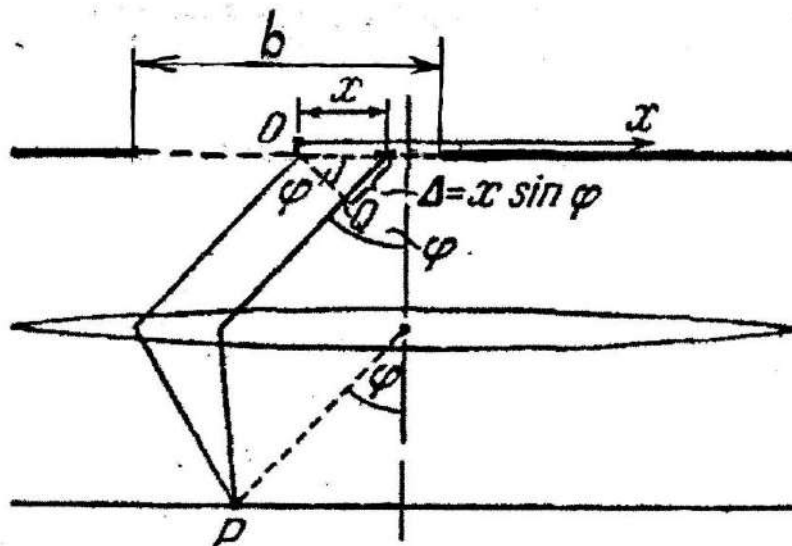
открытыми зонами справа, соответствует правый завиток спирали. Следовательно, результирующее колебание изобразится вектором, начало которого лежит в начале координат, а конец в точке F_1 на графике спирали (рис.2а). При смещении точки P в область геометрической тени полуплоскость будет закрывать уже часть зон справа от P , т.е. начало вектора будет смещаться по кривой в сторону полюса F_1 (рис.2б). В результате амплитуда результирующего колебания будет монотонно стремиться к нулю. Если точка P сдвигается вправо от границы тени, то открывается все больше зон слева от нее, и начало вектора скользит по левому завитку спирали в сторону полюса F_2 . В результате амплитуда проходит ряд максимумов (первый из них равен длине отрезка MF_1 на рис.2в) и минимумов (первый минимум соответствует NF_1 на рис.2г). При полностью открытой волновой поверхности (отсутствие полуплоскости) амплитуда равна длине отрезка F_2F_1 (рис.2д), т.е. ровно в два раза превышает амплитуду на границе геометрической тени (OF_1). Значит, интенсивность на этой границе равна 1/4 интенсивности I_0 , получающейся на экране в отсутствие преград.

Зависимость интенсивности I от расстояния x приведена на рис.3. Видно, что интенсивность в области геометрической тени меняется не скачком, а постепенно стремится к нулю. Справа от границы тени расположен ряд чередующихся максимумов и минимумов. При $b = 1$ м, $\lambda = 0,5$ мкм получим $x_1 = 0,61$ мм, $x_2 = 1,17$ мм, $x_3 = 1,54$ мм, т.е. максимумы располагаются довольно густо. Величины первого максимума и минимума равны $I_1 = 1,37I_0$, $I_2 = 0,78I_0$.

Используя спираль Корню, можно подробно исследовать дифракционную картину от бесконечно длинной щели, считая ее образованной двумя параллельными полуплоскостями.

§22. Дифракция Фраунгофера от щели.

Пусть на бесконечно длинную щель ширины b падает плоская световая волна. За щелью находится собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран. Разобьём открытую часть волновой поверхности на параллельные краям щели элементарные зоны шириной dx . Вторичные волны, посылаемые зонами под углом φ , соберутся в точке Р пересечения побочной оптической оси, параллельной падающим лучам, с фокальной плоскостью.



Линза собирает плоские, а не сферические волны. Поэтому амплитуды, создаваемые зонами в точке Р, не зависят от расстояния до зоны. Это значит, что амплитуда колебания, возбужденного зоной ширины dx в любой точке экрана, равна $dA = c \cdot dx$, где c - const. Обозначим через A_0 сумму амплитуд колебаний, возбуждаемых в любой точке экрана всеми

зонами: $A_0 = \int dA = \int_{-b/2}^{b/2} c \cdot dx = cb$. Отсюда $c = A_0 / b$, $dA = A_0 / b \cdot dx$.

Займёмся фазами. Длины ОР и QР проходятся светом за одно время. Разность фаз образуется на пути $\Delta = x \sin \varphi$. Положим равной нулю фазу колебания, возбуждаемого в точке Р зоной, находящейся в середине щели ($x = 0$). Тогда зона, имеющая координату x ,

создает в Р колебание $dE_\varphi = \frac{A_0}{b} dx \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi\Delta}{\lambda})$

Обозначим $\pi \sin \varphi / \lambda = \gamma$. Тогда

$$E_\varphi = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{A_0}{b} \cdot \cos(\omega t - 2\gamma x) \cdot dx = \frac{A_0}{b\gamma} \sin b\gamma \cos \omega t = A_\varphi \cos \omega t,$$

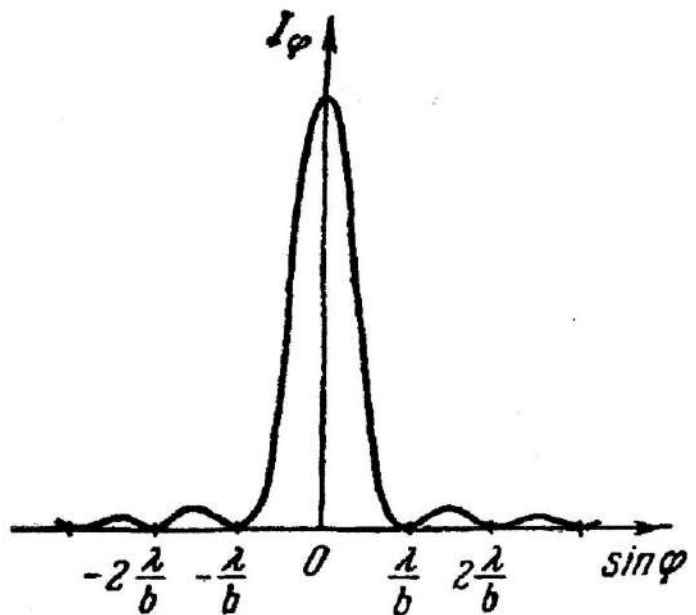
где $|A_\varphi| = \left| A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{\pi b \sin \varphi / \lambda} \right|$ - амплитуда результирующего колебания.

Для точки напротив центра линзы $\varphi = 0$ и $A|_{\varphi=0} = A_0$. Этот результат можно получить и иначе. В точку $\varphi = 0$ все волны приходят в фазе (разность фаз $\Delta = x \sin \varphi = 0$), т.е. все амплитуды складываются, так что $A|_{\varphi=0} = A_0$.

При значениях φ , удовлетворяющих условию $\pi b \sin \varphi / \lambda = \pm k\pi$, т.е.

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (*)$$

амплитуда A_φ обращается в нуль. Таким образом, условие (*) определяет положение минимумов интенсивности. Его можно получить иначе. Величина $b \sin \varphi = \Delta$ - это разность хода от краев щели. Если она равна $\pm k\lambda$, то открытую часть щели можно разбить на $2k$ равных по ширине зон, причем разность хода от краев каждой из них равна $\lambda/2$. Колебания от каждой пары соседних зон находятся в противофазе и гасят друг друга, поэтому $A_\varphi = 0$. Если же $\Delta = \pm(k + 1/2)\lambda$, то число таких зон будет нечетным и в точке будет максимум (но в этом случае это примерно!).



Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)^2}, \quad (**)$$

где I_0 - интенсивность света в середине дифракционной картины (против центра линзы).

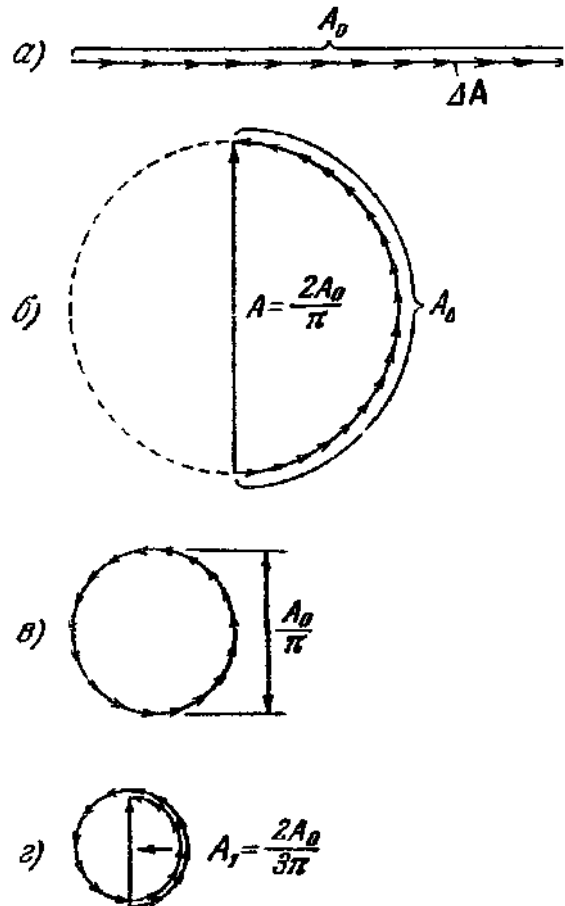
Из (**) видно, что $I(-\varphi) = I(\varphi)$, т.е. дифракционная картина симметрична относительно центра линзы. При смещении щели параллельно линзе картина остается на месте (не меняется). Смещение же линзы сопровождается таким же смещением всей картины.

На рисунке приведен график зависимости (**). Количество минимумов определяется величиной b/λ . Из (*) следует, что $\sin \varphi = \pm k\lambda/b$. Если $b < \lambda$, то минимумов нет вообще и интенсивность монотонно убывает к краям. Границами центрального максимума являются

минимумы номер 1, т.е. $b \sin \varphi = \pm \lambda$, т.е. угловая ширина центрального максимума равна $\delta = 2 \arcsin(\lambda/b)$. Если $b \gg \lambda$, то $\sin \varphi \ll 1$ и $\varphi = \pm \lambda/b$, так что $\delta = 2\lambda/b$.

Решим задачу о дифракции Фраунгофера на щели методом графического сложения амплитуд. Разобьем открытую часть волновой поверхности на очень узкие зоны одинаковой ширины. Колебания от всех зон имеют одинаковые амплитуды ΔA . Но колебания от каждой следующей зоны отстают от предыдущей на одну и ту же величину δ , зависящую от угла φ , определяющего направление на точку Р. При $\varphi = 0$ $\delta = 0$, и векторная диаграмма имеет вид, показанный на рисунке а.

Если $\Delta = b \sin \varphi = \lambda/2$, то колебания от краев щели находятся в противофазе и векторы $\Delta \vec{A}$ расположены вдоль полуокружности длиной A_0 , как показано на рисунке б. Следовательно, для результирующей амплитуды получается значение $A = 2A_0 / \pi$. В случае $\Delta = b \sin \varphi = \lambda$ колебания от краев щели отличаются по фазе на 2π (рис.в). Векторы $\Delta \vec{A}$ расположены вдоль окружности длиной A_0 , и результирующая амплитуда равна нулю – первый минимум. Первый максимум наблюдается при $\Delta = b \sin \varphi = 3\lambda/2$, когда колебания от краев щели отличаются по фазе на 3π . строя последовательно векторы $\Delta \vec{A}$, мы обойдем полтора раза окружность диаметра $A_1 = 2A_0 / 3\pi$ (рис.г). Тогда интенсивность равна $I_1 = (2/3\pi)^2 I_0 \approx 0,045 I_0$. Аналогично можно найти и относительные интенсивности других максимумов. В итоге получим



$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \dots = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 : \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : \dots$$

Таким образом, центральный максимум значительно превосходит по интенсивности остальные максимумы; в нем сосредоточена основная доля светового потока, прошедшего сквозь щель.

Если ширина щели значительно меньше расстояния от щели до экрана, дифракция по Фраунгоферу будет иметь место и в отсутствие линзы между щелью и экраном (падающая на

щель волна должна быть плоской). В этом случае лучи, идущие в точку Р от краев щели, будут практически параллельными (см. §17), так что все полученные выше результаты остаются справедливыми.

§23. Спектральный анализ и дифракционная решетка.

Дифракционная решетка – это прибор, позволяющий с большой точностью анализировать спектральный состав электромагнитного излучения. Именно спектральный анализ, т.е. изучение спектров электромагнитных волн, приходящих от далеких звезд, дает информацию о происходящих там процессах.

Спектры подразделяются на три класса:

1. Линейчатый спектр излучения. Эмиссионные линии испускаются нагретым газом, находящимся в разреженном состоянии.

2. Непрерывный спектр. Эти виды спектров получаются у твёрдых тел, жидкостей, а также горячих непрозрачных газов.

3. Линейчатый спектр поглощения образуется, если излучение от горячего тела, обладающего непрерывным спектром, проходит сквозь разреженную холодную среду. Он представляет собой тёмные линии поглощения на непрерывном спектре.

Атомы каждого элемента испускают излучение определенных длин волн. Это позволяет определить, какие элементы входят в состав данного вещества. Спектры определяются свойствами электронных оболочек атомов и молекул, и воздействием структуры и массы атомных ядер на положение энергетических уровней.

В настоящее время все спектры химических элементов определены и сведены в специальные таблицы. Спектральный анализ позволил открыть некоторые неизвестные элементы, например, рубидий и цезий. И эти новые элементы иногда получали названия, соответствующие цветам преобладающих линий спектра: рубидий даёт тёмно-красные линии, а цезий (небесно-голубой) – голубые. Только спектральный анализ помог определить химический состав нашего светила и других звёзд. Использование иных методов для достижения этой цели не представляется возможным. Как оказалось, и на нашей планете, и на далёких звёздах присутствуют одинаковые химические элементы.

Спектральный анализ, базирующийся на принципе Доплера, позволяет определять скорости движения небесных тел по лучу зрения. У приближающегося к наблюдателю источника света укорачиваются длины волн, а если источник удаляется, то длины волн будут увеличиваться. Полученная спектрограмма сравнивается с эталонами, которыми служат спектрограммы земных источников излучения, например, неоновой лампы. Относительно эталонного неподвижного спектра определяется сдвиг спектральных линий наблюдаемого объекта. Этот сдвиг очень мал, и величина его исчисляется десятными и сотыми долями

миллиметра. По нему определяется скорость объекта, испустившего анализируемое излучение.

Применение эффекта Доплера сделало возможным измерение скоростей тысяч звёзд, газовых туманностей и других внегалактических объектов. Определелись закономерности движения отдельных светил и вращения звёздных систем. Были установлены величины масс галактик и звёздных скоплений. Используя эффект, открытый голландским физиком Зееманом, можно определять параметры космических магнитных полей. Сильные магнитные поля расщепляют линии спектра.

Астрофизика, используя спектральный анализ, узнаёт характеристики, которыми обладают звёзды, газовые облака и другие объекты. Это химический состав, температура, скорость движения, магнитная индукция, давление. Все эти величины определяются только анализом спектральных линий космических объектов.

Сведения о комплексных числах

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^4 = 1$$

$$z = x + yi \text{ - алгебраическая форма}$$

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ - тригонометрическая форма}$$

$$z = \rho e^{i\varphi} \text{ - экспоненциальная форма.}$$

$$e^x = 1 + x + x^2 / 2! + \dots + x^n / n!$$

$$\cos x = 1 - x^2 / 2! + x^4 / 4! - x^6 / 6! + \dots, \quad \sin x = x - x^3 / 3! + x^5 / 5! + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + xi - x^2 / 2! - ix^3 / 3! + x^4 / 4! + \dots = \cos x + i \sin x$$

$$\sum_{k=1}^N \cos kx = \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}(e^{ikx}) = \operatorname{Re} \underbrace{\sum_{k=1}^N e^{ikx}}_{\substack{\text{сумма} \\ \text{геометрич} \\ \text{прогрессии}}} = \frac{b_1(q^N - 1)}{q - 1} = \operatorname{Re} \frac{e^{ix}(e^{ixN} - 1)}{e^{ix} - 1} =$$

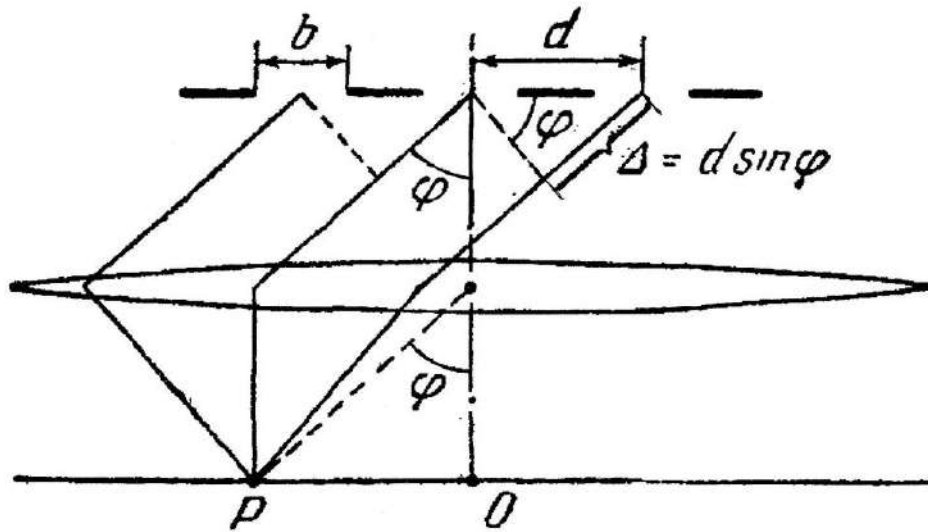
$$= \operatorname{Re} \frac{e^{ix} e^{ixN/2} (e^{ixN/2} - e^{-ixN/2})}{e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})} = \operatorname{Re} \frac{e^{ix(1+N)/2} sh(ixN/2)}{sh(ix/2)}$$

Учтя, что $sh(ix) = i \sin x$, получим

$$\sum_{k=1}^N \cos kx = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \cos[(N+1)x/2]$$

Аналогично $\sum_{k=1}^N \sin kx = \operatorname{Im} \frac{e^{ix}(e^{ixN} - 1)}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \sin[(N+1)x/2]$

Дифракционная решетка представляет собой совокупность большого числа одинаковых щелей, отстоящих друг от друга на одинаковые расстояния. Расстояние d между серединами соседних щелей называется постоянной или периодом решетки. После решетки ставим собирающую линзу, в фокальной плоскости которой расположим экран.



Каждая из щелей дает на экране свою дифракционную картину. Все эти картины придутся на одно и то же место экрана (§22 - независимо от положения щели, центральный максимум лежит против центра линзы). Если бы колебания, приходящие в точку P от разных щелей, были некогерентными, то результирующая картина от N щелей отличалась бы от картины, создаваемой одной щелью, только тем, что интенсивности выросли бы в N раз. Однако мы будем считать эти колебания когерентными, т.е. радиус когерентности много больше длины решетки. Тогда колебание в точке P, определяемой углом φ , будет равно сумме колебаний от одинарных щелей, сдвинутых по фазе на $\delta = 2\pi\Delta / \lambda = 2\pi d \sin \varphi / \lambda$.

Будем вести отсчет от крайней щели.

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_{k=0}^{N-1} a \cos(\omega t - k\delta) = \operatorname{Re} \left(a e^{i\omega t} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-ik\delta}) \right) = \operatorname{Re} \left(a e^{i\omega t} \frac{1(1 - e^{-iN\delta})}{1 - e^{-i\delta}} \right) = \\
 &= a \operatorname{Re} \frac{e^{i\omega t} e^{-iN\delta/2} (e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2})}{e^{-i\delta/2} (e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})} = a \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\omega t} e^{-i\delta(N-1)/2} \operatorname{sh}(iN\delta/2)}{\operatorname{sh}(i\delta/2)} \right) = \\
 &= a \underbrace{\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}}_A \cos \left(\omega t - \frac{\delta}{2} (N-1) \right)
 \end{aligned}$$

Здесь $a = A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{\pi b \sin \varphi / \lambda}$ - амплитуда в точке P от одной щели (смотри

предыдущий параграф). Тогда интенсивность света в точке P равна

$$I = I_\varphi \frac{\sin^2(N\pi d \sin \varphi / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \varphi / \lambda)} = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)^2} \frac{\sin^2(N\pi d \sin \varphi / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \varphi / \lambda)},$$

где I_φ - интенсивность, создаваемая в точке P одной щелью, I_0 - интенсивность, создаваемая одной щелью в середине дифракционной картины (точке O).

Первый множитель равен нулю, когда $b \sin \varphi = \pm k\lambda$ (*). В этих точках интенсивность от каждой щели равна нулю.

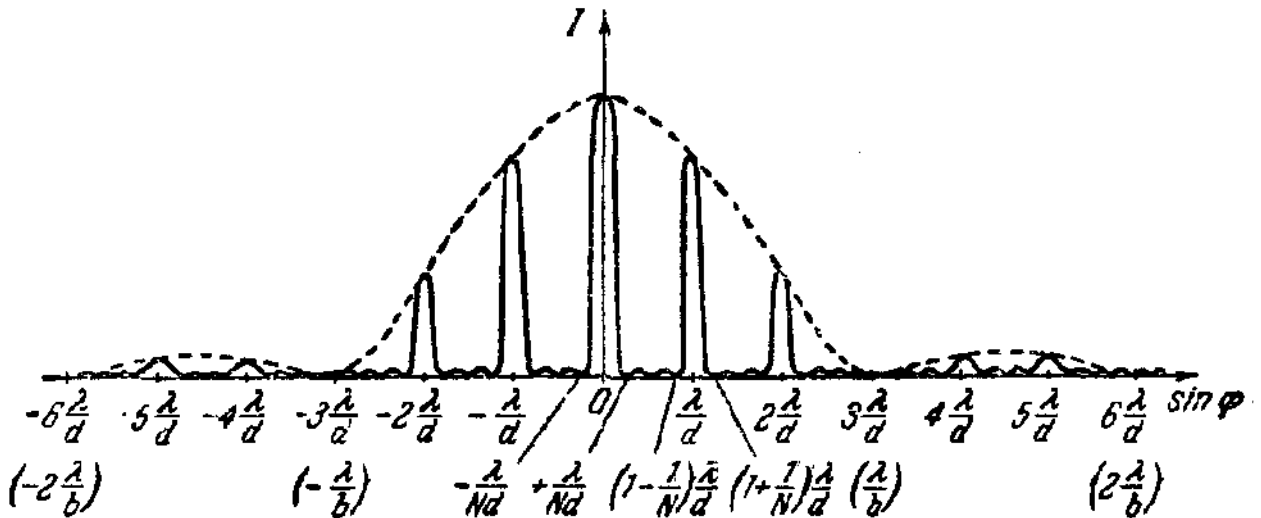
Второй множитель равен N^2 , когда $d \sin \varphi = \pm m\lambda$ (**) при $m \leq d/\lambda$, т.е. в этих направлениях колебания от разных щелей находятся в фазе, и амплитуды складываются. Условие (**) определяет так называемые главные максимумы, m - порядок максимума.

$$I_{\max} = N^2 I_{\varphi},$$

где I_{φ} - интенсивность, создаваемая в этом направлении одной щелью.

В дополнение к минимумам, определяемым формулой (*), между соседними главными максимумами лежит еще $N-1$ добавочных минимумов: $d \sin \varphi = \pm k'\lambda/N$, где $k' = 1, 2, 3, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots$ (т.е. нет $N, 2N$ и т.д.)

Построим график для случая $d = 3b$.



Найдем угловую ширину центрального максимума $\delta\varphi_0$:

$$d \sin \varphi = \lambda/N \Rightarrow \delta\varphi = 2 \arcsin(\lambda/Nd) = 2\lambda/Nd = 2\lambda/l,$$

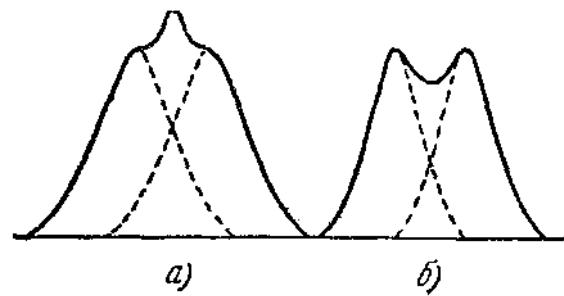
где l - длина решетки. Мы учли, что при больших N $\lambda/Nd \ll 1$.

Найдем ширину m -го главного максимума:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_m &= \arcsin[(m+1/N)\lambda/d] - \arcsin[(m-1/N)\lambda/d] \approx (\arcsin x)' \Big|_{x=m\lambda/d} \cdot \Delta x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-m^2\lambda^2/d^2}} \frac{2\lambda}{Nd} = \frac{\delta\varphi_0}{\sqrt{1-m^2\lambda^2/d^2}} > \delta\varphi_0 \end{aligned}$$

Разрешающей силой спектрального прибора называют $R = \lambda/\delta\lambda$, где $\delta\lambda$ - минимальная разность длин волн, при которой линии воспринимаются раздельно. Найдем R для решетки. Рассмотрим два максимума: в случае a они воспринимаются как один, в

случае б между максимумами лежит минимум. Согласно критерию, предложенному Рэлеем, спектральные линии считаются полностью разрешенными, если середина одного максимума совпадает с краем другого (рис. б). В этом случае минимум между линиями составляет около 80% от максимумов.



Рассмотрим m -й максимум. Его середина для длины волны λ_1 определяется условием $d \sin \varphi_{\max} = m\lambda_1$. Края m -го максимума (т.е. минимумы) для длины волны λ_2 расположены под углами, удовлетворяющими условию: $d \sin \varphi_{\min} = (m \pm 1/N)\lambda_2$. Середина максимума для длины волны $(\lambda + \delta\lambda)$ наложится на минимум для длины волны λ , если $m(\lambda + \delta\lambda) = (m \pm 1/N)\lambda \Rightarrow m\delta\lambda = \lambda/N \Rightarrow R = \lambda/\delta\lambda = mN$.

Итак, разрешающая сила дифракционной решетки пропорциональна порядку спектра m и числу щелей N .

Решетки бывают прозрачные и отражающие. Прозрачные делаются из стеклянных или кварцевых пластинок, на которые алмазным резцом наносятся параллельные штрихи. Промежутки между штрихами служат щелями. Отражающие наносятся резцом на поверхность зеркала. Свет на отражающую решетку падает наклонно. Тогда решетка с периодом d действует так, как действовала бы прозрачная с периодом $d \cos \theta$. Это позволяет наблюдать спектр при отражении даже от грампластинки, хотя там всего несколько штрихов на мм. Лучшие решетки имеют до 1200 штрихов на мм, т.е. $d = 0,8$ мкм. Общее число штрихов достигает 200 000 при длине 200 мм. Тогда разрешающая сила $R = mN = 200\,000$, так как $m = 1$, потому что второй максимум уже отсутствует ($\sin \varphi = m\lambda/d$ должен быть меньше 1).

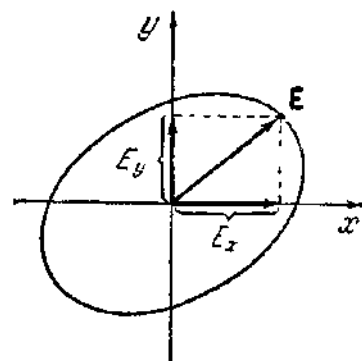
Один из простейших и распространённых в быту примеров отражательных дифракционных решёток — компакт-диск. На поверхности компакт-диска — дорожка в виде спирали с шагом 1,6 мкм между витками. Примерно треть ширины (0,5 мкм) этой дорожки занята углублением (это записанные данные), рассеивающим падающий на него свет, примерно две трети (1,1 мкм) — нетронутая подложка, отражающая свет. Таким образом, компакт-диск — отражательная дифракционная решётка с периодом 1,6 мкм. Кроме того, такой же отражательной дифракционной решёткой является и пустой CD-R диск, и пустой DVD диск, поскольку на них имеется спиральная дорожка для направления луча лазера при записи информации. Причём период решётки для DVD — 0,74 мкм.

§24. Поляризация света.

Поляризованный свет – свет, в котором направление колебаний светового вектора (\vec{E}) упорядочено. В естественном свете этого нет.

Хотя световые волны поперечны, они часто не обнаруживают асимметрии относительно луча. Дело в том, что в естественном свете имеются колебания, совершаемые в различных направлениях (перпендикулярно к лучу). Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых его атомами.

Процесс излучения атомом длится примерно 10^{-8} секунды. За это время образуется так называемый «цуг» волн длиной примерно 3 метра. В световом импульсе, испускаемом атомом в единичном акте излучения, вектор \vec{E} колеблется вдоль одной оси (в плоскости, перпендикулярной направлению распространения). «Погаснув», атом опять «вспыхивает» через некоторое время, при этом ось меняется. У волн от разных атомов оси различны. Накладываясь, волны от разных атомов образуют испускаемую телом волну. В ней колебания различных направлений равновероятны. Такой свет называется неполяризованным. Если же есть какое-то упорядочение, то свет поляризованный. Если колебания происходят вдоль одной оси, то свет линейно (или плоско) поляризован. Если \vec{E} поворачивается вокруг луча, одновременно изменяясь так, что его конец описывает эллипс, то свет эллиптически поляризован, если круг – то поляризован по кругу. Естественный свет при испускании обычно неполяризован. Но в процессах отражения и преломления он может приобретать поляризацию. Например, свет солнца, являющийся тепловым излучением, не имеет поляризации, однако рассеянный свет неба приобретает частичную линейную поляризацию. Лазеры испускают линейно поляризованный свет.



Чтобы наглядно представить себе, что такое поляризация, воспользуемся такой аналогией. Представим натянутую веревку, привязанную к стенке где-то далеко. Человек, держащий ее свободный конец, совершает им колебания вверх вниз. По веревке начнет распространяться упругая волна, точки веревки будут колебаться в вертикальной плоскости. Эту волну назовем линейно (или плоско) поляризованной. Теперь человек заставляет конец веревки совершать колебательные движения, хаотически меняя плоскость колебаний. Эта волна называется неполяризованной. Аналогом поляризатора для случая веревки будет вертикальная узкая щель, через которую проходит веревка. Какие бы колебания ни были до щели, после нее колебания точек веревки будут вертикальны, т.е. волна станет линейно поляризованной. Важным случаем является движение конца веревки по эллипсу, тогда поляризация называется эллиптической. Ее частными случаями являются поляризация по

кругу (когда обе полуоси одинаковы) и рассмотренная ранее линейная (когда одна из полуосей равна нулю).

Излучающих атомов множество, и они каждые 10^{-8} секунды меняют фазу и плоскость поляризации испускаемых волн. Казалось бы, суммарное значение никак не связано с тем, которое было в предыдущие моменты, т.е. о цуге говорить не правомерно. Покажем, что это не так и понятие «цуг» справедливо не только для одного атома, но и в случае, когда их много. Это рассмотрение похоже на проведенное на стр. 13-14.

Выберем произвольную ось x в плоскости, перпендикулярной направлению распространения z , и будем отсчитывать угол поворота плоскости поляризации от нее. Пусть i -й атом испустил цуг длительностью 10^{-8} секунды. Этот цуг представляет собой линейно поляризованную гармоническую волну, направление поляризации которой составляет угол φ_i с осью x . Временная зависимость имеет вид $\vec{E}_i = \vec{A}_i \cos(\omega t - kz + \alpha_i)$, где ось z совпадает с направлением распространения, α_i - начальная фаза.

Результирующее колебание в какой-то точке представляет собой сумму N колебаний с одной частотой ω , но с различными начальными фазами: $\vec{E} = \sum_i \vec{A}_i \cos(\omega t + \alpha_i)$.

Спроектируем это равенство на ось x и перпендикулярную к ней ось y :

$$E_x = \sum_i A_i \cos \varphi_i \cos(\omega t + \alpha_i) = \cos \omega t \sum_i A_i \cos \varphi_i \cos \alpha_i - \sin \omega t \sum_i A_i \cos \varphi_i \sin \alpha_i = \\ = a \cos \omega t - b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \theta)$$

$$E_y = \sum_i A_i \sin \varphi_i \cos(\omega t + \alpha_i) = \cos \omega t \sum_i A_i \sin \varphi_i \cos \alpha_i - \sin \omega t \sum_i A_i \sin \varphi_i \sin \alpha_i = \\ = c \cos \omega t - d \sin \omega t = \sqrt{c^2 + d^2} \cos(\omega t + \xi)$$

Таким образом, колебания вдоль обеих осей в любой момент времени являются гармоническими с какими-то начальными фазами θ и ξ .

Рассмотрим поведение θ и ξ в течение промежутка времени $\tau \ll 10^{-8} c$. В начальный момент в колебании в данной точке принимают участие N цугов, возникших в течение промежутка времени $10^{-8} c$ до этого момента. Через τ секунд доля закончившихся (и новых начавшихся) цугов равна $\tau / 10^{-8}$. При $\tau \ll 10^{-8} c$ их вкладом в общие колебания (по сравнению со всеми оставшимися) можно пренебречь, т.е. фазы останутся теми же. Значит, в течение этого времени понятие «цуги» применимо к волнам. Таким образом, на протяжении времени порядка, например, 10^{-10} секунды в данной точке происходят два взаимно перпендикулярных гармонических колебания с фиксированной разностью начальных фаз

$\delta = \theta - \xi$. Это означает, что конец вектора движется по эллипсу (в частности, по прямой или окружности). Если $\delta = 0, \delta = \pi$, то движение по прямой - плоско (или линейно) поляризованный свет, если $\delta = \pm\pi/2$, то по окружности - поляризация по кругу. Это движение по эллипсу длится в течение $10^{-10} - 10^{-9}$ секунды, потом этот эллипс сменяется на другой, причем вращение может измениться на обратное. Частными случаями являются окружность и прямая. Другими словами, свет представляет собой последовательность цугов, представляющих собой эллиптически поляризованные волны длиной порядка сантиметров и содержащих порядка 10^5 длин волн.

Если бы мы могли рассмотреть такой свет после его прохождения через поляризатор, то увидели бы последовательность линейно поляризованных цугов разной амплитуды. В частном случае можем увидеть даже паузу в волне (если соответствующий цуг имел линейную поляризацию, перпендикулярную оси поляризатора). Аналитически описать такую хаотически меняющуюся волну очень сложно. Но это и не требуется. Свет имеет такую большую частоту (порядка 10^{13} Гц), что подавляющее большинство существующих приборов (в частности, глаз) не могут уследить за его изменением и воспринимают только его интеграл по конечному времени. Чаще всего нас интересует интенсивность света, т.е. средний модуль плотности светового потока. Усреднение происходит по относительно большому промежутку времени, включающему очень большое число цугов. Те же результаты мы получим, если будем рассматривать свет как наложение двух волн, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Именно так мы и будем представлять свет в дальнейшем. Эти волны не когерентны, поэтому складываются не амплитуды, а интенсивности. Для расчета таких волн можно пользоваться как амплитудами, так и интенсивностями, так как $A^2 = A_1^2 + A_2^2$, что эквивалентно $I = I_1 + I_2$. (В случае сложения волн, колебания в которых проходят вдоль одной оси, это не так: $A = A_1 + A_2$, $I = I_1 + 2\sqrt{I_1 I_2} + I_2 \neq I_1 + I_2$)

Отметим, что возможен также и другой подход, в котором частично поляризованный свет представляется в виде суммы неполяризованной и линейно поляризованной составляющих.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных электрических колебания вдоль осей x и y , отличающихся по фазе на δ :

$$E_x = A_1 \cos \omega t; \quad E_y = A_2 \cos(\omega t + \delta)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t}, \text{ где } \varphi \text{ - это угол между } \vec{E} \text{ и осью } x.$$

Если δ меняется случайным образом, то направление вектора \vec{E} хаотически скачкообразно меняется. Естественный свет можно представить как наложение двух электромагнитных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющих одинаковую интенсивность.

Если $\delta = 0, \delta = \pi$, то $tg\varphi = \pm \frac{A_2}{A_1} = const$, и волна плоско поляризована.

Если $A_1 = A_2$, а $\delta = \pm\pi/2$, то $tg\varphi = \mp tg\omega t$, т.е. плоскость колебаний поворачивается вокруг луча с частотой ω , и волна является поляризованной по кругу. Если $A_1 \neq A_2$, то волна имеет эллиптическую поляризацию.

К тем же выводам можно прийти, рассматривая движение полного вектора \vec{E} . Два взаимно перпендикулярных колебания с одинаковой частотой дают движение конца вектора \vec{E} по эллипсу (в частности, по прямой или окружности). Если $\delta = 0, \delta = \pi$, то движение по прямой - плоско (или линейно) поляризованный свет, если $\delta = \pm\pi/2$, то окружность - поляризация по кругу.

Отметим, что плоскостью поляризации по историческим причинам называют плоскость колебаний \vec{H} , а не \vec{E} .

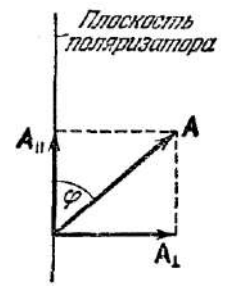
Плоско поляризованный свет получают, пропуская естественный свет через поляризатор. Он свободно пропускает колебания, параллельные плоскости поляризатора, и полностью или частично задерживает перпендикулярные к ней. Поляризаторы называют идеальными, если они полностью задерживают перпендикулярную компоненту. Если это не так, то поляризатор не совершенный, т.е. из него выходит свет частично поляризованный - смесь естественного и плоско поляризованного. Частично поляризованный свет, как и естественный, можно представить как наложение двух некогерентных волн, плоско поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, но в естественном свете их амплитуды одинаковы, а в частично поляризованном - различны.

Если пропускать частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении поляризатора вокруг луча интенсивность I будет меняться от I_{\min} до I_{\max} дважды за

оборот. Величину $p = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ называют степенью поляризации. Для естественного

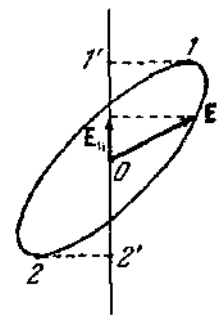
света $p = 0$, для плоско поляризованного $p = 1$. К эллиптически поляризованным волнам понятие степени поляризации неприменимо.

Колебание в плоскости, составляющей угол φ с плоскостью поляризатора, можно разложить на параллельную и перпендикулярную составляющие A_{\parallel} и A_{\perp} . Интенсивность прошедшей волны пропорциональна $A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$, т.е. равна $I = I_0 \cos^2 \varphi$, где I_0 - интенсивность падающей волны.



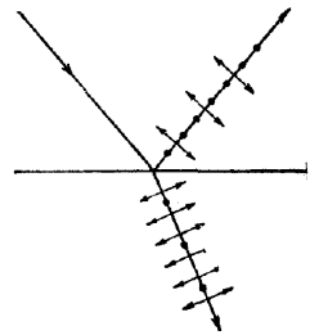
В естественном свете все значения φ равновероятны, поэтому доля света, прошедшего через поляризатор, равна $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$. Поэтому при вращении поляризатора вокруг луча естественного света интенсивность прошедшего света не меняется. Пусть теперь на поляризатор падает плоско поляризованный свет с I_0 и A_0 . Тогда для прошедшего света $I = I_0 \cos^2 \varphi$ - это закон Малюса.

Пусть на поляризатор падает эллиптически поляризованный свет. Он пропустит только составляющую E_{\parallel} . Ее максимум достигается в точках 1 и 2. На выходе получим плоско поляризованную волну с амплитудой $O1' = O2'$. При вращении поляризатора I будет меняться от I_{\min} до I_{\max} дважды за оборот, точно так же, как при частичной поляризации. При поляризации по кругу интенсивность прошедшего света не меняется при повороте поляризатора, как в случае естественного света.



§25. Поляризация при отражении и преломлении.

Если угол падения света на границу двух диэлектриков отличен от нуля, то отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными. В отраженном преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения, а в преломленном - параллельные ей (см. рис.).



Степень их поляризации зависит от угла падения.

Закон Брюстера: если угол падения равен углу Брюстера ($\operatorname{tg} \theta_B = n_{12}$), то отраженный луч поляризован полностью (перпендикулярно плоскости падения).

При этом степень поляризации преломленного луча максимальна, но он поляризован только частично. Отметим, что при $\theta = \theta_B$ отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

Степени поляризации преломленного и отраженного лучей можно найти при помощи формул Френеля:

$$A_{\parallel}' = A_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}; \quad A_{\perp}' = A_{\perp} \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$A_{\parallel}'' = A_{\parallel} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}; \quad A_{\perp}'' = A_{\perp} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)},$$

где A, A', A'' - амплитуды в падающем, отраженном и преломленном лучах соответственно, θ_1 и θ_2 - углы падения и преломления.

Если $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, то $\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) = \infty$, и из 1-й формулы следует, что $A_{\parallel}' = 0$, т.е. отраженный луч содержит только поляризацию \perp или, иначе говоря, полностью поляризован. При этом $n_{12} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin(\pi/2 - \theta_1)} = \operatorname{tg} \theta_1$. Это и есть случай Брюстера.

При малых углах падения тангенсы примерно равны синусам и углам. Тогда

$$A_{\parallel}' = A_{\parallel} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = A_{\parallel} \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}; \quad A_{\perp}' = A_{\perp} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = A_{\perp} \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}$$

$$A_{\parallel}'' = A_{\parallel} \frac{2\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = A_{\parallel} \frac{2}{n_{12} + 1}; \quad A_{\perp}'' = A_{\perp} \frac{2\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = A_{\perp} \frac{2}{n_{12} + 1}$$

Возводя эти выражения в квадрат и учитывая, что I пропорциональна nA^2 (см. формулу (***) в §4), получим соотношения для интенсивностей, совпадающие с полученными в §4:

$$I' = I \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2, \quad I'' = n_{12} I \left(\frac{2}{n_{12} + 1} \right)^2$$

§26. Двойное лучепреломление.

При прохождении света через некоторые кристаллы имеет место явление, называемое двойным лучепреломлением. Оно заключается в том, что в кристалле луч разделяется на два луча, распространяющиеся с разными скоростями и подчиняющиеся разным законам. Один из них

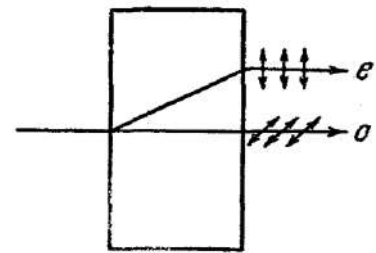


Рис.1

подчиняется обычному закону преломления и лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью. Этот луч называется обыкновенным и обозначается буквой o (ordinary). Для другого луча, называемого необыкновенным и обозначаемого буквой e (extraordinary), отношение синусов углов падения и преломления не остается постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении необыкновенный луч, вообще говоря, отклоняется от первоначального направления (рис.1). Кроме того, после преломления он, как

правило, даже не лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности.

Двойное лучепреломление наблюдается во всех прозрачных кристаллах, за исключением принадлежащих к кубической системе. У так называемых двуосных кристаллов оба луча являются необыкновенными. У одноосных кристаллов существует направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются с одинаковой скоростью. Это направление называется оптической осью кристалла. Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется главной плоскостью кристалла. Мы далее будем рассматривать только одноосные кристаллы. Примерами одноосных кристаллов являются исландский шпат, турмалин, кварц.

Обыкновенный и необыкновенный лучи являются полностью поляризованными во взаимно перпендикулярных направлениях (рис.1). В обыкновенном луче плоскость колебаний светового вектора (\vec{H}) перпендикулярна к главной плоскости кристалла. В необыкновенном луче световой вектор колеблется в главной плоскости. После выхода из кристалла лучи o и e различаются только направлением плоскости поляризации. Поэтому названия «обыкновенный» и «необыкновенный» имеют смысл только внутри кристалла.

В некоторых кристаллах один из лучей поглощается сильнее, чем другой – это явление называется дихроизмом. Сильным дихроизмом в видимых лучах обладает кристалл турмалина. В нем обыкновенный луч поглощается практически полностью на длине 1 мм, в то время как необыкновенный почти не поглощается. Таким же свойством обладает поляриод – целлулоидная пленка с большим количеством одинаково ориентированных кристалликов сульфата йодистого хинина. В ней один из лучей поглощается на длине 0,1 мм, т.е. после прохождения пленки луч полностью поляризован.

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. Зависимость от направления обнаруживает, в частности, диэлектрическая проницаемость ϵ . В одноосных кристаллах ϵ в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней, имеет разные значения $\epsilon_{||}$ и ϵ_{\perp} , а в других направлениях имеет промежуточные значения. Математически ϵ является тензором. Если значения ϵ в одноосном кристалле изображать отрезками, отложенными по этим направлениям из некоторой точки, то концы отрезков расположатся на поверхности эллипсоида вращения, ось симметрии которого совпадает с оптической осью кристалла.

Скорость света в веществе равна $c/\sqrt{\epsilon\mu}$. В парамагнетиках и диамагнетиках $\mu \approx 1$, поэтому $v_{cs} = c/\sqrt{\epsilon}$, откуда следует, что в разных направлениях свет идет с разной скоростью.

В обыкновенном луче плоскость колебаний светового вектора перпендикулярна к главной плоскости кристалла (на рис.2 эти колебания изображены точками на соответствующих лучах). Поэтому при любом направлении (1, 2 или 3 на рис.2) скорость распространения одна и та же $v = c / \sqrt{\epsilon_{\perp}}$. Изображая скорость отрезками, отложенными по разным направлениям, мы получим сферу.

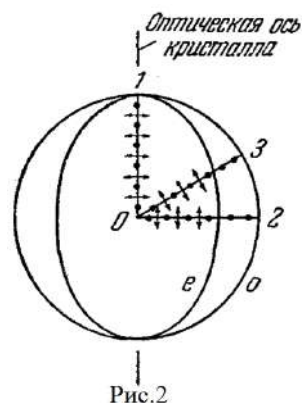


Рис.2

В необыкновенном луче колебания составляют с оптической осью кристалла разные углы (на рис.2 эти колебания изображены стрелками), так что скорости в разных направлениях различны. Отметим, что поверхность $v = c / \sqrt{\epsilon}$, строго говоря, не является эллипсоидом, так как эллипсоид – это поверхность, соответствующая ϵ . В местах пересечения с оптической осью получившаяся поверхность соприкасается со сферой.

В зависимости от того, какая скорость больше (o) или (e), кристаллы делятся на отрицательные и положительные (рис.3). Полезно запомнить простое слово НБОО – «необыкновенный быстрее обыкновенного, отрицательный». Оно не дает забыть, что лучи бывают обыкновенные и необыкновенные, что они имеют разные скорости, что кристаллы бывают положительные и отрицательные и каким параметром это определяется.

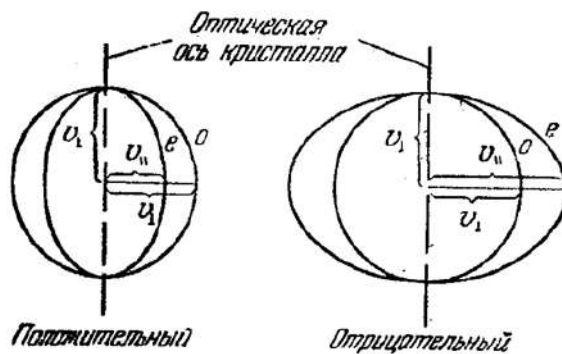


Рис.3

На рис. 4 изображены три случая нормального падения света на поверхность кристалла, различающиеся направлением оптической оси кристалла. В случае а лучи o и e распространяются вдоль оптической оси и идут не разделяясь. Случай б показывает, что даже при нормальном падении луч e может отклоняться от нормали (см. рис.1). В случае в, когда оптическая ось кристалла параллельна преломляющей поверхности, o и e лучи идут в одном направлении, но с разными скоростями, вследствие чего между ними возникает всё возрастающая разность фаз.

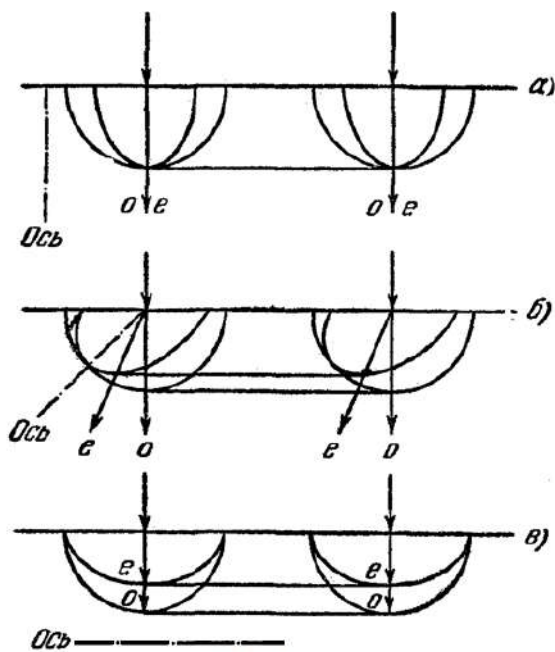


Рис.4

§27. Интерференция поляризованных лучей.

Лучи, обыкновенный и необыкновенный, возникающие при двойном лучепреломлении из естественного света, не когерентны. Если естественный свет разложить на два луча, поляризованных в двух различных плоскостях, а затем с помощью поляризационного прибора привести колебания в них к одной плоскости, то они не интерферируют. Это объясняется тем, что в естественном свете колебания, происходящие в разных плоскостях, принадлежат разным цугам волн, испускаемых разными атомами. Колебания в каждом цуге происходят в случайно ориентированной плоскости. Поскольку отдельные цуги не когерентны, то и обыкновенный и необыкновенный лучи не когерентны.

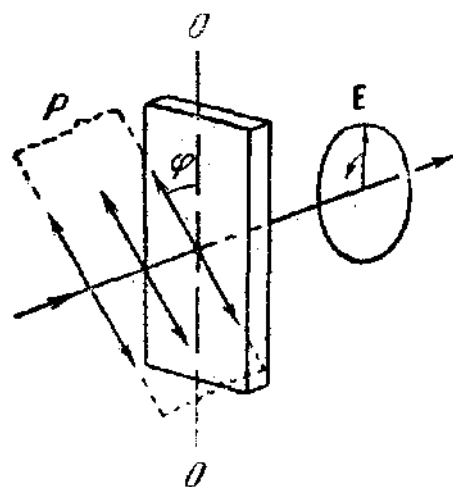
Лучи, обыкновенный и необыкновенный, возникающие из одного и того же поляризованного луча, когерентны. Если колебания в них привести к одной плоскости, то лучи будут интерферировать обычным образом. Если когерентные колебания происходят во взаимно перпендикулярных плоскостях, то они складываются, как два взаимно перпендикулярных колебания, что приводит к эллиптической поляризации (как частные случаи, к круговой или линейной).

Рассмотрим нормальное падение плоско поляризованного света на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. В пластине возникнут оба луча, *о* и *е*, причем они будут когерентны. Эти лучи будут распространяться в одном направлении с разными скоростями (случай *в* на рис.4 §26). На входе в пластину разность фаз равна нулю, а

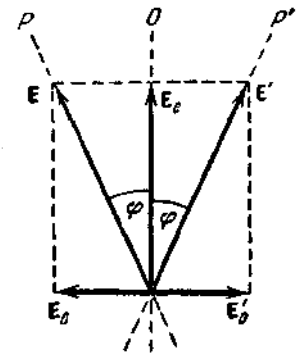
на выходе $\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} 2\pi = 2\pi \frac{(n_o - n_e)d}{\lambda_0}$, где λ_0 – длина волны в вакууме.

Если толщина пластинки такая, что $\Delta = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4}$ (так называемая пластинка в четверть волны), то лучи на выходе будут иметь разность фаз $\delta = \pi/2$. Если расположить такую пластинку так, чтобы угол φ между плоскостью колебаний *P* в падающем луче и оптической осью пластинки *ОО* равнялся 45° , то амплитуды обоих лучей, вышедших из пластинки будут одинаковы. Сдвиг по фазе равен $\pi/2$, значит, свет будет поляризован по кругу. При ином значении угла φ свет будет поляризован по эллипсу, одна из осей которого совпадает с оптической осью *ОО*.

При $\varphi = 0$ или $\pi/2$ в пластинке распространяется только один луч (соответственно, *е* или *о*), и на выходе свет останется плоско поляризованным с плоскостью колебаний *P*.



Если на пути эллиптически поляризованного света поставить пластинку в четверть волны, расположив оптическую ось вдоль одной из полуосей эллипса, то пластинка внесет дополнительную разность фаз $\pi/2$. В результате разность фаз двух волн станет равна 0 или π , и мы получим плоско поляризованную волну. Этим пользуются, чтобы отличить свет, поляризованный эллиптически, от частично поляризованного. Одного только поляризатора для этого недостаточно. Действительно, в обоих случаях при повороте поляризатора наблюдается лишь изменение яркости прошедшего света между минимальным и максимальным значениями. Если же сначала свет пропустить через пластинку $\lambda/4$, нужным образом ее ориентируя, то эллиптически поляризованный свет превратится в плоско поляризованный и сможет быть погашен поворотом поляризатора. Частично же поляризованный свет, проходя через пластинку, не претерпит изменений и потушен быть не может.

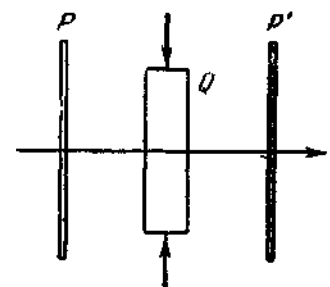


Рассмотрим прохождение плоско поляризованного света через пластинку в полволны. Колебание \vec{E} в падающем луче, происходящее в плоскости P, возбуждает в кристалле колебания \vec{E}_o и \vec{E}_e . За время прохождения пластинки разность фаз между ними изменится на π . Поэтому фазовое соотношение между o и e лучами будет соответствовать расположению \vec{E}'_o и \vec{E}'_e , и свет будет поляризован в плоскости P'. Таким образом, пластинка в полволны поворачивает плоскость поляризации на угол 2φ , где φ - угол между плоскостью колебаний в падающем луче и оптической осью.

Если $\delta \neq \pi/2, \pi$, то свет будет эллиптически поляризован, но ось эллипса не будет совпадать с оптической осью пластины.

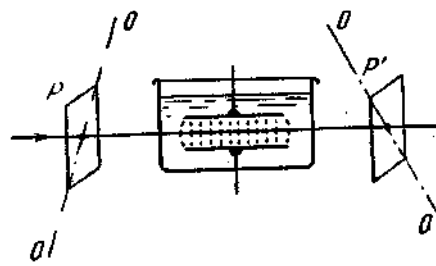
§28. Искусственное двойное лучепреломление.

В прозрачных аморфных телах или в кубических кристаллах, в которых анизотропии в обычных условиях нет, может возникнуть двойное лучепреломление при внешнем воздействии, например, при механических деформациях. Мерой возникающей оптической анизотропии является разность показателей преломления для o и e лучей. Опыт показывает, что она прямо пропорциональна механическому напряжению $\sigma = F/S$:



$$n_o - n_e = k\sigma$$

Поместим стеклянную пластинку между двумя скрещенными ($\alpha = \pi/2$) поляризаторами. Пока нет деформации, свет не проходит. Если же пластинку сжимать, то свет начинает проходить, причем в прошедших лучах наблюдаются цветные полосы. По их расположению можно судить о распределении σ . Это используется при исследовании механических напряжений в телах. Делается модель из прозрачного вещества, помещается между скрещенными поляризаторами и т.д.



Эффект Керра (1875 г.) – возникновение двойного лучепреломления под воздействием электрического поля. Ячейка Керра – герметичный сосуд с жидкостью, в которую введены пластины конденсатора.

При подаче напряжения возникает однородное поле, под действием которого жидкость приобретает свойства одноосного кристалла с осью вдоль \vec{E} . Оказывается, что разность показателей преломления для о и е лучей пропорциональна квадрату напряженности поля

$$n_o - n_e = kE^2$$

На пути l возникнет разность оптических длин $\Delta = (n_o - n_e)l = klE^2$, т.е. разность фаз

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} 2\pi = \frac{2\pi kl}{\lambda_0} E^2 = 2\pi V l E^2, \text{ где } V - \text{ постоянная Керра, зависящая от вещества,}$$

температуры и длины волны.

Эффект Керра объясняется возникающей поляризацией вещества, будь то полярные молекулы (ориентация) или неполярные (поляризация). Тепловое движение препятствует упорядочиванию, поэтому с ростом температуры V уменьшается. Время установления или исчезновения поляризации имеет порядок 10^{-10} секунды, поэтому ячейка Керра может служить практически безынерционным затвором. При $U = 0$ ячейка свет не пропускает, так как находится между двумя скрещенными поляризаторами. При $U \neq 0$ свет проходит.

§29. Вращение плоскости поляризации.

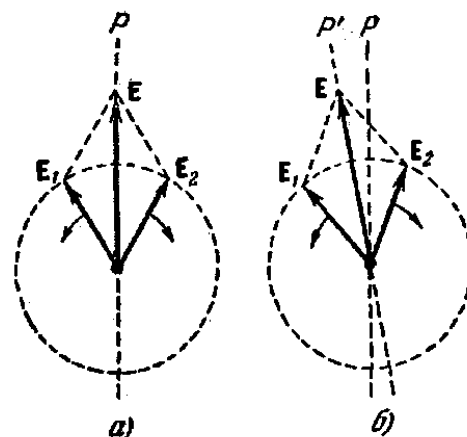
Некоторые вещества, называемые оптически активными, обладают способностью вызывать вращение плоскости поляризации проходящего света, например, твердые – кварц, киноварь, чистые жидкости – скипидар, никотин, растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях – водные растворы сахара, винной кислоты и т.д.

В кристаллах поворот сильнее всего при распространении света вдоль оптической оси. Угол поворота пропорционален пройденному пути $\varphi = \alpha l$, α - постоянная вращения, она

зависит от длины волны. В растворах угол поворота φ пропорционален пройденному пути l и концентрации активного вещества c : $\varphi = [\alpha]cl$, $[\alpha]$ - удельная постоянная вращения.

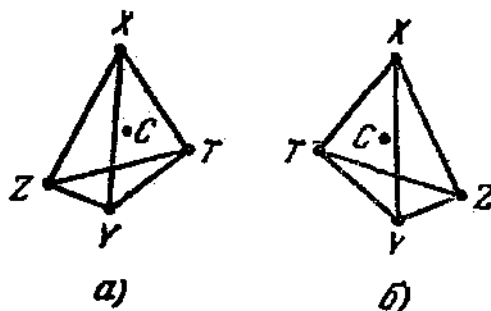
В зависимости от направления вращения вещества делятся на право- и левовращающие, т.е., если смотреть навстречу лучу, поворачивающие по часовой стрелке или против нее. Направления вращения (относительно луча) не зависит от направления луча. Поэтому, если луч, прошедший через оптически активное вещество, отразить зеркалом, то восстановится первоначальное положение плоскости поляризации.

Для объяснения эффекта вращения Френель предположил, что в оптически активных веществах лучи, поляризованные по кругу вправо и влево, распространяются с неодинаковыми скоростями. Плоско поляризованный свет можно представить как суперпозицию двух поляризованных по кругу волн, правой и левой, с одинаковыми частотами и амплитудами. Действительно, геометрическая сумма \vec{E}



световых векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 поляризованных по кругу волн в каждый момент времени лежит в плоскости P . Если скорости распространения различаются, то по мере распространения один из векторов \vec{E}_1 или \vec{E}_2 отстает в своем вращении от другого, в результате чего плоскость P' , в которой находится вектор \vec{E} , поворачивается относительно первоначальной плоскости поляризации P .

Различие скоростей света с разным направлением круговой поляризации обусловлено асимметрией молекул либо асимметричным расположением атомов в кристалле. На рисунке приведен пример асимметричной молекулы. В центре тетраэдра находится атом углерода C , в вершинах атомы или группы атомов X, Y, Z, T . Молекулы на рисунках а и б являются зеркальными отражениями друг друга. Все оптически активные вещества существуют в право- и левовращающей разновидностях, например, кварц, сахар и т.д. Они различаются только направлением вращения плоскости поляризации, численное значение постоянной вращения одно и то же. Молекулы этих веществ являются зеркальными отражениями друг друга.



§30. Магнитное вращение плоскости поляризации.

Оптически не активные вещества могут приобрести способность вращать плоскость поляризации под действием магнитного поля – эффект Фарадея. Этот эффект наблюдается только при распространении света вдоль направления магнитного поля.

Угол поворота пропорционален пройденному пути и напряженности магнитного поля

$$\varphi = VH,$$

V - коэффициент Верде, или удельное магнитное вращение, зависит от длины волны.

Направление вращения определяется направлением магнитного поля и не зависит от направления луча. Поэтому, если, отразив зеркалом, заставить луч пройти через намагниченное вещество еще раз в обратном направлении, то поворот плоскости поляризации удвоится.

Магнитное вращение объясняется ларморовой прецессией электронных орбит.

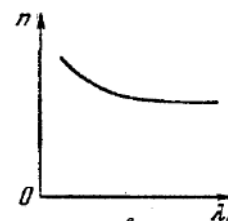
Если вещество оптически активно само по себе, то в магнитном поле появляется дополнительная способность вращения плоскости поляризации, которая складывается с естественной способностью.

§31. Дисперсия света.

Дисперсией называется зависимость показателя преломления среды от частоты или от длины волны $n = f(\lambda_0)$, где λ_0 - длина волны в вакууме.

Впервые экспериментально это явление исследовал Ньютон в 1672 году, анализируя прохождение света через призму.

Для всех прозрачных веществ зависимость имеет вид, показанный на



рисунке, т.е. $\frac{\partial n}{\partial \lambda_0} < 0$.

Если имеется поглощение, то на графике наблюдаются аномалии, т.е. существуют участки, где $\frac{\partial n}{\partial \lambda_0} > 0$. Это так называемая аномальная дисперсия.

§32. Групповая скорость.

Строго монохроматическая волна представляет собой бесконечную во времени и в пространстве периодическую последовательность горбов и впадин, перемещающуюся со скоростью $v = \omega/k$. С такой волной нельзя передать сигнал, так как каждый последующий горб ничем не отличается от предыдущего. Для передачи сигнала надо сделать какую-то “отметку”, например, прервав сигнал на некоторое время, но тогда он уже не будет гармоническим.

Проще всего передать сигнал в виде светового импульса (сигнала, длящегося короткое время). Такой импульс можно представить как наложение волн с частотами в некотором интервале $\Delta\omega$ (разложение Фурье).

Суперпозиция волн, мало отличающихся по частоте, называется волновым пакетом или группой волн. В пределах пакета волны друг друга усиливают, а вне его – гасят. Чем меньше ширина пакета Δt , тем больше $\Delta\omega$. В среде с нулевой дисперсией все волны движутся с одинаковой фазовой скоростью v . Тогда и скорость пакета равна v , и пакет не меняет форму со временем. В диспергирующей среде пакет со временем расплывается, его ширина растёт. Если дисперсия невелика, то расплывание происходит не слишком быстро. Тогда пакету можно приписать некоторую скорость. Групповой скоростью u (в отличие от фазовой скорости v) называют скорость средней точки пакета, т.е. точки с максимальной амплитудой колебаний.

Можно показать, что $u = \frac{d\omega}{dk}$. Если $\omega = vk$, т.е. дисперсии нет, то групповая скорость равна фазовой.

Понятие групповой скорости имеет смысл, если поглощение мало. При значительном затухании это понятие теряет смысл.

§33. Поглощение и рассеяние света.

При прохождении света через вещество часть энергии тратится на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия возвращается в виде энергии вторичных волн, испускаемых электронами, частично переходит в тепловую. Особенно интенсивно свет поглощается на резонансных частотах. Коэффициент поглощения зависит от длины волны, или от частоты. У веществ, где атомы не взаимодействуют друг с другом (газы) коэффициент поглощения для большинства длин волн равен нулю, и лишь для узких интервалов частот обнаруживаются резкие максимумы поглощения. Они соответствуют переходу электрона с орбиты на орбиту.

У молекул поглощение обнаруживается также на частотах, соответствующих колебаниям атомов. Но, поскольку масса атомов много больше массы электрона, то эти частоты намного меньше атомных.

Жидкости и твердые тела имеют широкий спектр поглощения. Металлы практически непрозрачны, из-за поглощения энергии свободными электронами.

Важную роль в распространении света играет рассеивание. Электроны излучают вторичные волны, из-за чего часть света рассеивается вбок. Если размер неоднородностей много меньше длины волны (не более $0,1\lambda$), справедлив закон Рэлея: степень рассеивания пропорциональна 4-й степени частоты. Этим объясняется голубой цвет неба и желтый цвет Солнца.

Глава 3. Тепловое излучение.

§34. Тепловое излучение и люминесценция.

Излучение может происходить за счет разных видов энергии, чаще всего тепловое, т.е. за счет внутренней энергии – тепловое свечение тел. Все остальные виды свечения называются люминесценцией.

Окисление фосфора создает хемилюминесценцию, газовые разряды – электролюминесценция, свечение при бомбардировке электронами – катодлюминесценция (в кинескопах обычных телевизоров), свечение, вызванное поглощением электромагнитного излучения – фотолюминесценция (лазер).

Тепловое излучение имеет место при ЛЮБЫХ температурах, но при малых излучаются только волны с большой λ (инфракрасные).

Окружим тело оболочкой с идеально отражающей поверхностью. Воздух удалим. Отраженное оболочкой излучение, упав на тело, поглотится им полностью или частично, т.е. будет происходить непрерывный обмен энергией между телом и заполняющим весь объем излучением. Часть энергии находится в виде излучения. Если распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны, то это состояние будет равновесным.

Опыт показывает, что единственным видом излучения, который может находиться в равновесии с излучающими телами, является тепловое. Это его свойство связано с тем, что его интенсивность растет с ростом температуры. Допустим, равновесие нарушено, и тело излучает больше, чем поглощает. Тогда внутренняя энергия тела падает, значит, уменьшается температура, в результате чего излучаемая энергия падает, и равновесие восстанавливается, когда температура снизится до значения, при котором излучаемая энергия равна поглощаемой. Аналогично при уменьшении излучения. Таким образом, тепловое излучение имеет механизм восстановления равновесия. У люминесценции его нет.

§35. Закон Кирхгофа.

Интенсивность теплового излучения характеризуют потоком энергии (Вт). Поток энергии R_ω , испускаемой единицей поверхности (1 м^2) во всех направлениях, называют энергетической светимостью тела.

Излучение состоит из волн разной частоты ω (или длины волны λ). Поток энергии dR_ω при частотах в диапазоне $\omega \div \omega + d\omega$ пропорционален ширине интервала:

$$dR_\omega = r_\omega d\omega.$$

$r_\omega = r_\omega(T)$ называется испускательной способностью тела.

$$R = \int dR_\omega = \int_0^\infty r_\omega d\omega$$

Также можно написать $R = \int dR_\lambda = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda$.

Найдем связь между r_ω и r_λ .

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}; \quad d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega$$

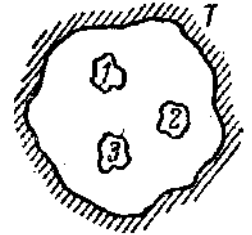
Далее будем говорить о модулях, поэтому минус опускаем.

$$dR_\omega = dR_\lambda \Rightarrow r_\omega d\omega = r_\lambda d\lambda = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega \Rightarrow r_\omega = r_\lambda \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi c}$$

Пусть на элементарную площадку падает поток энергии $d\Phi_\omega$. Часть его $d\Phi'_\omega$ поглощается телом. Величина $a_\omega = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}$ называется поглощательной способностью тела:

$a_\omega = a_\omega(\omega, T)$, $a_\omega \leq 1$. Если $a_\omega = 1$, тело называется абсолютно черным, если $a_\omega < 1$, то серым.

Между испускательной и поглощательной способностями есть связь. Проведем мысленный эксперимент. Пусть внутри замкнутой оболочки, поддерживаемой при постоянной температуре T , находится несколько тел. Опыт показывает, что через какое-то время все тела примут температуру T .



Тогда тело с большей r_ω должно иметь большую a_ω , откуда следует:

$$\left(\frac{r_\omega}{a_\omega} \right)_1 = \left(\frac{r_\omega}{a_\omega} \right)_2 = \dots = \left(\frac{r_\omega}{a_\omega} \right)_n$$

Отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, оно является универсальной функцией частоты (или длины волны) и температуры:

$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = f(\omega, T) \quad - \quad \text{закон Кирхгофа.}$$

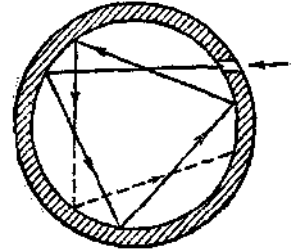
Сами r_ω и a_ω могут сильно меняться от тела к телу, но их отношение остается постоянным. Отметим интересный случай зеркальной поверхности. Идеальное зеркало отражает весь упавший поток, т.е. его поглощательная способность равна нулю, значит, равна нулю и испускательная способность. Иначе говоря, зеркальная поверхность НЕ испускает теплового излучения!

Для абсолютно черного тела $a_\omega = 1$, поэтому $r_\omega = f(\omega, T)$, т.е. универсальная функция Кирхгофа $f(\omega, T)$ – это испускательная способность абсолютно черного тела.

В теории пользуются $f(\omega, T)$, на практике удобнее $\varphi(\lambda, T)$. Найдем их связь.

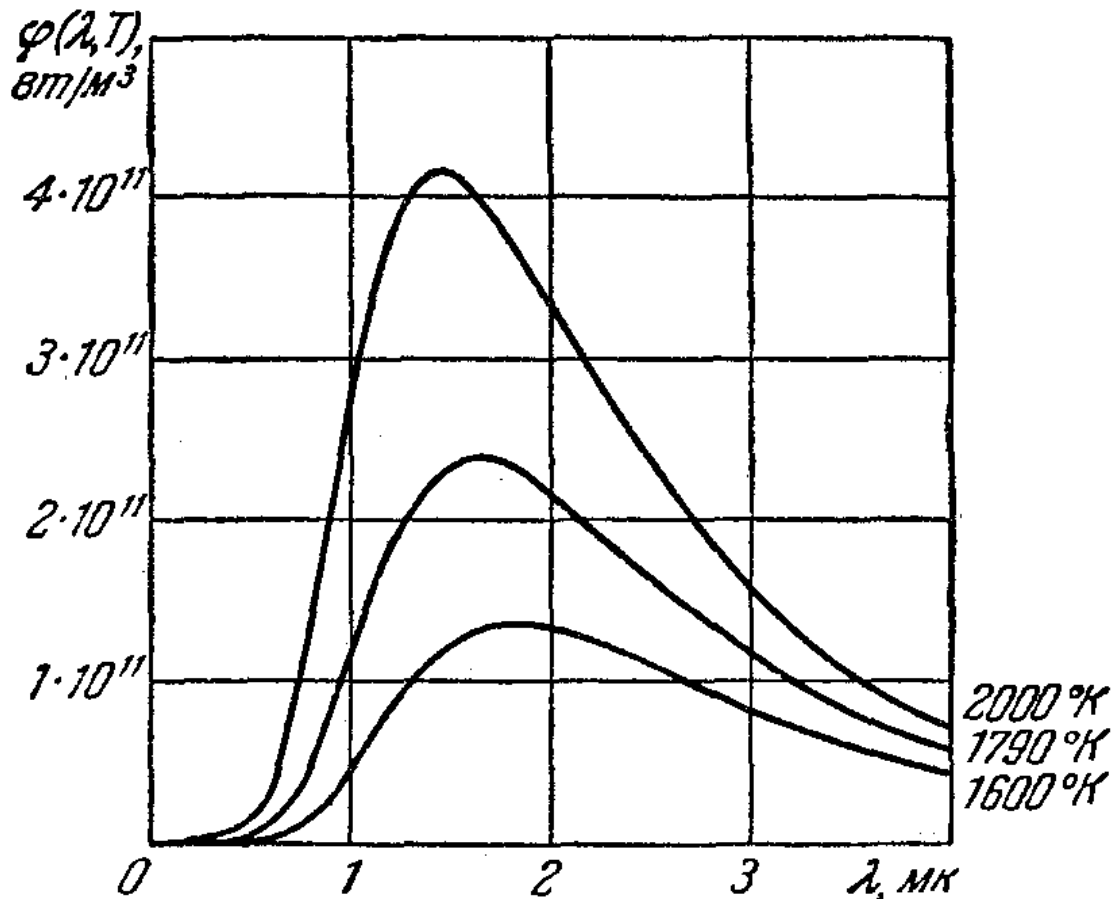
$$r_\omega = r_\lambda \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi c} \Rightarrow f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} \varphi\left(\frac{2\pi c}{\omega}, T\right) \quad \text{и} \quad \varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right).$$

Абсолютно черных тел в природе не бывает (сажа, например, имеет $a_\omega = 1$ только в ограниченном интервале частот, а в инфракрасной области $a_\omega < 1$). Однако его можно создать искусственно: маленькое отверстие в замкнутой оболочке с поглощающей внутренней поверхностью (см. рисунок) очень близко к абсолютно черному телу.



Если стенка имеет температуру T , то излучение из отверстия имеет $r_\omega = f(\omega, T)$. Разлагая его в спектр и анализируя распределение энергии по ω (или λ) можно экспериментально найти $\varphi(\lambda, T)$ или $f(\omega, T)$ – см. график.

Из графика видно, что энергетическая светимость абсолютно черного тела сильно возрастает с температурой, при этом максимум испускательной способности сдвигается в сторону более коротких волн.



§36. Равновесное излучение.

Рассмотрим излучение, находящееся в равновесии с веществом. Рассмотрим полость при температуре T без тел внутри. Плотность энергии излучения (энергия единицы объема) зависит от температуры: $u = u(T)$. Доля этой плотности в диапазоне $\omega \div \omega + d\omega$ равна

$$du_{\omega} = u(\omega, T)d\omega, \text{ а полная плотность } u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T)d\omega.$$

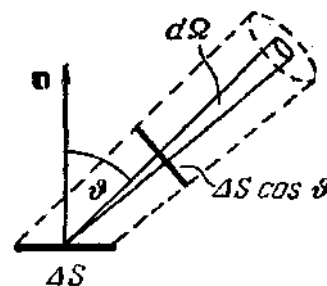
Покажем, что $u(T)$ не зависит от свойств стенок. Рассмотрим 2 разных полости с одинаковыми температурами. Допустим, что $u_1(T) > u_2(T)$. Соединим полости и разрешим им обмениваться энергией через излучение. Поток энергии из 1 в 2 больше, чем из 2 в 1. Тогда стенки полости №2 будут поглощать больше энергии и их температура вырастет. Однако два тела с одинаковой температурой не могут путем теплообмена приобрести разные температуры (2-й закон термодинамики). Значит, наше допущение невозможно и $u_1(T) = u_2(T)$. Это выполнено в каждом частотном интервале, т.е. $u_1(\omega, T) = u_2(\omega, T)$. Независимость равновесного излучения от природы стенок можно объяснить так. Абсолютно черное тело поглотило бы весь поток упавшей на него энергии Φ и столько же испустило бы. Стенки с поглощательной способностью a поглотят $a\Phi$ и отразят $(1-a)\Phi$, а, кроме того, испустят $a\Phi$ (сколько поглотили). В итоге, стенки вернут излучению поток $(1-a)\Phi + a\Phi = \Phi$, т.е. столько же, сколько возвращали бы абсолютно черные стенки.

Равновесная плотность энергии излучения $u(T)$ связана с энергетической светимостью абсолютно черного тела R_q . Рассмотрим полость с абсолютно черными стенками без тел. При равновесии через каждую точку внутри полости будет проходить поток энергии. Если бы был один луч, то плотность потока энергии j равнялась бы uc . Но через каждую точку проходит множество лучей, направления которых равномерно распределены в телесном угле

4π . Поэтому в телесном угле $d\Omega$ будет заключен поток энергии плотностью $dj = \frac{cu}{4\pi} d\Omega$.

Возьмем на внутренней поверхности полости элементарную площадку ΔS . Она посылает в телесный угол $d\Omega = \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$ поток энергии, равный

$$d\Phi = dj \cdot \Delta S \cos \vartheta = \frac{cu}{4\pi} \Delta S \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi. \text{ По всем}$$



направлениям в телесном угле 2π она посылает поток

$$\Delta\Phi = \int d\Phi = \frac{cu}{4\pi} \Delta S \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta}_{1/2} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{c}{4} u \Delta S.$$

Этот поток должен быть таким же, который излучали бы абсолютно черные стенки, т.е.

$R_q \Delta S$. Отсюда получаем, что $R_q = \frac{c}{4} u$. Это соотношение должно выполняться для любого

интервала частот, поэтому $r_q(\omega, T) = f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T)$.

§37. Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина.

Теоретическое объяснение законов излучения абсолютно черного тела привело к понятию квантов энергии. Долгое время не удавалось найти теоретический вид кривой $f(\omega, T)$ (или $u(\omega, T)$). Стефан (1879 г.) на основе анализа экспериментальных данных пришел к выводу, что энергетическая светимость любого тела пропорциональна T^4 . В 1884 году Больцман показал, что это верно лишь для абсолютно черного тела и теоретически вывел формулу $R_q = \sigma T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ Вт/м² град⁴ – постоянная Стефана-Больцмана.

Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры - закон Стефана-Больцмана.

В 1893 году Вильгельм Вин показал, что функция $f(\omega, T)$ должна иметь вид

$$f(\omega, T) = \omega^3 F(\omega/T)$$

$$\text{Тогда } \varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 \cdot F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5} \Psi(\lambda T).$$

Найдем длину волны, соответствующую максимуму функции $\varphi(\lambda, T)$:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^5} \Psi' T - \frac{5}{\lambda^6} \Psi = \frac{1}{\lambda^6} \underbrace{(\lambda T \cdot \Psi' - 5\Psi)}_{\text{функция от } \lambda T} = 0$$

Найдя корень b этой функции, получим $\lambda_m T = b$ - это закон смещения Вина: с ростом температуры максимум излучения λ_m смещается в сторону меньших длин волн. Это можно видеть на рисунке в конце §35.

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad b = 2,90 \cdot 10^3 \text{ мкм} \cdot K,$$

при комнатной температуре $\lambda_m \approx 1 \text{ мкм}$ - это инфракрасное излучение.

§38. Стоячие волны.

Для нахождения функции $f(\omega, T)$ необходимо найти число стоячих волн, которые могут существовать в объеме конечных размеров. Рассмотрим ситуацию для одномерного случая.

Пусть вдоль Ох бегут две встречных плоских волны, возникших при отражении от стенок, расположенных при $x = 0$ и $x = a$:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx);$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha)$$

В этом случае возникнет стоячая волна, причем на границах в зависимости от условий могут быть либо узлы, либо пучности (например, на концах струны – узлы, а на концах закрепленного в середине стержня – пучности). Чтобы при $x = 0$ была пучность, должно быть $\alpha = 0$, а чтобы узел, надо $\alpha = \pi$.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t \text{ - пучность при } x = 0$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos(kx + \pi/2) \cdot \cos(\omega t + \pi/2) \text{ - узел при } x = 0$$

Чтобы при $x = a$ была пучность, надо $ka = \pi n \Rightarrow k = \pi n/a$.

Для второго случая (на обоих концах узлы) получим такое же условие.

Рассмотрим два возможных значения волновых чисел: $k' = \pi n'/a$, $k'' = \pi n''/a$, где

n', n'' - целые числа. Тогда $\Delta N_k = n'' - n' = \frac{a}{\pi} \Delta k$ - это число возможных стоячих волн в

диапазоне $\Delta k = k'' - k'$. Переходя к непрерывному случаю, получим $dN_k = \frac{a}{\pi} dk$. Учтя, что

$k = \omega/c$, получим $dN_\omega = \frac{a}{\pi c} d\omega$ - число стоячих волн в диапазоне частот $\omega \div \omega + d\omega$.

В двумерном случае (плоская мембрана) можно показать, что $dN_\omega = \frac{S}{2\pi c^2} \omega d\omega$, где

S - площадь мембраны.

В трехмерном случае $dN_\omega = V \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}$, т.е. $dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}$ - число стоячих волн на

единицу объема.

Поскольку волны могут иметь две взаимно перпендикулярных поляризации, то это

число надо умножить на 2. Окончательно: $dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$.

§39. Формула Рэля-Джинса.

Они считали, что, в согласии с теоремой классической статистики о равномерном распределении энергии по степеням свободы, на каждую стоячую волну приходится энергия kT , т.е. по $kT/2$ на электрическую и магнитную составляющие.

Энергия в диапазоне $\omega \div \omega + d\omega$ равна

$$u(\omega, T)d\omega = kTdn_\omega = kT \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}, \quad \text{т.е. } u(\omega, T) = kT \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3},$$

откуда следует $f(\omega, T) = \frac{c}{4}u(\omega, T) = \frac{\omega^2 kT}{4\pi^2 c^2}$ - формула Рэля-Джинса.

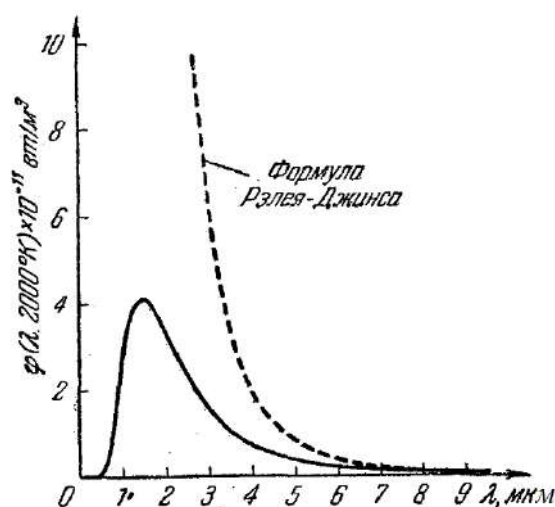
Видно, что она удовлетворяет условию Вина $f(\omega, T) = \omega^3 F(\omega/T)$.

На рисунке изображена кривая Рэля-Джинса и кривая, полученная из эксперимента. Видно, что совпадение имеет место только при больших длинах волн. Поэтому эта формула не может считаться верной.

Кроме того, есть еще одно противоречие.

Интеграл $\int_0^\infty u(\omega, T)d\omega = \infty$, т.е. в равновесном

состоянии энергия, содержащаяся в излучении, равна бесконечности, т.е. равновесие недостижимо при $T \neq 0$. Это так называемая «ультрафиолетовая катастрофа» - вся энергия должна перейти в излучение, т.е. тело должно остыть до нуля Кельвин.



§40. Формула Планка.

С классической точки зрения, вывод Рэля-Джинса безупречен. Значит, есть что-то несовместимое с законами классической физики. В 1900 году Макс Планк (Нобелевская премия за 1913 год) удалось найти вид $u(\omega, T)$, совпадающий с экспериментальным. Для этого ему пришлось предположить, что электромагнитное излучение излучается в виде порций — квантов с энергией $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянные Планка.

Тогда энергия стоячей волны может равняться целому числу квантов $\varepsilon_n = n\hbar\omega$, где n - целое число. Распределение стоячих волн по энергии должно подчиняться закону Больцмана, т.е. вероятность p_n того, что стоячая волна имеет энергию $\varepsilon_n = n\hbar\omega$, равна

$$p_n = \frac{N_n}{N} = \frac{e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT}}$$

Найдем среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \varepsilon_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \hbar \omega e^{-n \hbar \omega / kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \hbar \omega / kT}}$

Введем обозначение $\frac{\hbar \omega}{kT} = x$. Тогда $\langle \varepsilon \rangle = \hbar \omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = -\hbar \omega \frac{d}{dx} (\ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx})$.

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$ - сумма бесконечно убывающей прогрессии. Тогда

$$\langle \varepsilon \rangle = -\hbar \omega \frac{d}{dx} (\ln \frac{1}{1 - e^{-x}}) = \hbar \omega \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{\hbar \omega}{e^x - 1}$$

(При $\hbar \rightarrow 0$ получим $\langle \varepsilon \rangle \rightarrow kT$, т.е. предельный случай – классическая физика).

Используя это выражение для средней энергии, получим:

$$u(\omega, T) d\omega = \langle \varepsilon \rangle dn_{\omega} = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{(e^{\hbar \omega / kT} - 1) \pi^2 c^3},$$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{(e^{\hbar \omega / kT} - 1) \pi^2 c^3} \text{ - формула Планка.}$$

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)} \text{ - удовлетворяет условиям Вина.}$$

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 c^2 \hbar}{\lambda^5 (e^{2\pi \hbar c / kT \lambda} - 1)} \text{ - ход кривой совпадает с опытом.}$$

Найдем b в законе смещения Вина: $\varphi(\lambda, T) = \max \Rightarrow \lambda^5 (e^{2\pi \hbar c / kT \lambda} - 1) = \min \Rightarrow$

$$5\lambda^4 (e^{2\pi \hbar c / kT \lambda} - 1) + \lambda^5 e^{2\pi \hbar c / kT \lambda} \left(-\frac{2\pi \hbar c}{kT \lambda^2}\right) = 0$$

Обозначив $\frac{2\pi \hbar c}{kT \lambda_{\max}} = y$, получим уравнение $5(e^y - 1) = ye^y$, корень которого

$y = 4,965$. Макс Планк определил величину \hbar так, чтобы выполнялся закон смещения Вина,

т.е. величина $T \lambda_m = \frac{2\pi \hbar c}{ky} = b$ равнялась бы ее экспериментальному значению

$b = 2,90 \cdot 10^3 \text{ мкм} \cdot \text{К}$. Отсюда и получилось $\hbar = h / 2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

Найдем энергетическую светимость абсолютно черного тела:

$$R_{\nu} = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{4\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)} = \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{\pi^4/15}$$

$$R_{\nu} = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma \cdot T^4 \text{ - закон Стефана-Больцмана.}$$

Теоретически рассчитанное значение $\sigma = 5,6696 \cdot 10^{-8}$ Вт/м² К⁴, а в эксперименте получается $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ Вт/м² К⁴.

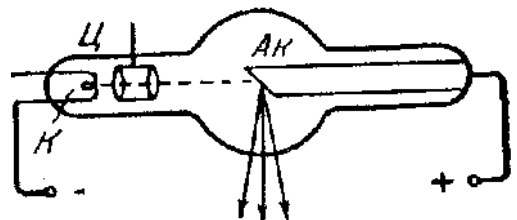
Таким образом, формула Планка дает исчерпывающее описание равновесного теплового излучения.

Глава 4. Фотоны.

§41. Тормозное рентгеновское излучение.

Квантовая природа излучения подтверждается существованием коротковолновой границы спектра тормозного рентгеновского излучения.

Рентгеновские лучи возникают при бомбардировке твердых мишеней быстрыми электронами. Почти вся энергия электронов



выделяется в виде тепла, только 1-3% идет в излучение. Поэтому анод (антикатод) АК интенсивно охлаждают. Мощность излучения P пропорциональна произведению $e^2 w^2$.

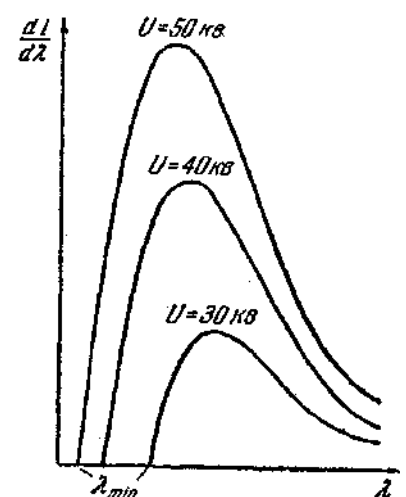
Если торможение длится время τ , то в приближении равноускоренного торможения ускорение равно $w = v_0 / \tau$. Полная выделенная энергия

$$E = p\tau \sim e^2 v_0^2 / \tau.$$

Для увеличения энергии надо увеличивать скорость. В рентгеновских трубках напряжение $U \approx 50$ кВ, при этом $v_0 \approx 0,4c$. В ускорителях (бетатронах, синхрофазотронах)

$$U \approx 50 \text{ МВ, а } v_0 \approx 0,99995 \cdot c.$$

На рисунке приведены экспериментальные кривые распределения интенсивности тормозного рентгеновского излучения I по длинам волн при разных значениях U . Из классической электродинамики следует, что должны излучаться



все длины волн λ , а в реальности экспериментальные кривые не идут к началу координат, а

обрываются при конечных значениях длины волны $\lambda_{\min} : \lambda_{\min} = \frac{12390}{U} \text{ \AA}.$

Существование λ_{\min} вытекает из квантовой природы излучения. Величина кванта излучения не может быть больше энергии электрона: $\hbar\omega \leq eU$, откуда следует

$$\omega_{\max} = eU / \hbar \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi\hbar c}{eU} = \frac{hc}{eU}.$$

Отсюда находим постоянную Планка h , этот метод считается самым точным.

§42. Фотоэффект.

Явление фотоэффекта – испускание электронов веществом под действием света – открыто Герцем в 1887 году. Он заметил, что искра между шарами проскакивает легче, если один из шаров освещать ультрафиолетом. В 1888-1889 годах явление детально исследовал русский физик Столетов. Им были установлены следующие факты:

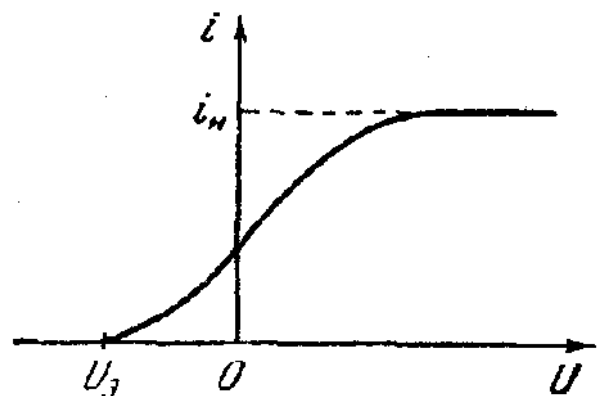
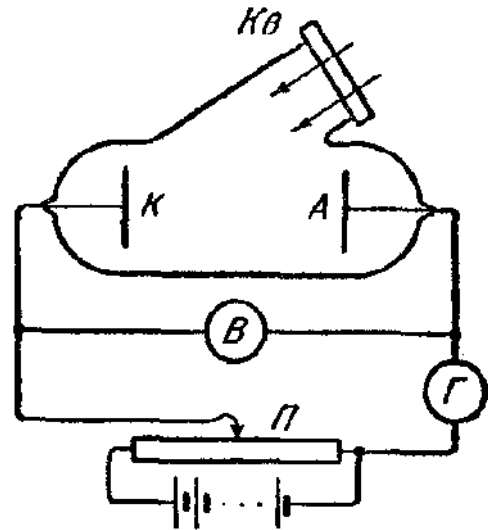
- 1) Ультрафиолет действует сильнее видимого света.
- 2) Сила тока растет с ростом освещенности.
- 3) Вылетающие заряды отрицательны.

В 1898 г. Ленард и Томпсон нашли отношение заряда к массе и убедились, что это электроны.

На рисунках изображена схема исследования фотоэффекта, а также график зависимости тока от напряжения на аноде при постоянном световом потоке. Фототок достигает насыщения, когда все электроны, испущенные катодом, попадают на анод. При меньших напряжениях играет роль пространственный заряд, который заставляет часть вылетевших электронов возвращаться на катод, поэтому ток меньше тока насыщения. При $U = 0$ ток не равен нулю, так как существуют электроны, которые сами долетают до анода. При подаче задерживающего напряжения U_3 другого знака даже самые быстрые электроны уже не могут долететь до анода, т.е.

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_3 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{2eU_3 / m}.$$

Примерно в эти годы Милликен установил, что при освещении катода монохроматическим светом запирающее напряжение U_3 прямо пропорционально частоте света.



В итоге к 1905 г. были сформулированы 3 закона фотоэффекта:

1) Закон Столетова: фототок насыщения пропорционален энергетической освещённости катода (иначе: число фотоэлектронов, выбиваемых из катода за 1 с, прямо пропорционально интенсивности излучения).

2) Максимальная начальная скорость фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой.

3) Для каждого вещества существует красная граница фотоэффекта, то есть минимальная частота света, ниже которой фотоэффект невозможен.

Это явно противоречит классическим волновым представлениям: электромагнитная волна раскачивает электрон, в какой-то момент он покидает вещество со скоростью, которая тем больше, чем больше амплитуда волны, а значит, и ее интенсивность. Но на опыте скорость от интенсивности не зависит. Существование красной границы также загадочно: при достаточно большой амплитуде волны электрон должен был бы вырываться из вещества при любой частоте.

В 1905 г. Эйнштейн показал, что все эти закономерности легко объясняются, если предположить, что свет поглощается теми же порциями, что излучается (по Планку).

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта имеет вид:

$$\hbar\omega = A + \frac{mv_m^2}{2}.$$

где A – это работа выхода, своя для каждого вещества.

Опыты Милликена позволили найти постоянную \hbar , она оказалась той же, что из теплового излучения (Планк) и границы тормозного рентгеновского спектра.

Для существования фотоэлектронов надо, чтобы $\hbar\omega \geq A$, т.е. $\omega \geq \omega_0 = A/\hbar$, тогда $\lambda \leq \lambda_0 = 2\pi\hbar c / A$, что объясняет существование красной границы фотоэффекта.

После изобретения лазера стали возможны многофотонные процессы, когда один электрон поглощает N фотонов: $N\hbar\omega = A + \frac{mv_m^2}{2}$, тогда красная граница равна $N\lambda_0$, а ток насыщения, как показывает эксперимент, пропорционален N -й степени энергетической освещённости.

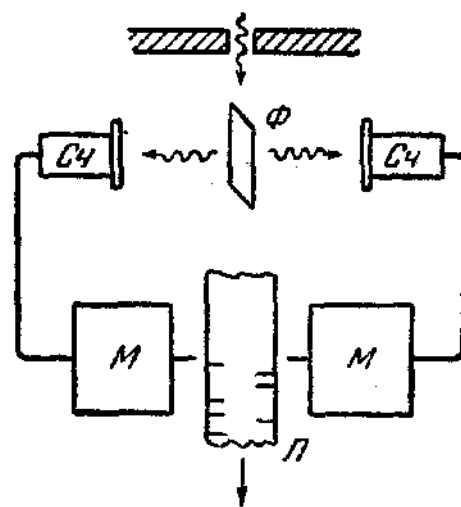
До создания теории фотоэффекта можно было думать, что испускание света квантами аналогично капанию капель из крана: вода капает каплями, но это не значит, что она из них состоит. Но Эйнштейн показал, что излучение и поглощается такими же порциями, какими излучается.

§43. Опыт Боте. Фотоны.

Для объяснения распределения энергии в спектре равновесного теплового излучения достаточно, как показал Планк, допустить, что свет только излучается порциями. Для объяснения фотоэффекта достаточно предположить, что свет и поглощается такими же порциями. Однако Эйнштейн пошел значительно дальше. Он высказал гипотезу, что свет и распространяется в виде дискретных частиц, которые вначале называли световыми квантами, а потом стали называть фотонами (в 1926 г.).

Эта гипотеза была подтверждена рядом опытов, самым убедительным из которых явился опыт Боте (1924 г. - Нобелевская премия по физике за 1954 год).

Тонкая металлическая фольга помещается между двумя газоразрядными счетчиками. Фольга освещалась слабым пучком рентгеновских лучей, под действием которых она сама становилась источником рентгеновских лучей. Вследствие малой интенсивности первичного пучка количество квантов, испускаемых фольгой, было невелико. При попадании в счетчик рентгеновских лучей он срабатывал и приводил в действие особый механизм М, который делал отметку на движущейся ленте Л. Если бы



излучаемая энергия распространялась равномерно во все стороны, как это следует из волновых представлений, оба счетчика должны были срабатывать одновременно, и отметки на ленте находились бы одна против другой. В действительности же наблюдалось совершенно беспорядочное расположение отметок. Это можно объяснить лишь тем, что в отдельных актах испускания возникают световые частицы, летящие то в одном, то в другом направлении.

Итак, было экспериментально доказано существование частиц света – фотонов – с энергией $E = \hbar\omega$. Значит, масса фотона равна $m = E/c^2 = \hbar\omega/c^2$, а импульс $p = mc = \hbar\omega/c$. Из соотношения СТО $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$ получаем, что $m_0 = 0$, откуда следует, что $v = c$ всегда (так как $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$).

Значит, фотон – частица особого рода, отличающаяся от электронов, протонов и т.д., которые могут существовать, двигаясь с любой скоростью и даже покоясь. Фотоны существуют только при скорости света.

Запишем импульс в виде $p = \hbar\omega/c = \hbar \cdot 2\pi/\lambda = \hbar k$, где k - волновое число, а $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, где \vec{k} - волновой вектор.

Пусть на поглощающую свет (абсолютно черную) поверхность падает поток фотонов по нормали к поверхности. Если концентрация фотонов равна n , то за 1 секунду на 1 м^2 падает nc фотонов. Каждый из них при поглощении отдает стенке импульс $p = E/c$. Значит, за 1 с стенка получит импульс $P = nE$. Это энергия фотонов в 1 м^3 , т.е. плотность энергии w .

С другой стороны, импульс, переданный 1 м^2 за 1 с, - это давление. Значит, давление светового пучка равно плотности световой энергии: $P_q = w$. Если же поверхность не поглощающая, а зеркальная, то каждый фотон, отражаясь, отдает стенке импульс $2p$, т.е. $P_z = 2w$.

Таким образом, в ряде явлений свет ведет себя как поток фотонов. Однако дифракция и интерференция могут быть объяснены только на базе волновой теории. Свет обнаруживает корпускулярно-волновой дуализм (двойственность): в одних явлениях проявляется волновая природа, в других – корпускулярная. Как мы увидим позже, такой дуализм свойственен и обычным частицам вещества – электронам, протонам и т.д.

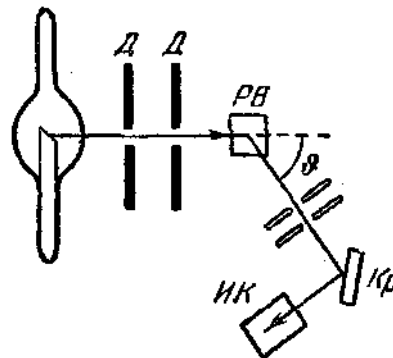
В каком же соотношении находятся волновая и корпускулярная картины? Рассмотрим с обеих точек зрения освещенность какой-то поверхности. С волновой точки зрения освещенность пропорциональна A^2 , а с корпускулярной – плотности потока фотонов. Значит, между квадратом амплитуды световой волны и плотностью потока фотонов имеется прямая пропорциональность.

Энергия выделяется в той точке, в которую попал фотон. Но распределение фотонов по поверхности носит статистический характер. Наблюдаемая на опыте равномерность освещенности объясняется ОЧЕНЬ большой плотностью потока фотонов. Например, при освещенности 50 лк (глаза не устают при чтении) и $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ на 1 см^2 падает $2 \cdot 10^{13}$ фотонов за 1 с. Относительная флуктуация обратно пропорциональна корню квадратному из числа частиц, поэтому флуктуации малы и освещенность кажется равномерной.

Отметим, что глаз чувствует свет с $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ при попадании на зрачок примерно 100 фотонов в секунду. При такой интенсивности флуктуации были обнаружены.

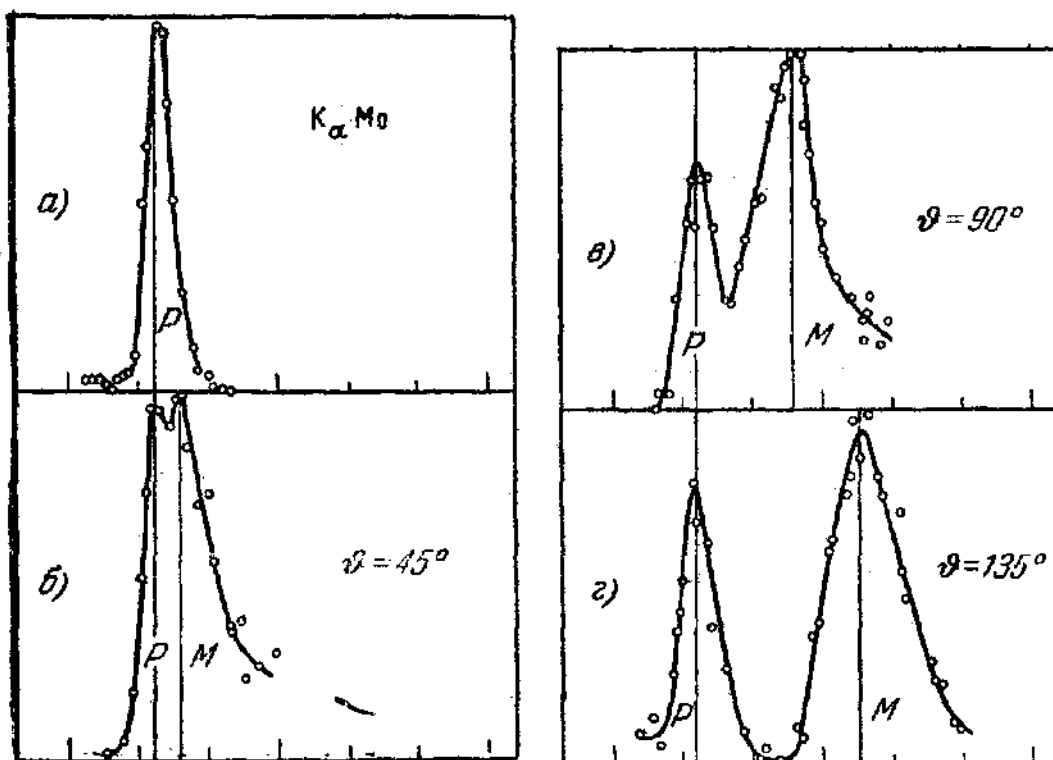
§44. Эффект Комптона.

В 1923 г. Комптон обнаружил, что при рассеянии веществами рентгеновских лучей в рассеянных лучах, наряду с исходной λ , есть и лучи с большей длиной волны λ' . (На рисунке Д – диафрагмы, РВ – рассеивающее вещество, Кр – кристалл спектрографа, ИК –



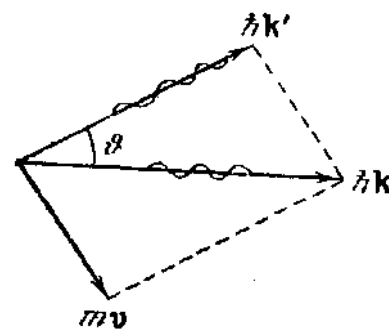
ионизационная камера спектрографа). Разность $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не зависела от λ и от природы рассеивающего вещества, она определялась только углом ϑ между направлениями исходного и рассеянного пучков. Соотношение интенсивностей смещенной и несмещенной компонент зависит от атомного номера вещества. При малых атомных номерах (Li, Ba, V) почти все излучение имеет смещенную длину волны λ' . С ростом атомного номера всё большая часть излучения рассеивается без смещения λ .

На следующем рисунке представлены результаты рассеяния монохроматических рентгеновских лучей (линия K_α молибдена) на графите. Кривая *a* характеризует первичное излучение, остальные относятся к разным углам рассеяния. По оси абсцисс отложена длина волны, по оси ординат – интенсивность излучения.



Все эти особенности можно объяснить, рассматривая рассеяние как процесс упругого столкновения рентгеновских фотонов с практически свободными электронами. Такими можно считать электроны, слабо связанные с атомами, энергия связи которых значительно меньше той энергии, которую им может передать фотон. Отметим, что эта энергия не равна энергии фотона.

Пусть фотон с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\vec{k}$ сталкивается с покоящимся свободным электроном, в результате чего электрон приобретает импульс $\vec{p} = m\vec{v}$, а



импульс фотона становится равен $\hbar\vec{k}'$. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + \overbrace{c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}}^{\text{энергия электрона}} \quad (*)$$

$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p} \quad (**)$$

Здесь m_0 - масса покоя электрона. (Мы воспользовались формулой теории относительности $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$).

Запишем (*) в виде $\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} = \hbar(k - k') + m_0c$ (т.к. $k = \omega/c$ и $k' = \omega'/c$) и возведем в квадрат: $p^2 + m_0^2c^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar m_0c(k - k') + m_0^2c^2$. Из (**) получим $p^2 = \hbar^2(k^2 - 2kk'\cos\vartheta + k'^2)$. Приравнивая эти выражения, получим $m_0c(k - k') = \hbar k k'(1 - \cos\vartheta)$, а умножив на $2\pi / m_0ckk'$, приведем к виду

$$\frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}(1 - \cos\vartheta) \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\vartheta),$$

где $\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{m_0c} \approx 0,0243 \text{ \AA}$ - комптоновская длина волны. Она совпадает с полученной экспериментально.

Если электрон сильно связан с атомом, то обмен энергией и импульсом у фотона происходит с атомом в целом. Поскольку масса атома много больше массы электрона, то соответствующая λ_c мала и $\lambda' \approx \lambda$.

С ростом атомного номера относительное число электронов с сильной связью растет, что обуславливает ослабление смещенной линии.

За открытие этого эффекта Артур Комптон получил Нобелевскую премию по физике за 1927 год.

АТОМНАЯ ФИЗИКА

Глава 1. Боровская теория атома.

§45. Атомные спектры.

Спектры излучения атомов состоят из отдельных линий и называются линейчатыми. Анализ этих спектров послужил ключом к пониманию строения атомов. Было замечено, что линии объединяются в группы – серии.

Рассмотрим атом водорода. В 1885 г. швейцарский физик Бальмер установил, что в видимой области длины волн излучения водорода могут быть представлены формулой

$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}$, где $n = 3, 4, 5, \dots$. Эту формулу можно переписать в виде

$$\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{для } n \geq 3 \quad - \text{ формула Бальмера.}$$

Здесь $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$ – постоянная Ридберга.

В ультрафиолетовом диапазоне имеется серия Лаймана $\omega = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n \geq 2$.

Остальные серии в инфракрасной области:

серия Пашена $\omega = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n \geq 4$;

серия Брекета $\omega = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n \geq 5$;

серия Пфунда $\omega = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n \geq 6$.

В 1888 году Ридберг объединил все эти формулы в одну:

$$\omega = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad - \quad \text{обобщенная формула Бальмера.}$$

Частота любой линии может быть представлена как разность двух чисел из ряда $\frac{R}{1^2}; \frac{R}{2^2}; \frac{R}{3^2} \dots$, общий член которого записывается в виде $T(n) = \frac{R}{n^2}$. Эти числа называются

термами. Тогда $\omega = T(m) - T(n)$, например, частота первой линии серии Бальмера равна $T(2) - T(3)$, а второй линии серии Пфунда $T(5) - T(7)$. Изучение атомов других веществ

показало, что частоты излучаемых волн также получаются как разности двух термов:

$\omega = T_1(m) - T_2(n)$, однако математически термы записываются более сложным образом.

Кроме того, первый и второй члены формулы берутся из различных рядов термов.

§46. Модель атома Томсона.

Согласно классическим представлениям, атом излучает монохроматическую волну, если электрон в атоме совершает гармонические колебания, т.е. удерживается силой $\vec{F} = -k\vec{r}$. В 1903 г. Дж.Дж.Томсон предложил модель, в которой атом – равномерно заряженный положительным зарядом шар, внутри которого находятся электроны («кекс с изюмом»). Суммарный положительный заряд равен сумме отрицательных зарядов электронов, что обеспечивает общую электронейтральность.

Найдем напряженность поля, созданного положительным зарядом (для атома водорода)

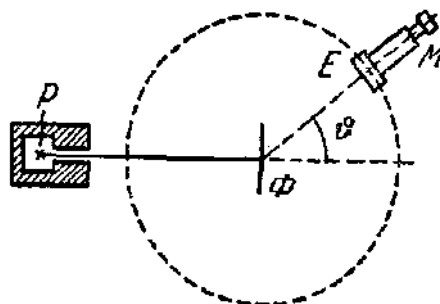
$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}. \text{ Сила, действующая на электрон, равна } \vec{F} = -e\vec{E} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} = -k\vec{r}.$$

$$\text{Тогда } \omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{e^2 / 4\pi\epsilon_0 m R^3} \Rightarrow R_{am} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m \omega^2} \right)^{1/3}.$$

Если $\lambda = 0,600$ мкм, то $R_{am} = 3 \cdot 10^{-8}$ см. По порядку величины это верно, но сама модель неверна и представляет только исторический интерес.

§47. Опыты по рассеянию α -частиц. Ядерная модель атома.

Резерфорд обстреливал тонкую пленку α -частицами (ядрами атома гелия). α -частица, ударяясь об экран, вызывает сцинтилляцию (искры). Оказалось, что есть рассеяние на угол $\vartheta = 180^\circ$, что может быть, только если существует сильное электрическое поле, отталкивающее α -частицы.



На рисунке показана схема опыта Резерфорда. P – источник α -частиц, Ф – фольга. Рассеянные α -частицы ударяются об экран E, покрытый сернистым цинком, а возникающие при этом вспышки наблюдаются в микроскоп M. Все устройство помещается в откачиваемый кожух, чтобы исключить столкновения с молекулами воздуха.

На основе полученных результатов Резерфорд в 1911 г. предложил ядерную модель атома: в центре находится положительное ядро размером примерно 10^{-12} см, вокруг него располагаются электроны, причем почти вся масса атома находится в его ядре. На этой базе Резерфорд вывел формулу доли α -частиц, рассеянных на углы $\vartheta \div \vartheta + d\vartheta$:

$$\frac{dN(\vartheta)}{N} = nd \left(\frac{ze^2}{m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \vartheta},$$

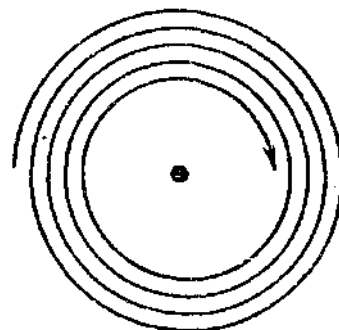
где d – толщина фольги, z – номер атома фольги в таблице Менделеева, n – число атомов в единице объема.

В 1913 г. сотрудники его лаборатории провели измерения чисел сцинтилляций за одно и то же время при разных углах ϑ и получили прямую пропорциональность d и обратную пропорциональность $\sin^4 \vartheta$ и v^4 , подтвердив тем самым предположения Резерфорда.

Предполагая кулоновское взаимодействие, получим для точки разворота α -частицы при центральном ударе (т.е. радиус ядра):

$$\frac{mv^2}{2} + 0 = 0 + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} \quad \Rightarrow \quad r_{\min} \approx 10^{-12} \text{ см.}$$

Однако ядерная модель оказалась в противоречии с законами классической механики и электродинамики. Поскольку система неподвижных зарядов не может находиться в устойчивом равновесии, то Резерфорду пришлось предположить, что электроны движутся вокруг ядра, описывая замкнутые траектории. Но в этом случае электрон будет двигаться с ускорением, в связи с чем, согласно классической электродинамике, он должен непрерывно излучать электромагнитные волны. Процесс излучения сопровождается потерей энергии, так что в конечном счете электрон должен будет упасть на ядро (см. рисунок).



§48. Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца.

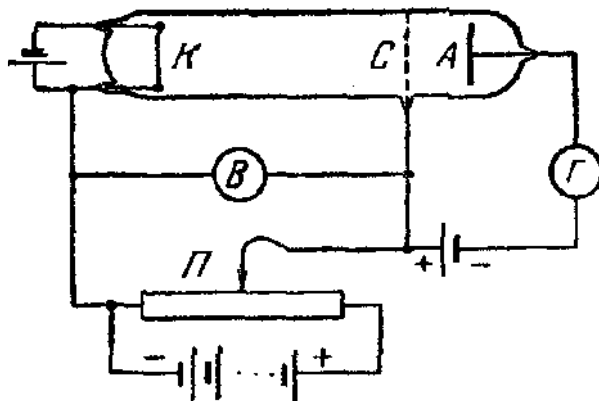
Выход из создавшегося тупика был найден датским физиком Нильсом Бором в 1913 г., правда, ценой введения предположений, противоречащих как классической механике, так и классической электродинамике. Допущения, сделанные Бором, содержатся в двух сформулированных им постулатах.

1) Электрон в атоме может находиться только на некоторых дискретных орбитах, на которых он не излучает, несмотря на то что движется с ускорением.

2) При переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую электрон испускает или поглощает квант электромагнитного излучения, энергия которого равна разности энергий стационарных состояний: $\hbar\omega = E_n - E_m$.

В 1914 г. существование дискретных уровней подтвердилось в опыте Франка и Герца (племянник Генриха Герца) – нобелевская премия 1925 года.

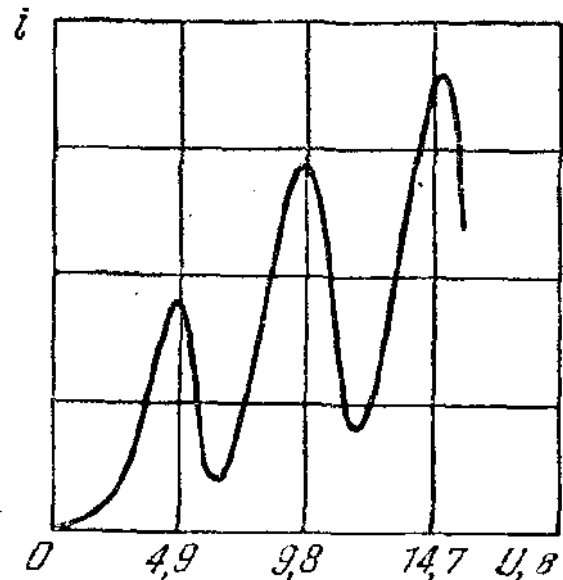
В трубке, заполненной парами ртути, имелись три электрода: катод К, анод А и сетка С. Электроны, вылетавшие из катода вследствие термоэлектронной эмиссии,



ускорялись разностью потенциалов U , приложенной между катодом и сеткой, которое можно было плавно менять с помощью потенциометра П. Между сеткой и анодом создавалось слабое электростатическое поле ($\approx 0,5 B$), тормозившее движение электронов к аноду.

На графике приведена зависимость силы анодного тока i от напряжения катод-сетка (U).

Такое поведение кривой объясняется тем, что атомы ртути могут воспринимать энергию только порциями $\Delta E_1 = E_2 - E_1$, $\Delta E_2 = E_3 - E_1$ и т.д., где $E_1, E_2, E_3 \dots$ - энергии стационарных состояний. Пока энергия электрона меньше ΔE_1 , она поглотиться не может, поэтому столкновения электрона с атомом ртути являются упругими, т.е. энергия



электрона не меняется. Часть электронов попадает на сетку, остальные достигают анода. Чем больше скорость, с которой электроны подлетают к сетке, (т.е. чем больше U), тем больше доля электронов, проскочивших через сетку, т.е. тем больше сила тока. Если энергия электрона больше ΔE_1 , то при соударении электроны передают атому энергию ΔE_1 , и дальше двигаются с меньшей скоростью. Поэтому значительная их доля уже не может прорваться к аноду, так как сила на участке сетка-анод тормозящая. Например, при $U = 5,3 B$ электрон отдает атому энергию, соответствующую $4,9 B$ (первый потенциал возбуждения ртути) и продолжает двигаться с энергией $0,4$ эВ. Если такой электрон и окажется между сеткой и анодом, то он не сможет преодолеть задерживающее напряжение $0,5 B$ и будет возвращен обратно на сетку. Поэтому ток резко падает.

При напряжении больше $9,8 B$ электрон имеет шанс дважды претерпеть неупругое столкновение с атомами ртути, вследствие чего сила тока снова начнет уменьшаться.

При достаточном разрежении можно наблюдать и переходы в состояние E_3 с $\Delta E_2 = 6,7$ эВ. Тогда на кривой будут наблюдаться максимумы при напряжениях, кратных $6,7 B$, а также сумме $(4,9 + 6,7) B$ и т.д.

Атомы, поглотившие энергию ΔE , переходят в возбужденное состояние, но через короткое время (10^{-8} секунды) возвращаются в основное состояние, излучая квант света (фотон) с частотой $\omega = \Delta E / \hbar$.

§49. Правила квантования круговых орбит.

Условия для квантования орбит Бор вывел из постулата Планка, согласно которому осциллятор может иметь только такие состояния, в которых $E_n = n\hbar\omega$. Пусть q - координата одномерного осциллятора, а p - импульс. Тогда $E_n = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = n\hbar\omega$,

(поскольку $\omega^2 = k/m$), откуда: $\frac{q^2}{2n\hbar/m\omega} + \frac{p^2}{2mn\hbar\omega} = 1$ - это уравнение эллипса с

полуосями $a = \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}}$ и $b = \sqrt{2mn\hbar\omega}$.

Площадь эллипса $S = \pi ab = 2\pi n\hbar$. Эту же площадь можно записать так: $S = \oint pdq$. Таким образом, приходим к выводу, что интеграл по замкнутой траектории $\oint pdq = n \cdot 2\pi\hbar$. Этот результат можно обобщить и для других систем, надо под q и p подразумевать обобщенную координату и импульс. Для электрона, вращающегося по окружности, $q \Rightarrow \varphi$, $v \Rightarrow \dot{\varphi}$, $m \Rightarrow mr^2$ (момент инерции I), $p \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = mvr = M$, $\oint Md\varphi = n \cdot 2\pi\hbar$.

Поскольку сила центральная, то $M = const \Rightarrow \oint Md\varphi = M \oint d\varphi = 2\pi M = 2\pi\hbar n$, откуда следует $M = n\hbar$, т.е. реализуются только те состояния, в которых момент импульса электрона равен целому числу постоянных Планка \hbar .

§50. Элементарная боровская теория атома водорода.

Реализуются только те круговые орбиты, на которых $mvr = n\hbar \Rightarrow v = \frac{n\hbar}{mr}$, где n - главное квантовое число.

Рассмотрим электрон в поле ядра с зарядом Ze (Z - номер атома в таблице Менделеева, $Z = 1$ - водород, $Z > 1$ - водородоподобный атом).

$$m\omega_{uc} = F_{кул}; \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{в системе СГС } \frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}).$$

Подставив сюда выражение для v , получим

$$\frac{mn^2\hbar^2}{m^2r^3} = \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow r_n = \frac{\hbar^2}{mZe^2} n^2 \quad \text{- радиус } n\text{-й орбиты.}$$

Радиус первой орбиты водорода называется боровским радиусом и обозначается r_0 .

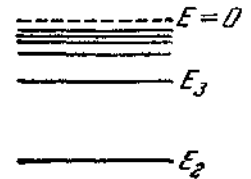
$$r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,529 \text{ \AA} - \text{порядка размеров атома.}$$

В СИ $r_n = \frac{\hbar^2}{mZe^2} 4\pi\epsilon_0 n^2$.

Внутренняя энергия атома складывается из кинетической и энергии взаимодействия:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} \quad (\text{в СГС})$$

Но, как сказано выше, $\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow E_n = -\frac{Ze^2}{2r_n} = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}$.



Полученный энергетический спектр изображен на рисунке.

При переходе атома водорода из состояния n в k излучается фотон

с частотой $\omega = \frac{E_n - E_k}{\hbar} = -\frac{me^4}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$. Мы пришли к

обобщенной формуле Бальмера и получили выражение для постоянной

Ридберга $R = \frac{me^4}{2\hbar^3}$, что очень хорошо согласуется с экспериментальным



значением.

Теория Бора была крупным шагом в развитии теории атома. Она отчетливо показала неприменимость классической физики к внутриатомным явлениям и главенствующее значение квантовых законов в микромире. Однако попытки применить ее хотя бы к атому гелия не привели к результату. Кроме того, она была внутренне противоречивой, не являясь ни последовательно классической, ни последовательно квантовой. Она являлась только переходным этапом на пути к созданию последовательной атомной теории. В настоящее время теория Бора представляет только исторический интерес.

Бор получил Нобелевскую премию по физике за 1922 год.

Глава 2. Элементы квантовой механики.

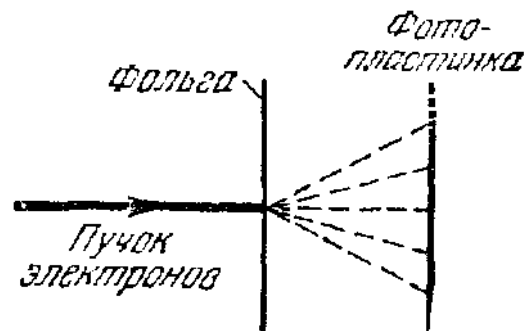
§51. Гипотеза де-Бройля. Волновые свойства вещества.

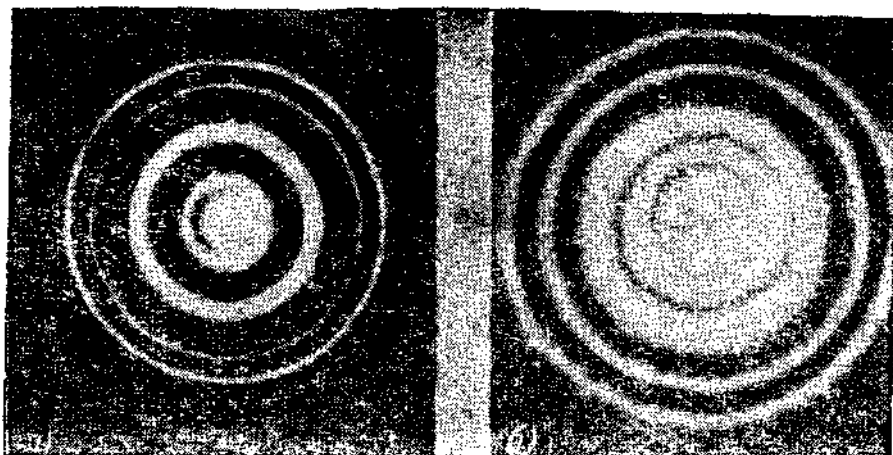
Недостаточность теории Бора сделала необходимым пересмотр основ физики микромира. Свет проявляет дуализм. Он и волна, и частица. В 1924 г. Луи де Бройль выдвинул смелую гипотезу, что дуализм присущ не только свету, но и всем другим частицам. Он говорил: «В оптике мы слишком пренебрегали корпускулярным подходом по сравнению с волновым. Не делалась ли в теории вещества обратная ошибка?»

Де Бройль перенес на случай вещества те же правила перехода от одной картины к другой, какие справедливы в случае света (Нобелевская премия по физике за 1929 год). Энергия и импульс фотона равны: $E = \hbar\omega$, $p = 2\pi\hbar/\lambda$. Тогда, по идее де-Бройля, движение частиц связано с волновым процессом с частотой и длиной волны: $\omega = E/\hbar$, $\lambda = 2\pi\hbar/p$. Гипотеза вскоре была подтверждена экспериментально в опыте Дэвиссона и Джермера (1927, Нобелевская премия по физике за 1937 год).

Они исследовали рассеяние электронов на кристалле никеля. Рассеяние оказалось особенно интенсивным при некоторых углах. Фактически, они воспроизвели эксперимент по рассеянию рентгеновских лучей, используя вместо рентгеновского луча сфокусированный поток электронов. По сути, каждый атом кристалла, согласно принципу Гюйгенса, является источником вторичных волн, и они взаимно усиливаются в результате интерференции между ними при рассеянии под определенными углами, когда фазы интерферирующих вторичных волн совпадают. И Дэвиссону с Джермером удалось найти такой угол максимума числа рассеянных электронов. Рассчитав по этому углу и импульсу электронов длину волны, ученые выяснили, что она в точности совпадает с длиной волны, предсказываемой соотношением де Бройля ($\lambda = 2\pi\hbar/mv$). Так была доказана гипотеза о наличии у элементарных частиц волновых свойств.

Вскоре после этого Томсон и независимо от него Тартаковский получили дифракционную картину при прохождении электронов через металлическую фольгу (рисунок справа). Картина (левый рисунок) оказалась идентичной рассеянию рентгеновских волн на кристалле (правый рисунок).





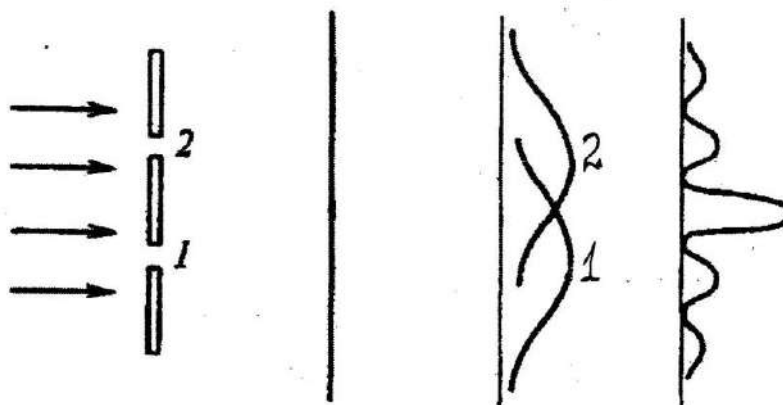
Во всех этих опытах интенсивность пучков была столь велика, что через кристалл проходило одновременно большое количество частиц. Поэтому можно было предположить, что дифракция присуща именно пучку, а не отдельным частицам. В 1949 г. советские физики Биберман, Сушкин и Фабрикант провели опыт, в котором интенсивность электронного пучка была столь мала, что электроны шли по одному. Время между двумя последовательными электронами было в 30 000 раз больше времени пролета через прибор. При достаточном времени наблюдения были получены дифракционные картины, не отличающиеся от картин при пучке. Таким образом, волновые свойства частиц не являются свойством их коллектива, а присущи каждой частице в отдельности.

Впоследствии дифракционные явления обнаружили также для нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков. Дифракционная картина всегда соответствует $\lambda = 2\pi\hbar/mv$.

§52. Необычные свойства микрочастиц.

Термин «микрочастица» отражает только одно свойство объекта, но каждый объект является и «микроволной». Поэтому правильнее было бы называть его «частотна» или «волница».

Своеобразие свойств обнаруживается в следующем эксперименте.



Направим на преграду с двумя узкими щелями параллельный пучок моноэнергетических электронов. За преградой поставим фотопластинку. Сначала закроем вторую щель. Почернение на фотопластинке соответствует кривой 1. Теперь закроем первую щель и откроем вторую, получим кривую 2. И, наконец, откроем обе щели. Получим кривую, изображенную на рисунке *в*. Она не является наложением кривых 1 и 2, как можно было бы ожидать, а оказывается аналогичной картине, получающейся при интерференции двух когерентных световых волн. Это значит, что на движение каждого электрона оказывают влияние ОБЕ щели. Такой вывод не совместим с представлением о траекториях. Если бы электрон в каждый момент находился в конкретной точке, то он проходил бы через конкретную щель и от другой ничего бы не зависело. Дифракция же показывает, что в прохождении электрона участвуют обе щели.

Но не следует думать, что часть электрона проходит через одну щель, а часть – через другую, как у волн. Электрон всегда обнаруживается как целое. Вывод: обычный шарик не может служить прообразом МИКРОчастицы. С уменьшением размеров начинают проявляться качественно новые свойства, не обнаруживающиеся у МАКРОчастиц.

В ряде случаев утверждение об отсутствии траектории у микрочастиц, казалось бы, противоречит опытным фактам. Например, в камере Вильсона мы видим капельки вдоль «траектории»; движение электронов в электронно-лучевой трубке превосходно рассчитывается по классическим законам и т.п. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что при определенных условиях понятие траектории применимо и для микрочастиц, но с некоторой степенью точности. Положение такое же, как в оптике. Если размеры преград или отверстий велики по сравнению с длиной волны, то свет распространяется вдоль лучей (траекторий).

§53. Принцип неопределенности.

В классической механике состояние материальной точки определяется заданием значений координат, импульса, энергии и т.д. Эти величины называются *динамическими переменными*. Строго говоря, микрообъекту не могут быть приписаны такие характеристики. Однако информацию о микрочастицах мы получаем, наблюдая их взаимодействие с приборами, т.е. с макроскопическими телами. Поэтому результаты выражаются в терминах, соответствующих макротелам, т.е. в динамических переменных. Например, говорят о состоянии электрона, в котором он имеет такое-то значение энергии.

Своеобразие свойств микрочастиц проявляется в том, что не для всех переменных при измерениях получаются определенные значения. Например, микрочастица не может одновременно иметь точные значения координаты x и компоненты импульса p_x . Неопределенности значений x и p_x удовлетворяют соотношению $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2$. Чем

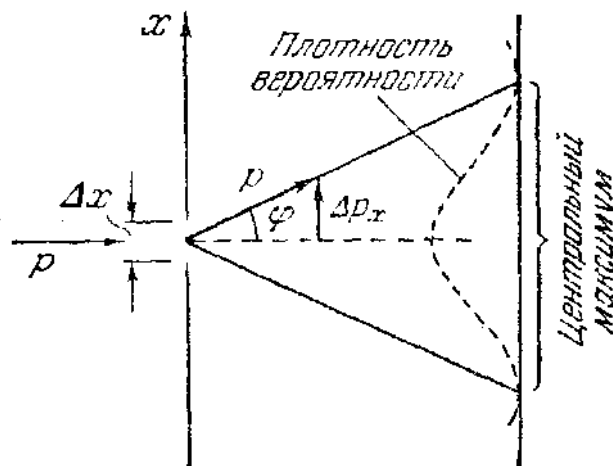
меньше неопределенность одной, тем больше неопределенность другой. Возможно такое состояние, в котором одна из величин имеет точное значение ($\Delta x = 0$), а другая оказывается совершенно неопределенной ($\Delta p_x = \infty$). Аналогичное соотношение имеет место для y и p_y , z и p_z , а также для некоторых других пар величин. Они называются канонически сопряженными. Если A и B – канонически сопряженные величины, то

$\Delta A \cdot \Delta B \geq \hbar/2$ - это соотношение неопределенностей Гейзенберга (1927 г. Нобелевская премия по физике за 1932 год).

Принцип неопределенности Гейзенберга: произведение неопределенностей двух сопряженных величин не может быть по порядку величины меньше постоянной Планка.

Энергия и время - канонически сопряженные величины. Поэтому $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$, т.е. определение энергии с погрешностью ΔE должно занять интервал времени, не меньший $\Delta t \approx \hbar / \Delta E$.

Соотношение неопределенности было установлено, в частности, на следующем примере. До прохождения частицы через щель $p_x = 0$, так что $\Delta p_x = 0$, зато координата x является совершенно неопределенной. В момент прохождения щели все меняется. Появляется Δx , но зато утрачивается определенность импульса $\Delta p_x = p \sin \varphi$. Ограничимся первым дифракционным максимумом (остальные малы). Для края этого максимума (первого минимума) имеем $\Delta x \cdot \sin \varphi = \lambda$, тогда



$$\Delta p_x = p\lambda / \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x \Delta p_x = p\lambda = p \frac{2\pi\hbar}{p} = 2\pi\hbar > \hbar.$$

Поделив $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$ на массу, получим $\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \hbar/2m$ - чем больше масса, тем меньше неопределенность, с тем большей точностью применимо понятие траектории. Уже для макрочастицы размером всего 1 мкм движение практически неотличимо от движения по траектории.

При определенных условиях даже движение МИКРОчастицы может рассматриваться как происходящее по траектории. Рассмотрим движение пучка электронов в электронно-лучевой трубке. Пусть след пучка на экране имеет радиус $r \approx 10^{-3}$ см, длина трубки

$l \approx 10 \text{ см}$, тогда $\Delta p_x / p \approx r / l \approx 10^{-4}$. Импульс электрона определяется ускоряющим напряжением U : $p^2 / 2m = eU \Rightarrow p = \sqrt{2meU}$. При $U = 10^4 \text{ В}$

$$p = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4} \approx 5 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$$

$$\Delta p_x \approx p \cdot 10^{-4} \approx 5 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с} \Rightarrow \Delta x \approx \frac{\hbar}{2\Delta p_x} \approx \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-26}} \approx 10^{-8} \text{ м}.$$

Таким образом, движение неотличимо от движения по траектории.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга – одно из фундаментальных положений квантовой механики. Из него можно получить ряд важных результатов. Например, можно понять, почему электрон не падает на ядро, а также оценить размеры простейшего атома и минимальную возможную энергию электрона в нем. Если бы электрон упал на атом, то и его координаты, и импульс приняли бы определенные (нулевые) значения, что несовместимо с принципом неопределенности. Энергия была бы минимальной при $r = 0$ и $p = 0$, поэтому неопределенности надо отсчитывать от этих значений, т.е. $\Delta r \approx r$ и $\Delta p \approx p$. Подставляя в соотношение неопределенностей, получим $rp \approx \hbar$ (оцениваем только по порядку величины, поэтому 2 опустили).

Энергия электрона в атоме водорода равна (в СГС) $E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}$.

Минимизируем энергию: $\frac{dE}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0 \Rightarrow r_{\min} = \frac{\hbar^2}{me^2}$ - совпадает с формулой радиуса первой боровской орбиты атома водорода. Найдем энергию электрона:

$$E_{\min} = E(r_{\min}) = -\frac{me^4}{2\hbar^2} - \text{совпадает с формулой для энергии первого боровского уровня.}$$

Такое точное совпадение – случайность, мы можем претендовать только на оценку порядков величин r и E .

§54. Уравнение Шрёдингера.

Развивая идеи де Бройля о волновых свойствах вещества, Эрвин Шрёдингер в 1926 году получил свое знаменитое уравнение (Нобелевская премия по физике за 1933 год). Он сопоставил движению микрочастицы комплексную функцию координат и времени, которую он назвал волновой функцией и обозначил буквой ψ (пси-функция). Она характеризует состояние микрочастицы. Ее вид получается из решения уравнения Шрёдингера, которое выглядит следующим образом

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Здесь m - масса частицы, i - мнимая единица, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор

Лапласа, U - функция координат и времени, градиент которой, взятый с обратным знаком, определяет силу, действующую на частицу. Если U явно не зависит от времени, то она имеет смысл потенциальной энергии частицы.

Уравнение Шрёдингера – основное уравнение нерелятивистской квантовой механики. Оно не может быть выведено из других соотношений и принимается как постулат. Шрёдингер установил его из оптико-механической аналогии, заключающейся в сходстве уравнений, описывающих ход световых лучей, с уравнениями, определяющими движение частиц в аналитической механике.

Если силовое поле стационарно, т.е. не зависит от времени, то решение уравнения Шрёдингера распадается на два множителя, один из которых зависит только от координат, другой – только от времени.

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp(-i\frac{E}{\hbar}t)$$

Здесь E - полная энергия частицы, которая в случае стационарного поля остается постоянной. Подставим это выражение в уравнение Шрёдингера и придем к дифференциальному уравнению, определяющему функцию ψ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = E\psi \quad (*)$$

Это уравнение называется уравнением Шрёдингера для стационарных состояний. Далее мы будем иметь дело только с ним. Его часто записывают в виде

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

Поясним, как можно прийти к уравнению Шрёдингера. Для простоты ограничимся одномерным случаем. Рассмотрим свободно движущуюся частицу. Согласно идее де Бройля, ей надо сопоставить плоскую волну

$$\Psi = a \exp[-i(\omega t - kx)]$$

Учтя, что $E = \hbar\omega$ и $\lambda = 2\pi\hbar/p$, а также $k = 2\pi/\lambda$, получим

$$\Psi = a \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right] \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2 \Psi, \text{ откуда следует}$$

$$E = \frac{1}{\Psi} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad p^2 = -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

Учтя, что в нерелятивистской механике $E = p^2 / 2m$, приходим к соотношению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \text{это уравнение Шрёдингера при } U = 0.$$

Если $U \neq 0$, то $E = p^2 / 2m + U$, и мы аналогичным образом приходим к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \text{ совпадающему с уравнением Шрёдингера.}$$

Изложенные рассуждения не имеют доказательной силы и не могут рассматриваться как вывод уравнения Шрёдингера. Их цель – показать, каким образом можно было прийти к этому уравнению.

В квантовой механике большую роль играет понятие оператора. Оператор – это правило, по которому одной функции ставится в соответствие другая: $f = \hat{Q}\varphi$. Под символом оператора (\hat{Q}) скрывается совокупность действий, с помощью которых исходная функция

(φ) превращается в другую (f). Например, $\hat{Q} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Оператор может

представлять собой простое умножение на число, т.е. $f = \hat{U}\varphi = U\varphi$.

Уравнение Шрёдингера (*) можно записать в виде $\hat{H}\psi = E\psi$, где \hat{H} – оператор энергии, называемый гамильтонианом.

Другим динамическим переменным также сопоставляются операторы: координат, импульса, момента импульса и т.д. Для каждой динамической переменной q составляется уравнение вида $\hat{Q}\psi = q\psi$.

§55. Смысл пси-функции.

Правильную интерпретацию пси-функции дал Макс Борн в 1926 году (Нобелевская премия по физике за 1954 год). Квадрат модуля пси-функции определяет вероятность dP того, что частица будет обнаружена в объеме dV :

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi^* \Psi dV. \quad (\Psi^* - \text{функция, комплексно сопряженная с } \Psi).$$

Поскольку вероятность достоверного события равна 1, то

$$\int_V dP = \int_V \Psi^* \Psi dV = 1 \text{ - это условие нормировки пси-функции.}$$

Уравнение Шрёдингера не позволяет определить множитель в пси-функции, его ищут из условия нормировки.

Таким образом, $\Psi^* \Psi = |\Psi|^2$ - плотность вероятности нахождения частицы в данном месте. В стационарном случае $\Psi^* \Psi = e^{iEt/\hbar} \psi^* e^{-iEt/\hbar} \psi = \psi^* \psi$ не зависит от t , поэтому состояние и называется стационарным.

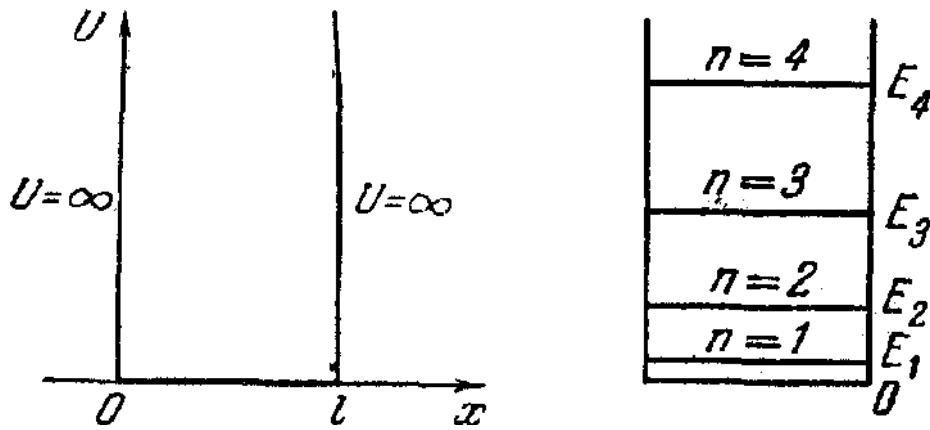
§56. Квантование энергии.

Уравнение Шрёдингера позволяет найти пси-функцию данного состояния и определить вероятность нахождения частицы в разных точках пространства. Но этим значение этого уравнения не исчерпывается. Из него и из условий, налагаемых на пси-функцию, прямо вытекают правила квантования энергии.

В соответствии с вероятностным смыслом пси-функция должна быть однозначной, непрерывной и конечной (за исключением, может быть, особых точек). Кроме того, она должна иметь непрерывную и конечную производную. Совокупность этих требований называется *стандартными условиями*.

В уравнение Шрёдингера входит в качестве параметра полная энергия частицы E . В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнения вида $\hat{H}\psi = E\psi$ имеют решения, удовлетворяющие стандартным условиям, не при любых значениях параметра E , а только при некоторых избранных значениях. Они называются *собственными значениями* соответствующей величины (в данном случае - энергии), а соответствующие им решения называются *собственными функциями* задачи. Совокупность собственных значений величины называется ее *спектром*. Спектр может быть дискретным или непрерывным (сплошным). При дискретном спектре собственные значения и собственные функции могут быть пронумерованы: $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$

Нахождение собственных значений и собственных функций представляет собой, как правило, сложную математическую задачу. Рассмотрим простой пример – частицу, находящуюся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Движение ограничено непроницаемыми стенками $x = 0, x = l$. Потенциальная энергия равна нулю при $0 \leq x \leq l$ и бесконечности при $x < 0$ и $x > l$ (см. левый рисунок).



Уравнение Шрёдингера имеет вид $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$.

За пределы ямы частица попасть не может, поэтому пси-функция вне ямы равна нулю. Из условия непрерывности следует, что и на границе ямы $\psi = 0$, т.е. $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Внутри ямы $U = 0$, и уравнение имеет вид $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$. Введя обозначение $k^2 = 2mE/\hbar^2$, приходим к уравнению типа уравнения гармонических колебаний $\psi'' + k^2\psi = 0$, решение которого имеет вид $\psi(x) = a \sin(kx + \alpha)$. Из условия $\psi(0) = 0$ следует $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, а из условия $\psi(l) = 0 - a \sin kl = 0 \Rightarrow kl = \pm n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). $n = 0$ отпадает, потому что было бы $\psi \equiv 0$ - частица нигде не находится.

Собственные значения энергии равны $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$, ($n = 1, 2, \dots$) - спектр дискретный.

На правом рисунке на стр.73 изображена схема энергетических уровней. Оценим расстояния между соседними уровнями $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n + 1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n$.

Рассмотрим молекулу в сосуде. Если $m = 10^{-26}$ кг (масса молекулы), а $l = 0,1$ м (размер сосуда), то $\Delta E_n \approx 10^{-20} \cdot n$ эВ. Это практически непрерывный спектр.

Аналогичный результат получаем в случае свободных электронов в металле: $m = 10^{-30}$ кг (масса электрона), а $l = 0,1$ м (размер образца), и $\Delta E_n \approx 10^{-16} \cdot n$ эВ.

Однако совсем иной результат получается для случая электрона в атоме ($l \approx 10^{-10}$ м): $\Delta E_n \approx 10^2 \cdot n$ эВ, т.е. дискретность будет весьма заметной.

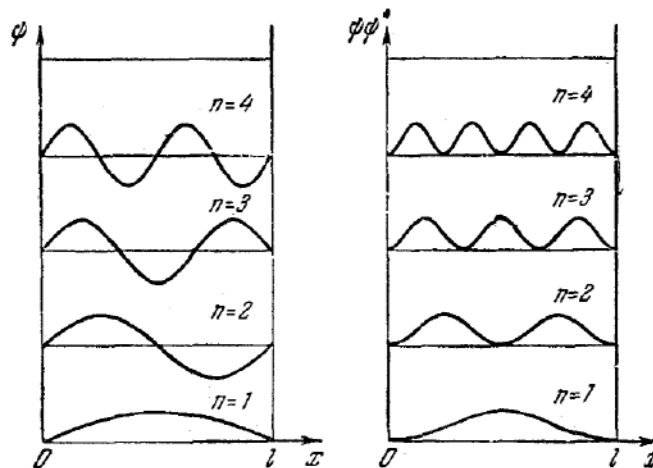
Мы можем записать собственные функции задачи $\psi_n(x) = a \sin(n\pi x/l)$. Найдем a из условия нормировки:

$$a^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2/l}.$$

Окончательно, собственные функции задачи имеют вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

На рисунке изображены их графики и графики плотности вероятности



и графики плотности вероятности обнаружения частицы на различных расстояниях от стенок. Из графиков, например, видно, что при $n = 2$ частица не может быть обнаружена в середине ямы, но одинаково часто бывает в правой и левой ее половинах. Это, конечно, несовместимо с представлением о траекториях. Отметим, что, согласно классическим представлениям, все положения частицы в яме равновероятны.

Отметим, что в рамках квазиклассического подхода ($E = mv^2/2$) из условия $k^2 = 2mE/\hbar^2$ получаем $l = n\pi/k = n\pi\hbar/mv = n \cdot \lambda_{об}/2$. Это значит, что в любом стационарном состоянии на длине l укладывается целое число полуволен де-Бройля. Имеем что-то вроде стоячей волны. Можно показать, что в теории Бора (§50) длины стационарных орбит равны целому числу волн де-Бройля: $n \cdot \lambda_{об}$. Это наводит на интересные мысли.

§57. Квантование момента импульса.

Каждой физической величине q сопоставляется оператор \hat{Q} , например, для энергии - \hat{H} , для импульса - \hat{p} и т.д. Решая уравнение $\hat{Q}\psi = q\psi$, находят собственные значения q_1, q_2, \dots оператора \hat{Q} и соответствующие собственные функции.

Согласно одному из постулатов квантовой механики, измерение величины q может дать только одно из ее собственных значений. Возможны состояния, для которых измерение величины q всегда дает одно и то же значение q_n . О таких состояниях говорят как о состояниях с определенным значением q . Однако возможны и состояния, в которых при измерении получаются с разными вероятностями различные собственные значения оператора \hat{Q} . О таких состояниях говорят как о состояниях, в которых величина q не имеет определенного значения.

Момент импульса играет важную роль в рассмотрении атома водорода, которое является одной из наших целей. Поэтому рассмотрим его подробно. Для момента импульса вводятся четыре оператора: оператор квадрата момента импульса \hat{M}^2 и три оператора проекций момента на оси координат $\hat{M}_x, \hat{M}_y, \hat{M}_z$. Оказывается, что одновременно могут иметь определенные значения лишь квадрат момента и одна из проекций. Две другие проекции оказываются при этом совершенно неопределенными. Это значит, что «вектор» момента не имеет определенного направления и не может быть изображен в виде направленного отрезка.

Решение уравнения $\hat{M}^2\psi = M^2\psi$ является очень трудным, поэтому приведем только конечные результаты. Собственные значения \hat{M}^2 равны $M^2 = l(l+1)\hbar^2$, где $l = 0, 1, 2, \dots$ - так называемое азимутальное квантовое число. Следовательно, модуль момента импульса может иметь лишь дискретные значения $M = \hbar\sqrt{l(l+1)}$.

Вид оператора \hat{M}_z весьма прост. Рассмотрим решение уравнения $\hat{M}_z\psi = M_z\psi$ подробно. В сферических координатах (r, ϑ, φ) оператор имеет вид $\hat{M}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$, т.е.

уравнение выглядит следующим образом $-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = M_z\psi$. Будем искать решение в виде

$\psi = Ce^{i\alpha\varphi}$, получим $-i\hbar\alpha = M_z$, откуда $\alpha = iM_z/\hbar$. Таким образом, решение имеет вид

$$\psi = C \exp\left(i \frac{M_z}{\hbar} \varphi\right).$$

Чтобы эта функция была однозначной, необходимо $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$, т.е.

$\exp\left[i \frac{M_z}{\hbar} (\varphi + 2\pi)\right] = \exp\left(i \frac{M_z}{\hbar} \varphi\right)$. Это условие будет выполнено, если $M_z = m\hbar$, где

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - целое число, называемое магнитным квантовым числом.

Поскольку проекция вектора не может быть больше его модуля, то $m\hbar \leq \hbar\sqrt{l(l+1)}$, т.е.

$$|m|_{\max} = l.$$

Из формул $M = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ и $M_z = m\hbar$ видно, что $|M_z| < M$ всегда, т.е. направление момента импульса не может совпадать ни с каким выделенным в пространстве направлением (ведь его можно выбрать в качестве оси z).

Значения M и M_z , отличные от $M = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ и $M_z = m\hbar$, не могут наблюдаться ни при каких условиях. Макроскопические тела тоже подчиняются этой закономерности, но

из-за малости \hbar их дискретность незаметна. Постоянную Планка \hbar можно считать естественной единицей измерения момента импульса.

Момент импульса системы из нескольких микрочастиц равен сумме моментов отдельных частиц. Суммарный момент, как и всякий момент, должен равняться $M = \hbar\sqrt{L(L+1)}$, где L - азимутальное квантовое число результирующего момента. В случае двух частиц L может иметь значения $L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|$. Легко видеть, что момент может иметь $2l_1 + 1$ или $2l_2 + 1$ значений (нужно взять меньшее из двух).

Если частиц больше двух, то нужно сложить сначала числа l любых двух частиц, затем каждый из полученных результатов сложить с l третьей частицы и т.д. Пусть, например, $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. Возможные значения суммарного момента первой и второй частиц равны 0, 1 и 2. Сложение первого из них с $l_3 = 1$ дает 1, второго - 0, 1 и 2, третьего - 1, 2 и 3. Следовательно, L может иметь значения 0, 1, 2, 3. Минимальное оказалось равно нулю, а максимальное, как и можно было ожидать, равно $\sum_i l_i = 3$.

§58. Принцип суперпозиции состояний.

Это одно из основных положений квантовой механики. Суть его такова. Пусть некоторая квантово-механическая система может находиться как в состоянии ψ' , так и в состоянии ψ'' . Тогда она может находиться и в состоянии $\psi = c'\psi' + c''\psi''$, где c' и c'' - произвольные комплексные числа.

Из принципа суперпозиции вытекают очень важные следствия. Рассмотрим совокупность собственных значений и собственных функций для величины q : $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$

В каждом из состояний ψ_i величина q имеет определенное значение q_i . Согласно принципу суперпозиции возможно состояние $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. В этом состоянии величина q уже не имеет определенного значения - при измерениях будет получаться либо q_1 , либо q_2 . Вероятности появления этих значений равны $|c_1|^2$ и $|c_2|^2$.

Совокупность собственных функций любой физической величины q образует полную систему. Это означает, что пси-функцию любого состояния можно разложить по собственным функциям этой величины, т.е. представить в виде $\psi = \sum_n c_n \psi_n$, где c_n - не зависящие от координат комплексные числа. Для состояния, зависящего от времени, коэффициенты c_n зависят от t . Число слагаемых в сумме равно числу различных собственных функций

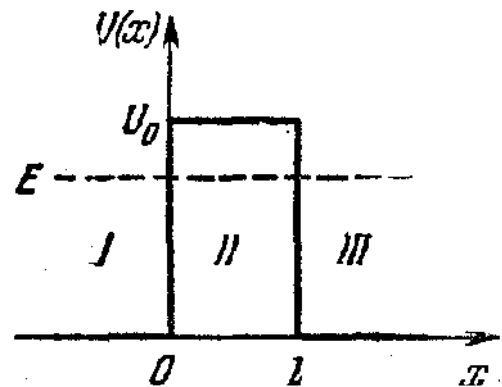
величины q (для разных величин может быть от 2 до бесконечности). Квадраты модулей коэффициентов c_n дают вероятности того, что при измерениях, производимых над системой, находящейся в состоянии ψ , будут получены значения q_n . Поскольку сумма всех вероятностей равна 1, то получаем условие для коэффициентов $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Зная вероятности различных значений q , можно найти ее среднее значение в состоянии ψ :

$$\langle q \rangle = \sum_n |c_n|^2 q_n.$$

Если состояние нестационарное, то $c_n = c_n(t)$, и формула показывает, как среднее значение величины q изменяется со временем.

§59. Прохождение частиц через потенциальный барьер.

Пусть частица, движущаяся слева направо, встречает потенциальный барьер высотой U_0 и шириной l . По классическим представлениям, если энергия частицы E больше высоты барьера U_0 , то она беспрепятственно проходит над ним (на участке $0 \leq x \leq l$ ее скорость уменьшится, но при $x > l$ снова примет первоначальное значение). Если же



$E < U_0$ (как на рисунке), то частица отражается от барьера и летит назад; сквозь барьер она пройти не может.

В квантовой механике все выглядит иначе. Даже при $E > U_0$ есть вероятность, что частица отразится от барьера и полетит обратно. При $E < U_0$ есть отличная от нуля вероятность, что частица пройдет «сквозь» барьер и окажется в области $x > l$. Получим эти результаты из уравнения Шрёдингера.

Пусть $E < U_0$. Тогда в областях I и III уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0, \quad (*)$$

а в области II -

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi = 0 \quad (**)$$

Будем искать решение уравнения (*) в виде $\psi = \exp(\lambda x)$. Подстановка этой функции в

(*) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0.$$

Отсюда $\lambda = \pm i\alpha$, где $\alpha = \sqrt{2mE} / \hbar$.

Таким образом, общее решение (*) имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A_1 \exp(i\alpha x) + B_1 \exp(-i\alpha x) && - \text{ для области I,} \\ \psi_3 &= A_3 \exp(i\alpha x) + B_3 \exp(-i\alpha x) && - \text{ для области III.}\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp(-i \frac{E}{\hbar} t)$ (см. §54),

получим $\Psi_1(x, y, z, t) = A_1 \exp(-i(\frac{E}{\hbar} t - \alpha x)) + B_1 \exp(-i(\frac{E}{\hbar} t + \alpha x))$, откуда видно, что решение вида $\exp(i\alpha x)$ соответствует волне, движущейся слева направо, а $\exp(-i\alpha x)$ - справа налево, т.е. A_1 - амплитуда падающей волны, а B_1 - отраженной.

Подставляя функцию $\psi = \exp(\lambda x)$ в (**), получим общее решение для области II

$$\psi_2 = A_2 \exp(\beta x) + B_2 \exp(-\beta x), \quad \text{где } \beta = \sqrt{2m(U_0 - E)} / \hbar.$$

В области III имеется только волна, прошедшая через барьер и движущаяся слева направо, поэтому коэффициент B_3 надо положить равным нулю. Для нахождения остальных коэффициентов воспользуемся условиями, которым должна удовлетворять пси-функция. Для непрерывности необходимо: $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ и $\psi_2(l) = \psi_3(l)$. Для гладкости, т.е. отсутствия изломов, нужно: $\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$ и $\psi_2'(l) = \psi_3'(l)$.

Отсюда вытекают уравнения:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ A_2 \exp(\beta l) + B_2 \exp(-\beta l) = A_3 \exp(i\alpha l) \\ i\alpha A_1 - i\alpha B_1 = \beta A_2 - \beta B_2 \\ \beta A_2 \exp(\beta l) - \beta B_2 \exp(-\beta l) = i\alpha A_3 \exp(i\alpha l) \end{cases}$$

Разделим все уравнения на A_1 и введем обозначения:

$$b_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad b_2 = \frac{B_2}{A_1}, \quad a_3 = \frac{A_3}{A_1}, \quad \text{а также } n = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}.$$

Отношение квадратов модулей амплитуд отраженной и падающей волн

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = |b_1|^2$$

определяет вероятность отражения частицы от барьера и может быть названо коэффициентом отражения.

Отношение квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = |a_3|^2$$

определяет вероятность прохождения частицы через барьер и может быть названо коэффициентом прохождения.

Коэффициенты отражения и прохождения связаны очевидным соотношением:

$$R + D = 1.$$

Решение системы имеет вид: $a_3 = \frac{4ni}{(n+i)^2 \exp(-\beta l) - (n-i)^2 \exp(\beta l)} \exp(-ial)$.

Величина $\beta l = l\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ обычно бывает много больше единицы. Поэтому в знаменателе формулы для a_3 первым членом можно пренебречь:

$$a_3 = \frac{-4ni \exp(-ial)}{(n-i)^2 \exp(\beta l)}$$

Тогда $D = |a_3|^2 = \frac{16n^2}{(n^2 + 1)^2} \exp(-2\beta l)$, где $n^2 = \frac{U_0}{E} - 1$.

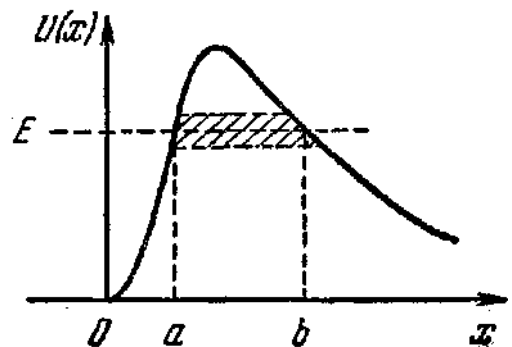
Выражение $\frac{16n^2}{(n^2 + 1)^2}$ имеет значение порядка единицы. Поэтому можно считать, что

$$D \approx \exp(-2\beta l) = \exp\left[-\frac{2}{\hbar} l \sqrt{2m(U_0 - E)}\right].$$

Таким образом, вероятность прохождения сильно зависит от ширины барьера l и от его превышения над энергией E , т.е. от $U_0 - E$. Она резко падает с ростом массы частицы.

Если барьер не прямоугольный, то

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U - E)} dx\right]$$



Этот эффект называется туннельным эффектом. С

классической точки зрения, внутри «туннеля» частица обладала бы отрицательной кинетической энергией. Но в квантовой механике разделение энергии на кинетическую и потенциальную не имеет смысла, так как противоречит принципу неопределенности. Допустим, что частица обладает определенной кинетической энергией, а значит и импульсом. Но поскольку полная энергия остается постоянной, то определена и потенциальная энергия, а значит и координата. Но импульс и координата не могут одновременно обладать определенными значениями.

§60. Гармонический осциллятор.

Гармоническим осциллятором называют частицу, совершающую одномерное движение под действием квазиупругой силы $F = -kx$.

Потенциальная энергия имеет вид $U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота осциллятора.

В одномерном случае уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0,$$

где E - полная энергия осциллятора.

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что это уравнение имеет конечные, однозначные и непрерывные решения только при значениях параметра E , равных

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Эти уровни эквидистантны: $\Delta E = \hbar\omega$. Величина $E_0 = \hbar\omega/2$ называется нулевой энергией.

Таким образом, даже при $T=0$ энергия атомов не равна нулю, т.е. колебания не прекращаются. Вычисления вероятностей перехода из одного состояния в другое показывают, что для гармонического осциллятора возможны только переходы в соседнее состояние, т.е. $\Delta n = \pm 1$. Условия, накладываемые на квантовые числа при переходе системы из одного состояния в другое, называются правилами отбора. Значит, из правил отбора для гармонического осциллятора следует, что его энергия может изменяться только порциями $\hbar\omega$. Именно такое предположение сделал Макс Планк для нахождения испускательной способности абсолютно черного тела. Но Планк ничего не знал о нулевой энергии.

Глава 3. Физика атомов и молекул.

§61. Атом водорода.

Рассмотрим систему из неподвижного ядра с зарядом Ze (Z - целое) и одного электрона. Если $Z = 1$, это атом водорода, если $Z = 2, 3, \dots$, то водородоподобный атом.

Потенциальная энергия электрона в кулоновском поле $U = -Ze^2/r$ (в СГС). Тогда уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0$$

Поле является центрально-симметричным, поэтому перейдем к сферическим координатам. Подставив выражение оператора Лапласа в сферических координатах, получим

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0 \quad (*)$$

Можно показать, что это уравнение имеет однозначное, конечное и непрерывное решение при любых положительных энергиях E и при дискретных отрицательных

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (**)$$

Случай $E > 0$ соответствует электрону, пролетающему вблизи ядра и удаляющемуся снова на бесконечное расстояние. Случай $E < 0$ соответствует связанному состоянию.

Мы получили те же формулы, что Бор, но уже как строгое следствие уравнений квантовой механики.

Собственные функции уравнения (*) содержат три целочисленных параметра:

$$\psi = \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi),$$

где n - главное квантовое число, совпадает с номером уровня энергии, l и m - азимутальное и магнитное квантовые числа, определяющие модуль момента импульса и его проекцию на некоторое направление z .

Азимутальное число l может принимать n разных значений - $0, \dots, n-1$. Магнитное число может принимать $2l+1$ разных значений: $-l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$.

Как следует из (**), энергия зависит только от главного квантового числа n , т.е. каждому собственному значению E_n , кроме E_1 , соответствует

Уровень энергии E_n	Волновая функция ψ_{nlm}	Значение		
		n	l	m
E_1	$\psi_{1, 0, 0}$	1	0	0
E_2	$\psi_{2, 0, 0}$	2	0	0
	$\psi_{2, 1, -1}$	2	1	-1
	$\psi_{2, 1, 0}$	2	1	0
	$\psi_{2, 1, +1}$	2	1	+1
E_3	$\psi_{3, 0, 0}$	3	0	0
	$\psi_{3, 1, -1}$	3	1	-1
	$\psi_{3, 1, 0}$	3	1	0
	$\psi_{3, 1, +1}$	3	1	+1
	$\psi_{3, 2, -2}$	3	2	-2
	$\psi_{3, 2, -1}$	3	2	-1
	$\psi_{3, 2, 0}$	3	2	0
	$\psi_{3, 2, +1}$	3	2	+1
	$\psi_{3, 2, +2}$	3	2	+2

несколько собственных функций ψ_{nlm} с разными l и m . Значит, атом водорода может иметь одну и ту же энергию, находясь в разных состояниях. Состояния с одинаковой энергией называются вырожденными, а число различных состояний с этой энергией - кратностью вырождения. Ее можно вычислить, исходя из значений l и m . Каждому из n значений l соответствует $2l+1$ значений m . Следовательно, число различных состояний, соответствующих данному n , равно

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{1+2n-1}{2} n = n^2,$$

т.е. кратность вырождения энергетических уровней водорода равна n^2 (см. таблицу).

Состояниям с разными l соответствуют различные значения момента импульса. Эти состояния обозначаются буквами:

- $l = 0$ - s
- $l = 1$ - p
- $l = 2$ - d
- $l = 3$ - f

Значение главного квантового числа указывается перед обозначением l :

1s; 2s,2p; 3s,3p,3d; 4s,4p,4d,4f; ...

Испускание и поглощение света происходит при переходе электрона с одного уровня на другой. В квантовой механике доказывается, что для азимутального квантового числа l имеется правило отбора $\Delta l = \pm 1$, т.е. возможны только такие переходы, при которых l изменяется на 1. Это правило обусловлено тем, что фотон обладает собственным моментом импульса (спином), равным \hbar . При испускании фотон уносит его из атома, а при поглощении привносит.

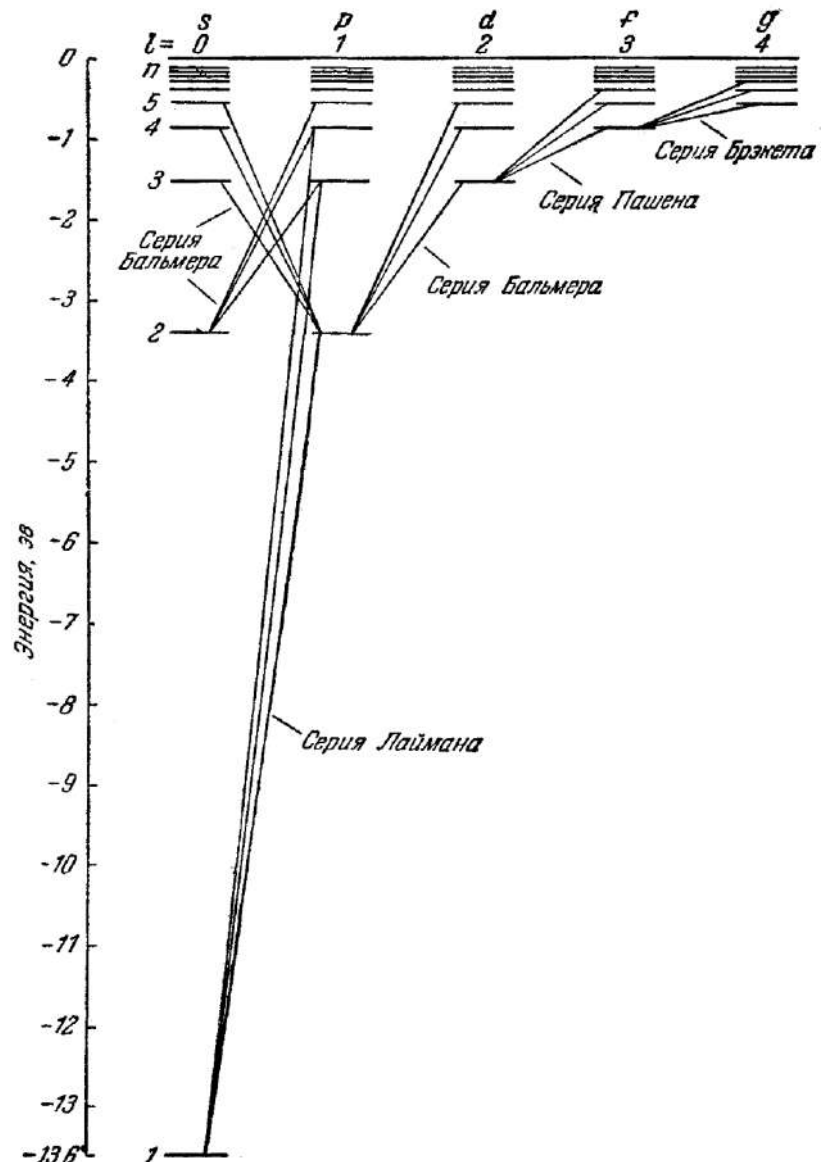
Так что правило отбора отражает закон сохранения момента импульса.

На рисунке показаны переходы, разрешенные правилом отбора. Серия Лаймана при излучении соответствует переходам в состояние $n = 1$ (1s), серия Бальмера – в состояния $n = 2$ (2s и 2p) и т.д.

Поглощающий атом обычно находится в состоянии 1s, имеющем минимальную энергию и поэтому являющемся основным.

Собственные функции ψ_{nlm} распадаются на два множителя, один из которых зависит только от r , а другой – только от углов ϑ и φ :

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$



$R_{nl}(r)$ - действительная функция, зависящая от n и l , $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ - комплексная, зависит от l и m . $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ представляют собой собственные функции оператора квадрата момента импульса. Для s -состояний эта функция является константой: $\psi_{n00} = f(r)$.

$$\text{Условия нормировки: } \int \psi_{nlm}^* \psi_{nlm} dV = \int_0^\infty R_{nl}^2 r^2 dr \cdot \int_{(4\pi)} Y_{lm}^* Y_{lm} d\Omega = 1.$$

(Здесь Ω - телесный угол, мы учли, что $dV = r^2 dr d\Omega = r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$).

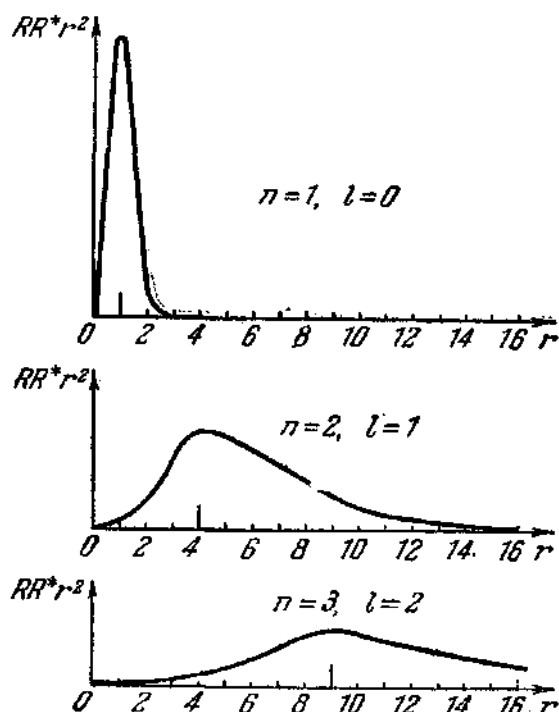
Собственные функции оператора \hat{M}^2 предполагаются уже нормированными, т.е.

$$\int_{(4\pi)} Y_{lm}^* Y_{lm} d\Omega = 1, \text{ поэтому условие нормировки функций } R_{nl}(r) \text{ имеет вид } \int_0^\infty R_{nl}^2 r^2 dr = 1.$$

Вероятность нахождения электрона в объеме dV определяется выражением $dP_{r,\vartheta,\varphi} = R_{nl}^2 r^2 dr \cdot Y_{lm}^* Y_{lm} d\Omega$. Проинтегрировав по телесному углу 4π , найдем вероятность того, что электрон находится в шаровом слое $r \div r + dr$:

$$dP_r = R_{nl}^2 r^2 dr \cdot \int_{(4\pi)} Y_{lm}^* Y_{lm} d\Omega = \underbrace{R_{nl}^2 r^2}_{\text{плотность вероятности}} dr$$

На рисунке приведены графики плотности вероятности dP_r / dr для атома водорода ($Z=1$) для некоторых состояний. За единицу масштаба по оси r принят борковский радиус r_0 . Длинными черточками отмечены радиусы боровских орбит. Видно, что они совпадают с наиболее вероятными расстояниями электрона от ядра.

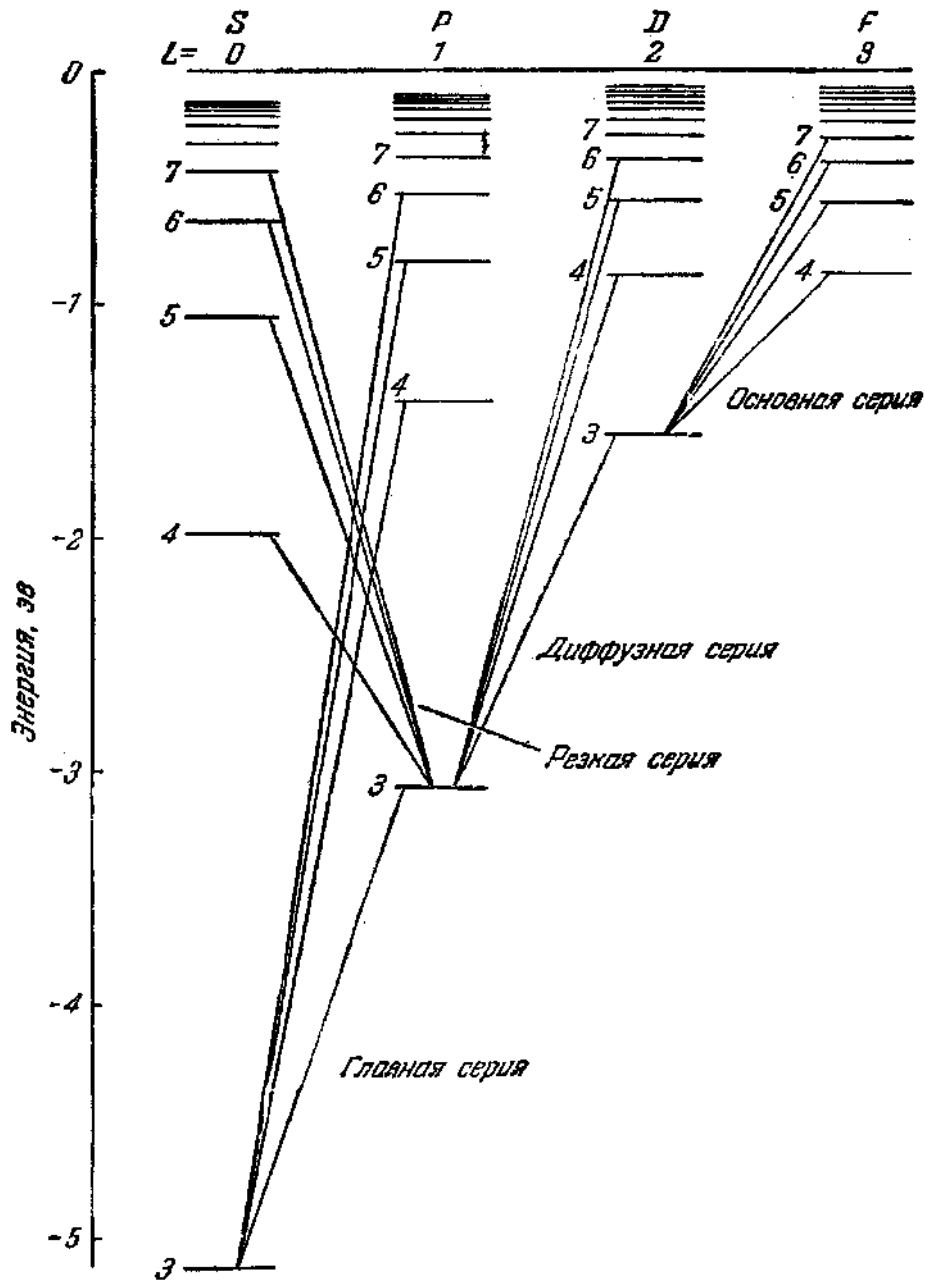


§62. Спектры щелочных металлов.

Спектры их испускания тоже состоят из нескольких серий. Анализируя серии, можно построить схему энергетических уровней. На рисунке изображена такая схема для атома натрия. Оказывается, что уровни в разных рядах, т.е. с одинаковыми n и разными l , лежат на разной высоте. Несмотря на это отличие, схемы водорода и натрия похожи.

Это дало основания полагать, что спектры щелочных металлов испускаются при переходе самого внешнего (валентного) электрона с одного уровня на другой. Поскольку при одном n и разных l энергии различны, можно сказать, что энергия зависит от момента импульса. Дело в том, что в более сложных, чем водород, атомах валентный электрон

движется в усредненном поле ядра и остальных электронов. Оно не является кулоновским, (не пропорционально $1/r^2$), но обладает центральной симметрией, т.е. зависит только от r .



В этом случае решение уравнения Шрёдингера дает результаты, похожие на водород, но $E = E_{nl}$, т.е. вырождение по l снимается. С ростом l энергия состояний с фиксированным n растет.

В атоме Na уровни с $n = 1, 2$ заняты внутренними электронами – их 10.

На базе анализа спектров щелочных металлов Ридберг пришел к формуле:

$$E_{nl} = -\frac{R}{(n + \alpha_l)^2}.$$

Для Na $\alpha_0 = -1,55$; $\alpha_1 = -0,87$; $\alpha_2 = -0,01$; $\alpha_3 = 0,00$.

§63. Ширина спектральных линий.

Из возбужденного состояния атом может спонтанно перейти в более низкое энергетическое состояние. Время τ , за которое число атомов в данном возбужденном состоянии уменьшится в e раз, называется временем жизни возбужденного состояния. Оно имеет порядок $10^{-8} - 10^{-9}$ с. Существуют также метастабильные состояния, время жизни которых может достигать десятых долей секунды.

Возможность спонтанных переходов говорит о том, что возбужденное состояние не является стационарным. Поэтому энергия не является строго определенной величиной, и возбужденный уровень имеет конечную ширину Γ . Из соотношения неопределенности следует: $\Gamma\tau \approx \hbar \Rightarrow \Gamma \approx \hbar/\tau$. Основное состояние атома стационарно, поэтому его энергия строго определена. Вследствие конечной ширины возбужденных уровней энергии испускаемых атомом фотонов имеют разброс. Соответственно, спектральная линия обладает конечной шириной $\delta\omega_0 = \Gamma/\hbar = 1/\tau$. Взяв $\tau \approx 10^{-8}$ с, получим $\delta\omega_0 \approx 10^8 \text{ с}^{-1}$.

Длины волн будут находиться в интервале $\delta\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega^2} \delta\omega_0 = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \delta\omega_0$. Подставив $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ и $\delta\omega_0 \approx 10^8 \text{ с}^{-1}$, получим $\delta\lambda_0 \approx 10^{-4} \text{ \AA}$. Это так называемая *естественная ширина* спектральной линии.

Есть и еще один фактор, определяющий конечную ширину линии. Тепловое движение излучающих атомов приводит к доплеровскому расширению линий. Пусть в момент испускания атом движется со скоростью \vec{v}_0 , имеет импульс \vec{p}_0 и энергию $p_0^2/2m$. Фотон уносит импульс, равный по модулю $\hbar k = \hbar\omega/c$. Импульс атома становится равным $\vec{p} = \vec{p}_0 - \hbar\vec{k}$. Атом получает энергию отдачи (не отданную, а отдачи!)

$$E_{отд} = \frac{(\vec{p}_0 - \hbar\vec{k})^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\vec{p}_0 \hbar\vec{k}}{m} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2} - \frac{v_0}{c} \hbar\omega \cos\alpha, (*)$$

где α - угол между \vec{p}_0 и \vec{k} .

Если атом перешел из состояния с n в m , то $E_n - E_m = \hbar\omega + E_{отд}$.

Если $E_{отд} = 0$, то $\hbar\omega_0 = E_n - E_m$.

$E_{отд}$ зависит от угла α , поэтому $\hbar\omega = \hbar\omega_0 - E_{отд}(\alpha)$. (**)

Для видимого света энергия отдачи составляет примерно 10^{-11} от энергии испускаемого фотона, поэтому в (*) можно заменить ω на ω_0 . Скорость v_0 положим равной средней

скорости теплового движения v и получим $E_{омд} = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2mc^2} - \frac{v}{c}\hbar\omega_0 \cos\alpha$. Подставляя в (**),

придем к выражению для частоты испускаемого фотона

$$\omega = \omega_0 - \Delta\omega_R + \frac{1}{2}\delta\omega_D \cos\alpha,$$

где $\Delta\omega_R = \frac{\hbar\omega_0^2}{2mc^2}$ - смещение линии, $\delta\omega_D = \frac{2v}{c}\omega_0$ - доплеровская ширина линии.

Общая ширина спектральной линии складывается из естественной и доплеровской:

$$\delta\omega = \delta\omega_0 + \delta\omega_D.$$

Середина линии приходится на частоту $\omega_0 - \Delta\omega_R$.

Из формулы $\lambda = 2\pi c / \omega$ следует, что $\delta\lambda / \lambda = \delta\omega / \omega$, откуда $\delta\lambda_D = 2\frac{v}{c}\lambda$. Средняя

скорость атомов (с относительной массой порядка 100) при температуре несколько тысяч Кельвин равна примерно 1000 м/с. Тогда доплеровская ширина линии для видимого света с

$\lambda = 5000 \text{ \AA}$ равна: $\delta\lambda_D = 2\frac{v}{c}\lambda \approx 0,03 \text{ \AA}$. Смещение имеет порядок $\delta\lambda_R \approx 10^{-7} \text{ \AA}$, т.е. им

вполне можно пренебречь.

При поглощении фотона электрон переходит с уровня m на n , т.е. фотон должен обладать энергией $\hbar\omega' = E_n - E_m + E_{омд}(\alpha)$, а его частота должна равняться

$\omega' = \omega_0 + \Delta\omega_R - \frac{1}{2}\delta\omega_D \cos\alpha$. Таким образом, смещения линий испускания и поглощения

происходят в разные стороны. Но, вследствие малости величины смещения ($\delta\lambda_R \approx 10^{-7} \text{ \AA}$), можно считать, что линии испускания и поглощения совпадают друг с другом.

§64. Мультиплетность спектров и спин электронов.

Тщательное исследование спектров щелочных металлов показало, что каждая линия является двойной (дублет). Например, желтая линия натрия $3p \rightarrow 3s$ является дублетом 5890 Å и 5896 Å. То же относится и к другим линиям.

Расщепление линий на компоненты называется *тонкой структурой*. Линии, состоящие из нескольких компонент, называются мультиплетами (дублеты, триплеты, квартеты и т.д.). В частном случае, существуют и одиночные линии - синглеты. Тонкая структура обнаруживается, кроме щелочных металлов, и у других элементов.

Для объяснения расщепления Уленбек и Гаудсмит в 1925 году выдвинули гипотезу о том, что электрон обладает собственным моментом импульса M_s , не связанным с движением

в пространстве. Его назвали спином (от английского to spin - вращаться). Сначала думали, что электрон вертится вокруг себя, как волчок, но потом отказались от этой идеи. Одна из причин отказа: вращающийся заряженный шарик должен обладать магнитным моментом μ , причем $\mu/M_s = -\frac{e}{2mc}$ (в СГС), но опыт показал, что электрон действительно обладает магнитным моментом, но $\mu/M_s = -\frac{e}{mc}$, т.е. оказалось в два раза больше. Таким образом, идея о вращении оказалась несостоятельной. Спин следует считать внутренним свойством электрона, вроде заряда и массы.

Оказалось, что наличие спина вытекает из установленного Дираком уравнения квантовой механики для релятивистского случая (аналог уравнения Шрёдингера). Таким образом, спин электрона является свойством и квантовым и релятивистским. Спином обладают также протоны, нейтроны, фотоны и другие элементарные частицы (кроме мезонов).

Модуль собственного момента импульса электрона определяется по общим законам квантовой механики спиновым квантовым числом $s=1/2$: $M_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{3}/2$.

Проекция спина на заданное направление может принимать 2 значения, отличающиеся на \hbar :

$M_{sz} = m_s \hbar$, где $m_s = \pm 1/2$. Магнитный момент электрона $\mu_s = -\frac{e}{mc} M_s = -\mu_B \sqrt{3}$, где

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$ - так называемый магнетон Бора (в СИ $\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m_e}$). Проекция магнитного

момента на ось z равна $\mu_{sz} = \mp \mu_B$.

В ряд важных формул входят не сами моменты, а их проекции. Поэтому говорят, что спин электрона равен $1/2$ (подразумевается, в единицах \hbar), а собственный магнитный момент равен одному магнетону Бора.

Рассмотрим на примере натрия, как существование спина может объяснить мультиплетность спектра. Исследования ионов щелочных металлов показали, что магнитный момент иона (без внешнего электрона) равен нулю, т.е. равен нулю и момент импульса иона. Значит, момент импульса целого атома равен моменту импульса внешнего электрона, который складывается из двух моментов: орбитального M_l (связанного с движением электрона в атоме) и спинового M_s (не связанного с движением электрона в пространстве).

Величина полного момента M_j определяется квантовым числом j : $M_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}$,

причем $j = l + s, l + s - 1, \dots, |l - s|$. При $l = 0$ получаем $j = 1/2$, при $l \neq 0$ имеем $j = l \pm 1/2$, которые соответствуют параллельной и антипараллельной ориентации M_l и M_s .

С моментами импульса (механическими) связаны магнитные. Они взаимодействуют друг с другом, как две магнитные стрелки. Энергия этого взаимодействия, называемого спин-орбитальным, зависит от взаимной ориентации M_l и M_s . Следовательно, состояния с разными j должны иметь разные энергии. Таким образом, каждый терм из ряда p (т.е. $l = 1$) расщепляется на два: с $j = 1/2$ и $j = 3/2$, термы ряда d ($l = 2$) - на $j = 3/2$ и $j = 5/2$ и т.д. Термам ряда s ($l = 0$) соответствует только одно значение $j = 1/2$, поэтому они не расщепляются. Итак, каждый ряд термов, кроме s , распадается на два ряда - структура термов оказывается дублетной. Термы принято обозначать символами ${}^2P_{3/2}, {}^2P_{1/2}, {}^2D_{5/2}, \dots$ - правый нижний индекс дает значение j , верхний левый - мультиплетность.

У водорода также была обнаружена тонкая структура.

Обусловленное спином расщепление уровней является релятивистским эффектом. Релятивистская квантовая теория дает для расстояния между уровнями тонкой структуры водорода значение $\Delta E = \frac{\alpha^2}{16} E_i$, где E_i - энергия ионизации атома водорода, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ (в СГС) - так называемая *постоянная тонкой структуры*, весьма важная физическая константа.

Расстояния между уровнями, различающимися главным квантовым числом n , имеют порядок E_i , следовательно, расстояния между уровнями тонкой структуры в $(\alpha^2/16)^{-1} \approx 10^5$ раз меньше, чем расстояния между основными уровнями.

§65. Механический и магнитный моменты многоэлектронного атома.

Каждый электрон имеет орбитальный M_l и спиновый M_s механические моменты. Они связаны с соответствующими магнитными моментами, вследствие чего между всеми M_l и M_s имеется взаимодействие. Все моменты M_l и M_s складываются в результирующий механический момент атома M_J . При этом возможны два случая.

1) Моменты M_l разных электронов взаимодействуют между собой сильнее, чем с M_s , которые, в свою очередь, сильнее связаны друг с другом, чем с M_l . Поэтому все M_l складываются в результирующий M_L , все M_s - в M_S , а затем уже M_L и M_S дают

суммарный момент атома M_J . Такой вид связи встречается чаще всего и называется связью Рассель-Саундерса или LS -связью.

2) Каждая пара M_l и M_s взаимодействует между собой сильнее, чем с M_l и M_s других электронов, вследствие чего образуются результирующие M_j для каждого электрона, которые затем объединяются в M_J атома. Такой вид связи, называемый jj -связью, наблюдается у тяжелых атомов.

Отношение магнитного момента атома к его механическому моменту называется гиромангнитным отношением. Для орбитальных моментов $\mu_L / M_L = -\frac{e}{2mc}$, а для спиновых

$\mu_S / M_S = -\frac{e}{mc}$. Поскольку эти числа различаются, то магнитный момент μ_J не получается просто умножением механического момента M_J на одно из этих чисел. Точный расчет дает

$$\mu_J = -\mu_B g \sqrt{J(J+1)},$$

где $g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ - так называемый множитель (фактор) Ланде.

Проекция магнитного момента на заданную ось z равна

$$\mu_{Jz} = -\mu_B g m_J, \quad (m_J = -J, -J+1, \dots, J-1, J)$$

§66. Эффект Зеемана.

Так называется явление расщепления энергетических уровней при помещении атома в магнитное поле, в результате чего спектральные линии разбиваются на несколько компонент. Это расщепление линий было обнаружено голландским физиком Зееманом в 1896 году. Оно довольно мало: при $B \approx 1$ Тл расстояние между линиями имеет порядок $0,1 \text{ \AA}$.

Объясняется это явление тем, что атом с магнитным моментом μ_j в магнитном поле приобретает дополнительную энергию

$$\Delta E = -\mu_{jB} B = \mu_B g B m_J, \quad (m_J = -J, -J+1, \dots, J-1, J)$$

где μ_{jB} - проекция магнитного момента на направление поля.

Отсюда следует, что каждый уровень расщепляется на $2J+1$ равноотстоящих подуровней, причем величина расщепления зависит от множителя Ланде, т.е. от L, S и J . До наложения поля состояния с разными значениями квантового числа m_J обладали

одинаковой энергией, т.е. наблюдалось вырождение по m_J . Магнитное поле это вырождение снимает.

Для магнитного квантового числа m_J имеется правило отбора, согласно которому возможны только переходы с $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

§67. Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР).

В магнитном поле каждый уровень расщепляется на $2J + 1$ подуровней. Расстояние между соседними уровнями равно $\Delta E = \mu_B g B$. Если на атом падает волна с $\hbar\omega = \Delta E$, то будут происходить переходы между соседними подуровнями (правило отбора не разрешает другие переходы). Это явление было обнаружено советским физиком Завойским в 1944 году и получило название *электронного парамагнитного резонанса* (ЭПР). Название объясняется тем, что явление существует только в парамагнетиках (у диамагнетиков магнитный момент атомов равен нулю) и носит резонансный характер – переходы происходят только при строго определенной частоте падающей волны.

Электромагнитная волна с равной вероятностью может и поглощаться атомом, и излучаться. Но в тепловом равновесии, в соответствии с законом Больцмана, число атомов с меньшей энергией превосходит число атомов с большей, поэтому преобладает поглощение, и парамагнетик нагревается.

ЭПР – это избирательное поглощение энергии электромагнитных волн в парамагнитных веществах в постоянном магнитном поле. ЭПР используется для исследования структуры кристаллов, магнитных свойств атомных ядер и т.д.

§68. Квантовые статистики. Бозоны и фермионы.

В квантовой физике, как и в статистической, закономерности имеют вероятностный характер. Но есть и принципиальное различие: в квантовой физике вероятностный подход лежит в самой природе микрочастиц.

В обоих случаях допустимые микросостояния считаются равновероятными. Но есть различие в определении статистических весов. В классической механике, т.е. в статистике Больцмана, считается, что даже одинаковые частицы принципиально различимы. В квантовой механике все иначе. В силу принципа неопределенности понятие траектории утрачивает смысл. Поэтому следить за каждой из одинаковых частиц и тем самым различать их становится невозможным. В квантовой механике тождественные частицы оказываются принципиально неразличимыми. Это утверждение называется *принципом неразличимости* одинаковых частиц.

Пусть имеется система из двух тождественных частиц. Обозначив совокупность координат и проекции спина частиц буквами ξ_1 и ξ_2 , рассмотрим пси-функцию системы

$\psi(\xi_1, \xi_2)$. Поскольку частицы неразличимы, то перестановка ξ_1 и ξ_2 не должна приводить к изменению физических свойств, т.е. изменять квадрат модуля пси-функции:

$$|\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 = |\psi(\xi_2, \xi_1)|^2$$

Возможны два случая: $\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1)$ или $\psi(\xi_1, \xi_2) = -\psi(\xi_2, \xi_1)$.

Оказывается, что частицы с нулевым или целым спином удовлетворяют первому случаю, а с полуцелым – второму. Сложный математический анализ приводит к следующим выводам. Частицы с целым (или нулевым) спином (фотоны, фононы, бозоны Хиггса и т.д.) могут находиться в пределах данной системы в одинаковом состоянии в неограниченном количестве. Такие частицы подчиняются статистике, разработанной Бозе и Эйнштейном (1925), и называются бозонами. Можно сказать, что они являются «коллективистами», т.е. «любят» накапливаться в одном и том же состоянии.

Частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны) могут находиться в квантовых состояниях только поодиночке (принцип Паули). Они – «индивидуалисты». Такие частицы подчиняются статистике, разработанной Ферми и Дираком (1926), и называются фермионами.

Других возможностей квантовая теория не допускает. Нет частиц, подчиняющихся статистике Больцмана. Она является приближенным предельным случаем, в который переходят при определенных условиях обе квантовые статистики.

Различие статистик поясняет таблица, в которой показано, как размещаются две тождественных частицы a и b по трем квантовым состояниям.

Статистика Больцмана			Статистика Бозе-Эйнштейна			Статистика Ферми-Дирака		
a	b		b	a		•	•	
	a	b		b	a		•	•
a		b	b		a	•		•
ab			••					
ab			••					
ab			••					

Видно, что в статистике Больцмана всех микросостояний 9, и вероятность каждого из них равна 1/9. В статистиках же Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака состояния в первых трех парах распределения Больцмана неразличимы, и каждая пара рассматривается как одно состояние. Частицы а и б принципиально неразличимы, поэтому они обозначены просто точками. Для бозонов число микросостояний равно 6, и вероятность каждого из них равна 1/6. Для фермионов последние три распределения статистики Бозе-Эйнштейна невозможны из-за принципа Паули. Остается 3 микросостояния, и вероятность каждого из них равна 1/3.

Математические описания статистик Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака будут рассмотрены в следующей главе.

§69. Принцип Паули.

Каждый электрон в атоме движется в центрально-симметричном некулоновском (т.е. не точечного заряда) поле. Его состояние определяется числами n, l, m_l . Спин добавляет еще одно число: $m_s = \pm 1/2$, определяющее проекцию спина на заданное направление. Таким образом, состояние электрона в атоме определяется четырьмя квантовыми числами:

а) главным n (1,2,3,...);

б) азимутальным l (0,1,2,3,..., $n-1$);

в) магнитным m_l ($-l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$);

г) спиновым m_s ($-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$).

Энергия состояния зависит, в основном, от n и l . Есть слабая зависимость от m_l и m_s , определяемая спин-орбитальным взаимодействием. Как правило, большим значениям n соответствует большая энергия, независимо от l . В невозбужденном состоянии электроны должны занимать состояния с наименьшей энергией. Казалось бы, все они должны оказаться в состоянии $1s$ ($n=1, l=0$), и все спектральные линии должны соответствовать переходам в это состояние. Но на опыте все оказывается иначе.

В 1925 году швейцарский физик Вольфганг Паули сформулировал носящий его имя принцип: в одном атоме (или в любой квантовой системе) не может быть двух электронов (либо других фермионов - частиц с полуцелым спином), обладающих одинаковой совокупностью квантовых чисел. Иначе говоря, в одном состоянии не могут находиться одновременно два электрона.

Ранее мы показали, что каждому n соответствует n^2 состояний с разными l и m_l . m_s может иметь два значения. Значит, в состоянии с данным n может находиться не более $2n^2$ электронов. Совокупность электронов с одним n образует *оболочку*. В зависимости от

n оболочки обозначаются буквами К, L, M, N, O и т.д. Они разделяются на *подоболочки* с разными l . (В некоторых книгах оболочки называют слоями, а подоболочки – оболочками).

Полностью заполненная подоболочка имеет равные нулю суммарные орбитальный и спиновый моменты: $L = 0$, $S = 0$. Значит, и суммарный момент импульса такой подоболочки тоже равен нулю: $J = 0$.

Убедимся в этом на примере 3d-подоболочки ($n = 3, l = 2$). Спины всех 10 электронов, входящих в эту подоболочку, попарно компенсируют друг друга, вследствие чего $S = 0$. Квантовое число проекции результирующего орбитального момента M_L этой подоболочки на ось z имеет единственное значение $m_L = \sum m_l = 0$. Следовательно, L тоже равно нулю.

Таким образом, при определении L и S атома заполненные подоболочки можно не учитывать.

Оболочка	n	l	m_l	m_s	Подоболочка
<i>K</i>	1	0	0	$\uparrow\downarrow$	$1s$
<i>L</i>	2	0	0	$\uparrow\downarrow$	$2s$
		1	-1	$\uparrow\downarrow$	$2p$
			0	$\uparrow\downarrow$	$2p$
			+1	$\uparrow\downarrow$	$2p$
<i>M</i>	3	0	0	$\uparrow\downarrow$	$3s$
		1	-1	$\uparrow\downarrow$	$3p$
			0	$\uparrow\downarrow$	$3p$
			+1	$\uparrow\downarrow$	$3p$
		2	-2	$\uparrow\downarrow$	$3d$
			-1	$\uparrow\downarrow$	$3d$
			0	$\uparrow\downarrow$	$3d$
			+1	$\uparrow\downarrow$	$3d$
			+2	$\uparrow\downarrow$	$3d$

§70. Периодическая система элементов Менделеева.

Элемент	K		L			M			N	
	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p		
1 H	1	—	—	—	—	—	—	—	—	
2 He	2	—	—	—	—	—	—	—	—	
3 Li	2	1	—	—	—	—	—	—	—	
4 Be	2	2	—	—	—	—	—	—	—	
5 B	2	2	1	—	—	—	—	—	—	
6 C	2	2	2	—	—	—	—	—	—	
7 N	2	2	3	—	—	—	—	—	—	
8 O	2	2	4	—	—	—	—	—	—	
9 F	2	2	5	—	—	—	—	—	—	
10 Ne	2	2	6	—	—	—	—	—	—	
11 Na	2	8	1	—	—	—	—	—	—	
12 Mg	2	8	2	—	—	—	—	—	—	
13 Al	2	8	2	1	—	—	—	—	—	
14 Si	2	8	2	2	—	—	—	—	—	
15 P	2	8	2	3	—	—	—	—	—	
16 S	2	8	2	4	—	—	—	—	—	
17 Cl	2	8	2	5	—	—	—	—	—	
18 Ar	2	8	2	6	—	—	—	—	—	
19 K	2	8	8	—	—	—	1	—	—	
20 Ca	2	8	8	—	—	—	2	—	—	
21 Sc	2	8	8	1	—	—	2	—	—	
22 Ti	2	8	8	2	—	—	2	—	—	
23 V	2	8	8	3	—	—	2	—	—	
24 Cr	2	8	8	5	—	—	1	—	—	
25 Mn	2	8	8	5	—	—	2	—	—	
26 Fe	2	8	8	6	—	—	2	—	—	
27 Co	2	8	8	7	—	—	2	—	—	
28 Ni	2	8	8	8	—	—	2	—	—	
29 Cu	2	8	8	10	—	—	1	—	—	
30 Zn	2	8	8	10	—	—	2	—	—	
31 Ga	2	8	8	10	—	—	2	1	—	
32 Ge	2	8	8	10	—	—	2	2	—	
33 As	2	8	8	10	—	—	2	3	—	
34 Se	2	8	8	10	—	—	2	4	—	
35 Br	2	8	8	10	—	—	2	5	—	
36 Kr	2	8	8	10	—	—	2	6	—	

Принцип Паули позволяет объяснить периодическую повторяемость свойств атомов. В таблице показан процесс застройки электронных оболочек первых 36 элементов системы Менделеева. Химические свойства атома определяются валентными электронами, находящимися в наружных незаполненных оболочках. Этим и объясняется химическое сходство Li, Na и K, а также Be, Mg и Ca. В таблице между линиями расположены элементы, находящиеся в горизонтальных строках таблицы Менделеева.

Вплоть до Ar заполнение уровней происходит в согласии с ожиданиями. Далее последовательность уровней нарушается. В атоме K электрон появляется в оболочке N, хотя еще не заполнена M. Эта тенденция продолжается в Ca, в нем полностью заполняется подоболочка 4s, а далее продолжает заполняться оболочка M. В атоме Cr имеются сразу две незаполненные оболочки, а далее, вплоть до Ni, все происходит закономерно. После Ni происходит перескок к другой закономерности. Начиная с Cu, мы снова наблюдаем строгую последовательность в заполнении уровней.

Полностью заполненным подоболочкам соответствуют химически не активные, т.е. инертные, элементы He, Ne, Ar, Kr. Можно было бы ожидать инертный элемент на месте Ni, но заполненной (до 10) подоболочки 3d оболочки M не получилось, так как начала заполняться N-оболочка.

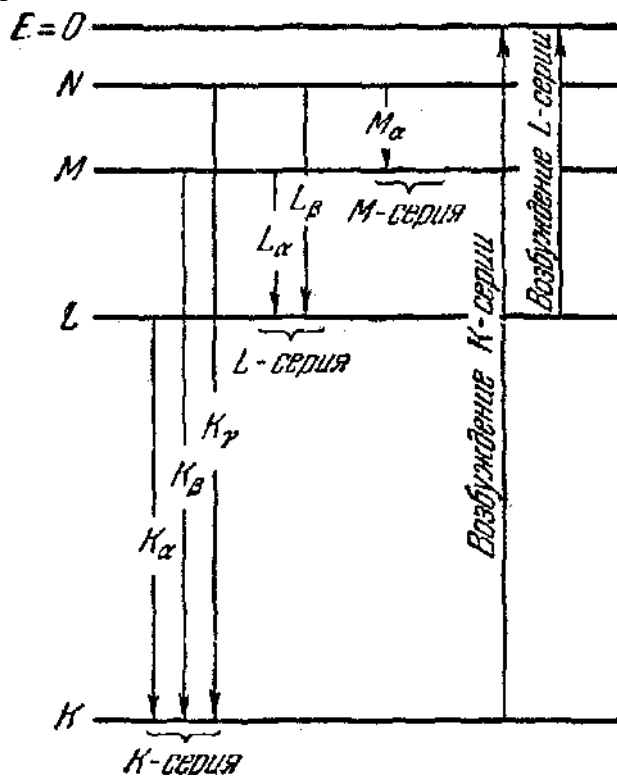
§71. Рентгеновские спектры.

Рентгеновское излучение возникает при бомбардировании антикатада быстрыми электронами. При их резком торможении наблюдается тормозное излучение, имеющее

сплошной спектр и не зависящее от материала антикатада. Но когда энергия бомбардирующих антикатод электронов достаточно велика для вырывания электронов из внутренних оболочек атомов, на фоне тормозного излучения появляются резкие линии характеристического излучения. Их частоты зависят от вещества антикатада.

Рентгеновские спектры состоят из нескольких серий: K, L, M, N, O и т.д. Каждая серия насчитывает небольшое число линий. Спектры разных химических элементов имеют сходный характер. При увеличении атомного номера Z весь спектр лишь сдвигается в сторону коротких волн, не меняя своей структуры. Это объясняется тем, что рентгеновские спектры возникают при переходах электронов во внутренних частях атомов, а они имеют сходное строение.

Схема возникновения показана на рисунке. Возбуждение атома состоит в удалении электрона из внутренней оболочки. Освободившееся место занимает электрон из более высокого слоя. Каждая серия сопровождается следующими сериями, так как при ее испускании освобождаются уровни в следующих слоях, которые, в свою очередь, заполняются электронами из более высоких слоев.



§72. Вынужденное излучение.

До сих пор мы говорили о двух видах переходов электронов между уровнями атомов: а) спонтанные (самопроизвольные) – с более высоких уровней на более низкие, б) происходящие под действием внешнего излучения (вынужденные) переходы на уровни с более высокой энергией. Первые приводят к излучению фотонов, вторые – к поглощению. В 1918 году Эйнштейн обратил внимание на то, что этих двух видов переходов не достаточно для объяснения возможности равновесия между излучением и веществом. Вероятность спонтанных переходов вниз не зависит от интенсивности падающего излучения, а вероятность вынужденных переходов вверх - зависит. Для возможности существования равновесного состояния необходимо существование испускательных переходов, вероятность которых возрастает с ростом интенсивности падающего излучения. Такое излучение называется вынужденным (индуцированным). Исходя из термодинамических соображений, Эйнштейн доказал, что вероятность вынужденного излучения равна вероятности

вынужденного поглощения. Таким образом, вынужденные переходы происходят с одинаковой вероятностью в обоих направлениях.

Вынужденное излучение обладает важными свойствами. Направление его распространения совпадает с направлением вынуждающего излучения. То же самое относится к частоте, фазе и поляризации. Следовательно, вынужденное и вынуждающее излучения оказываются строго когерентными. Эта особенность лежит в основе действия лазера.

Пусть P_{nm} вероятность вынужденного перехода $n \rightarrow m$, а P_{mn} - обратно. Из вышеизложенного ясно, что $P_{nm} = P_{mn}$. Пусть $E_n > E_m$. Вероятность P_{nm} пропорциональна плотности энергии вынуждающего поля u_ω , приходящейся на частоту $\omega = (E_n - E_m)/\hbar$, соответствующую данному переходу: $P_{nm} = B_{nm}u_\omega$, $P_{mn} = B_{mn}u_\omega$. Отсюда следует равенство $B_{mn} = B_{nm}$. Эти величины называются коэффициентами Эйнштейна.

Основываясь на равновероятности переходов $m \rightarrow n$ и $n \rightarrow m$, Эйнштейн дал весьма простой вывод формулы Планка. Равновесие между веществом и излучением соответствует условию $N_{mn} = N_{nm}$, где N - число атомов, совершающих переход в единицу времени. Переходы $m \rightarrow n$ (снизу вверх) вынужденные, а $n \rightarrow m$ - и вынужденные и самопроизвольные. Тогда $N_{mn}^{\text{вынужд}} = N_{nm}^{\text{вынужд}} + N_{nm}^{\text{спонт}}$. Но $N_{mn}^{\text{вынужд}} = P_{mn}N_m = B_{mn}u_\omega N_m$. Получаем $B_{mn}u_\omega N_m = B_{nm}u_\omega N_n + A_{nm}N_n$, где A_{nm} - вероятность спонтанного перехода $n \rightarrow m$, N_m и N_n - числа атомов в состояниях m и n . Выразим отсюда u_ω :

$$u_\omega = \frac{A_{nm}N_n}{B_{nm}(N_m - N_n)} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{1}{\frac{N_m}{N_n} - 1}$$

Равновесное распределение определяется законом Больцмана $\frac{N_m}{N_n} = e^{(E_n - E_m)/kT} = e^{\hbar\omega/kT}$,

откуда $u_\omega = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$. (*)

При малых частотах эта формула должна переходить в формулу Рэля-Джинса. При $\hbar\omega \ll kT$ имеем $e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \hbar\omega/kT$ и (*) приобретает вид $u_\omega = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{kT}{\hbar\omega}$. Сопоставив

это выражение с формулой Рэля-Джинса $u(\omega, T) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}$, получим $\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}$ и

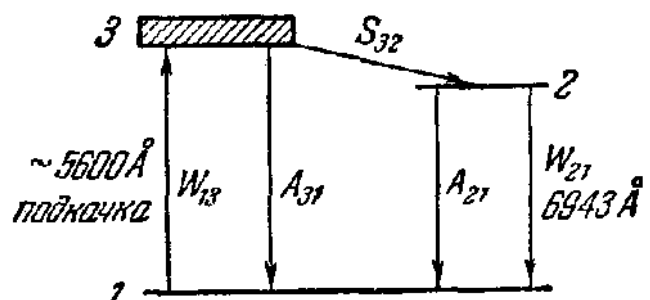
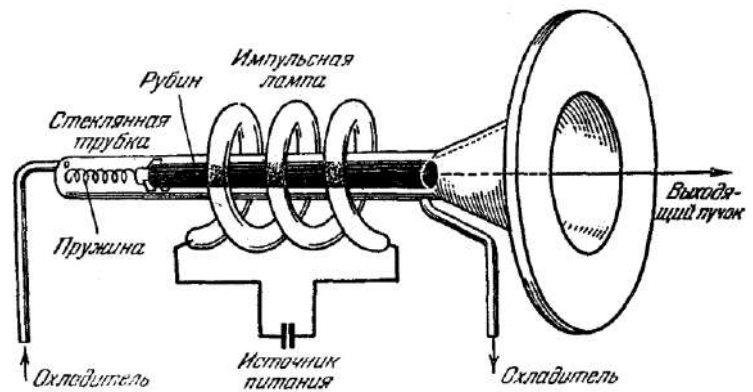
окончательно: $u_\omega = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}$, что точно совпадает с формулой Планка.

§73. Лазеры.

В 1950-х годах были созданы устройства, при прохождении через которые электромагнитные волны усиливались за счет вынужденного излучения. В 1953 году советскими физикам Басовым и Прохоровым, и независимо от них Таунсом, были созданы *мазеры* в сантиметровом диапазоне (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation). В 1960 году Мейман создал *лазер* в оптическом диапазоне (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation), их также называют «оптическими квантовыми генераторами».

Свет с $\omega = (E_n - E_m) / \hbar$ (при $E_n > E_m$) вызывает два процесса: переход $m \rightarrow n$, ведущий к поглощению света и ослаблению падающего пучка, или переход $n \rightarrow m$, обеспечивающий излучение света и усиление первоначального пучка. Результирующее изменение зависит от того, какой из двух процессов преобладает. При термодинамическом равновесии $N_m > N_n$, поэтому преобладает поглощение. Для усиления надо, чтобы $N_m < N_n$, то есть надо создать *инверсную населенность*.

В построенном Мейманом лазере (см.рисунок) рабочим телом был рубиновый цилиндр диаметром 1 см и длиной 5 см, торцы которого были тщательно отполированы и представляли собой строго параллельные зеркала. Один торец покрывался тонким слоем непрозрачного серебра, другой - пропускающим 8% света. Рубин - это Al_2O_3 , в котором некоторые атомы алюминия замещены атомами хрома. При поглощении света ионы Cr переходят в возбужденное состояние 3. Обратный переход происходит в два этапа: на первом возбужденные ионы отдают часть энергии решетке и переходят в метастабильное состояние 2. Переходы из него в основное 1 запрещены правилами отбора, поэтому среднее время жизни иона в нем ($\approx 10^{-3}$ с) примерно в 100 000 раз больше,



чем в обычном возбужденном состоянии. На втором этапе ионы переходят из метастабильного 2 в основное состояние 1 (так как правила отбора не запрещают переход, а лишь уменьшают его вероятность), излучая $\lambda = 6943 \text{ \AA}$. Под действием фотонов такой же длины волны, то есть при вынужденном излучении, переход ионов хрома из метастабильного состояния в основное происходит значительно быстрее, чем при спонтанном излучении. В лазере рубин освещается импульсной ксеноновой лампой, которая дает свет в широком диапазоне частот. При ее достаточной мощности большинство ионов хрома возбуждаются. Это процесс *накачки*.

Возбуждение ионов за счет накачки изображено стрелкой W_{13} . Время жизни уровня 3 очень мало ($\approx 10^{-8} \text{ с}$). Переходов A_{31} много меньше, чем S_{32} . Поэтому большинство ионов перейдет на метастабильный уровень 2. При достаточной мощности накачки их может стать больше, чем в 1, то есть возникнет инверсия. Излучаемые спонтанно фотоны (A_{21}) могут вызвать вынужденное испускание дополнительных фотонов (переход W_{21}), которые, в свою очередь, вызовут вынужденное излучение и т.д. Образуется каскад фотонов, причем они летят в том же направлении, что и падающие. Фотоны, испущенные спонтанно и летящие не вдоль оси, уходят через стенки цилиндра. Летящие близко к оси многократно отражаются от торцов, поэтому будут в кристалле долго и успеют создать каскад. Часть пучка выходит через полупрозрачный торец, создавая лазерное излучение.

Лазер на рубине работает в импульсном режиме (с частотой порядка нескольких импульсов в минуту). Внутри кристалла выделяется большое количество тепла, поэтому его приходится интенсивно охлаждать с помощью жидкого воздуха.

Сейчас существуют и газовые, и полупроводниковые и т.д. лазеры.

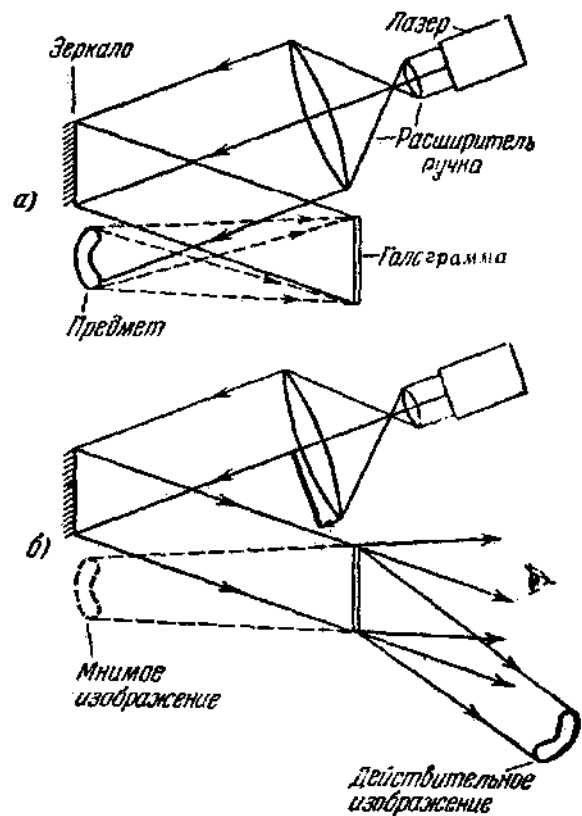
Особенности лазерного излучения:

- 1) строгая монохроматичность ($\Delta\lambda \approx 0,1 \text{ \AA}$);
- 2) высокая пространственная и временная когерентность;
- 3) большая интенсивность света;
- 4) узость пучка. На лунной поверхности диаметр лазерного пятна будет всего 3 км.

§74. Голография.

Высокая когерентность лазерного излучения позволила создать голографию. Это особый способ записи на пластинку структуры световой волны, отраженной предметом. Если потом эту пластинку осветить пучком света, то зарегистрированная на ней волна восстановится в первоначальном виде.

Изобретена голография венгерским физиком Деннисом Габором, работавшим в Великобритании, в 1947 году. Но осуществлена идея была только после создания лазера (1963 год - американские физики Лейт и Упатниекс). Их схема получения голограммы приведена на рисунке справа вверху. Луч лазера разделяется на два пучка: опорный и предметный. На голограмме записывается их интерференционная картина.



Внизу показана схема воспроизведения изображения. Для наблюдения изображения перекрыем нижнюю половину линзы перегородкой, перекрывая предметный пучок. Опорный пучок дифрагирует на голограмме, так что можно наблюдать глазом мнимое изображение в точке, где был предмет. Можно показать, что возникающая волна имеет точно такую структуру, как и волна, отражавшаяся предметом (когда он там был). Изображение получается объемным. Двигая головой, можно увидеть скрытые участки. Кроме того, глаз приходится аккомодировать при рассмотрении разных точек.

В 1962 году Юрий Николаевич Денисюк из Физтеха предложил голографию в толстослойных эмульсиях, что позволяет получать цветные голограммы.

Сейчас существуют голограммы, наблюдаемые в естественном свете.

§75. Нелинейная оптика.

В долазерной оптике напряженность поля световой волны E была много меньше напряженности поля в атоме, т.е. волна не влияла на свойства среды. В этом случае волна описывается линейными дифференциальными уравнениями. Именно в этом случае справедлив принцип суперпозиции. Это так называемая линейная оптика.

Лазеры позволяют создать световые волны, напряженность поля E в которых сопоставима с микроскопической напряженностью поля в среде. Поэтому свойства среды зависят от интенсивности волны, например, ϵ, n и т.д. Тогда принцип суперпозиции нарушается, так как различные волны влияют друг на друга. Возникают нелинейные явления.

1) Нелинейное отражение света. Возникает отраженный луч с удвоенной частотой, его направление отличается от направления отраженного луча с одинарной частотой.

2) Самофокусировка. С ростом напряженности E растет показатель преломления n , т.е. среда в области пучка более оптически плотная. Возникает некое подобие линзы, и параллельный пучок становится сходящимся.

3) Оптические гармоники. Возникает рассеянный свет с удвоенной, утроенной и т.д. частотой.

4) Многофотонные процессы. Атом может взаимодействовать сразу с несколькими (N) фотонами. Условие перехода атома из состояния 1 в 2: $N \cdot \hbar\omega = E_2 - E_1$. При однофотонном процессе поглощается частота $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$, при двухфотонном – в два раза меньшая и т.д. К числу таких процессов относится и многофотонный фотоэффект (многофотонная ионизация атомов). Удалось на опыте зарегистрировать семифотонную ионизацию инертных газов.

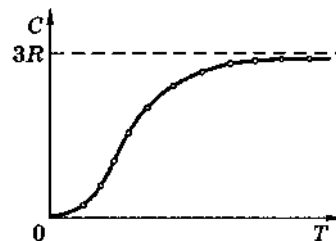
ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава 1. Теплоемкость твердого тела.

§76. Теория Эйнштейна.

Классическая модель.

В ее основе лежит закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Кристалл рассматривается как система из N независимых друг от друга атомов, имеющих по 3 колебательных степени свободы. На каждую из них приходится в среднем энергия kT ($kT/2$ - кинетическая, $kT/2$ - потенциальная). Внутренняя энергия одного моля $U = 3N_A kT = 3RT$. Отсюда вытекает закон Дюлонга и Пти: молярная теплоемкость C всех химически простых твердых тел одинакова и равна $3R$. Этот закон хорошо выполняется при достаточно высоких температурах. При низких температурах теплоемкость убывает и при $T \rightarrow 0$ стремится к нулю по закону $C \sim T^3$.



Почему? Значит, классическая теория неверна. Значение $\langle \varepsilon \rangle = kT$ получено в предположении, что энергия осциллятора может принимать значение из непрерывного ряда. Но мы уже знаем, что энергия осциллятора квантуется:

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Модель Эйнштейна (1907 г.).

Предположим, что осцилляторы распределены по энергиям в соответствии с законом Больцмана, т.е. вероятность p_n того, что осциллятор имеет энергию $\varepsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$,

равна

$$p_n = \frac{N_n}{N} = \frac{e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT}}$$

Найдем среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \varepsilon_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2)\hbar\omega e^{-(n+1/2)\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\hbar\omega/kT}}$

Введем обозначение $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$. Тогда, сократив на $e^{-\hbar\omega/2kT}$, получим

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar\omega \frac{d}{dx} (\ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}).$$

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$ - сумма бесконечно убывающей прогрессии. Тогда

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar\omega \frac{d}{dx} (\ln \frac{1}{1 - e^{-x}}) = \frac{1}{2} \hbar\omega + \hbar\omega \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Эйнштейн исходил из предложенного Планком выражения для энергии $\varepsilon_n = n\hbar\omega$,

(член $\hbar\omega/2$ отсутствовал, так как квантовая теория еще не существовала).

$$U = \langle \varepsilon \rangle \cdot 3N = \frac{3N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3N\hbar\omega}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \cdot \frac{\hbar\omega}{kT^2} \cdot e^{\hbar\omega/kT}$$

Рассмотрим два предельных случая.

1) $kT \gg \hbar\omega$, $e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} \Rightarrow C = 3Nk = 3R$.

2) $kT \ll \hbar\omega \Rightarrow C = \frac{3N(\hbar\omega)^2}{kT^2} e^{-\hbar\omega/kT}$, т.е. при $T \rightarrow 0$ теплоемкость стремится к

нулю почти по экспоненте. Это был большой успех квантовой теории.

Однако эксперимент показывает, что $C \rightarrow 0$ как T^3 . Формула Эйнштейна такой зависимости не дает. И при других температурах также наблюдалось лишь качественное согласие. Эти расхождения связаны не с существом квантовой теории, а с чрезмерным упрощением самой модели твердого тела, т.е. с предположением, что все атомы колеблются независимо друг от друга и с одинаковой частотой. Это понимал и сам Эйнштейн. Он же указал, в каком направлении следует развивать теорию.

Количественного согласия удалось добиться Дебаю (1913).

§77. Колебания систем с большим числом степеней свободы.

Чтобы разобраться в теории Дебая, нужно знать решение задачи о малых колебаниях систем с большим числом степеней свободы, например, системы из N маятников, связанных пружинами. Рассмотрим результаты, не касаясь способов решения.

Положение системы с S степеней свободы может быть задано заданием S величин обобщенных координат q_i . Их роль могут играть длины, углы, площади и т.д. В одной и той же системе обобщенные координаты могут быть выбраны разными способами. Можно показать, что такая система имеет S собственных частот ω_α ($\alpha = 1, 2, \dots, S$). Общее решение является суперпозицией S гармонических колебаний с частотами ω_α

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^S A_{i\alpha} \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha) .$$

Энергия системы равна $E = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^S a_{i,k} \dot{q}_i \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^S b_{l,m} q_l q_m$, первый член – кинетическая энергия, второй – потенциальная.

Оказывается, можно так выбрать обобщенные координаты ξ_α , что изменение каждой из них представляет собой гармоническое колебание с одной из частот ω_α :

$$\xi_\alpha = b_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha)$$

Такие обобщенные координаты называются нормальными, а их колебания – нормальными колебаниями системы. Тогда изменения любых обобщенных координат могут быть представлены как суперпозиции нормальных:

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^S c_{i\alpha} \xi_\alpha, \quad E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S a_\alpha \dot{\xi}_\alpha^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S b_\alpha \xi_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^S \left(\frac{1}{2} a_\alpha \dot{\xi}_\alpha^2 + \frac{1}{2} b_\alpha \xi_\alpha^2 \right),$$

то есть энергия системы равна сумме энергий нормальных колебаний.

Пример - два маятника, соединенные пружиной.

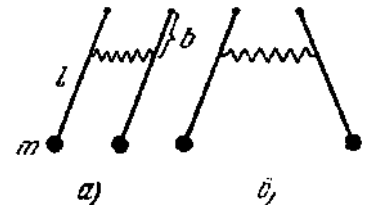
В качестве обобщенных координат выберем углы отклонения от вертикальной оси φ_1 и φ_2 .

Можно показать, что решения уравнений движения имеют вид

$$\varphi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) = \xi_1 + \xi_2$$

$$\varphi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) = \xi_1 - \xi_2,$$

$$\text{где } \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{kb^2}{ml^2}} .$$



$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ и $\xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$ - нормальные координаты. Их можно выразить через наши обобщенные координаты φ_1 и φ_2 .

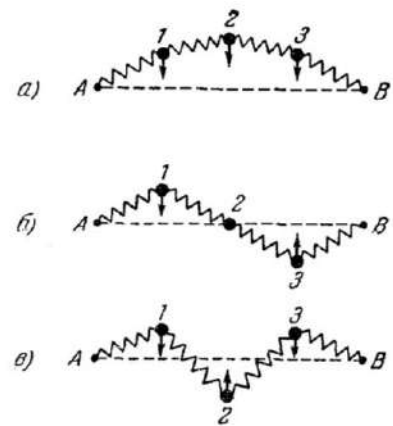
$$\xi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}; \quad \xi_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

Иначе говоря, нормальными координатами являются сумма и разность углов отклонений маятников.

Если оба маятника отвести на углы $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ в одну сторону и отпустить без толчка, то будет только ξ_1 с ω_1 ($A_1 \neq 0, A_2 = 0$), причем $\varphi_1 = \varphi_2 = \xi_1$.

Если маятники отвести на одинаковые углы в разные стороны, то будет только ξ_2 с ω_2 , причем $\varphi_1 = -\varphi_2 = \xi_2$. Если начальные условия иные, то будут и ξ_1 , и ξ_2 .

В качестве другого примера рассмотрим систему из трех одинаковых шариков, соединенных невесомыми одинаковыми пружинами. Концы пружин А и В закреплены неподвижно. Предполагается, что шарики могут передвигаться только в плоскости чертежа в направлениях, перпендикулярных к линии АВ. В этом случае система обладает тремя степенями свободы. Нормальные колебания показаны на рисунке. В случае *a* все шарики движутся в одинаковой фазе; в случае *б* шарики 1 и 3 колеблются в противофазе, шарик 2 неподвижен; в случае *в* шарики 1 и 3 колеблются в одинаковой фазе, а шарик 2 по отношению к ним движется в противофазе.



В случае сплошной закрепленной на концах струны каждое нормальное колебание представляет собой стоячую волну, длина которой λ_n связана с длиной струны l соотношением $l = n\lambda/2$. Аналогично, в объемной кристаллической решетке каждому нормальному колебанию соответствует стоячая волна, устанавливающаяся в объеме кристаллического тела. Действительно, из-за связи между атомами колебание, возникшее в каком-то месте кристалла, передается от одного узла к другому, в результате чего возникает упругая волна. Дойдя до границы кристалла, волна отражается. При наложении прямой и отраженной волн образуется стоячая волна. Стоячие волны могут возникать лишь для частот (или длин волн), удовлетворяющих определенным условиям.

Ранее было показано (§38), что число стоячих волн на единицу объема в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ равно

$$dN_{\omega} = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}, \quad \text{где } v - \text{ скорость волны.}$$

В твердой среде вдоль одного направления могут распространяться три разные волны с одной ω , различающиеся направлением поляризации: одна продольная и две поперечные с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний. С учетом этого факта формула примет вид

$$dN_{\omega} = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right)$$

Пусть для простоты $v_{\parallel} = v_{\perp} = v$, тогда $dN_{\omega} = \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}$.

§78. Теория Дебая.

Дебай предположил, что число нормальных колебаний равно числу степеней свободы, т.е. $3n$ (n - число атомов в единице объема). Частоты этих колебаний заключены в диапазоне от 0 до ω_m , где ω_m - максимальная частота колебаний решетки. Найдем ее.

$$3n = \int dN_{\omega} = \int_0^{\omega_m} \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3} = \frac{\omega_m^3}{2\pi^2 v^3} \Rightarrow \omega_m = v^3 \sqrt[3]{6\pi^2 n}$$

Тогда наименьшая длина волны равна $\lambda_{\min} = \frac{2\pi v}{\omega_m} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \approx 2d$, где d - расстояние

между соседними атомами в решетке. Это дополнительный аргумент для введенного Дебаем ограничения числа частот колебаний, так как волны, длина которых меньше межатомного расстояния, не имеют физического смысла. Величину максимальной циклической частоты колебаний ω_m в приближении Дебая обозначают ω_D и называют частотой Дебая.

Подставив ω_m в формулу для dN_{ω} получим выражение для числа нормальных колебаний на единицу объема в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$

$$dN_{\omega} = 9n \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_m^3}.$$

Внутренняя энергия единицы объема кристалла равна (см. §76)

$$U = \int \langle \varepsilon(\omega) \rangle dN_{\omega} = \frac{9n}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \left(\frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right) \omega^2 d\omega = U_0 + \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1},$$

где $U_0 = \frac{9}{8} \hbar n \omega_m$ - нулевая энергия кристалла.

Найдем теплоемкость единицы объема кристалла

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^3 e^{\hbar\omega/kT} \hbar\omega d\omega}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2 kT^2}$$

Величину θ , определяемую условием $\hbar\omega_m = k\theta$, называют характеристической температурой Дебая. Введем переменную $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$.

$$C = 9nk \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{x_m} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}, \quad (*)$$

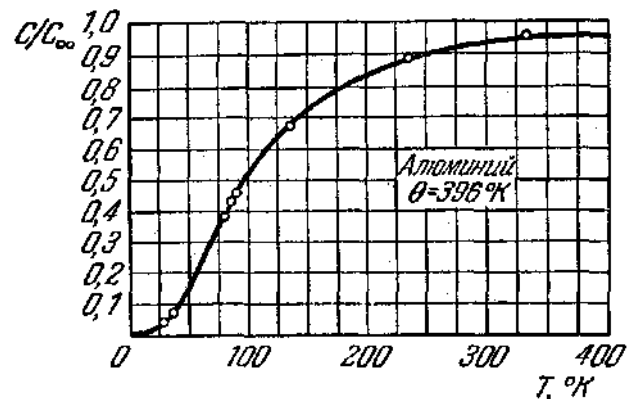
$$\text{где } x_m = \frac{\hbar\omega_m}{kT} = \frac{\theta}{T}.$$

Характеристическая температура Дебая указывает для каждого вещества, в какой области температур существенно квантование энергии колебаний.

Если $T \ll \theta$, то $x_m \rightarrow \infty$, и интеграл равен числу, т.е. $C \sim T^3$ - закон T^3 Дебая.

Если $T \gg \theta$, то $x \ll 1 \Rightarrow e^x \approx 1+x \Rightarrow U = U_0 + 3nkT \Rightarrow C = 3nk$, что соответствует закону Дюлонга и Пти.

На рисунке приведен график зависимости теплоемкости алюминия от температуры, где C_∞ - значение теплоемкости, получающееся из квантовых формул при $T \rightarrow \infty$. Сплошная кривая рассчитана по формуле (*), кружки - результаты эксперимента.



Однако формула Дебая хорошо передает ход теплоемкости с температурой только для тел с простой кристаллической структурой. К телам с более сложной структурой она неприменима, поскольку в них существенно усложняется спектр колебаний.

§79. Фононы.

Мы установили, что энергия кристалла равна $U = \sum_{i=1}^{3N} (n_i + 1/2)\hbar\omega_i$. За вычетом нулевой энергии энергия нормального колебания частоты ω_i складывается из порций $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$. Эта порция (квант) называется фононом. Фонон отличается от обычных частиц: электрона, протона, фотона. Он не может существовать в вакууме - ему нужна среда. Частицы такого рода называются квазичастицами. Для звуковых частот фононы - это кванты звука.

Подобно тому, как электромагнитное излучение может быть представлено в виде «газа» фотонов, колебания кристаллической решетки можно представить как «газ» фононов,

заключенный в пределах образца. Но фотоны – истинные частицы, а фононы – квазичастицы.

Фонон обладает энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (\vec{k} – волновой вектор). Импульс фононов обладает особыми свойствами. При взаимодействии фононов друг с другом их импульс может передаваться решетке и, следовательно, не сохраняется. Поэтому его называют квазиимпульсом.

В §76 было показано, что при тепловом равновесии средняя энергия осциллятора с частотой ω_i равна

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega_i + \frac{\hbar\omega_i}{e^{\hbar\omega_i/kT} - 1}$$

Вычитая первый член, соответствующий нулевой энергии, т.е. отсутствию фононов, получим для среднего числа фононов с частотой ω_i

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega_i/kT} - 1} \quad (*)$$

Отсюда следует, что число одинаковых фононов в кристалле не ограничено ничем. Значит, принцип Паули на фононы не распространяется.

Распределение (*) представляет собой частный случай распределения Бозе-Эйнштейна, которому подчиняются частицы с целым спином (§68):

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} - 1} \quad (**)$$

Величина μ называется химическим потенциалом и определяется из условия $\sum_i \langle n_i \rangle = N$. Значение μ не может быть больше нуля, так как тогда при $E_i < \mu$ получим $\langle n_i \rangle < 0$. Значит, $\mu \leq 0$. Для систем с переменным числом частиц, к которым относятся и фононы, и фотоны (ведь и те, и другие могут рождаться и исчезать), $\mu = 0$, и мы имеем

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{E_i/kT} - 1}.$$

Частицы, подчиняющиеся распределению Бозе-Эйнштейна (**), называются бозонами. К ним относятся все частицы с нулевым или целочисленным спином. Для бозонов характерно то, что они «любят» накапливаться в одном состоянии. Они «коллективисты».

§80. Конденсация Бозе-Эйнштейна.

Рассмотрим интересное явление, получившее название «конденсация Бозе-Эйнштейна». Если при фиксированной концентрации бозонов n понижать температуру бозонного газа, то химический потенциал μ , определяемый из условия $\sum_i \langle n_i \rangle = N$, будет увеличиваться, т.е., будучи отрицательным, уменьшаться по абсолютной величине. Он достигнет значения $\mu = 0$ при температуре $T_0 = \frac{3.31}{(2S+1)^{2/3}} \frac{\hbar^2}{mk} n^{2/3}$, где S - спин частицы. Но больше нуля μ быть не может (§79). Поэтому, казалось бы, при $T < T_0$ условие $\sum_i \langle n_i \rangle = N$ не может быть выполнено.

На самом деле ситуация такова. Расчет показывает, что полное число частиц с энергиями $E_i > 0$ (при всех i) равно $N_{E>0} = N \cdot (T/T_0)^{3/2}$. Остальные $N_{E=0} = N \cdot [1 - (T/T_0)^{3/2}]$ частиц находятся в самом низшем состоянии, т.е. имеют энергию, равную нулю. При абсолютном нуле температуры все частицы системы находятся в этом состоянии, которое называют конденсатом. При повышении температуры некоторые из них покидают конденсат и начинают участвовать в тепловом движении. При $T > T_0$ бозе-эйнштейновский конденсат исчезает: в нем не остается частиц. Термин «конденсация» возник по аналогии с понятием конденсации газа в жидкость, хотя эти явления совершенно различны, так как конденсация Бозе-Эйнштейна происходит в пространстве импульсов, а распределение частиц в координатном пространстве не меняется. Никакого перехода из «газа» в «жидкость» не будет!

Значение температуры T_0 для атомов и молекул очень мало, например, для жидкого гелия-4 формула дает примерно 2,7 К, а для более тяжелых элементов еще меньше. При этих температурах все вещества, кроме гелия-4, находятся в твердом состоянии, так что об идеальном газе речь не идет. Кстати, гелий-4 - весьма экзотичное вещество, он остается жидким при всех температурах, а при $T < 2,17$ К приобретает сверхтекучесть, т.е. полностью теряет вязкость. В результате этого он приобретает способность с легкостью проходить через капилляры и узкие щели без какого-либо трения. Кроме того, он может тонкой жидкой пленкой вытекать из сосуда по его стенкам. Также благодаря сверхтекучести гелий способен циркулировать по кругу более 18-ти часов без затухания (дальнейшее замедление происходит не по причине трения, а из-за иных квантово-механических явлений). Все эти факты объясняются конденсацией Бозе-Эйнштейна.

Казалось бы, теорию, созданную в 1925 году, в других ситуациях, кроме гелия, проверить не удастся. Но в 1995 году Корнелл и Виман получили первый бозе-конденсат, на котором предсказания теории подтвердились. Ученые использовали газ из атомов рубидия, охлажденный до 170 нанокельвин. За эту работу им была присуждена Нобелевская премия по физике 2001 года.

Кроме того, если газ состоит из частиц, масса которых имеет порядок массы электронов (сами электроны не подходят, они – фермионы, а нужны бозоны), то при $n = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ получим $T_0 \approx 10^4$ К. Такие бозоны существуют в сверхпроводниках, где электроны объединены в пары, спин которых равен нулю. Поэтому в сверхпроводниках всегда $T < T_0$, в них конденсация Бозе-Эйнштейна имеет место и играет важную роль в объяснении сверхпроводимости.

Глава 2. Зонная теория твердых тел.

§81. Распределение Ферми-Дирака.

Частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны и т.д.) называются фермионами и подчиняются распределению Ферми-Дирака: среднее число частиц с энергией E_i при температуре T равно

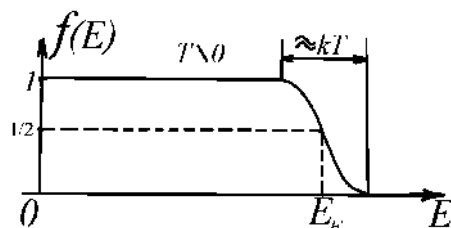
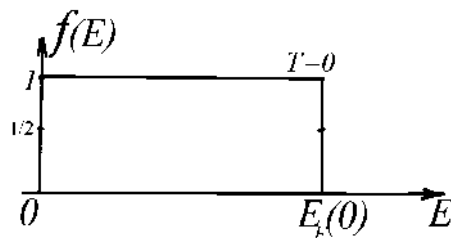
$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} + 1}.$$

Фермионы – «индивидуалисты»: согласно принципу Паули в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы.

Можно сформулировать иначе: вероятность того, что состояние с энергией E занято электроном, равна

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}.$$

В случае фермионов $\mu > 0$ - это так называемый уровень Ферми E_F - энергия, при которой вероятность равна $f(E_F) = 1/2$. Иными словами, это среднее увеличение энергии системы при добавлении одного электрона. Изоэнергетическая поверхность с $E = E_F$ в пространстве импульсов называется поверхностью Ферми. Ее форма определяет многие свойства металлов. Для свободных электронов это сфера $p^2 / 2m = E_F$. Для



реальных металлов она зависит от свойств решетки и имеет сложный, порой весьма причудливый характер.

При $T = 0$ поверхность Ферми отделяет состояния, заполненные электронами, от незаполненных. Величина $T_F = E_F / k$ называется температурой Ферми.

1) Если $kT \ll E_F$, т.е. $T \ll T_F$, газ называется вырожденным.

2) Если $kT \gg E_F$, т.е. $T \gg T_F$, газ называется невырожденным.

В металлах $T_F \approx 50000\text{K}$, поэтому в них электронный газ всегда вырожденный. В полупроводниках $E_F \ll E_{F_{мет}}$. Поэтому уже при комнатной температуре электронный газ во многих полупроводниках невырожденный и подчиняется классической статистике.

§82. Квантовая теория свободных электронов в металле.

Согласно модели свободных электронов валентные электроны атомов металла могут свободно перемещаться в образце. Именно они обуславливают электропроводность металла, поэтому их называют электронами проводимости.

Пусть образец металла имеет форму куба со стороной L . Уравнение Шредингера записывается в виде ($U = 0$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

Легко проверить путем подстановки, что решение имеет вид $\psi = Ce^{i\vec{k}\vec{r}}$, где $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ - волновой вектор электрона, связанный с энергией соотношением $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

Из условия нормировки $\int \psi^* \psi dV = C^* C \int dV = C^* CL^3 = 1$. Считая C вещественным, получим $C = 1/L^{3/2}$. Окончательно $\psi = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$.

ψ -функция должна удовлетворять граничным условиям. Наложим требование периодичности ψ по x, y, z с периодом L . Тогда $k_x = \frac{2\pi}{L}n_1$, $k_y = \frac{2\pi}{L}n_2$, $k_z = \frac{2\pi}{L}n_3$, где $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Таким образом, волновой вектор и энергия квантуются.

$$E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Состояние электрона проводимости определяется волновым вектором \vec{k} , т.е. k_x, k_y, k_z , и спиновым квантовым числом $m_s = \pm 1/2$. Следовательно, состояние можно задать четырьмя квантовыми числами n_1, n_2, n_3, m_s . Одной и той же энергии соответствуют несколько комбинаций n_i . Значит, уровни энергии являются вырожденными.

E_0 имеет кратность вырождения равную 2 ($m_s = \pm 1/2$),

E_1 - кратность равна 12 (1,0,0 или 0,1,0 или 0,0,1, или -1,0,0 или 0,-1,0 или 0,0,-1 при двух возможных значениях $m_s = \pm 1/2$);

E_2 - кратность равна 24.

Введем воображаемое пространство, по осям которого отложены n_1, n_2, n_3 . В нем каждой паре состояний (с разными m_s) соответствует точка. Число состояний ν_E , энергия которых не превышает $E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 n^{*2}$, равно удвоенному количеству точек с тремя целочисленными координатами внутри сферы радиуса n^* :

$$\nu_E = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi n^{*3} = \frac{8}{3} \pi (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{3/2}$$

Мы вычислили ν_E как удвоенное отношение объема шара к объему кубика с ребрами 1. Каждому такому кубику соответствует одна точка, например, одна из его вершин.

Преобразуем к виду
$$\nu_E = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 E^{3/2} = \frac{8}{3} \pi V \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} E^{3/2}$$

Отсюда число состояний от E до $E + dE$ равно

$$d\nu_E = 4\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{E} dE = g(E) dE$$

Пусть число электронов в единице объема равно n , тогда всего их nV . Из-за принципа Паули при $T = 0$ электроны располагаются по одному на каждом уровне при самых низких энергиях. Поэтому все состояния с $E \leq E_F(0)$ будут заполнены, а с $E > E_F(0)$ - свободны.

$E_F(0)$ называется уровнем Ферми при абсолютном нуле. $E_F(0)$ - это максимальная энергия электронов при температуре 0 К. Уровень Ферми играет роль химического потенциала μ в распределении электронов по энергии. Он зависит от температуры, т.е. $E_F(T) = \mu(T)$. $E_F(0)$ - это энергия Ферми, т.е. значение уровня Ферми $E_F(T)$ при $T = 0$.

Найдем $E_F(0)$ из условия равенства числа электронов количеству состояний с энергией от 0 до $E_F(0)$:

$$nV = \frac{8}{3} \pi V \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} E_F(0)^{3/2} \Rightarrow E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

Оценим энергию Ферми $E_F(0)$. В металлах $n \approx 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}$. При $5 \cdot 10^{22}$ получим $E_F(0) \approx 5 \text{ эВ}$. Это огромная величина. Она соответствует температуре $T_F \approx 50000 \text{ К}$, которая во много раз превосходит температуру плавления любого металла.

При $T > 0$ нахождение уровня Ферми сводится к вычислению интеграла $\int_0^\infty \frac{E^{1/2} dE}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$. Поскольку вычислить его трудно, то используют факт малости величины kT / E_F и, произведя разложение по ней в степенной ряд, получают

$$E_F(T) \approx E_F(0) \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F(0)} \right)^2 \right].$$

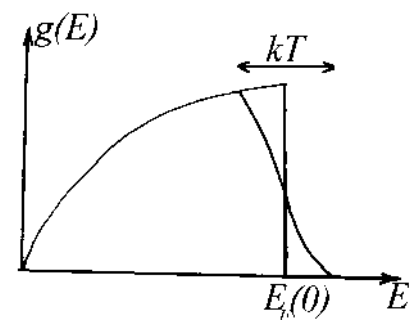
Поскольку энергия Ферми $E_F(0)$ во много раз больше kT , то уровень Ферми зависит от температуры слабо, т.е. $E_F(T) \approx E_F(0)$.

Найдем среднюю энергию электрона при $T = 0$

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F(0)} E g(E) dE}{\int_0^{E_F(0)} g(E) dE} = \frac{\int_0^{E_F(0)} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F(0)} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_F(0) \approx 3 \text{ эВ}$$

Возвращаясь к теплоемкости, вспомним, что согласно классической теории электронный газ должен иметь молярную теплоемкость $3R/2$, что в сумме с теплоемкостью решетки $3R$ должно составить $9R/2$. Но этого нет, эксперимент дает $3R$. Значит, теплоемкость электронного газа должна быть много меньше $3R$. В чем же дело?

Изобразим график плотности состояний $g(E) \sim \sqrt{E}$. Изменяют свою энергию только электроны около уровня Ферми в слое шириной kT . Остальные остаются в том же состоянии и энергию при повышении температуры не поглощают. Таким образом, в процессе нагревания принимает участие незначительная доля электронов, пропорциональная $kT / E_F(0)$. Значит,



$$C_{эл} \approx C_{класс} \frac{T}{T_F}, \text{ так как } T_F \approx 50000 \text{ К.}$$

Для точного вычисления теплоемкости надо найти полную энергию электронного газа

$$E_{\Sigma} = \int_0^{E_F} E d\nu_E = \int_0^{E_F} E g(E) dE. \text{ Это требует вычисления интеграла } \int_0^{\infty} \frac{E^{3/2} dE}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}. \text{ Применяя}$$

разложение в ряд по kT / E_F и произведя вычисления, можно прийти к результату

$$c_v = \frac{\partial E_{\Sigma}}{\partial T} = \frac{\pi^2 kn}{2} \frac{kT}{E_F(0)}$$

Сравним это выражение с классическим результатом для идеального газа $c_v^{кл} = 3nk/2$:

$$c_v / c_v^{кл} = \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{E_F(0)} = \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{T_F}.$$

При комнатных температурах это отношение имеет порядок 10^{-2} . Этим объясняется тот факт, что свободные электроны не вносят вклад в теплоемкость металлов.

§83. Динамика электронов в периодической решетке.

Мы говорим о свободном или почти свободном движении электронов проводимости в металлах. Но ведь каждый электрон, даже оторвавшийся от атома, испытывает в металле колоссальные силы со стороны окружающих его электронов и ионов. Почему же, несмотря на эти силы, движение электронов в первом приближении происходит так, как если бы они были свободными?

Ответ на этот вопрос даёт квантовая механика.

Рассмотрим поведение электрона в периодическом поле.

Из соотношения неопределенностей следует, что, если электрон имеет определенный импульс $p = \hbar k$, т.е. определенный k , то его положение в кристалле абсолютно неопределенное. Но для изучения динамики электронов надо говорить о его скорости и ускорении. Для этого нужно, чтобы он был как-то локализован. Если $\Delta k \neq 0$, то $\Delta x \approx \hbar / \Delta k$. Значит, электрон представляет собой пакет волн с k в некотором диапазоне.

Максимум амплитуды результирующей волны движется с групповой скоростью $v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$.

Наиболее вероятное местонахождение электрона соответствует максимуму волновой функции. Поэтому электрон движется со скоростью v_{gp} .

$$\text{Поскольку } E = \hbar\omega, \text{ то } v_{gp} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk}.$$

Как будет вести себя электрон, если на него, кроме периодического поля решетки, действует постоянная сила F ?

$$\text{Сила равна } F = \frac{dp}{dt} = \hbar \frac{dk}{dt}.$$

Найдем ускорение электрона

$$\frac{dv_{gp}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left(\frac{dE}{dk} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{dk}{dt} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} F = \frac{F}{m^*}$$

Полученный результат не тривиален, ведь ускорение должно было бы быть пропорционально суммарной силе $F + F_{\text{период}}$.

Мы ввели понятие эффективной массы электрона в кристалле $m^* = \frac{\hbar^2}{d^2 E / dk^2}$. Она определяется из зависимости энергии от импульса и, вообще говоря, не равна его обычной массе m . Например, для бериллия отношение m^* / m равно 1,6, для натрия – 1,2, а в случае меди $m^* = m$. Введение эффективной массы позволяет рассматривать движение электронов в кристалле, считая его свободным.

Вывод: воздействие периодической решетки на электрон учитывается путем замены в уравнении движения массы m на эффективную массу m^* .

Важное следствие: при отсутствии силы F электрон не меняет свою скорость, т.е. не передает энергию решетке. Иначе говоря, узлы строго периодической решетки не создают сопротивления электрическому току.

§84. Энергетические зоны в кристаллах.

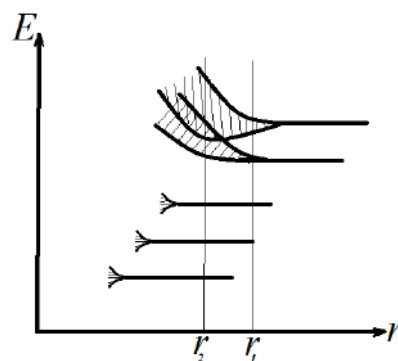
Как было показано в §82, в приближении свободных электронов энергия состояний меняется квазинепрерывно, т.е. спектр состоит из дискретных уровней, расположенных очень близко друг к другу.

В реальности валентные электроны в кристалле не вполне свободны - на них действует периодическое поле решетки. Это приводит к тому, что спектр распадается на ряд разрешенных и запрещенных зон. В разрешенных зонах энергия меняется квазинепрерывно.

Возникновение зон можно пояснить следующим образом. Энергия изолированного атома может принимать только определенные дискретные значения (рис.1а на стр.109). При объединении двух одинаковых атомов в молекулу принцип Паули запрещает электронам находиться в одном квантовом состоянии, т.е. каждый уровень энергии должен разбиться на два (рис.1б). При объединении одинаковых атомов в кристалл каждый уровень энергии атома превращается в целую зону, содержащую очень большое количество уровней, равное

числу атомов в кристалле. Расстояние между этими уровнями очень мало, поэтому можно считать возникшие зоны непрерывными.

Расщепление разных уровней не одинаково. Сильнее возмущаются состояния внешних электронов. На рисунке справа показано расщепление уровней атомов в кристалле в зависимости от среднего расстояния между атомами r .



В зависимости от свойств атомов расстояние между соседними атомами в кристалле может быть либо типа r_1 , либо типа r_2 . При r_2 соседние зоны перекрываются, при r_1 есть запрещенная зона.

Зная вид энергетических зон, можно понять, является ли данный кристалл проводником, диэлектриком или полупроводником.

Зона, возникшая из наивысшего уровня атома, на котором есть электроны, называется валентной зоной (ВЗ), а из следующего, т.е. первого свободного уровня атома, - зоной проводимости (ЗП). Согласно принципу Паули, при $T = 0$ электроны заполняют попарно все нижние уровни валентной зоны. Более высокие разрешенные зоны свободны.

Если на верхнем занятом уровне атома был только один электрон, то N таких электронов кристалла, расположившись по два на каждом из уровней, займут нижние $N/2$ из N уровней валентной зоны. Верхние $N/2$ уровней будут свободны. При помещении образца в электрическое поле электроны, находящиеся на верхних уровнях валентной зоны, могут ускоряться полем и увеличивать свою энергию, поднимаясь на более высокие уровни, т.е. кристалл является проводником.

Если на верхнем занятом уровне атома было два электрона, то валентная зона полностью заполнена. В этом случае тип получившегося кристалла, т.е. будет он проводником, полупроводником или диэлектриком, зависит от взаимного расположения валентной зоны и зоны проводимости.

Если они перекрываются (рис.1в), то имеем ситуацию, аналогичную только что рассмотренной. Верхние электроны могут увеличивать свою энергию, набирая скорость. Кристалл представляет собой проводник.

Если между зоной проводимости и валентной есть разрыв – так называемая запрещенная зона, то электрон не может двигаться в электрическом поле, так как при движении он увеличил бы свою энергию, а соответствующие уровни энергии отсутствуют. Кристалл является диэлектриком (рис.1г).

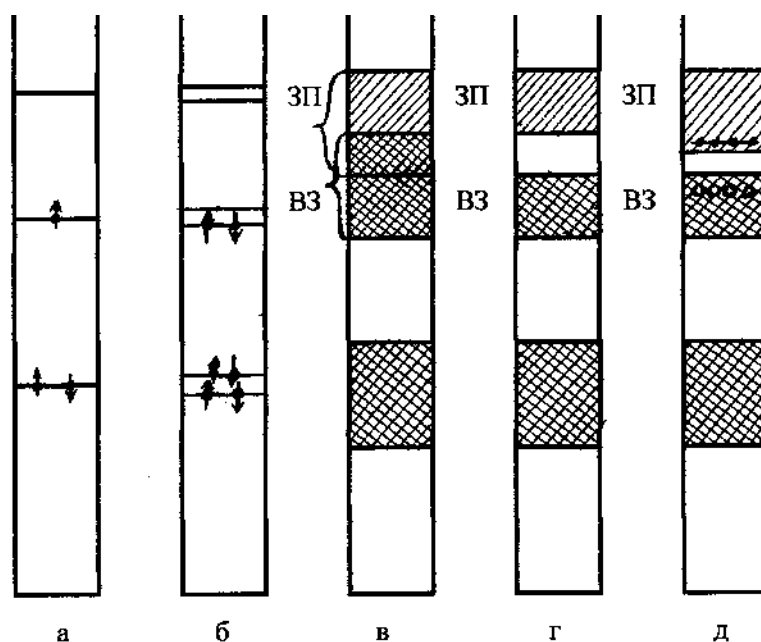


Рис.1. Энергетические структуры атомов и кристаллов.

Одинарная штриховка – свободные состояния, двойная – занятые электронами.
Точки – электроны, кружки – дырки. Стрелки соответствуют направлениям спинов.

Полупроводники – это такие вещества, проводимость которых сильно зависит от внешних условий, в частности, от температуры. Случай полупроводника соответствует малой величине запрещенной зоны. Тогда при температуре абсолютного нуля образец является диэлектриком. Но при повышении температуры электроны перестают занимать только нижние разрешенные уровни. Размытие их распределения по энергии равно kT . Если величина kT сопоставима с шириной запрещенной зоны, то значительное количество электронов переходит с верхних уровней валентной зоны на нижние уровни зоны проводимости (рис.1д). При этом в валентной зоне образуются свободные места («дырки»), на которые могут переходить электроны с нижних уровней, освобождая при этом свои места, на которые могут прийти другие электроны снизу. Этот процесс можно описать как движение дырки вниз. Процесс перемещения дырки аналогичен движению пузырька в стакане лимонада, когда на самом деле движется вода, причем вниз, а мы видим движение пузырька вверх.

Дырки в валентной зоне и находящиеся в зоне проводимости электроны могут двигаться в электрическом поле, создавая электрический ток. Они двигаются в противоположных направлениях, так как знаки их зарядов разные. Поэтому суммарный ток равен сумме этих двух токов. При повышении температуры количество таких электронов (и, соответственно, дырок) сильно увеличивается, что приводит к резкому росту тока, т.е. уменьшению сопротивления.

Если свободный электрон встречается с дыркой, они рекомбинируют (соединяются). Это значит, что электрон занимает свободное место, соответствующее дырке, т.е. СВОБОДНЫЙ электрон и дырка одновременно исчезают. Итак, в полупроводнике идут одновременно два процесса: попарное рождение свободных электронов и дырок и рекомбинация, приводящая к их попарному исчезновению. Вероятность первого процесса быстро растет с температурой, а вероятность рекомбинации пропорциональна как числу свободных электронов, так и числу дырок. Следовательно, каждой температуре соответствует определенная равновесная концентрация электронов и дырок, резко увеличивающаяся с ростом температуры.

Глава 3. Электропроводность твердых тел.

§85. Электропроводность металлов. Теории Друде и Зоммерфельда.

Модель Друде.

Классическую теорию электропроводности металлов создал Друде (1900-1905), а потом усовершенствовал датский физик Людвиг Лоренц (это не голландец Хендрик Антон Лоренц, который предложил преобразования Лоренца в СТО).

Друде считал электроны в металле идеальным газом. Между соударениями они движутся свободно. Длина свободного пробега λ . Но, в отличие от молекул идеального газа, они сталкиваются в основном с узлами решетки. В результате этих столкновений устанавливается тепловое равновесие между электронами и узлами решетки, т.е. их температуры одинаковы. При приложении электрического поля на это хаотическое движение накладывается упорядоченное со средней скоростью $\langle u \rangle$, так что плотность тока равна $j = ne\langle u \rangle$.

Друде считал, что электроны приходят в состояние теплового равновесия со своим окружением исключительно благодаря столкновениям с узлами, причем столкновения поддерживают локальное термодинамическое равновесие чрезвычайно простым способом: скорость электрона сразу же после столкновения не связана с его скоростью до столкновения, а направлена случайным образом. Это значит, что сразу после столкновения скорость упорядоченного движения $u = 0$, т.е. электрон при столкновении отдает всю «набранную» между столкновениями энергию. После этого под действием однородного поля

\vec{E} он приобретает ускорение eE/m и к концу пробега набирает скорость $u_{\max} = \frac{eE}{m} \tau$, где

τ - среднее время между столкновениями. Друде не учитывал распределение электронов по скоростям и всем приписывал одинаковую скорость v . Тогда $\tau = \lambda/v$, $u_{\max} = \frac{eE\lambda}{mv}$,

$\langle u \rangle = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{eE\lambda}{2mv}$, $j = ne\langle u \rangle = \frac{ne^2 E\lambda}{2mv}$. Тогда из дифференциального закона Ома $j = \sigma E$

получим удельную проводимость $\sigma = \frac{ne^2 \lambda}{2mv}$.

Таким образом, по классическим представлениям сопротивление обусловлено столкновениями свободных электронов с узлами решетки. К концу своего пробега электрон имеет дополнительно набранную кинетическую энергию $\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{mu_{\max}^2}{2}$, и всю ее он отдает

кристаллу. За 1 секунду электрон испытывает $\frac{1}{\tau} = \frac{v}{\lambda}$ соударений, и в единице объема

кристалла выделяется теплота $Q = n\langle \varepsilon_k \rangle \frac{1}{\tau} = \frac{ne^2 \lambda}{2mv} E^2$. Так как E пропорционально j , то

получаем дифференциальный закон Джоуля-Ленца: $Q = \sigma E^2 = \sigma \cdot (j/\sigma)^2 = j^2 / \sigma = \rho j^2$.

Теория Друде объясняет и закон, открытый в 1853 году немецкими учёными Видеманом и Францем. Они экспериментально установили, что для различных металлов при одинаковой температуре отношение коэффициента теплопроводности κ к удельной электрической проводимости σ практически одно и то же. Пропорциональность этого отношения термодинамической температуре была установлена Людвигом Лоренцем в 1882 году: $\kappa/\sigma = LT$. Коэффициент L носит название числа Лоренца.

Взаимная связь электрической проводимости и теплопроводности объясняется тем, что оба эти свойства металлов в основном обусловлены движением свободных электронов. Теплопроводность кристалла равна сумме теплопроводностей электронного газа и решетки. Опыт и теория показывают, что в металлах электронный вклад много больше решеточного (в диэлектриках только решеточная). Поэтому теплопередача в металлах обеспечивается электронами, так же как и электропроводность.

Вычисляя коэффициент теплопроводности по формуле для идеального газа

$\kappa = \frac{1}{3} n m \lambda c_v$, и считая, что в случае электронов $c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M} = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$, то из теории Друде

следует

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{nk v \lambda 2mv}{2ne^2 \lambda} = \frac{kmv^2}{e^2} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T \quad \text{не зависит от металла.}$$

Казалось бы, получили и закон Ома, и закон Джоуля-Ленца, и закон Видемана-Франца. Но есть и явные несогласия с опытом.

1) По теории Друде сопротивление $\rho = 1/\sigma$ возрастает пропорционально скорости теплового движения, т.е. пропорционально \sqrt{T} , а на опыте пропорционально T .

2) Электронный газ по теории должен обладать $C_v = 3R/2$. Добавив это к теплоемкости решетки $3R$, получим $4,5R$, т.е. в 1,5 раза больше, чем у диэлектриков. А на самом деле они одинаковы и равны примерно $3R$.

3) Средняя длина свободного пробега электрона оказывается на несколько порядков больше, чем шаг кристаллической решетки. Объяснение этому даётся в квантовой теории, где показывается, что в идеальном кристалле при нулевой температуре на узлах электрон не рассеивается вообще, но в реальном кристалле он рассеивается на примесях, дефектах и фононах, возмущениях кристаллической решетки.

4) Рост сопротивления металлов с температурой не может быть объяснен увеличением амплитуды колебаний узлов решетки (именно такое объяснение обычно приводится в школьном курсе). Дело в том, что при одной и той же температуре скорости электронов (по классической теории) во много раз больше, чем скорости узлов, поскольку узлы имеют во много раз большую массу. Поэтому при пролете электрона мимо узла можно считать узел покоящимся (хотя, возможно, и смещенным от положения равновесия). Вероятность столкновения электрона с узлом остается той же, что при нахождении узла в положении равновесия.

Модель Зоммерфельда.

В 1928 г. Зоммерфельд заново рассмотрел модель Друде, заменив всюду классическое распределение по скоростям Максвелла квантовым распределением Ферми – Дирака. Согласно статистике Ферми, средняя кинетическая энергия электронов $mv^2/2$ в металле

равна $\frac{3}{5}E_F = \frac{3\hbar^2}{10m}(3\pi^2n)^{2/3}$ (§82). Выразив отсюда значение v и внося его в полученную

еще Друде формулу $\sigma = \frac{e^2 n \lambda}{2m v}$, получим:

$$\sigma = \sqrt{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{e^2 n^{2/3} \lambda}{2\pi \hbar}.$$

Таким образом, изменение электропроводности с температурой определяется, в сущности, только температурной зависимостью длины свободного пробега электрона λ (ибо концентрация электронов n от T почти не зависит). Зависимость $\lambda(T)$ может быть вычислена на основе квантовой механики (причем определяющее влияние на результат

вычислений оказывает волновая природа электронов) и приводит к правильному температурному ходу кривой электропроводности.

Используя статистику Ферми-Дирака, Зоммерфельд также получил выражение для

теплоемкости единицы объема электронного газа $c_v = \frac{\pi^2}{2} \frac{kT}{E_F(0)} nk$, где $E_F(0)$ – энергия

Ферми, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, n – концентрация свободных электронов. При комнатной температуре эта теплоёмкость в 100 раз меньше значения $3nk/2$, даваемого теорией Друде. Это позволило объяснить, почему теплоемкость электронного газа не влияет на теплоемкость кристалла. Причина этого лежит в распределении Ферми-Дирака (§81). При увеличении температуры изменяют свою энергию только электроны около уровня Ферми в слое шириной kT . Остальные остаются в том же состоянии и энергию при повышении температуры не поглощают. Таким образом, в процессе нагревания принимает участие незначительная доля электронов, пропорциональная kT/E_F .

На базе полученных формул Зоммерфельд рассчитал новое значение числа Лоренца

$L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e}\right)^2$ (вместо $L = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2$ по теории Друде) в законе Видемана-Франца $\kappa/\sigma = LT$.

При комнатной температуре наблюдаемые значения L хорошо согласуются с теоретическими. Однако имеются металлы (например, Ве), которые и при комнатной температуре закону Видемана-Франца не подчиняются.

Модель Зоммерфельда представляет собой модель классического электронного газа Друде с единственным отличием: распределение электронов по скоростям описывается распределением Ферми-Дирака, а не Максвелла-Больцмана. Она позволила объяснить отсутствие заметного вклада электронного газа в теплоёмкость металла.

Теории Друде и Зоммерфельда приводят к различным результатам и при объяснении других эффектов, обусловленных наличием разброса электронов по энергиям. Теория Зоммерфельда даёт для этих эффектов согласующиеся с экспериментом величины, которые в E_F/kT или $(E_F/kT)^2$ раз меньше, чем в теории Друде. Однако эта теория не может объяснить эффекты, обусловленные сложной формой ферми-поверхности и зонной структурой энергетического спектра металлов. Как и теория Друде, она пренебрегает взаимодействием электронов друг с другом, а их взаимодействие с кристаллической решёткой сводит лишь к соударениям, при которых импульс электрона меняется скачком. Для решительного ее улучшения потребовалось заменить примитивное представление о

соударении электронов с ионами решетки на электрон-фононное взаимодействие. Тем не менее, вследствие своей простоты теория Зоммерфельда оказывается удобной для численных оценок и качественного объяснения электронных свойств металлов.

§86. Электропроводность полупроводников.

У полупроводников электропроводность возникает при $T \neq 0$ в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в свободную зону. При этом в валентной зоне освобождается такое же количество состояний на верхних уровнях – дырок. Пока внешнего поля нет, электроны и дырки движутся хаотично. При включении электрического поля на хаотичное движение накладывается упорядоченное: электроны движутся против поля, дырки – по полю. Суммарная проводимость $\sigma = \sigma_e + \sigma_p$.

Распределение электронов по энергии в свободной и валентной зонах описывается функцией Ферми-Дирака

$$f(E) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT} + 1}.$$

Графически это показано на рис.1. Расчет показывает, что уровень Ферми определяется

формулой $\varepsilon_F \approx \frac{\Delta E}{2} + \frac{3}{4}kT \ln \frac{m_p^*}{m_e^*} \approx \frac{\Delta E}{2}$, т.е. расположен посередине запрещенной зоны.

Уровни свободной зоны, занятые электронами, находятся на «хвосте» распределения $f(\varepsilon)$. Это означает, что $\varepsilon - \varepsilon_F \approx \Delta E / 2$. Поскольку $\Delta E \gg kT$, то вероятность $f(\varepsilon)$ заполнения уровней можно записать как $f(\varepsilon) \sim e^{-\Delta E/2kT}$. Число электронов, перешедших в свободную зону, а значит, и число образовавшихся дырок, будет пропорционально $f(\varepsilon)$. Эти электроны и дырки и являются носителями тока. Электропроводность σ пропорциональна числу носителей, т.е. $\sigma = \sigma_e + \sigma_p \sim e^{-\Delta E/2kT}$. Отсюда следует, что электропроводность полупроводников быстро растет с ростом температуры. Построив график зависимости $\ln \sigma = f(1/T)$, по наклону прямой можно найти ширину запрещенной зоны ΔE .

Типичными полупроводниками являются германий и кремний.

Описанная ситуация, когда количество дырок в точности равно количеству электронов проводимости, имеет место в так называемых «собственных» полупроводниках. В технике чаще используются примесные полупроводники n- и p- типов. В примесных

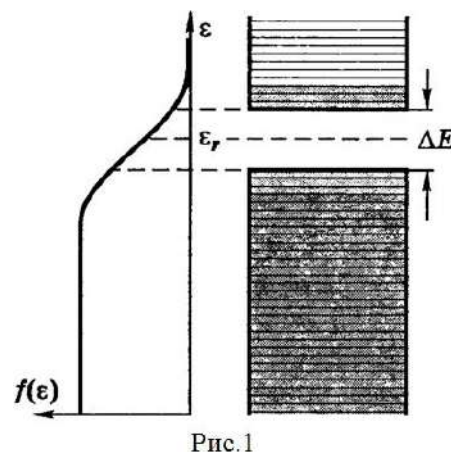
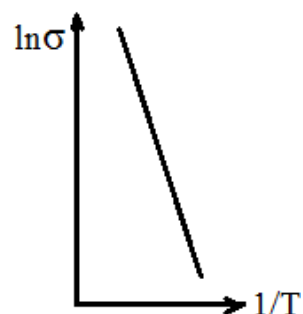


Рис.1



полупроводниках основной кристалл имеет широкую запрещенную зону, т.е. является диэлектриком, но в него введено определенное количество донорной (для n-типа) или акцепторной (для p-типа) примеси, т.е. атомов, имеющих уровень, находящийся внутри запрещенной зоны основного кристалла.

В полупроводниках n-типа этот уровень расположен вблизи дна зоны проводимости (рис.2а). Электроны с этого уровня переходят в зону проводимости и обеспечивают электропроводность, сильно зависящую от температуры. При этом дырки не образуются, так как электроны из валентной зоны отделены от донорного уровня широкой запрещенной зоной и не могут занять освободившееся в нем место. «Донорные» значит «отдающие» свои электроны.

В полупроводниках p-типа уровень атома примеси расположен в запрещенной зоне вблизи верха валентной зоны (рис.2б). Электроны с верхних уровней валентной зоны переходят на примесный уровень, образуя дырки, обеспечивающие электропроводность. При этом электроны проводимости отсутствуют, так как примесный уровень отделен от дна зоны проводимости широкой запрещенной зоной. «Акцепторные» значит «принимающие» чужие электроны.

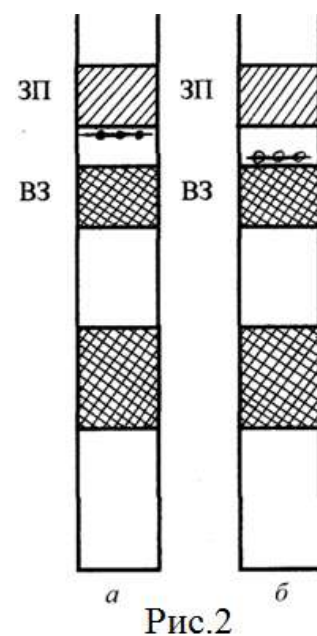


Рис.2

Таким образом, основными носителями тока в полупроводниках n-типа являются отрицательно заряженные электроны проводимости, так как их концентрация во много раз больше концентрации дырок. В полупроводниках p-типа основные носители – дырки. Само название полупроводники n-типа получили от слова "negative" (отрицательный) по знаку заряда, а p-типа - от слова "positive" (положительный).

Примесная проводимость возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменены в узлах кристаллической решетки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов.

На рис.3 условно изображена решетка германия (валентность 4) с примесью 5-валентных атомов фосфора. Для образования ковалентных связей с соседями атому фосфора достаточно 4-х электронов. Следовательно, пятый валентный электрон оказывается лишним и легко отщепляется от атома за счет энергии теплового движения, образуя странствующий свободный электрон, причем это не сопровождается образованием дырки.

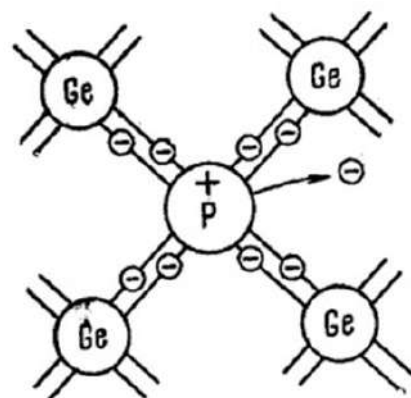


Рис.3

На рис.4 условно изображена решетка кремния (валентность 4) с примесью 3-валентных атомов бора. Для образования связей с 4-мя соседями атому бора недостаточно трех электронов. Поэтому одна из связей остается неупакованной и будет являться местом, способным захватить электрон. При переходе на это место электрона одной из соседних пар образуется дырка, способная перемещаться по кристаллу.

С повышением температуры концентрация примесных носителей тока быстро достигает насыщения. Это означает, что практически освобождаются все донорные или заполняются электронами все акцепторные уровни. Вместе с тем по мере роста температуры всё больше сказывается собственная проводимость полупроводника,

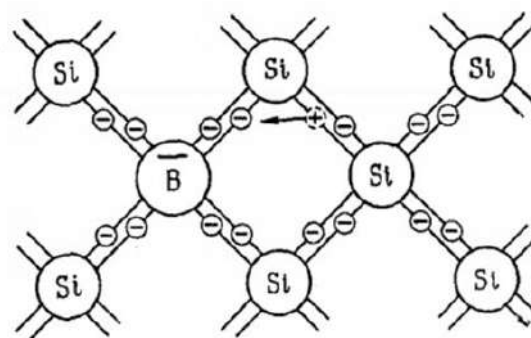


Рис.4

обусловленная переходом электронов прямо в зону проводимости. Поэтому при низких температурах преобладает примесная проводимость, а при высоких – собственная.

Как отличить проводник от полупроводника? Простое сравнение величин сопротивлений не даст ответа на этот вопрос: плохой проводник может иметь такое же R , как хороший полупроводник. Различие в характере зависимости R от температуры. У металла сопротивление ЛИНЕЙНО, т.е. не очень резко, РАСТЕТ с температурой, поскольку при этом увеличивается число фононов, которым электроны отдают свою энергию. У полупроводников сопротивление ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО, т.е. очень резко, УМЕНЬШАЕТСЯ с ростом температуры, так как резко увеличивается число носителей тока - электронов или дырок.

Глава 4. Сверхпроводники.

§87. Отсутствие электрического сопротивления

В 1908 году голландскому физикау Гайке Камерлинг-Оннесу удалось оживить последний инертный газ – гелий. Это открыло ему возможность исследования свойств веществ в области температур вблизи абсолютного нуля. Наиболее интересные результаты были получены при исследовании электрического сопротивления.

В то время в представлениях о механизме электропроводности имелось много пробелов. Правда, было известно, что перенос заряда обусловлен движением электронов. Были измерены температурные зависимости электрического сопротивления многих металлов. Было установлено, что при комнатных температурах сопротивление прямо пропорционально температуре. Удалось также установить, что при более низких температурах сопротивление падает все медленнее. В принципе можно было предполагать три возможных варианта:

1. При уменьшении температуры сопротивление плавно снижается до нуля (рис.1, кривая 1).

2. Сопротивление стремится к какому-то конечному значению (рис.1, кривая 2).

3. Сопротивление проходит через минимум и при очень низких температурах становится бесконечным (рис.1, кривая 3).

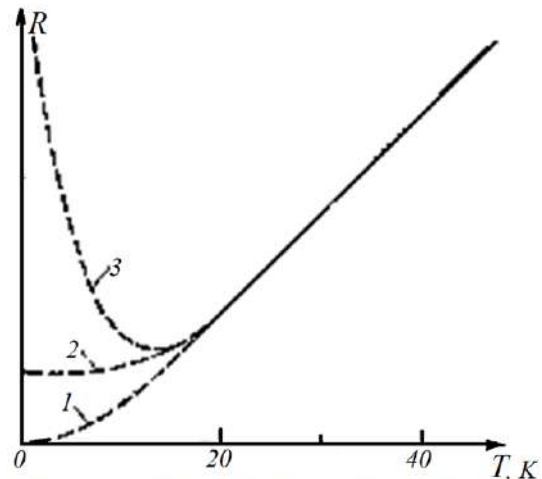


Рис.1. Температурная зависимость сопротивления.

На первый вариант наталкивало наблюдаемое на опыте быстрое снижение сопротивления с охлаждением. Третий вариант соответствовал представлению, согласно которому при низких температурах все электроны должны были закрепиться вблизи своих атомов и перестать быть свободными. Второй вариант находил свое подтверждение в опытах Оннеса на различных образцах платины и золота, именно эти металлы в то время имелись в достаточно чистом виде. При приближении температуры к абсолютному нулю сопротивление стремилось к так называемому остаточному значению, величина которого зависела от чистоты образца.

Однако в 1911 году при исследованиях на ртути (ее можно было получить в еще более чистом виде) он обнаружил, что наблюдаемый эффект не имеет ничего общего с постепенным понижением сопротивления с температурой – изменение было скачкообразным (рис.2). Сам Оннес указал, что ртуть перешла в новое состояние и назвал его сверхпроводящим. О том, какое значение придавалось этому открытию, свидетельствует то, что уже в 1913 году Камерлинг Оннесу была присуждена нобелевская премия по физике.

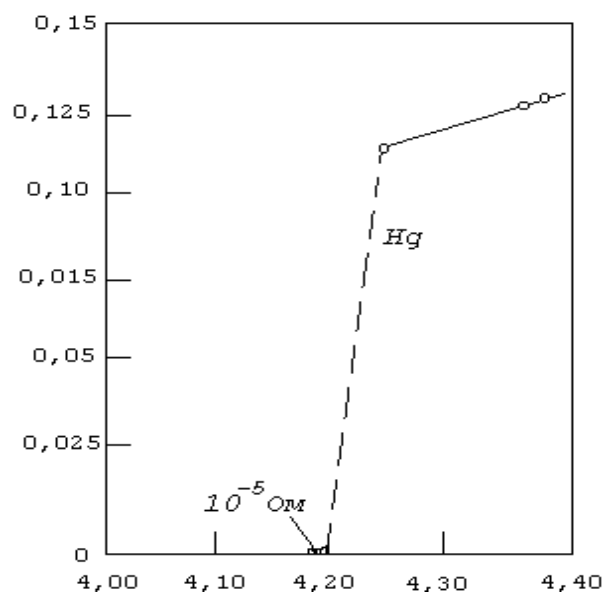


Рис.2. Сверхпроводимость ртути

При взгляде на рис.2 возникает естественный вопрос: какова величина скачка сопротивления, иначе говоря, насколько правомерно говорить об исчезновении электрического сопротивления?

Для ответа на этот вопрос нужно было найти достаточно точный метод измерения сопротивления. В первых опытах измерения проводились на основе закона Ома. При этом можно было установить только тот факт, что сопротивление при скачке уменьшалось более, чем в тысячу раз, и становилось ниже предела чувствительности. Уже в 1914 году Оннес применил для измерения крайне малых значений сопротивления самый лучший метод: он измерял затухание тока в сверхпроводящем кольце. Если сопротивление существует, то из-за джоулевых потерь ток должен убывать со временем.

Ток в кольце можно создать так. Поместим кольцо из сверхпроводящего материала, например, свинца, находящееся в нормальном состоянии, т.е. при температуре выше температуры перехода T_c , в магнитное поле. Затем охладим кольцо до температуры, при которой оно становится сверхпроводящим, и выключим поле. По закону электромагнитной индукции в кольце возникнет индукционный ток. По скорости его затухания можно судить о величине сопротивления. Падение тока за 1 час на 1% соответствовало бы падению сопротивления при переходе в сверхпроводящее состояние на 8 порядков. К настоящему времени есть эксперименты, в которых не наблюдается изменений тока на протяжении десятилетий, что соответствует падению сопротивления не менее чем на 15 порядков. Все эти данные позволяют с полным правом считать, что в сверхпроводящем состоянии электрическое сопротивление действительно исчезает.

Уже вскоре после открытия сверхпроводимости у ртути Оннесу удалось показать, что и другие металлы могут переходить в сверхпроводящее состояние. Температура перехода у них у всех оказалась очень низкой – несколько Кельвин. В течение десятилетий велись поиски материалов с более высокими температурами перехода. Оказалось, что многие металлы, а также полупроводники и сплавы обладают сверхпроводящими свойствами. Однако максимальная достигнутая критическая температура оказалась равной всего лишь 23 К - у сплава Nb_3Ge .

Сразу после открытия явления начались его теоретические исследования. Предлагались различные математические подходы, позволяющие рассчитать распределения токов, конфигурации магнитных полей и т.д. Но микроскопическая теория, объясняющая саму природу явления сверхпроводимости была создана лишь через 46 лет после открытия. В 1957 году Бардин, Купер и Шриффер показали, что при температурах ниже критической электроны проводимости связываются в пары, и объяснили природу этого связывания.

После создания теории БКШ, когда стали понятны физические процессы, ответственные за сверхпроводимость, начались эксперименты в области искусственного создания материалов с высокой температурой перехода. Создавались вещества со сложной структурой – состоящие из плоскостей, одномерных нитевых структур и т.д. Но прогресса достигнуть не удавалось, хотя проблема высокотемпературной сверхпроводимости, наряду с созданием термоядерных реакторов, считалась важной прикладной задачей современной физики. Рекорд оставался у сплава Nb₃Ge - 23 К.

И вот в 1986 году, когда ученые уже начали терять веру в то, что высокотемпературная сверхпроводимость может существовать, появилась статья Беднорца и Мюллера об обнаружении сверхпроводимости в новом классе веществ – медьсодержащих керамиках – при температуре 35 К! Это был прорыв, скачок критической температуры в 1,5 раза после десятилетий топтания на месте, когда продвижение на 0,1 К считалось открытием. Началось бурное исследование нового класса веществ. Каждый месяц, каждая неделя приносили новые результаты: 40 К, 60 К, 90 К, 100 К. На настоящий момент рекордная достоверная критическая температура равна 135 К. Самый распространенный керамический сверхпроводник – это $YBa_2Cu_3O_7$, имеющий $T_c = 92$ К.

Можно спросить, какая же это высокотемпературная сверхпроводимость (ВТСП), если температуры находятся в области минус 150 – 180°С? Ведь все равно для существования сверхпроводимости материалы нужно сильно охлаждать. Разница в том, что ранее охлаждение до нужных температур можно было осуществить только при помощи гелия, поскольку только он оставался жидким в требуемом диапазоне температур. А гелий весьма дорог и его количества в природе не очень велики. При температурах же выше 77 К, т.е. температуры кипения азота, для охлаждения можно использовать жидкий азот, которого в природе много (вспомним состав воздуха), поэтому он весьма дешев.

Все керамические ВТСП состоят из гранул, разделенных диэлектриком.

За прошедших 35 лет было проведено огромное количество исследований, но теория ВТСП еще не создана, что связано со сложностью их кристаллической структуры.

В настоящее время ученые интенсивно изучают сверхпроводимость при очень высоких давлениях. Рекорд: супергидрид лантана (LaH₁₀) при давлении 190 ГПа - почти два миллиона атмосфер - переходит в сверхпроводящее состояние при температуре 260 К (-13 °С). Супергидриды могут существовать только при таких высоких давлениях, атомы водорода давлением загоняются внутрь твердых веществ. Конечно, практическое применение при таких давлениях невозможно, но эти исследования расширяют наши знания о сверхпроводниках и, будем надеяться, приведут к созданию ВТСП при комнатных температурах.

§88. Теория сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера (БКШ).

Эта теория базируется на эффекте группирования электронов в пары, открытом Л.Купером в 1956 году. Купер рассмотрел задачу о поведении двух электронов при существовании притяжения между ними. При этом считалось, что остальные электроны образуют основное состояние, т.е., как в нормальном металле, в соответствии с принципом Паули заполняют всю сферу Ферми.

Расчет показал, что в этом случае поведение двух взаимодействующих электронов резко отличается от поведения этих электронов, если они изолированы от остальных. При наличии заполненной сферы Ферми при любом, сколь угодно малом притяжении эти два электрона образуют связанное состояние, которое имеет меньшую энергию и отделено от основного состояния нормального металла энергетической щелью. Оказалось, что наименьшей энергией (т.е. максимальной щелью) связанная пара обладает в том случае, когда составляющие ее электроны имеют антипараллельные спины и равные, но противоположно направленные импульсы.

Таким образом, для объяснения группирования электронов в пары надо найти возможную причину притяжения между электронами. Теоретический анализ показал, что это притяжение может осуществляться за счет взаимодействия электронов с кристаллической решеткой. Такое взаимодействие можно наглядно представить следующим образом. В узлах решетки находятся положительно заряженные ионы. Электрон стремится притянуть их к себе. Таким образом, в окружающей электрон области происходит поляризация решетки, выражающаяся в скоплении положительных зарядов. Второй электрон, находящийся неподалеку, притягивается к этому скоплению, т.е. к первому электрону. Если рассматривать картину в динамике, то можно сказать, что один электрон при движении создает канавку, по которой выгодно двигаться второму электрону. Отсюда ясно, почему наиболее явно эффект проявляется для встречно движущихся электронов - каждый из них идет по следу, оставленному другим (представьте себе самолет, оставляющий след в небе). Электрон уже улетел, а положительно заряженное уплотнение решетки осталось и притягивает к себе другой электрон.

Не надо думать, что образовалась некая частица из двух электронов, как, например, атом водорода. Между электронами пары расстояние порядка 10^{-4} см (они не составляют единую частицу). Это чисто квантовое явление.

Бардин, Купер и Шриффер обобщили результаты Купера на случай, когда все электроны связаны в пары. Тогда каждый электрон играет двоякую роль. С одной стороны, в силу принципа Паули он создает ограничения на разрешенные значения волновых векторов

других электронов, что дает им возможность группироваться в пары, несмотря на слабость притяжения. С другой стороны, этот электрон сам входит в состав одной из пар.

В чем же причина сверхпроводимости? Почему сопротивление равно нулю? При $T < T_c$ электроны группируются в пары, а пары имеют спин 0 или 1, т.е. являются бозонами. В §80 показано, что в бозонном газе при $T < T_0$ происходит «конденсация» Бозе-Эйнштейна, т.е. пары накапливаются на наинизшем по энергии уровне. Температура T_0 для частиц с массой порядка массы электрона равна десяткам тысяч градусов. Критические температуры T_c равны десяткам градусов, поэтому конденсат содержит большое число куперовских пар. Все они находятся в одном квантовом состоянии. Рассеянию частицы, принадлежащей конденсату, препятствуют другие частицы бозе-конденсата. Поэтому течение бозе-конденсата происходит без сопротивления. Таким образом, сверхпроводящий ток – это поток куперовских пар.

В теории БКШ взаимодействие электронов рассматривается как обмен фононами, но фононы не могут объяснить критические температуры выше 30 К. Для построения теории ВТСП нужно искать другие частицы: экситоны, поляроны, биполярны, магноны и т.д.

§89. Выталкивание магнитного поля из сверхпроводников

Магнитные свойства сверхпроводников столь же нетривиальны, как и электрические. В 1933 году Мейсснер и Оксенфельд обнаружили, что сверхпроводник в магнитном поле ведет себя как идеальный диамагнетик, внутри которого магнитная индукция равна нулю. Иными словами, магнитное поле выталкивается из объема сверхпроводника. Это происходит за счет возникновения поверхностных экранирующих токов, которые своим магнитным полем полностью компенсируют внешнее поле во всем объеме образца. Поскольку сопротивление сверхпроводника равно нулю, то эти токи являются незатухающими. Это явление получило название эффекта Мейсснера.

На первый взгляд может показаться, что идеальный диамагнетизм сверхпроводников является следствием их нулевого сопротивления. Действительно, если сверхпроводник внести в магнитное поле, то в результате электромагнитной индукции возникнут индукционные токи, которые при отсутствии сопротивления не затухают со временем и продолжают экранировать и в дальнейшем.

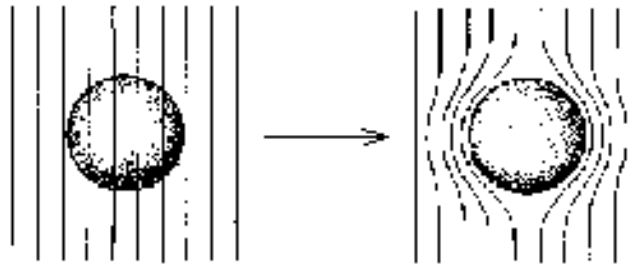


Рис.1. Эффект Мейсснера в сверхпроводящем шаре, охлаждаемом в постоянном внешнем магнитном поле

Однако такое объяснение возможно не всегда. Рассмотрим случай, когда образец внесен в магнитное поле при температуре выше критической, т.е. он еще не обладает сверхпроводящими свойствами. Тогда линии индукции пронизывают его, как это показано на рис.1а. Если теперь охладить образец ниже T_c , то в точке перехода линии индукции должны быть вытолкнуты из него (рис.1б). Этот очень важный результат не может быть получен просто из того факта, что сопротивление равно нулю. Поэтому идеальный диамагнетизм и отсутствие сопротивления являются двумя независимыми свойствами сверхпроводящего состояния.

Идеальный диамагнетизм сверхпроводника приводит к тому, что внутри его не может протекать электрический ток, так как он создавал бы внутри образца магнитное поле. Значит, токи, как экранирующие, так и созданные внешними источниками, должны протекать в тонком приповерхностном слое. Его толщина λ имеет порядок 10^{-5} - 10^{-6} см. В этом слое магнитное поле спадает от величины внешнего поля B на поверхности до нуля внутри.

При увеличении внешнего магнитного поля сверхпроводимость разрушается. Пороговое, или критическое, магнитное поле H_c , необходимое для разрушения сверхпроводимости, зависит от температуры. На рис.2 показана зависимость критического поля от температуры для некоторых сверхпроводников. При критической температуре T_c критическое поле H_c равно нулю. С убыванием температуры оно возрастает:

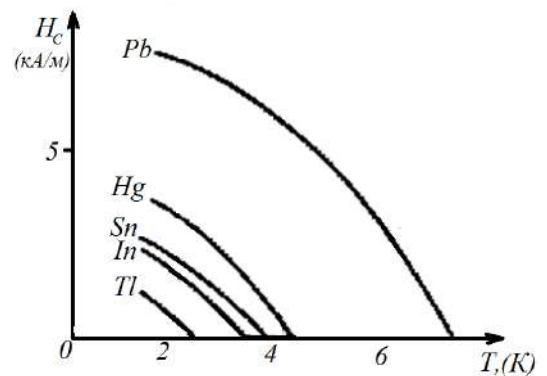


Рис.2

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right).$$

§90. Три вида сверхпроводников

С точки зрения поведения в магнитном поле сверхпроводники можно разделить на три основных типа. Различия в поведении в магнитном поле свидетельствуют о существенных различиях в физике микропроцессов, происходящих в образцах.

В сверхпроводниках первого рода мейсснеровское состояние, когда магнитное поле вытесняется из объема сверхпроводника и отлично от нуля только в тонком приповерхностном слое, имеет место вплоть до некоторого критического поля H_C . Если поле превышает это значение, образец переходит в нормальное состояние. Именно о таких сверхпроводниках шла речь в предыдущем параграфе. В первые годы после открытия сверхпроводимости ученые считали, что все сверхпроводники ведут себя именно так. Но оказалось, что существуют сверхпроводники, ведущие себя иначе.

Далее мы будем говорить о цилиндрическом образце, помещенном в магнитное поле \vec{H}_e , параллельное оси цилиндра. В большинстве случаев ученые рассматривают именно такую ситуацию.

Сверхпроводники второго рода характеризуются следующими свойствами.

1. Эффект Мейсснера имеет место до значения H_{C1} , причем H_{C1} заметно меньше, чем H_C .

2. При $H_e > H_{C1}$ поле проникает в образец, но лишь частично. Такая ситуация имеет место для полей $H_{C1} < H_e < H_{C2}$. Поле H_{C2} больше, чем H_C и в некоторых случаях очень велико.

3. При $H_e > H_{C2}$ макроскопический образец вообще не вытесняет магнитное поле.

Однако даже в этом случае сверхпроводимость разрушается не полностью: в области полей

$H_{C2} < H_e < H_{C3}$ на поверхности цилиндра остается сверхпроводящая прослойка толщиной порядка долей микрона. Физическая причина наличия прослойки состоит в том, что небольшой сверхпроводящей области легче образоваться вблизи поверхности образца точно так же, как пузырьку воздуха легче образоваться на стенке стакана с лимонадом, чем в любой точке внутри. На

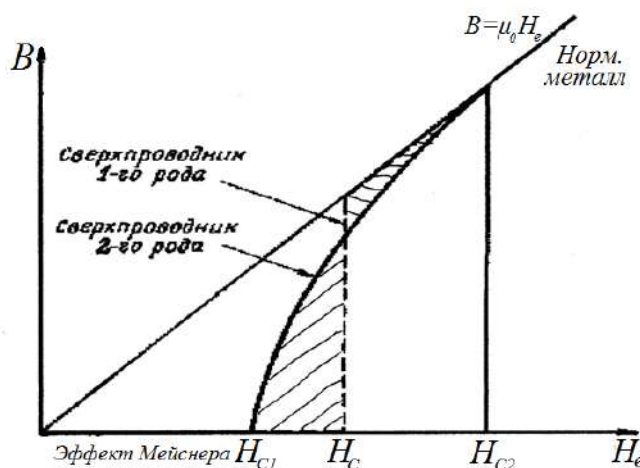
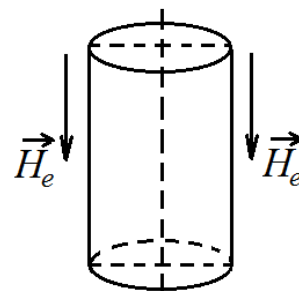


Рис.1

рис.1 изображены кривые зависимостей $B(H_e)$ для сверхпроводников I-го и II-го рода.

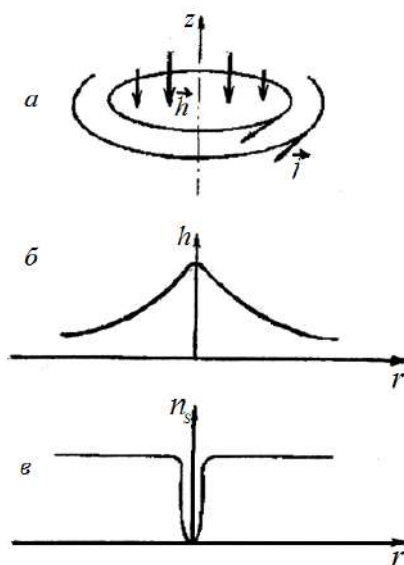


Рис.2. Структура изолированной вихревой нити:

a - конфигурация полей и токов, *б* - зависимость магнитного поля от расстояния до центра нити, *в* - изменение плотности куперовских пар в области остова нити.

Состояние сверхпроводников второго рода, когда внешнее поле лежит в интервале от H_{C1} до H_{C2} , называется смешанным. В этом состоянии в образце возникают так называемые абрикосовские вихри. Впервые такие структуры обсуждались Онсагером и Фейнманом в связи с явлением сверхтекучести гелия. В 1956 г. советский физик Абрикосов обобщил этот подход на случай сверхпроводимости, за что в 2003 г. получил нобелевскую премию. Эти нитевые структуры напоминают вихри, возникающие при вытекании воды из сосуда через небольшое отверстие (например, в ванне), но вещество не движется, движутся только электроны, точнее куперовские пары, т.е. вихрь – это токовая структура, похожая на ток в соленоиде. Область вблизи оси вихря находится практически в нормальном (не сверхпроводящем) состоянии (рис.2).

Между вихрями действуют силы отталкивания, в результате в образце устанавливается треугольная решетка вихрей (рис.3). В сверхпроводниках 2-го рода вихри могут двигаться свободно, поэтому решетка вихрей устанавливается во всем сечении образца. По мере роста поля эта решетка становится все более плотной. При уменьшении поля часть вихрей свободно покидает образец, и решетка становится более разреженной.

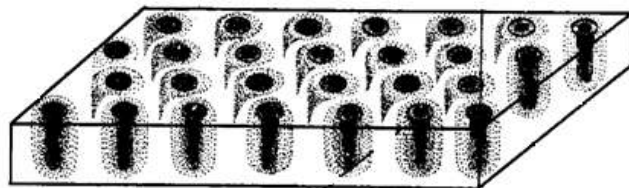


Рис.3

В сверхпроводниках III-го рода, или, как их иначе называют, жестких сверхпроводниках II-го рода, в кристалле имеется большое количество дефектов. При уменьшении поля вихри зацепляются за эти дефекты (это называется пиннингом) и не могут сразу заполнить все сечение образца, они возникают сначала возле поверхности и с ростом поля постепенно продвигаются внутрь. При уменьшении поля зацепившиеся за дефекты вихри не могут свободно покинуть образец. Поэтому кривая намагничивания имеет гистерезисный вид (рис.4).

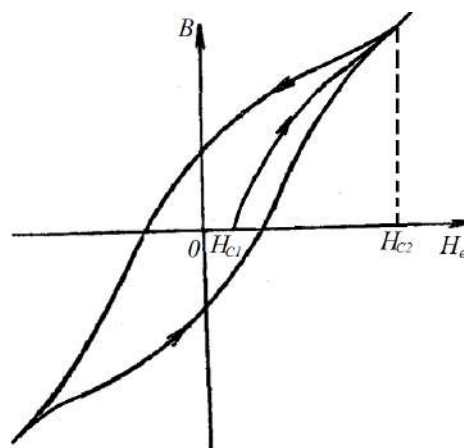


Рис.4

При снижении внешнего поля до нуля в образце остается какое-то количество вихрей. Именно такие сверхпроводники имеют практическую ценность. В сверхпроводниках 2-го рода пиннинг отсутствует, поэтому при протекании тока вихри под действием сил Лоренца приходят в движение, что приводит к выделению тепла, т.е. токи становятся затухающими. В сверхпроводниках 3-го рода вихри не движутся, и потеря энергии нет.

§91. Критические токи в сверхпроводниках

Для успешного применения сверхпроводников важно не только добиться максимальной критической температуры. Нужно, чтобы в образце могли протекать достаточно большие токи. При слабых токах образец находится в мейсснеровской фазе, т.е. поле внутри образца равно нулю. Отсюда следует, что ток внутри образца протекать не может, так как он создавал бы внутри сверхпроводника магнитное поле. Значит, ток протекает только в тонком приповерхностном слое, в который может проникать магнитное поле. Эти токи, в отличие от экранирующих, будем называть транспортными.

Сверхпроводники 1 –го рода.

Как только поле, созданное транспортным током, в какой-то точке на границе достигает своего критического значения H_C , образец разбивается на нормальные и сверхпроводящие области, форма которых определяется формой образца и конфигурацией поля.

Например, в простейшем случае протекания тока по проволоке круглого сечения теория и опыт дают следующие результаты. Как только ток достигает величины H_C , проволока скачком переходит в состояние, при котором сверхпроводящие ячейки (не заштрихованные на рис.1) доходят до ее поверхности. При дальнейшем увеличении тока в проволоке возникает как бы оболочка из нормальной фазы, охватывающая сверхпроводящую сердцевину; с ростом тока толщина этой оболочки увеличивается, а сверхпроводящие области в сердцевине сжимаются.

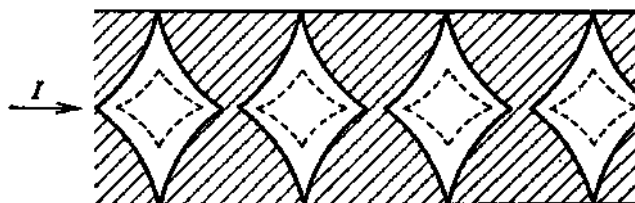


Рис.1. Структура состояния проволоки круглого сечения с транспортным током. Нормальные области заштрихованы.

Сверхпроводники 2 –го рода

Когда на поверхности магнитное поле выше H_{c1} , образец переходит в смешанное состояние, т.е. в него проникают вихри тороидальной формы (вдоль линий магнитной индукции). Эти вихри начинают сами по себе сжиматься (уменьшать свой радиус) и исчезать на оси провода. При этом часть энергии вихря переходит в тепло, и транспортный ток перестает быть незатухающим.

А в сверхпроводниках 3-го рода движению вихрей препятствует пиннинг на дефектах решетки. Поэтому переход энергии в тепло не происходит.

Отметим ещё одну проблему, которую приходится решать на практике: высокотемпературные сверхпроводники – это керамические соединения: они хрупкие, их нельзя спаять или изготовить из них длинный гибкий провод. Оценим удобство работы с привычными металлическими проводами: они не рвутся, не ломаются, их можно паять, изгибать и переплетать произвольным образом. С ВТСП это невозможно. Поэтому провод из ВТСП – довольно сложное многослойное техническое устройство.

§92. Применение сверхпроводников

Реальное использование сверхпроводников началось в 50-х – начале 60-х годов XX века. В настоящее время работают сверхпроводящие магниты различных размеров и форм. Их применение вышло за рамки чисто научных исследований, и сегодня они широко используются в лабораторной практике, в ускорительной технике, томографах, установках для управляемой термоядерной реакции. С помощью сверхпроводимости стало возможным многократно повысить чувствительность многих измерительных приборов. Такие приборы названы сквидами (от англ. Superconducting Quantum Interference Devices). Особо следует подчеркнуть внедрение сквидов в технику, в том числе и в современную медицину.

Наибольшее применение сверхпроводники нашли в настоящее время в области создания сильных магнитных полей (более 20 Тл). Сверхпроводящие магниты являются и более экономичными. Так, например, для поддержания в медном соленоиде с внутренним диаметром 4 см и длиной 10 см поля 1 Тл необходима электрическая мощность не менее 5100 кВт, которую нужно полностью отвести водой, охлаждающей магнит. Это означает, что

через магнит надо прокачивать не менее 1 м³ воды в минуту, а затем ее еще охлаждать. В сверхпроводящем варианте такой объем магнитного поля создается достаточно просто, необходимо лишь сооружение гелиевого криостата для охлаждения обмоток, что является несложной технической задачей.

Другое преимущество сверхпроводящих магнитов состоит в том, что они могут работать в автономном режиме, без внешних источников.

Еще одно применение сверхпроводников – создание подшипников и опор без трения. Если над металлическим кольцом с током поместить сверхпроводящую сферу, то на ее поверхности в силу эффекта Мейснера индуцируется сверхпроводящий ток, что приводит к появлению сил отталкивания между кольцом и сферой, и сфера может повиснуть над кольцом. Подобный же эффект может наблюдаться, если над сверхпроводящим кольцом поместить постоянный магнит. На этом может быть основано создание, например, новых видов транспорта. Речь идет о создании поезда на магнитной подушке, в котором будут полностью отсутствовать потери на трение о колею дороги. Модель такой сверхпроводящей дороги длиной 400 м была построена в Японии еще в 1970-х годах. Расчеты показывают, что поезд на магнитной подушке сможет развивать скорость до 500 км/ч. Такой поезд будет «зависать» над рельсами на расстоянии 2–3 см, что и даст ему возможность разогнаться до указанных скоростей.

Применение сверхпроводимости может привести к созданию сверхбыстрых электронно-вычислительных машин. Речь идет о так называемых криотронах – переключающих сверхпроводящих элементах. Такие устройства могут легко сочетаться со сверхпроводящими запоминающими элементами. Важным преимуществом криотронов перед обычными полупроводниковыми устройствами является отсутствие потребности в энергии в стационарном состоянии.

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.

§93. Методы регистрации элементарных частиц.

1) Ионизационная камера (счетчик Гейгера).

Это тонкостенный сосуд с газом, в который введены два электрода с разностью потенциалов от 100 до 1000 Вольт. Заряженная частица, попадая в сосуд, ионизует газ. Возникшие ионы устремляются к электродам. Возникает импульс тока, регистрируемый прибором.

2) Камера Вильсона (1912).

При резком расширении рабочая смесь (неконденсирующийся газ плюс пары воды или спирта) в камере охлаждается, и пар становится пересыщенным. Если в этот момент влетает частица, то она ионизует молекулы газа и создает центры конденсации, на которых

конденсируется пар. В результате образуется трек – след, подобный следу самолета. Треки стереоскопически (с нескольких точек) фотографируются, что позволяет создать пространственную картину. Прибор работает не непрерывно, а циклами. Сравнительно короткое время чувствительности (порядка 0,1 – 1 с) чередуется с мертвым временем (в 100-1000 раз больше), в течение которого камера готовится к следующему циклу.

Но так обнаруживается только факт пролета частицы. В 1927 году Д. Скобельцын предложил помещать камеру в магнитное поле. Траектории заряженных частиц искривляются. По характеру искривления можно судить о свойствах частиц.

1. При равных зарядах трек тем толще, чем меньше скорость. Поэтому по ходу движения трек утолщается.

2. Радиус кривизны зависит от скорости v и удельного заряда q/m : радиус кривизны $R_{кр}$ пропорционален mv/q . К концу v снижается и $R_{кр}$ уменьшается, что также позволяет определить направление движения.

3. По направлению искривления определяют знак заряда.

3) Пузырьковая камера.

В ней находится жидкость под давлением. При резком уменьшении давления жидкость переходит в перегретое состояние – она готова вскипеть, но нет центров закипания. Прилетевшие частицы создают такие центры, в результате чего получается трек из пузырьков. После фотографирования давление увеличивают, пузырьки схлопываются, и камера сразу готова к работе.

4) Толстослойные эмульсии.

В эмульсионных камерах облучению подвергаются толстые пачки (массой до нескольких десятков килограммов), составленные из отдельных слоев фотоэмульсии. После облучения пачка разбирается на слои, каждый из которых проявляется и рассматривается под микроскопом. В результате прослеживается путь частицы.

Плюсом этого метода является возможность накапливать информацию.

§94. Открытие протона и нейтрона.

В 1897 году Дж.Дж.Томсон открыл электрон, за что в 1906 году получил нобелевскую премию. В своем опыте Томсон доказал, что все частицы, образующие катодные лучи, тождественны друг другу и входят в состав вещества.

В 1911 году Эрнест Резерфорд предложил ядерную модель атома.

К 20-м годам XX века физики уже не сомневались в том, что атомные ядра, как и сами атомы, имеют сложную структуру. В настоящее время твердо установлено, что атомные ядра различных элементов состоят из частиц двух видов — протонов и нейтронов.

Первая из этих частиц представляет собой ядро атома водорода. В 1919 году Резерфорд обнаружил ядра атома водорода в продуктах расщепления ядер атомов многих элементов. Резерфорд назвал эту частицу протоном. Он высказал предположение, что протоны входят в состав всех атомных ядер.

Прибор Резерфорда состоял из вакуумной камеры, в которой был расположен контейнер с источником α -частиц. Окно камеры было закрыто металлической фольгой, толщина которой была подобрана так, чтобы α -частицы не могли через нее проникнуть. За окном располагался экран, покрытый сернистым цинком. С помощью микроскопа можно было наблюдать сцинтилляции (т. е. световые вспышки) в точках попадания на экран тяжелых заряженных частиц. При заполнении камеры азотом низкого давления на экране возникали световые вспышки, указывающие на появление потока каких-то частиц, способных проникать через фольгу, практически полностью задерживающую поток α -частиц. Исследования показали, что эти частицы обладают положительным элементарным зарядом и их масса равна массе ядра атома водорода. Впоследствии опыт был выполнен с целым рядом других газообразных веществ. Во всех случаях было обнаружено, что из ядер этих веществ α -частицы выбивают протоны.

Положительный заряд протона оказался в точности равен по модулю отрицательному заряду электрона. Такое совпадение зарядов двух не похожих друг на друга частиц вызывает удивление и остается одной из фундаментальных загадок современной физики.

После открытия протона стало ясно, что ядро состоит не только из протонов, поскольку у всех химических элементов (кроме водорода) масса ядра была больше суммарной массы протонов, число которых определялось числом электронов в атоме. Таким образом, в составе ядра должны быть еще какие-то частицы, которые к тому же не имеют электрического заряда, поскольку иначе протонно-электронный баланс был бы нарушен.

В 1932 году ученик Резерфорда Чедвик обнаружил частицы, вылетающие из ядра атома бериллия при бомбардировке α -частицами. Они никак не реагировали на электромагнитное поле, откуда следовало, что их заряд равнялся нулю. Их масса оказалась примерно равной массе протона, т.е. была в 1800 раз больше массы электрона. Стало очевидно, что обнаружен недостающий элемент конструкции ядра атома. Эти частицы были названы нейтронами.

Отметим, что, в отличие от протона, свободный нейтрон не является стабильной частицей: в среднем за 15 минут он распадается на протон, электрон и один из видов нейтрино.

§95. Состав ядра атома. Энергия связи.

В 1932 году советский физик Иваненко и, независимо от него, Гейзенберг выдвинули гипотезу о том, что атомное ядро состоит из протонов и нейтронов. Эти частицы называются нуклонами (от латинского nucleus – ядро).

Количество протонов в ядре Z называется его зарядовым числом - это число равно порядковому номеру элемента в таблице Менделеева. Заряд ядра определяет структуру электронной оболочки нейтрального атома и, таким образом, химические свойства элемента. Общее число нуклонов в ядре A называется массовым числом и приблизительно равно массе атома, указанной в таблице Менделеева. Число нейтронов $N=A-Z$. Принято обозначать химические элементы следующим образом: ${}^A_Z X$.

Радиус ядра довольно точно определяется формулой $r_{я} \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ м}$, откуда следует, что объем ядра пропорционален числу нуклонов в нем. Подставляя массу одного нуклона $m = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, оценим плотность ядерного вещества:
 $\rho_{я} = mA/V \approx 1,8 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3 = const$. Она огромна!

Еще в 1906 году обнаружили, что атомы одного и того же вещества могут иметь разное массовое число, например, Cl - 35 и 37, U - 234, 235, 238 и 239. Такие вещества называются изотопами. Они имеют близкие химические свойства, значит, их электронные оболочки устроены одинаково, т.е. ядра содержат одинаковое число протонов Z . Различия связаны с разным числом нейтронов N .

Почему ядра не распадаются на отдельные протоны? Ведь есть кулоновское отталкивание. Значит, силы притяжения между нуклонами имеют неэлектрическую природу. Это ядерные силы. Ядерное взаимодействие между нуклонами называется *сильным взаимодействием*. Силы притяжения между двумя протонами, протоном и нейтроном и двумя нейтронами одинаковы. Эти силы очень короткодействующие: на расстоянии 10^{-15} метра они в 100 раз сильнее электростатических (для двух протонов), а на расстоянии 10^{-14} метра ими можно пренебречь. Для удаления из ядра протона или нейтрона надо совершить работу против ядерных сил, т.е. энергия системы «оставшееся ядро + удаленный нуклон» больше энергии исходного ядра на величину этой работы. Энергию, необходимую для разделения ядра на отдельные нуклоны, называют энергией связи ядра. При этом суммарная масса увеличивается на $\Delta m = \Delta E / c^2$, т.е. масса ядра меньше суммы масс нуклонов. В атомной физике массу измеряют в а.е.м. (атомная единица массы) – это 1/12

массы атома изотопа углерода 12: $1 \text{ а.е.м.} = \frac{1}{12} \frac{12 \text{ кг}}{N_A} \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Рассчитаем энергию

связи ядра атома гелия ${}^4_2\text{He}$:

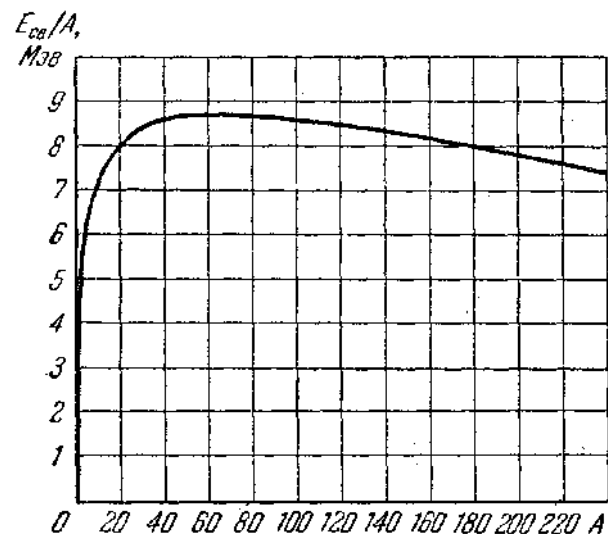
$$2 \cdot {}^1_0n - 2 \cdot 1,008665 = 2,017330 \text{ а.е.м.}$$

$$2 \cdot {}^1_1p - 2 \cdot 1,007825 = 2,015650 \text{ а.е.м.}$$

Сумма масс нуклонов 4,032980 а.е.м., масса ядра ${}^4_2\text{He}$ - 4,002603 а.е.м.,
 $\Delta m = 0,030377 \text{ а.е.м.}$, т.е.

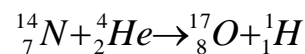
$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \approx 28 \text{ МэВ.}$$

Разделив эту величину на 4 нуклона, получим удельную энергию связи, т.е. на один нуклон, - 7 МэВ. На рисунке изображен график зависимости удельной энергии связи от массового числа A. Такая зависимость делает энергетически возможными два процесса: 1) деление тяжелых ядер на несколько более легких, 2) слияние (синтез) двух легких в одно более тяжелое. Оба процесса должны сопровождаться выделением большого количества энергии.



§96. Ядерные реакции.

Это процессы, в результате которых происходит перестройка атомных ядер. Они протекают с сохранением заряда, импульса, энергии, числа нуклонов (A). Рассмотрим первую искусственную ядерную реакцию (Резерфорд). α -частица – ядро атома гелия.



Чтобы вычислить энергетический выход реакции, надо найти все массы до и после реакции и рассчитать изменение массы и энергии.

$${}^{14}_7\text{N} - 14,003242 \text{ а.е.м.}$$

$${}^{17}_8\text{O} - 16,999134 \text{ а.е.м.}$$

$${}^4_2\text{He} - 4,002603 \text{ а.е.м.}$$

$${}^1_1\text{H} - 1,007825 \text{ а.е.м.}$$

$$m_1 = 18,005845 \text{ а.е.м.}$$

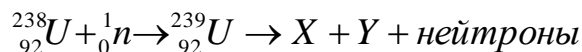
$$m_2 = 18,006959 \text{ а.е.м.}$$

$$\Delta m = m_1 - m_2 = -0,01114 \text{ а.е.м.}, \quad \Delta E = \Delta m \cdot c^2 = -1,04 \text{ МэВ.}$$

Минус говорит о том, что реакция идет с поглощением энергии.

§97. Деление ядер урана.

Атомные ядра с большим A неустойчивы и могут распадаться. В 1940 году советские физики Флеров и Петржак обнаружили самопроизвольное деление ядер урана. В то же время Ганн и Штрассман обнаружили, что ядро урана при бомбардировании его нейтронами распадается на элементы из середины таблицы Менделеева. При этом ядро урана ${}_{92}^{238}\text{U}$ захватывает быстрый нейтрон и переходит в ядро ${}_{92}^{239}\text{U}$, которое распадается на две примерно равные части с выделением нескольких нейтронов:



Более поздние исследования показали, что могут быть осколки более 80 сортов. Самыми вероятными являются $m_1/m_2 = 2/3$. В этой реакции выделяется $\Delta E \approx 200$ МэВ – это огромная энергия. Например, при образовании воды $\text{H}+\text{H}+\text{O}$ выделяется всего 10 эВ. При разделении ядер всех атомов в 1 кг урана выделяется такая же энергия, как при сжигании 2 млн тонн угля.

§98. Цепная реакция.

При делении ядра урана освобождаются 2-3 нейтрона. Это позволяет осуществить цепную реакцию деления урана. Любой из нейтронов, вылетающих из ядра в процессе деления, может, в свою очередь, вызвать деление соседнего ядра, которое также испускает нейтроны, способные вызвать дальнейшее деление. Возникает цепная реакция, сопровождающаяся выделением огромной энергии.

Но для осуществления цепной реакции нельзя использовать любые ядра, делящиеся под влиянием нейтронов. В силу ряда причин из ядер, встречающихся в природе, пригодны лишь ядра изотопа урана ${}_{92}^{235}\text{U}$. Естественный уран состоит в основном из двух изотопов: ${}_{92}^{235}\text{U}$ и ${}_{92}^{238}\text{U}$, но первый составляет всего 1/140 долю от всего урана. Ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$ делятся под влиянием как быстрых, так и медленных нейтронов. Ядра же ${}_{92}^{238}\text{U}$ могут захватывать только нейтроны с энергией больше 1 МэВ. Такую энергию имеют примерно 60% нейтронов, появляющихся при делении. Однако только один нейтрон из пяти производит деление ядра ${}_{92}^{238}\text{U}$. Остальные просто захватываются им, не производя деления. В результате цепная реакция с ${}_{92}^{238}\text{U}$ невозможна.

Для течения цепной реакции необходимо, чтобы среднее число освобожденных нейтронов не уменьшалось с течением времени. Это условие будет выполнено, если коэффициент размножения нейтронов k (отношение числа нейтронов в следующем

поколении к их числу в предыдущем) будет больше или равен единице. Он определяется четырьмя факторами:

1) захватом с последующим делением медленных нейтронов ядрами ${}_{92}^{235}\text{U}$ и быстрых нейтронов ядрами ${}_{92}^{235}\text{U}$ и ${}_{92}^{238}\text{U}$;

2) захватом нейтронов ядрами урана без деления;

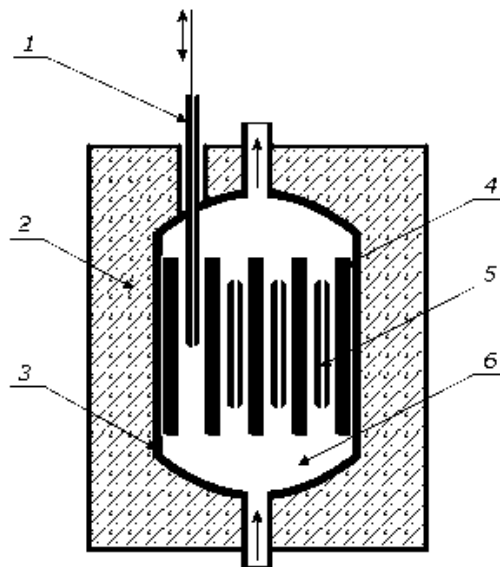
3) захватом нейтронов продуктами деления, замедлителем и конструктивными элементами установки;

4) вылетом нейтронов из установки наружу.

Только первый процесс сопровождается увеличением числа нейтронов, остальные приводят к убыли. Для стационарного течения реакции коэффициент размножения k должен с большой точностью поддерживаться равным единице. Уже при $k=1,01$ произойдет взрыв.

Вероятность захвата медленных нейтронов с последующим делением намного больше, чем быстрых. Поэтому в реакторах на естественном уране используются замедлители нейтронов для повышения коэффициента размножения. Это обычная или тяжелая вода, графит и др.

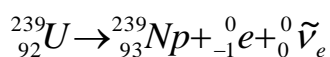
Коэффициент размножения k может стать равным единице лишь при условии, что размеры реактора и масса урана превышают некоторые критические значения, так как при малых размерах слишком велика утечка нейтронов. Критической массой называется наименьшая масса делящегося вещества, при которой может протекать цепная реакция. С увеличением размеров системы число ядер, участвующих в делении, растет пропорционально объему, а число нейтронов, теряемых из-за утечки через поверхность, пропорционально площади поверхности. Поэтому увеличением размеров системы можно достичь значения $k=1$. Для чистого ${}_{92}^{235}\text{U}$, имеющего форму шара, критическая масса равна 50 кг. При этом радиус шара равен 9 см (уран – очень тяжелое вещество). Применяя замедлители нейтронов и отражающую нейтроны оболочку из бериллия, удалось снизить критическую массу до 250 г.



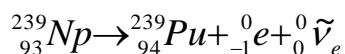
Регулирование скорости реакции и обеспечение равенства $k=1$ осуществляется вводимыми в реактор стержнями, содержащими кадмий или бор, вещества, хорошо поглощающие нейтроны. При выдвинутых из активной зоны реактора стержнях $k>1$, а при

полностью вдвинутых $k < 1$. Вдвигая стержни, можно в любой момент остановить реакцию. Управление стержнями осуществляется с помощью компьютеров. На рисунке схематически показано устройство реактора на тепловых нейтронах: 1 — управляющий стержень; 2 — радиационная защита; 3 — теплоизоляция; 4 — замедлитель; 5 — ядерное топливо; 6 — теплоноситель.

Существуют также реакторы, работающие без замедлителя на быстрых нейтронах. Так как вероятность деления на быстрых нейтронах мала, то такие реакторы не могут работать на естественном уране. Реакция может поддерживаться только в обогащенной смеси, содержащей не менее 15% ${}^{235}_{92}\text{U}$. Преимущество реакторов на быстрых нейтронах в том, что при их работе получается большое количество плутония, который затем можно тоже использовать как ядерное топливо. Плутоний образуется в результате не вызывающего деления захвата быстрых нейтронов ядрами ${}^{238}_{92}\text{U}$. После захвата образуется радиоактивный изотоп ${}^{239}_{92}\text{U}$ с периодом полураспада 23 минуты. Распад происходит с испусканием электрона и антинейтрино и возникновением первого трансуранового элемента — нептуния:



Нептуний β -радиоактивен с периодом полураспада около двух дней. В результате образуется следующий трансурановый элемент — плутоний:



Плутоний относительно стабилен, его период полураспада велик — порядка 24 000 лет. Важнейшее его свойство состоит в том, что он делится под влиянием медленных нейтронов, как и ${}^{235}_{92}\text{U}$. Поэтому на нем тоже может быть осуществлена цепная реакция с выделением огромной энергии.

Реакторы на быстрых нейтронах называют «реакторами-размножителями», так как они воспроизводят делящийся материал. В лучших таких реакторах при делении 1 кг ${}^{235}_{92}\text{U}$ получают до 1,5 кг плутония.

Впервые цепная ядерная реакция деления урана была осуществлена в США под руководством Энрико Ферми в 1942 г. В СССР первый ядерный реактор был запущен в 1946 г. коллективом физиков, который возглавлял Игорь Васильевич Курчатов.

§99. Радиоактивность.

Радиоактивность — самопроизвольные превращения атомных ядер, сопровождающиеся испусканием элементарных частиц или более лёгких ядер. Ядра, подверженные таким превращениям, называют радиоактивными, а процесс превращения — радиоактивным

распадом. Радиоактивный распад возможен только тогда, когда он энергетически выгоден, т.е. сопровождается выделением энергии. Условием этого является превышение массы исходного ядра над суммой масс продуктов распада.

Явление радиоактивности открыто в 1896 году Беккерелем. Из около 3000 известных ядер (большинство из них получено искусственно) лишь 264 не являются радиоактивными. Основными видами радиоактивного распада являются альфа-распад (испускание ядрами α -частиц, т.е. ядер атомов гелия ${}^4_2\text{He}$), бета-распад (испускание электрона и антинейтрино), гамма-распад (испускание высокочастотного электромагнитного излучения) и спонтанное деление (распад ядра на два осколка сравнимой массы), открытое Флеровым и Петржаком (§90). К более редким видам радиоактивного распада относится испускание ядрами одного или нескольких нуклонов, например, открытая в 1963 году группой Флерова протонная радиоактивность, при которой испускаются один или два протона.

Изотопы некоторых элементов (например, ${}^{68}_{31}\text{Ga}$) испускают даже позитроны – антиэлектроны, которые сразу вступают в реакцию аннигиляции с электронами, в результате которой электрон и позитрон исчезают и образуются два гамма-кванта. Это явление сейчас активно используется в медицинской диагностике (ПЭТ КТ – позитронно эмиссионная и компьютерная томография).

Во всех видах радиоактивности (кроме γ) изменяется состав ядра – число протонов Z , массовое число A или и то, и другое.

Время, за которое распадается половина первоначального числа ядер, называется временем полураспада $T_{1/2}$. Число ядер, распадающихся за время dt , пропорционально числу ядер в этот момент: $dN = -\lambda N dt$, откуда $dN/N = -\lambda dt$, и

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \text{ - закон убывания числа ядер.}$$

При $t = T_{1/2}$ имеем $N = N_0 / 2$, откуда $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ - постоянная распада.

α -распад бывает только у тяжелых ядер. Возникает вопрос, почему вылетает ${}^4_2\text{He}$, а не отдельные протоны или нейтроны? Для покидания ядра нужна энергия. Она появляется за счет объединения протонов и нейтронов в ядро гелия. При распаде новое ядро имеет Z на 2 меньше и A на 4 меньше.

При β -распаде энергетический спектр излучаемых электронов оказался непрерывным. Но квантовая механика говорила о дискретности уровней энергии в ядре. Поэтому непрерывность спектра электронов ставила под сомнение закон сохранения энергии. Это поставило ученых в тупик. В 1931 году Нильс Бор даже выступил с идеей о несохранении энергии! Но в 1932 году Вольфганг Паули высказал предположение, что в ядре есть еще

один тип частиц, испускаемых при β -распаде вместе с электронами и уносящих с собой часть энергии. Так как они себя никак не обнаруживают, то следовало признать, что они нейтральны и обладают очень малой или даже нулевой массой покоя. В 1955 году эти частицы были обнаружены экспериментально. Однако концепция Паули оказалась не вполне верной. Энрико Ферми теоретически показал, что эта частица образуется при распаде одного из внутриядерных нейтронов на протон и электрон. Он же назвал ее «нейтрино» (нейтрончик). Сейчас считается, что масса покоя нейтрино отлична от нуля, но очень мала, не более десятых долей эВ (масса электрона 0,51 МэВ!). Нейтрино очень слабо взаимодействуют с веществом. Расчеты показывают, что они могут пролететь, не вступая во взаимодействие, слой жидкого водорода толщиной в 1000 световых лет!

§100. Синтез атомных ядер.

Ядерный синтез, т.е. слияние легких ядер в одно, сопровождается выделением энергии (см. график в §95). Поскольку для синтеза нужны высокие температуры, то реакция называется термоядерной. Чтобы попасть в зону действия ядерных сил, т.е. сблизиться до расстояния порядка радиуса ядра, ядра с номерами Z_1 и Z_2 должны обладать энергией $E = kZ_1Z_2e^2 / r_{я}$, где $r_{я} \approx 2 \cdot 10^{-15}$ м. Даже при $Z_1=Z_2=1$ $E \approx 0,7$ МэВ, т.е. на каждое ядро по 0,35 МэВ. Средней тепловой энергии 0,35 МэВ соответствует температура $2 \cdot 10^9$ К. Но реакция синтеза может начаться уже при $T \approx 2 \cdot 10^7$ К, так как из-за случайного распределения по скоростям есть некоторое количество ядер с нужной энергией.

Самые благоприятные условия имеет реакция: «дейтрон плюс тритон $\rightarrow {}^4_2\text{He}$ », так как она имеет резонансный характер: ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 17,6 \text{ МэВ}$, т.е. на каждый нуклон получаем по 3,5 МэВ (при делении урана 0,85 МэВ на нуклон).

Эта реакция – основной источник энергии Солнца и других звезд, где $T \approx 10^7 - 10^8$ К. В водородной бомбе эта реакция носит неуправляемый характер. Сначала взрывается атомная бомба (с ураном), она создает $T \approx 10^7$ К, затем начинается термоядерная реакция.

Для осуществления управляемой термоядерной реакции надо 1) создать высокую температуру, 2) удержать плазму. Токамак - система удержания плазмы в магнитном поле (Тороидальная КАмера с МАгнитной КАтушкой) - представляет собой замкнутую магнитную ловушку в форме тора. Плазма удерживается магнитным полем и разогревается проходящим током. Есть также направления исследований, связанные с использованием лазеров и электронных пучков.

§101. Элементарные частицы.

Известны четыре вида взаимодействий между элементарными частицами: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное (по убыванию интенсивности). В 1968 году Вайнберг, Глэшоу и Салам создали объединенную теорию электрослабого взаимодействия, осуществляемого при помощи безмассовых фотонов, а также W и Z бозонов. W-бозоны имеют заряд $\pm e$, а Z-бозоны нейтральны. Их масса около 100 масс протона, время жизни $3 \cdot 10^{-25}$ с. Они были обнаружены в 1983 году.

1) Сильное взаимодействие обеспечивает связь нуклонов в ядре. Максимальный радиус взаимодействия - 10^{-15} м.

2) Электромагнитное – радиус бесконечен.

3) Слабое – ответственно за все виды β -распадов, $r \approx 10^{-15}$ м.

4) Гравитационному взаимодействию подвержены все частицы. Его радиус бесконечен.

В микромире оно роли не играет.

Интенсивность взаимодействия характеризуется константой взаимодействия:

сильное – 1, электромагнитное – $1/137$, слабое - 10^{-14} , гравитационное - 10^{-39} .

В соответствии с характером взаимодействий, в которых они могут участвовать, элементарные частицы делятся на три класса:

1) фотоны - участвуют в электромагнитных, не участвуют в сильных и слабых;

2) лептоны (греч. лептос – легкий) - не участвуют в сильном: мюоны ($m \approx 200m_e$), электроны, нейтрино. Имеют спин $1/2$, т.е. являются фермионами. Все они участвуют в слабом, а имеющие заряд и в электромагнитном;

3) адроны (адрон – крупный, массивный) – участвуют в сильном, слабом, а имеющие заряд - и в электромагнитном. Они разделяются на мезоны и барионы.

Все мезоны (пи-мезоны, или пионы, и ка-мезоны, или каоны) нестабильны $T_{1/2} \approx 10^{-8}$ с. Спин у них равен нулю, т.е. они - бозоны.

Барионы включают в себя нуклоны (протоны и нейтроны) и различные нестабильные тяжелые гипероны ($\Omega, \Sigma, \Lambda, \Xi$), например анти-сигма-минус-гиперон. Спин всех барионов равен $1/2$, т.е. они – фермионы. Кроме протона, все они нестабильны.

Все частицы имеют своих двойников – античастицы, например, позитрон, антипротон, антинейтрон. При их встрече происходит аннигиляция, в результате которой частицы исчезают, а образуются фотоны и пи-мезоны. Для некоторых нейтральных частиц античастица тождественно совпадает с частицей. Это, в частности, фотон, нейтральный пи-мезон, хиггсовский бозон, Z-бозон, гравитон. Такие частицы называют *истинно*

нейтральными. Их аннигиляция невозможна. Следует заметить, что электрически нейтральные частицы могут и не совпадать со своими античастицами. Это, в частности, касается нейтрона, нейтрино, нейтрального каона и т. д.

Барионам приписывается барионный заряд +1, а антибарионам -1. Соблюдается закон сохранения барионного заряда. Он обеспечивает стабильность протона – самого легкого бариона. Другие законы не запрещают распада протона на позитрон и пару нейтрино: $p \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$, который привел бы к аннигиляции атома. Но в этой реакции барионный заряд уменьшился бы, что и запрещено законом сохранения барионного заряда.

Вводятся также и другие квантовые числа, соответствующие различным законам сохранения: лептонное число, изотопический спин, странность, гиперзаряд, четность и т.д. Каждый закон сохранения отражает определенную симметрию системы. Например, закон сохранения энергии отражает однородность времени, импульса - однородность пространства, момента импульса – изотропность пространства. Сохранение четности соответствует симметрии относительно отражения в зеркале. Остальные сложнее, но симметрии существуют для каждого закона сохранения.

В 1964 году Гелл-Манн и независимо от него Цвейг высказали гипотезу о существовании кварков, из которых состоят все адроны: барионы из трех кварков, а мезоны из пары кварк-антикварк. Кварки являются бесструктурными, точечными частицами; это проверено вплоть до масштаба примерно $5 \cdot 10^{-18}$ м, что примерно в 20 тысяч раз меньше размера протона. Кварки имеют дробные электрические заряды: $-1/3$, $-1/3$, $2/3$ элементарного заряда, а также барионный заряд $1/3$. Эти кварки обозначаются буквами u(up - верхний), d(down - нижний), s(strange - странный). Кроме того, существуют антикварки - $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ - с зарядами противоположного знака. В дальнейшем систему кварков пришлось расширить до 6 типов (ароматов) плюс столько же антикварков. Добавились c(charmed - очарованный), b(bottom или beauty - прелестный) и t(top или truth - истинный). Взаимодействие между кварками осуществляется глюонами (англ. glue – клей). Каждый кварк и глюон имеет специфический заряд, называемый цветом – зеленый, синий или красный. Так что всего кварков и антикварков 36. Их взаимодействие изучается разделом физики, называемым хромодинамикой. Эта наука существенно нелинейная, поэтому расчеты могут осуществляться только с использованием мощных компьютеров.

Идея кварков оказалась весьма плодотворной. Она позволила не только систематизировать уже известные частицы, но и предсказать целый ряд новых.

Ряд экспериментальных фактов однозначно указывает на реальное существование кварков. Однако все попытки наблюдать кварки в свободном состоянии оказались

безуспешными. Это привело к выводу, что кварки могут существовать только внутри адронов и в принципе не могут наблюдаться в свободном состоянии. Появился даже специальный термин «конфайнмент» (англ. confinement - тюремное заключение). Причиной его является необычное поведение сил взаимодействия кварков друг с другом. При малых расстояниях эти силы крайне малы, так что кварки практически оказываются свободными (это состояние называется асимптотической свободой). Однако с увеличением расстояния между кварками силы взаимодействия быстро растут, не позволяя кваркам вылететь из адрона. На первый взгляд это кажется странным, но можно представить себе два шарика, связанные обычной пружиной: чем больше расстояние, тем больше сила.

§102. Космические лучи.

Из мирового пространства на Землю непрерывно падает поток атомных ядер высокой энергии (в среднем 10 ГэВ) – в основном это протоны. Эти так называемые *космические лучи*, сталкиваясь с ядрами атомов в верхних слоях атмосферы, образуют вторичное излучение, в котором могут встречаться все известные элементарные частицы. Ниже 20 км все космические лучи носят вторичный характер. Интенсивность первичных лучей на границе атмосферы (на высоте 50 км) - 1 частица на см² в секунду, интенсивность вторичных на уровне моря в 100 раз меньше. Из-за магнитного поля Земли интенсивность лучей зависит от широты. Вблизи Земли существуют радиационные пояса - две окружающие Землю зоны с повышенной интенсивностью ионизирующего излучения. В плоскости экватора внутренний пояс от 600 до 6000 км, внешний – от 20000 до 60000 км. На широтах 60-70 градусов оба пояса приближаются к Земле до нескольких сотен км.

До середины 20-го века космические лучи были единственным источником частиц высоких энергий. Именно в них были впервые обнаружены позитроны, мюоны, пи-мезоны. Затем начали строить ускорители, позволяющие получать протоны с энергиями в десятки и сотни ГэВ. Большой адронный коллайдер (БАК) позволяет получить протоны с энергией до 14 ТэВ (1 Тераэлектронвольт = $1000 \text{ ГэВ} = 10^{12} \text{ эВ}$). Однако именно космические лучи являются единственным источником частиц сверхвысоких энергий.

Список вопросов к экзамену

- 1) Световая волна. Законы отражения и преломления. Коэффициенты отражения и преломления. Нормальное падение на границу двух сред.
- 2) Световой поток. Фотометрические величины.
- 3) Геометрическая оптика. Преломление на сферической поверхности. Тонкая линза. Сферические зеркала. Центрированные оптические системы. Зрение и очки. Лупа.
- 4) Временная и пространственная когерентность.
- 5) Интерференция света.
- 6) Способы наблюдения интерференции. Опыт Юнга. Зеркала Френеля. Бипризмы Френеля.
- 7) Отражение от тонких пленок. Кольца Ньютона. Просветление оптики.
- 8) Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля.
- 9) Зоны Френеля. Метод векторных диаграмм.
- 10) Дифракция Френеля от круглого отверстия и диска.
- 11) Дифракция Френеля от края полуплоскости. Спираль Корню.
- 12) Дифракция Фраунгофера.
- 13) Спектральный анализ. Дифракционная решетка.
- 14) Поляризация света. Поляризация при отражении и преломлении. Угол Брюстера.
- 15) Двойное лучепреломление.
- 16) Интерференция поляризованных лучей.
- 17) Искусственное двойное лучепреломление.
- 18) Вращение плоскости поляризации. Магнитное вращение плоскости поляризации.
- 19) Дисперсия света. Групповая скорость. Поглощение и рассеяние света. Закон Рэлея.
- 20) Тепловое излучение и люминесценция.
- 21) Закон Кирхгофа.
- 22) Равновесная плотность излучения.
- 23) Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина.
- 24) Стоячие волны. Формула Рэлея-Джинса.
- 25) Формула Планка.
- 26) Тормозное рентгеновское излучение.
- 27) Фотоэффект.
- 28) Опыт Боте. Фотоны.
- 29) Эффект Комптона.
- 30) Атомные спектры. Модель атома Томсона. Опыты по рассеянию α -частиц. Ядерная модель атома.
- 31) Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца.
- 32) Правило квантования круговых орбит. Элементарная боровская теория атома водорода.
- 33) Гипотеза Де-Бройля. Волновые свойства вещества.
- 34) Необычные свойства микрочастиц.
- 35) Принцип неопределенности.
- 36) Уравнение Шредингера. Смысл пси-функции.
- 37) Квантование энергии.
- 38) Квантование момента импульса.
- 39) Принцип суперпозиции состояний.

- 40) Прохождение частицы через потенциальный барьер.
- 41) Гармонический осциллятор.
- 42) Атом водорода.
- 43) Спектры щелочных металлов.
- 44) Ширина спектральных линий.
- 45) Мультиплетность спектров и спин электрона. Механический и магнитный моменты многоэлектронного атома
- 46) Эффект Зеемана. Электронно-парамагнитный резонанс.
- 47) Квантовые статистики. Бозоны и фермионы.
- 48) Принцип Паули.
- 49) Периодическая система элементов Менделеева. Рентгеновские спектры.
- 50) Вынужденное излучение.
- 51) Лазеры. Нелинейная оптика.
- 52) Голография.
- 51). Теория теплоемкости Эйнштейна.
- 52) Колебания систем с большим числом степеней свободы.
- 53) Теория Дебая. Фононы.
- 54) Конденсация Бозе-Эйнштейна
- 55) Распределение Ферми-Дирака.
- 56) Квантовая теория свободных электронов в металле.
- 57) Динамика электронов в периодической решетке.
- 58) Энергетические зоны в кристаллах.
- 59) Электропроводность металлов. Теории Друде и Зоммерфельда.
- 60) Электропроводность полупроводников. Примесные полупроводники.
- 61) Отсутствие электрического сопротивления у сверхпроводников.
- 62) Теория сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера (БКШ).
- 63) Выталкивание магнитного поля из сверхпроводников. Три вида сверхпроводников.
- 64) Критические токи в сверхпроводниках.
- 65) Применение сверхпроводников.
- 66) Методы регистрации радиоактивных излучений и частиц.
- 67) Открытие протона и нейтрона.
- 68) Состав ядра атома. Энергия связи.
- 69) Ядерные реакции. Энергетический выход ядерных реакций.
- 70) Деление ядер урана. Синтез атомных ядер.
- 71) Цепная реакция. Критическая масса. Ядерные реакторы.
- 72) Радиоактивность. α , β и γ -излучения. Период полураспада.
- 73) Виды взаимодействий и классы элементарных частиц. Космические лучи. Кварки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОПТИКА.

Глава 1. Геометрическая оптика.

§1. Световые волны.	3
§2. Основные законы оптики.	3
§3. Световой поток.	4
§4. Нормальное падение на границу двух сред.	6
§5. Фотометрические величины.	8
§6. Геометрическая оптика.	9
§7. Преломление на сферической поверхности	9
§8. Тонкая линза.	11
§9. Сферическое зеркало.	12
§10. Центрированная оптическая система.	13
§11. Зрение и очки.	14
§12. Лупа.	15

Глава 2. Волновая оптика.

§13. Интерференция света.	16
§14. Временная и пространственная когерентность.	20
§15. Способы наблюдения интерференции.	21
§16. Интерференция при отражении от тонких пленок.	22
§17. Дифракция света.	23
§18. Принцип Гюйгенса-Френеля.	24
§19. Зоны Френеля.	26
§20. Дифракция от круглого отверстия и диска.	29
§21. Дифракция от прямолинейного края полуплоскости.	32
§22. Дифракция Фраунгофера от щели	36
§23. Спектральный анализ и дифракционная решетка	39
§24. Поляризация света.	44
§25. Поляризация при отражении и преломлении.	48
§26. Двойное лучепреломление	49
§27. Интерференция поляризованных лучей.	52
§28. Искусственное двойное лучепреломление.	53
§29. Вращение плоскости поляризации.	54

§30. Магнитное вращение плоскости поляризации.	56
§31. Дисперсия света.	56
§32. Групповая скорость.	56
§33. Поглощение и рассеяние света.	57
<u>Глава 3. Тепловое излучение.</u>	
§34. Тепловое излучение и люминесценция.	58
§35. Закон Кирхгофа.	58
§36. Равновесное излучение.	61
§37. Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина.	62
§38. Стоячие волны.	63
§39. Формула Рэлея-Джинса.	64
§40. Формула Планка.	64

Глава 4. Фотонь.

§41. Тормозное рентгеновское излучение.	66
§42. Фотоэффект.	67
§43. Опыт Боте. Фотонь.	69
§44. Эффект Комптона.	70

АТОМНАЯ ФИЗИКА

Глава 1. Боровская теория атома.

§45. Атомные спектры.	73
§46. Модель атома Томсона.	74
§47. Опыты по рассеянию α -частиц. Ядерная модель атома.	74
§48. Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца.	75
§49. Правила квантования круговых орбит.	77
§50. Элементарная боровская теория атома водорода.	77

Глава 2. Элементы квантовой механики.

§51. Гипотеза де-Бройля. Волновые свойства вещества.	79
§52. Необычные свойства микрочастиц.	80
§53. Принцип неопределенности.	81
§54. Уравнение Шрёдингера.	83
§55. Смысл пси-функции.	85

§56. Квантование энергии.	86	§84. Энергетические зоны в кристаллах.	127
§57. Квантование момента импульса.	88		
§58. Принцип суперпозиции состояний.	90	<u>Глава 3. Электропроводность твердых тел.</u>	
§59. Прохождение частиц через потенциальный барьер.	91	§85. Электропроводность металлов. Теории Друде и Зоммерфельда.	130
§60. Гармонический осциллятор.	94	§86. Электропроводность полупроводников.	134
<u>Глава 3. Физика атомов и молекул.</u>		<u>Глава 4. Сверхпроводники.</u>	
§61. Атом водорода.	94	§87. Отсутствие электрического сопротивления	136
§62. Спектры щелочных металлов.	97	§88. Теория сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера (БКШ).	139
§63. Ширина спектральных линий.	99	§89. Выталкивание магнитного поля из сверхпроводников.	141
§64. Мультиплетность спектров и спин электронов	100	§90. Три вида сверхпроводников.	143
§65. Механический и магнитный моменты многоэлектронного атома.	102	§91. Критические токи в сверхпроводниках.	145
§66. Эффект Зеемана.	103	§92. Применение сверхпроводников.	146
§67. Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР).	104		
§68. Квантовые статистики. Бозоны и фермионы.	104	<u>ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.</u>	
§69. Принцип Паули.	106	§93. Методы регистрации частиц.	147
§70. Периодическая система элементов Менделеева.	108	§94. Открытие протона и нейтрона.	148
§71. Рентгеновские спектры.	108	§95. Состав ядра атома. Энергия связи.	150
§72. Вынужденное излучение.	109	§96. Ядерные реакции.	151
§73. Лазеры.	111	§97. Деление ядер урана.	152
§74. Голография.	112	§98. Цепная реакция	152
§75. Нелинейная оптика.	113	§99. Радиоактивность.	154
<u>ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА</u>		§100. Синтез атомных ядер.	156
<u>Глава 1. Теплоемкость твердого тела.</u>		§101. Элементарные частицы	157
§76. Теория Эйнштейна.	114	§102. Космические лучи.	159
§77. Колебания систем с большим числом степеней свободы.	116	Список вопросов к экзамену	160
§78. Теория Дебая	118		
§79. Фононы.	119		
§80. Конденсация Бозе-Эйнштейна	121		
<u>Глава 2. Зонная теория твердых тел</u>			
§81. Распределение Ферми-Дирака.	122		
§82. Квантовая теория свободных электронов в металле.	123		
§83. Динамика электронов в периодической решетке.	126		