1.2. Классическое описание излучения абсолютно черного тела

1.2.1. Критерий и закон смещения Вина.

К концу XIX века было много попыток объяснения излучения абсолютно черного тела в рамках классической физики. Из самых общих законов термодинамики и максвелловской электромагнитной теории В.Вин (1893г.) сформулировал общий критерий или условие для поведения универсальной функции $f(\omega,T)$ (о выводе формулы см, например, IV том Сивухина, §116, стр. 686-691):

$$f(\omega,T)=\omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) \tag{1.2.1}$$

Явный вид функции $F(\omega/T)$ не ясен, т.к. для этого необходимо знание физического механизма излучения. Однако с помощью критерия Вина можно было сделать некоторые выводы и получить результаты. Так получено, что из полной функции $f(\omega,T)$ выделена частота ω, а функция $F(\omega/T)$ является лишь функцией одной переменной (ω/T). Таким образом, был сформулирован критерий Вина (1.2.1).

Критерий Вина: любая предлагаемая формула для универсальной функции $f(\omega,T)$ не должна противоречить формуле Вина, поскольку последняя получена из общих соображений. Критерий Вина можно записать через переменные λ и T:

$$\varphi(\lambda,T)=\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)=\frac{1}{\lambda^5}\Psi(\lambda T) \tag{1.2.2}$$

С помощью критерия Вина можно получить следующие важные соотношения.

1). Закон Стефана-Больцмана. Полная энергетическая светимость равна

$$R(T)=\int_0^\infty \varphi(\lambda,T)d\lambda=\int_0^\infty \Psi(\lambda T)\frac{d\lambda}{\lambda^5} \tag{1.2.3}$$

Делая замену переменных $x=\lambda T$ и $d\lambda=dx/T$, получаем:

$$R(T)=T^4\int_0^\infty \Psi(x)\frac{dx}{x^5}=\sigma T^4\,, \tag{1.2.4}$$

где введенное (размерное) число σ есть постоянная Стефана-Больцмана, равная

$$\sigma=\int_0^\infty \Psi(x)\frac{dx}{x^5}=\int_0^\infty y^3F(y)dy\,, \tag{1.2.5}$$

Здесь можно было ввести переменную y через отношение $y=\omega/T$. Таким образом, получаем, что площадь под кривой $f(\omega,T)$, или $\varphi(\lambda,T)$, растет с температурой пропорционально четвертой степени температуры (рис.2.1).

2). *Закон смещения Вина*. Найдем максимум функции распределения $f(\omega,T)$:

$$\left[\omega^3F\left(\frac{\omega}{T}\right)\right]'_\omega=0=3\omega^2F\left(\frac{\omega}{T}\right)+\omega^3\frac{1}{T}F'\left(\frac{\omega}{T}\right) \tag{1.2.6}$$

Корень этого уравнения $\omega=0$ соответствует минимуму функции, равному нулю, поэтому сократим на ω и снова введем обозначение $y=\omega/T$. Тогда имеем уравнение приобретает вид:

$$3F(y)+yF'(y)=0 \tag{1.2.7}$$

Пусть мы нашли решение этого уравнения y_0, соответствующее максимуму функции распределения

$$y=y_0=\frac{\omega_{\max}}{T} \tag{1.2.8}$$

Отсюда автоматически получаем *закон смещения Вина* (1896 г.) (см рис. 2.1 А):

$$\frac{\omega_{\max}}{T}=const=0.37\cdot 10^{12}\ \left(K^{-1}c^{-1}\right) \tag{1.2.9}$$

Таким образом, положение максимума функции распределения в зависимости от частоты прямо пропорционально температуре. Можно это условие положения максимума функции распределения записать также через длины волн:

$$\lambda_{max} T = b \qquad (1.2.10)$$

Закон смещения Вина утверждает, что длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум энергии в спектре равновесного излучения, обратно пропорциональна температуре излучающего тела (см рис. 2.1 Б). Этот закон является следствием формулы Вина. Постоянная b носит название *постоянной Вина*.

О. Луммер и Э. Прингсгейм в 1897 г. экспериментально подтвердили справедливость закона смещения Вина, получив при этом значение $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\, м \cdot К$.

Рассмотрим пару примеров, когда с помощью закона смещения Вина можно провести оценки

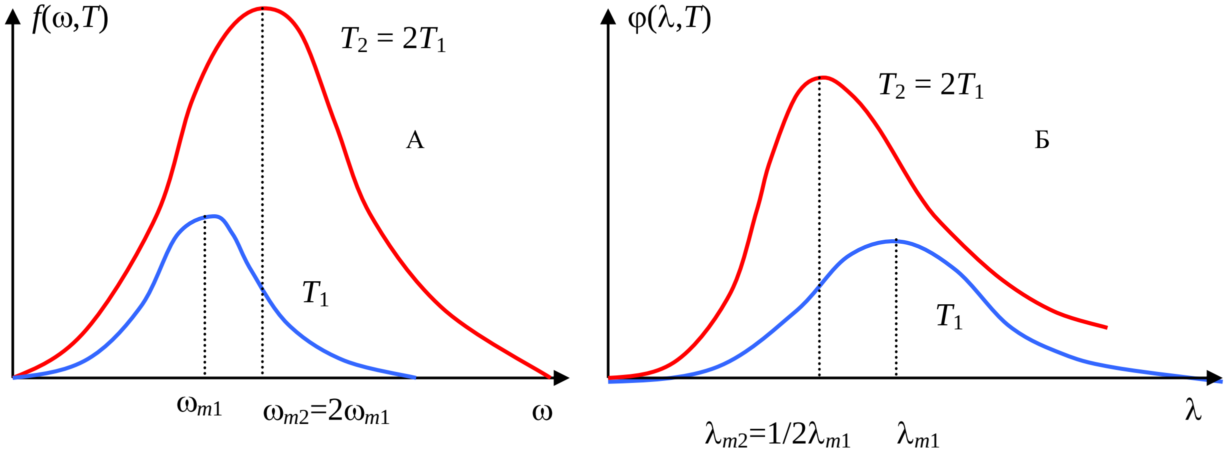

Рис. 2.1.

интенсивности излучения в ряде случаев.

1) Если человека рассматривать как абсолютно черное тело, то при температуре T = 300 К максимум его светимости находится при $\lambda \approx 10\, мкм$, т.е. лежит в инфракрасном (ИК) диапазоне.
2) Проведем оценку: сколько всего излучает человек. Пусть средняя площадь поверхности человека ~ 1 $м^2$, разность температур тела и среды ΔT ~ 10 К, тогда мощность излучения составляет

$$W = 4S \cdot \sigma T^3 \Delta T \approx 4 \cdot 1 \cdot 5{,}7 10^{-8} \cdot 27 \cdot 10^6 \cdot 10 \cong 60\, Вт,$$

т.е. по интегральной мощности человек “светит”, как 60-ваттная лампочка, но в ИК диапазоне. На основе инфракрасного излучения создаются приборы ночного видения.

Примечание 1. *Вильгельм Вин, немецкий физик, 1864–1928, Нобелевская премия 1911 г. за законы излучения черного тела;*
Отто Рихард Луммер (Люммер), немецкий физик, 1860–1925
Эрнст Прингсгейм, немецкий физик, 1859–1917.

1.2.2. Теория Рэлея - Джинса.

Термодинамика не в состоянии определить вид универсальной функции $f(\omega,T)$ или $F(\omega/T)$. Для определения универсальной функции оказалось необходимым привлечь статистические методы.

Д. Релей (1905) и Д. Джинс определяли $f(\omega,T)$, исходя из классических представлений и основываясь на известном законе о равномерном распределении энергии по степеням свободы. В равновесии существующее электромагнитное поле (излучение) можно разложить по стоячим волнам, как в ряд Фурье. При этом на каждую стоячую волну приходится средняя энергия равная $2\cdot(1/2\kappa T)$, так как электромагнитная волна имеет две степени свободы, соответствующие электрическому E и магнитному H полю:

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right). \qquad (1.2.11)$$

Сосчитаем число стоячих волн, приходящихся на единицу интервала частот.

1). *Одномерный случай*

Стоячая волна представляет собой сумму 2-х волн, распространяющихся в противоположных направлениях – вдоль и против оси x

$$E = E_0 Cos(\omega t - kx)$$
$$E = E_0 Cos(\omega t + kx + \alpha) \quad (1.2.12)$$

Если одномерная область ограничена ($0 \le x \le a$), то на границах области проявляются либо *узлы* (пример из механики: закрепленная на краях струна), либо *пучности* (стержень, закрепленный посередине).

а) Если $\alpha = 0$, то в точке $x = 0$ будет пучность и сумма двух волн дает:

$$E = 2E_0 Coskx Cos\omega t \quad (1.2.13)$$

(при $x = 0$ имеем $E = 2E_0 \cdot Cos\omega t$).

б) Если $\alpha = \pi$, то в точке $x = 0$ имеем узел:

$$E = 2E_0 Cos\left(kx + \pi/2\right) Cos\left(\omega t + \pi/2\right) = 2E_0 Sinkx Sin\omega t \quad (1.2.14)$$

(при $x = 0$ получаем $E = 0$).

Пусть для определенности имеем на границах области узлы (те же результаты могут быть получены для пучностей), тогда на правой границе $x = a$ тоже узел, т.е. фаза, входящая в $Sinkx$, должна быть равна:

$$ka = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, ...). \quad (1.2.15)$$

Пусть имеется 2 стоячих волны с разными волновыми числами: $k_1 = (\pi/a)n_1$ и $k_2 = (\pi/a)n_2$. Разность чисел (n_2 - n_1) определяет число стоячих волн ΔN, модули векторов которых лежат в интервале волновых чисел $\Delta k = k_2 - k_1$:

$$\Delta N_k = \frac{a}{\pi}\Delta k \quad (1.2.16)$$

Перейдем к непрерывной последовательности, считая, что Δk между соседними стоячими волнами маленькая величина:

$$dN = \frac{a}{\pi}dk, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad dk = \frac{1}{c}d\omega.$$

Итак, число стоячих волн, частоты которых лежат в диапазоне $\omega \div \omega + d\omega$ определяется:

$$dN = \frac{2a}{\pi c}d\omega, \quad (1.2.17)$$

где множитель 2 появился из-за того, что возможны два типа поляризации э/м волн. Отношение $dN/d\omega$ называют плотностью состояний.

2) *Трехмерный случай*

Рассмотрим трехмерный ящик с размерами a, b, c (рис. 2.2 А). При рассмотрении этого случая учтем, что при отражении от стенки проекция вектора $\vec{k}$ на направление, перпендикулярное к стенке, т.е. например k_x меняется на "- k_x" при отражении, как показано на рисунке 2.2 Б. Итак, стоячая волна в прямоугольном ящике возникает при наложении 8-ми бегущих волн, отличающихся знаками проекций вектора $\vec{k}$:

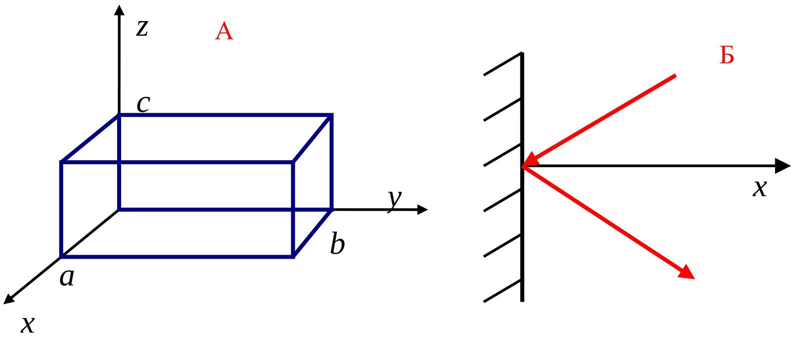

Рис. 2.2.

1) (k_x, k_y, k_z);
2) $(k_x, -k_y, k_z)$;
3) $(k_x, k_y, -k_z)$;
4) $(k_x, -k_y, -k_z)$
5) $(-k_x, k_y, k_z)$;
6) $(-k_x, -k_y, k_z)$;
7) $(-k_x, k_y, -k_z)$;
8) $(-k_x, -k_y, -k_z)$;

Пусть для определенности имеем на стенках при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ узлы, тогда уравнение стоячей волны приобретает вид:

$$E = 8E_o \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \cdot \sin \omega t\,. \tag{1.2.18}$$

Для того чтобы узлы стоячей волны наблюдались также на стенках $x = a$, $y = b$, $z = c$ (т.е. во всех восьми вершинах рассматриваемой области), необходимо выполнение условия:

$$k_x = \frac{\pi}{a} n_x\,; \quad k_y = \frac{\pi}{b} n_y\,; \quad k_z = \frac{\pi}{c} n_z\,, \tag{1.2.19}$$

где $n_x, n_y, n_z = 1,2,3,\ldots$ В $k-$ пространстве с осями k_x, k_y, k_z каждой стоячей волне отвечает точка, положение которой задается проекцией волнового вектора на координатные оси (см рис. 2.3). На долю каждой точки приходится объем $\dfrac{\pi^3}{abc} = \dfrac{\pi^3}{V}$, где $V-$ объем пространственной области (ящика). Следовательно, плотность точек равна V/π^3. Объем бесконечно малого кубика в $k-$ пространстве, показанного на рис. 2.3, будет равен

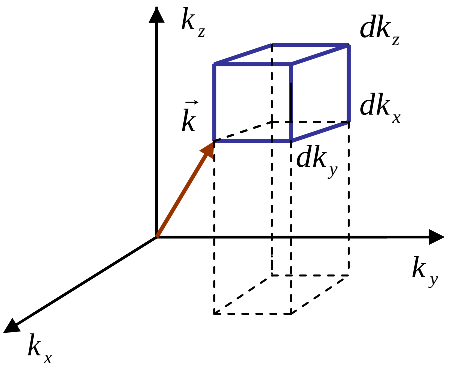

Рис. 2.3.

$$dk_x dk_y dk_z = \frac{\pi^3}{abc} dn_x dn_y dn_z \tag{1.2.20}$$

Тогда число стоячих волн, заключенном в этом кубике определяется выражением

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \frac{abc}{\pi^3} dk_x dk_y dk_z\,. \tag{1.2.21}$$

Поскольку именно модуль волнового вектора $\vec{k}$ определяет частоту (или длину) волны излучения ($k = \omega/c$), будем рассматривать объем фазового пространства, соответствующий только его изменению. Число стоячих волн, у которых модуль волнового вектора лежит в пределах от k до $k \div k + dk$, равно количеству точек, попадающих в пределы $1/8$ части шарового слоя радиуса k и толщины dk.

$$dN = \frac{V}{8\pi^3} 4\pi k^2 dk = V \frac{k^2 dk}{2\pi^2} = V \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}\,. \tag{1.2.22}$$

Множитель $1/8$ появляется из-за того, что при сложении бегущих электромагнитных волн уже учтены проекции волнового вектора обоих знаков. Поэтому здесь берутся только положительные значения компонент волнового вектора: $k_x, k_y, k_z > 0$.

Полученное выражение необходимо умножить на 2, поскольку вдоль заданного направления могут распространяться 2 электромагнитные волны одинаковой частоты, отличающиеся направлением поляризации (поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях). Таким образом, число стоячих волн, приходящихся на единицу объема, в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ равно

$$dn_\omega = \frac{2dN}{V} = \frac{2\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}\,;$$

$$dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}\,. \tag{1.2.23}$$

Итак, плотность стоячих волн, приходящаяся на единицу частоты, или иначе плотность состояний, пропорциональна квадрату частоты. *Мы получили важный результат, справедливый как в классической, так и в квантовой физике, и используемый при решении различных задач, где требуется вычислить плотность состояний.*

Плотность энергии для электромагнитного поля, как известно, равна

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right).$$

Из статистических соображений Рэлей и Джинс предположили, что на каждую стоячую волну будет приходиться в среднем энергия, равная величине $2\cdot\frac{1}{2}kT$, то есть по одной половинке энергии kT на электрическую и магнитную компоненты электромагнитной волны. Тогда плотность энергии электромагнитного поля, приходящаяся на интервал частот $d\omega$, равна:

$$u(\omega,T)d\omega = \langle\varepsilon\rangle dn_\omega = 2\frac{kT}{2}\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \tag{1.2.24}$$

Отсюда спектральная плотность излучения получается равной:

$$u(\omega,T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kT \tag{1.2.25}$$

и испускательная способность абсолютно черного тела:

$$f(\omega,T) = \frac{c}{4}u(\omega,T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}kT\ . \tag{1.2.26}$$

Формулы (1.2.25) и (1.2.26) – *закон или формулы Рэлея-Джинса*.

Перечислим основные свойства соотношений (1.2.25) и (1.2.26).

а). Формула (1.2.26) удовлетворяет критерию Вина:

$$f(\omega,T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}kT = \frac{k}{4\pi^2 c^2}\omega^3\left(\frac{T}{\omega}\right) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right), \tag{1.2.27}$$

или

$$\varphi(\lambda,T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2}\frac{kT}{4\pi^2 c^2}\frac{(2\pi c)^2}{\lambda^2} = \frac{2\pi c}{\lambda^5}k\lambda T = \frac{2\pi c}{\lambda^5}\psi(\lambda T). \tag{1.2.28}$$

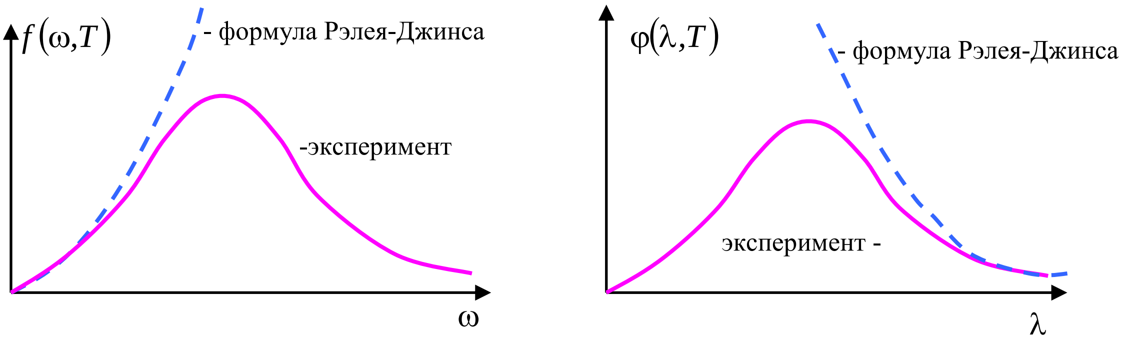

Рис. 2.4.

б). Сравнение с экспериментом показано на рис. 2.4: формула Рэлея-Джинса хорошо описывает экспериментальную кривую только в длинноволновой ($\lambda > 7\cdot 10^3\,нм$) области спектра (или при низких частотах) и резко расходится с опытом для малых длин волн. Более того, при расчете энергетической светимости (интегральной испускательной способности) интегрирование формулы Рэлея-Джинса дает расходящееся выражение:

$$R(T) = \int_0^\infty A\omega^2 T d\omega = AT\int_0^\infty \omega^2 d\omega = \frac{AT}{3}\omega^3\Big|_0^\infty \to \infty \tag{1.2.29}$$

Итак, из этой теории получаем, что при любой температуре энергетическая светимость бесконечна. Причем с ростом частоты электромагнитных волн плотность энергии излучения возрастает. Эта нефизическая расходимость получила название *ультрафиолетовой катастрофы*. Опыт показывает, что равновесие между излучением и излучающим телом устанавливается при конечных значениях энергетической светимости или плотности энергии излучения $U(T)$.

Примечание 2. *Джон Уильям Рэлей (Стретт), английский физик, 1842–1919, Нобелевская премия 1904 г. за открытие аргона;*

Джеймс Хопвуд Джинс, английский физик, 1877–1946.

1.2.3. Формула Вина.

В.Вин в 1896 г. предложил конкретный вид для функции $F(\omega/T)$. Он рассмотрел хаотическое движение атомов как квазипериодический процесс, и средней энергии этого квазипериодического движения сопоставил определенную частоту ω: $\langle\varepsilon\rangle \sim \langle v^2\rangle \sim \omega$. При этом, как рассуждал Вин, каждая мода колебаний является носителем энергии $\varepsilon(\omega)$, но не все моды данной частоты возбуждены. Относительное число $\Delta N/N$ возбужденных мод задается распределением Больцмана

$$\frac{\Delta N}{N} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \tag{1.2.30}$$

и тогда для средней энергии, приходящейся на возбужденные моды с частотой ω, имеем

$$\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon(\omega)\frac{\Delta N}{N} = \varepsilon(\omega)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{1.2.31}$$

Если $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sim e^{-\frac{m\langle v^2\rangle}{2kT}} \sim e^{-\frac{B\omega}{T}}$ и, по предположению Вина, $\langle\varepsilon(\omega)\rangle \sim \omega$, то, используя полученное выше выражение для плотности состояний (1.2.23), получаем следующую формулу:

$$u(\omega,T)d\omega = C_1\omega\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2c^3}e^{-\frac{B\omega}{T}} = A\omega^3 e^{-\frac{B\omega}{T}}d\omega.$$

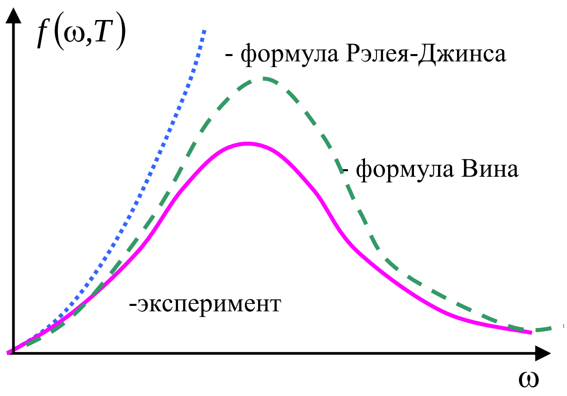

Рис. 2.5.

Итак, формула Вина для универсальной функции равна:

$$u(\omega,T) = A\omega^3 e^{-\frac{B\omega}{T}}. \tag{1.2.32}$$

Здесь A и B – постоянные коэффициенты. Эта формула позволила описать эксперимент в коротковолновой (при больших частотах) области и довольно близка к общей экспериментальной зависимости (рис. 2.5). Однако она противоречит эксперименту Луммера и Прингсгейма (1899г.) в области низких частот ($\omega < 10^{14}\,сек^{-1}$ или $\lambda > 10^4\,нм$): при частоте стремящейся к нулю, т.е. в ИК области спектра, эксперимент дает:

$$u(\omega,T)\big/\omega^2 \to const.$$

Таким образом, по-прежнему не удается добиться согласия теории с опытом, особенно в “промежуточной” области спектра.

Литература

Сивухин Оптика §§116,117