1.3. Формула Планка

1.3.1. Гипотеза квантов.

С классической точки зрения вывод формулы Рэлея-Джинса является безупречным. Поэтому расхождение этой формулы с опытом указывало на существование неизвестных закономерностей, несовместимых с представлениями классической физики.

В октябре 1900 г. немецкий физик М. Планк сначала эмпирически, а затем, обосновав через 2 месяца теоретически, записал формулу для спектральной плотности излучения черного тела. Универсальная функция равна:

$$f(\omega,T)=\frac{A\omega^3}{exp\left(\frac{B\omega}{T}\right)-1}=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}; \qquad (1.3.1)$$

Или плотность энергии излучения имеет вид:

$$u(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}, \qquad (1.3.2)$$

где $\hbar$ – коэффициент пропорциональности между энергией и циклической частотой, получивший название *постоянной Планка*.

Численное значение постоянной Планка $\hbar=1{,}054\cdot10^{-34}\,Дж\cdot c$ было определено из опыта. Сначала эту формулу Планк получил просто интерполяционным путем (комбинация закона Рэлея-Джинса и формулы Вина). Далее при теоретическом выводе ему пришлось ввести *гипотезу квантов*.

Через 8 недель после полуэмпирического открытия своей формулы (1.3.1) Планк представил её теоретический вывод на заседании Немецкого физического общества. Это случилось 14 декабря 1900 г. и этот день стал днем рождения *квантовой физики*. При выводе формулы Планк выдвинул гипотезу, в корне противоречащую всему построению классической физики: *излучение* (позже, и поглощение) *происходит не непрерывно, а конечными порциями – квантами света или квантами энергии*.

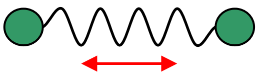

Рис. 3.1.

Основной вопрос – что излучает? Осцилляторы! Осцилляторы (атомы, молекулы) могут находиться только в некоторых избранных стационарных состояниях, в которых их энергия является целым кратным некоторого наименьшего количества энергии ε_0: $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, ..., n\varepsilon_0$. То есть энергия микроскопических систем может принимать только дискретные, строго определенные значения.

Переход из одного стационарного состояния в другое может происходить скачком в результате излучения (поглощения) осциллятором такого же кратного количества энергии: $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, ..., n\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0=\hbar\omega$ (или $\varepsilon_0=h\nu_0, \hbar=h/2\pi$) – отдельная порция излучения, пропорциональная частоте излучения, а n – количество таких порций, испускаемых осциллятором на частоте ω. Динамическое равновесие осуществляется посредством постоянного обмена квантами между полем излучения и телом – осциллятором. При данной температуре T возбуждены все энергетические уровни, но с разными вероятностями. Поэтому требуется вычислить среднюю энергию осциллятора $\langle\varepsilon\rangle$ в этом состоянии статистического равновесия.

Постоянная Планка $\hbar$ имеет размерность “энергия × время”. Поэтому её иногда называют *квантом действия* по аналогии с величиной той же размерности в классической механике.

Из доклада М. Планка на заседании 14 декабря 1900 г.: “*Квант действия… либо фиктивная величина, и тогда вывод закона излучения был в принципе ложным и представлял собой всего лишь пустую игру в формулы, лишенную смысла, либо же вывод закона излучения опирается на некую физическую реальность, и тогда квант действия должен приобрести фундаментальное значение в физике и означает нечто совершенно новое и неслыханное, что должно произвести переворот в физике*…”.

Однако такие откровения даются не просто, и сам Планк вплоть до 1911 г. пытался примирить гипотезу о квантах с классической физикой. Вывод закона излучения по методу Планка в какой-то мере неудовлетворителен, поскольку он во многом основан на законах классической физики и лишь частично использует квантовые представления. Поглощение и испускание света осциллятором рассчитывалось с помощью классической электродинамики, в то время как при нахождении средней энергии осциллятора использовалась квантовая гипотеза о его дискретных энергетических уровнях. Успех такой эклектической теории связан со спецификой выбранной модели: для осциллятора классическое и квантовомеханическое рассмотрение процессов поглощения и испускания приводит к одинаковым результатам.

1.3.2. Вывод формулы Планка по Эйнштейну.

В 1916 г. А. Эйнштейн дал сравнительно простой вывод формулы Планка, используя для моделирования механизма излучения переходы в 2^x-уровневой системе и применив к описанию процессов вероятностный подход.

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ – значения энергий, которые характеризуют состояние рассматриваемой системы (атом, молекула и т.д.). Рассмотрим систему атомов (молекул и т.д.), описываемую дискретным энергетическим спектром, совокупность значений которого исчерпывается двумя величинами ε_m и ε_n. В ε- пространстве этим значениям энергий можно сопоставить энергетические уровни ε_m и ε_n, а состояние системы описывать заданием положения этих уровней. Такая система называется *двухуровневой*. Процесс излучения (рис. 3.2) можно рассматривать как переход системы из состояния, характеризуемого верхним энергетическим уровнем в состояние, которому соответствует нижний энергетический уровень, или, как принято выражаться, переход с верхнего уровня на нижний уровень. При этом энергия излучения равна:

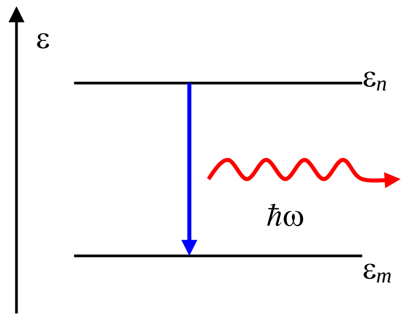

Рис. 3.2.

$$\hbar\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m. \qquad (1.3.3)$$

То есть для такого элементарного процесса выполняется закон сохранения энергии: энергия испускаемого или поглощаемого фотона равна разности энергий соответствующих стационарных состояний.

Эйнштейн ввел в рассмотрение два типа переходов, сопровождаемых излучением, и переход, связанный с поглощением кванта.

1). *Спонтанное излучение* – самопроизвольный переход с уровня ε_n на уровень ε_m, который происходит без участия внешних полей, носит статистический характер (рис. 3.3). Предсказать в какой именно момент произойдет этот переход невозможно. Момент испускания фотона есть величина случайная, т.е. мы не можем с достоверностью предсказать, произойдет или нет в данном атоме переход в течение промежутка времени dt, следующего за моментом t, но можем только указать его вероятность.

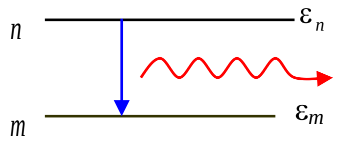

Рис. 3.3.

Пусть в момент времени $t = \tau$ в состоянии n находилось N_n атомов, а через промежуток времени dt часть атомов перешла в состояние m, а часть осталась в состоянии n. Тогда за время dt число переходов $n \to m$ (из n в m) пропорционально числу атомов на верхнем уровне N_n. Если *вероятность спонтанных переходов* обозначить A_{nm}, то среднее число таких переходов можно записать:

$$dN_{nm}^{сп} = A_{nm} N_n dt. \qquad (1.3.4)$$

Статистический характер процессов спонтанного излучения приводит к тому, что фазы, направления распространения и состояния поляризации световых волн, испускаемых отдельными атомами, не согласованы друг с другом. Это означает, что спонтанное излучение *некогерентно*.

2). В электромагнитном поле будут происходить *процессы поглощения*. Это – процессы возбуждения атомов, а именно, переходы атомов из основного состояния в возбужденное за счет поглощения фотонов. Переход из нижнего энергетического состояния в верхнее соответствует *поглощению энергии* (см рис. 3.4). Этот переход всегда *вынужденный*. Он описывает резонансный процесс, в котором система, переходя из состояния с энергией ε_m в состояние, характеризуемое уровнем ε_n, поглощает квант энергии, следуя (1.3.3):

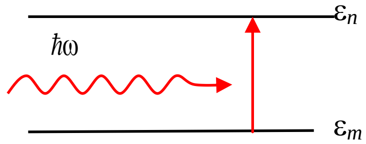

Рис. 3.4.

$$\hbar\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m.$$

Вероятность такого процесса в единицу времени пропорциональна плотности энергии электромагнитного поля $u(\omega, T)$ и некоторому коэффициенту B_{mn}, характеризующему *вероятность возбуждения атома*.

Среднее число переходов $dN_{mn}^{вын}$ из основного состояния в возбужденное за промежуток времени от t до $t+dt$ пропорционально также числу N_m атомов в основном состоянии, поэтому можно записать:

$$dN_{mn}^{вын} = B_{mn} N_m u(\omega, T) dt. \qquad (1.3.5)$$

3) Допустим, что атомы находятся в термодинамическом равновесии с веществом. Тогда на основании *принципа детального равновесия* число переходов с испусканием и поглощением фотонов должно быть одинаково. Однако, приравняв правые части (1.3.4) и (1.3.5), мы получим не формулу Планка, а её предельный случай при $\hbar\omega/kT >> 1$, т.е. формулу Вина. Чтобы таким путем получить согласующуюся с опытом формулу Планка, необходимо, как впервые показал Эйнштейн, предположить, что электромагнитное поле вызывает не только переходы из основного состояния в возбужденное, но вынуждает совершать и обратные переходы – из возбужденного состояния в основное, сопровождающиеся испусканием фотонов. Такие переходы под действием внешнего поля в отличие от спонтанных получили название *индуцированного* или *вынужденного* (стимулированного) излучения.

Вынужденное (индуцированное) излучение – излучение, появляющееся под действием или влиянием внешнего электромагнитного поля, частота которого близка или равна частоте квантового перехода ω_{nm} (см рис. 3.5). Иногда его называют *отрицательным поглощением*. Вынужденное излучение обладает замечательными свойствами, на что впервые обратил внимание П. Дирак в 1927 г. В каждом акте вынужденного испускания происходит увеличение на единицу числа фотонов в той моде излучения, под действием которой произошел переход. Все фотоны одной моды тождественны. Это означает, что новый фотон неотличим от фотонов, вызывающих его испускание. Частота, фаза, направление распространения и поляризация волн, испущенных при вынужденных переходах, точно такие же, как у излучения, вызвавшего переходы. Т.е. эти излучения *когерентны*.

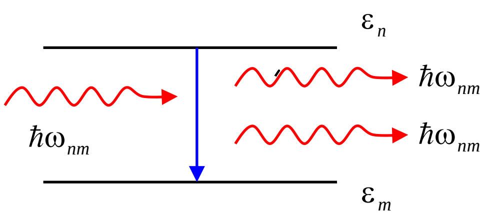

Рис. 3.5.

Для описания индуцированного излучения, как и спонтанного, существует классическая аналогия: классический осциллятор в поле в поле световой волны будет совершать вынужденные колебания. В неустановившемся состоянии вблизи резонанса в зависимости от соотношения фаз между колебаниями осциллятора и внешнего поля энергия поля может переходить как от поля к осциллятору (поглощение), так и от осциллятора к полю (вынужденное испускание).

Число вынужденно испущенных фотонов за промежуток времени от t до $t+dt$ пропорционально заселенности верхнего энергетического уровня N_n, спектральной плотности излучения $u(\omega, T)$ и вероятности вынужденных переходов из возбужденного состояния в основное B_{nm}:

$$dN_{nm}^{вын} = B_{nm} N_n u(\omega, T) dt. \qquad (1.3.6)$$

Полное число переходов за время dt из возбужденного состояния в основное будет определяться совокупностью спонтанного и вынужденного излучения.

Пусть состояние системы равновесно, тогда имеет место *детальное равновесие*:

$$dN_{nm}^{сп} + dN_{nm}^{вын} = dN_{mn}^{вын}, \qquad (1.3.7)$$

или подробнее с учетом (1.3.4) – (1.3.6):

$$A_{nm} N_n + B_{nm} N_n u(\omega_{nm}) = B_{mn} N_m u(\omega_{nm}). \qquad (1.3.8)$$

Таким образом, в состоянии равновесия имеем для отношения «заселенностей» состояний:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{B_{mn} u(\omega_{nm})}{A_{nm} + B_{nm} u(\omega_{nm})}. \qquad (1.3.9)$$

Величины A_{nm}, B_{nm} и B_{mn} называются *коэффициентами Эйнштейна*. Они являются характеристиками только самой системы (атома, молекулы) и могут зависеть лишь от частоты ω_{nm}, которая связана с выбранными энергетическими состояниями ε_n и ε_m, и не зависят от спектральной плотности энергии поля.

Рассмотрим следующие случаи для выбранных уровней.

1) Энергетические уровни m, n – простые, иначе говоря, невырожденные или не кратные. Тогда для данной пары уровней коэффициенты Эйнштейна B_{nm} и B_{mn} равны друг другу. Действительно, при

очень высокой температуре плотность энергии $u(\omega,T)$, которой пропорциональны вынужденные переходы, становится настолько большой, что спонтанным излучением можно пренебречь по сравнению с индуцированными переходами. Тогда имеем $B_{nm}N_n = B_{mn}N_m$. Но в равновесии при $\hbar\omega/kT \to \infty$ населенности уровней выравниваются ($N_n = N_m$), поэтому получаем:

$$B_{nm} = B_{mn} \tag{1.3.10}$$

Равенство $B_{nm} = B_{mn}$, полученное для предельного случая $T \to \infty$, справедливо всегда, в том числе и в отсутствие теплового равновесия, т.к. коэффициенты B_{nm} и B_{mn} зависят только от свойств атомов и не зависят от внешних условий, в которых происходят переходы.

2) Уровни энергии m, n – вырожденные (кратные). В квантовой физике вырождение заключается в том, что некоторая физическая величина, характеризующая данную систему (атом, молекулу и т.д.) имеет одинаковое значение для различных состояний системы. Число таких различных состояний (способов реализации), которым отвечает одно и то же значение данной физической величины, называется *кратностью вырождения* этой величины. При этом уровни m, n могут иметь разный статистический вес. Пусть g_m – статистический вес уровня с энергией ε_m, а g_n – статистический вес уровня с энергией ε_n. Тогда при $T \to \infty$ получаем следующее равенство

$$g_m B_{mn} = g_n B_{nm}. \tag{1.3.11}$$

Если система атомов находится в равновесии, то атомы населяют энергетические уровни так, как это следует из распределения Больцмана. Тогда вероятность заселения уровня с энергией ε_m равна:

$$W_m = C g_m \, exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right), \tag{1.3.12}$$

и аналогично для уровня с энергией ε_n:

$$W_n = C g_n \, exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right). \tag{1.3.13}$$

Далее для (1.3.9) имеем:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n \, exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)}{g_m \, exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)} = \frac{g_n}{g_m} exp\left(-\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{kT}\right) = \frac{B_{mn}u(\omega,T)}{A_{nm} + B_{nm}u(\omega,T)}. \tag{1.3.14}$$

Отсюда выражаем спектральную плотность излучения:

$$u(\omega,T) = \frac{g_n A_{nm}}{g_m B_{mn} \, exp\left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{kT}\right) - g_n B_{nm}}. \tag{1.3.15}$$

Теперь, устремляя $T \to \infty$ и помня, что $\hbar\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m$, получаем $\exp(\hbar\omega/kT) \to 1$ и $u(\omega,T) \to \infty$. Это возможно получить только при выполнении условия (1.3.11), как обсуждали ранее. Тогда, упрощая выражение (1.3.15), можем записать

$$u(\omega,T) = \frac{A_{nm} g_n}{g_n B_{nm}\left[exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}\left[exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]}. \tag{1.3.16}$$

Чтобы определить отношение A_{nm}/B_{nm}, не производя дополнительных вычислений, воспользуемся формулой Рэлея-Джинса, которая справедлива в пределе $\omega \to 0$ или $\hbar\omega << kT$. Если $\hbar\omega/kT << 1$, то, раскладывая (1.3.16) в ряд, имеем

$$exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}, \tag{1.3.17}$$

тогда

$$u(\omega,T)\approx\frac{A_{nm}}{B_{nm}}\frac{1}{1+\frac{\hbar\omega}{kT}-1}=\frac{A_{nm}}{B_{nm}}\frac{kT}{\hbar\omega}. \qquad (1.3.18)$$

С другой стороны, формула Рэлея-Джинса в рассматриваемом пределе дает:

$$u(\omega,T)=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}kT. \qquad (1.3.19)$$

Приравнивая правые части (1.3.18) и (1.3.19), получаем

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}}=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}. \qquad (1.3.20)$$

Таким образом, опуская индексы n и m, теперь можем записать формулу Планка, определяющую плотность энергии равновесного излучения (1.3.2):

$$u(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}-1\right)}$$

или испускательную способность абсолютно черного тела (1.3.1)

$$f(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$$

Примечание 1. *Макс Карл Эрнст Людвиг Планк, немецкий физик-теоретик,1858 – 1947, Нобелевская премия 1918 г. за открытие кванта действия;*
Альберт Эйнштейн, немецкий физик-теоретик, 1879–1955, Нобелевская премия 1921г. за объяснение законов фотоэффекта;
Поль Андриен Морис Дирак, английский физик-теоретик, 1902–1974, Нобелевская премия 1933г. за создание квантовой механики

1.3.3. Свойства формулы Планка.

Рассмотрим основные свойства формулы Планка, а также как она согласуется с прежними результатами.

1) Формула Планка согласуется с экспериментом при всех значениях частоты ω, или длины волны λ.
2) Удовлетворяет критерию Вина $f(\omega,T)=A\omega^3F\left(\frac{\omega}{T}\right)$.
3) В предельном случае больших частот излучения ($\omega\to\infty$, малые длины волн λ): $\hbar\omega>>kT$, $exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)>>1$, переходит в формулу Вина:

$$f(\omega,T)=\frac{\hbar}{4\pi^2c^2}\omega^3\,exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right). \qquad (1.3.21)$$

4) В предельном случае малых частот (при $\omega\to 0$ или больших длинах волн λ): $\hbar\omega<<kT$, $exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\approx 1+\frac{\hbar\omega}{kT}$, переходит в формулу Рэлея-Джинса

$$f(\omega,T)=\frac{\omega^2}{4\pi^2c^2}kT. \qquad (1.3.22)$$

5) Интегрируя по всем частотам, получаем закон Стефана-Больцмана:

$$R(T)=\int_0^\infty f(\omega,T)d\omega=\sigma T^4, \qquad (1.3.23)$$

где $\sigma = \dfrac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3}$ – постоянная Стефана-Больцмана.

6) Запишем “по Планку” испускательную способность абсолютно черного тела, перейдя от ω к λ:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

$$\varphi(\lambda, T) = f(\omega, T)\frac{d\omega}{d\lambda},$$

получаем

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{\hbar(2\pi c)^3}{4\pi^2 c^2 \lambda^3} \frac{2\pi c/\lambda^2}{exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1} = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1}. \quad (1.3.24)$$

7) Получаем закон смещения Вина: $T\lambda_{max} = b$. В самом деле:

$$\frac{d\varphi(\lambda, T)}{d\lambda} = 0 = 4\pi^2 \hbar c^2 \left[\frac{1}{\lambda^5 \, exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT} - 1\right)}\right]'_{\lambda} = \frac{-5\lambda^{-6}}{exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1} + \frac{\lambda^{-5} \, exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) \cdot \frac{2\pi\hbar c}{kT}\lambda^{-2}}{\left[exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1\right]^2}$$

Корни $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ дают минимум функции $\varphi(\lambda, T)$. Обозначим $\dfrac{2\pi\hbar c}{kT\lambda_{max}} = x$ и тогда получаем трансцендентное уравнение:

$$-5 + \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0 \qquad \text{и} \qquad xe^x - 5(e^x - 1) = 0.$$

Его решение: $x_0 = \dfrac{2\pi\hbar c}{kT\lambda_{max}} = 4{,}965$ и получаем закон смещения Вина:

$$T\lambda_{max} = b = \frac{2\pi\hbar c}{4.965 \cdot k} \quad (1.3.25)$$

Приложение 1. Биографическая справка. Max Karl Ernst Ludwig Plank (1858 – 1947 гг.). Из семьи юриста. Обучался в Мюнхенском и Берлинском университетах (Кирхгоф, Гельмгольц). С 1895 г.- профессор в Киле, с 1889 г.- в Берлине. В 1930 – 37 гг.- президент общества Кайзера Вильгельма за развитие науки. Почетный член АН СССР с 1926 г. Член Лондонского Королевского Общества с 1926 г. Нобелевская премия 1918 г. - “За открытие кванта действия”. (1ый сын погиб в первой мировой войне, 2ой сын казнен в 1945 г. как участник движения Сопротивления).

Приложение 2.

Приведем другой вывод формулы Планка, исходя из предположения, что энергетический спектр осциллятора дискретный, эквидистантный, а расстояние между соседними уровнями равно $\hbar\omega$. При конечной температуре T вероятность того, что осциллятор имеет энергию $n\hbar\omega$ (где n = 1, 2, 3,…) определяется распределением Больцмана

$$P(n\hbar\omega) = Ae^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}.$$

Тогда можно сосчитать среднее значение энергии осциллятора при конечной температуре:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\hbar\omega e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega x}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega x}} = \frac{-\frac{\partial}{\partial x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega x}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega x}}$$

Для упрощения введем $x = 1/kT$ и просуммируем геометрическую прогрессию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega x} = 1 + e^{-\hbar\omega x} + e^{-2\hbar\omega x} + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega x}}$$

Представляя сумму в числителе в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\hbar\omega e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}},$$

получаем:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{-\dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{1}{1 - e^{-\hbar\omega x}}}{\dfrac{1}{1 - e^{-\hbar\omega x}}} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(1 - e^{-\hbar\omega x}\right)}{1 - e^{-\hbar\omega x}} = \frac{\hbar\omega e^{-\hbar\omega x}}{1 - e^{-\hbar\omega x}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega x} - 1}$$

Средняя энергия должна быть умножена на статистический вес этого состояния в единице объема, т.е. на плотность состояний. Вспоминая, что плотность состояний (1.2.23) $\omega^2 / \pi^2 c^3$, получаем формулу Планка для спектральной плотности энергии излучения

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT} - 1\right)}$$

<u>Литература</u>

Сивухин Оптика §118.