2.2. Волны де Бройля.

2.2.1. Гипотеза де-Бройля.

В Главе 1 мы рассматривали корпускулярные свойства излучения, или иначе, как называли ранее, *дуализм* электромагнитных волн: “волна – частица”. В 1924 году Луи де Бройль выдвинул гипотезу, что *корпускулярно-волновой дуализм* не является особенностью только оптических явлений (т.е. электромагнитных волн), а носит универсальный характер. Он предположил, что материальные частицы должны проявлять волновые свойства.

К этой гипотезе его привела аналогия между геометрической оптикой и механикой Ньютона, что еще ранее было отмечено У. Гамильтоном. В самом деле, их основные законы математически представляются в одинаковой форме: движение частицы в поле с потенциалом $V(x,y,z)$ можно представить как движение световых лучей в среде с соответственно выбранным показателем преломления $n(x,y,z)$. Однако геометрическая оптика описывает далеко не все оптические явления, также как механика Ньютона – не все механические явления. Идея Луи де Бройля состояла в следующем: может, следует расширить аналогию и волновой оптике сопоставить волновую механику?

Луи де Бройль перенес правила перехода от корпускулярной картины света к волновой и на частицы. Запишем эти правила перехода для волн и частиц.

Свет (электромагнитная волна)		Частицы (например, электроны)	
Частота	ω	Энергия	E
Волновой вектор	$\vec{k}$	Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$
Длина волны	$\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi c}{\omega}$	*Переход к волнам*	
Переход к фотонам		Частота	$\omega = E/\hbar$
Энергия	$E = \hbar\omega$	Длина волны	$\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{p} = \dfrac{2\pi\hbar}{mv}$
Импульс	$\vec{p} = \hbar\vec{k} = \left(\dfrac{\vec{\hbar\omega}}{c}\right)$	Волновой вектор	$\vec{k} = \dfrac{\vec{p}}{\hbar}$

Итак, в рамках этой гипотезы движению частицы массы m со скоростью v можно сопоставить волновой процесс с длиной волны λ, равной:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{2.2.1}$$

где импульс p – релятивистский импульс:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2.2.2}$$

Здесь m_0 – масса покоя, а $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ – релятивистская масса. Длина волны, определяемая из (2.2.1), – это *длина волны де Бройля*.

Далее продолжая сопоставление волн и частиц, можно получить волновой вектор для частицы:

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \tag{2.2.3}$$

Более того, функцию, определяющую распространение свободных монохроматических волн и движение свободных частиц можно записать аналогичным образом. Для монохроматической электромагнитной волны имеем

$$\psi = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$$

или в комплексной форме

$$\psi(\vec{r},t) = Ae^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}$$

где $\psi(\vec{r},t)$ означает либо напряженность электрического поля, либо напряженность магнитного поля.

Для свободной частицы записываем по аналогии

$$\psi = Ae^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}\left(Et - \vec{p}\vec{r}\right)} \tag{2.2.4}$$

Проводя такую аналогию, необходимо теперь понять, каково физическое содержание функции $\psi(\vec{r},t)$ из (2.2.4) и что она дает для описания частицы.

2.2.2. <u>Свойства волн де-Бройля.</u>

Определим основные свойства волн де Бройля, исходя из соотношений для обычных волн.

1). Фазовая скорость волн де Бройля определяется как обычно:

$$v_{ф} = \frac{\omega}{k}.$$

Для электромагнитных волн мы получали: $v_{э/м} = c$ или $v_{э/м} = c/\sqrt{\varepsilon\mu} = c/n$. Для частиц поступаем аналогично:

$$v_{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{m_0c^2}{m_0v} = \frac{c^2}{v} \tag{2.2.5}$$

где v – скорость частицы. Поскольку скорость частицы всегда меньше скорости света, то *фазовая скорость волн де Бройля всегда больше скорости света*:

$$v_{ф} = \frac{c^2}{v} > c.$$

Это не противоречит физическому смыслу, поскольку фазовая скорость не определяет скорость распространения материального объекта (вспомним рассуждения в разделе СТО).

2). Групповая скорость волн де Бройля определяется также аналогично групповой скорости электромагнитных волн. Она получалась из условия постоянства фазы амплитуды огибающей при сложении двух волн с близкими частотами и определялась из соотношения

$$v_{гр} = d\omega/dk.$$

Для частиц получаем:

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = v \tag{2.2.6}$$

что *групповая скорость волн де Бройля совпадает со скоростью самой частицы*. В самом деле, вспомним, что производная энергии по импульсу определяет скорость частицы:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} = \frac{pc^2}{\sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{mc^2} = \frac{p}{m} = v$$

или это же можно получить иначе

$$\frac{dE}{dp} = \frac{Fds}{dp} = \frac{\frac{dp}{dt}ds}{dp} = \frac{ds}{dt} = v$$

Произведение фазовой скорости (2.2.5) на групповую скорость (2.2.6) дает:

$$v_{гр}v_{ф} = c^2 \tag{2.2.7}$$

Отметим, что физический смысл волн де Бройля был понят не сразу. На основании факта, что групповая скорость равна скорости частицы, некоторое время частицу считали образованием волн де Бройля. Иначе говоря, считали, что волны первичны, а частицы представляют собой их образования – пакеты волн. Однако оказалось, что не так все просто: при такой интерпретации и подобном описании появляются явные противоречия. Приведем некоторые противоречия и следствия из такой интерпретации.

А). Фазовая скорость волн де Бройля зависит от скорости частицы v, т.е. зависит от волнового числа k или длины волны λ. Поскольку пакет волн – это суперпозиция монохроматических волн с различными λ, то волны де Бройля испытывают дисперсию в пустоте. Из-за этого пакет волн де Бройля расплывается с течением времени. Однако мы знаем из опыта, что частицы живут весьма долго, не расплываются и детектируются на эксперименте как частицы определенных размеров.

Позже к дисперсии волн де Бройля мы вернемся позже, когда будем говорить о соотношении неопределенностей.

Б). Если считать частицы волнами де Бройля, то тогда они должны испытывать дифракцию. Их можно пустить на дифракционную решетку (или кристалл) и разложить волновой пакет на составляющие его волны, что приводит к уничтожению частицы. Это также противоречит опыту.

В дальнейшем обсудим интерпретацию и смысл волн де Бройля и разрешим эти противоречия.

3). Интересна связь между волнами де Бройля и стационарными орбитами. Из условия квантования Бора для круговых орбит (2.1.10) можно найти связь между стационарными орбитами и длинами волн де Бройля. В самом деле, имеем:

$$r = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n}{2\pi}\frac{2\pi\hbar}{mv} = \frac{n}{2\pi}\lambda\,,$$

$$2\pi r = n\lambda \qquad (2.2.8)$$

Последнее равенство означает, что на длине окружности орбиты укладывается целое число длин волн де Бройля, т.е. имеем стоячую волну на электронной орбите, которая не переносит и не излучает энергию. Таким образом, получаем красивую интерпретацию стационарных состояний в атомах: им соответствует образование стоячих волн де Бройля, в которых, как известно, энергия не излучается.

Примечание 1. *Луи де Бройль, французский физик-теоретик, 1892–1987, Нобелевская премия 1929 г. за открытие волновой природы электрона*;

Уильям Роуан Гамильтон, ирландский физик и математик, 1805–1865
