

2.4. Статистическое толкование волн де Бройля и соотношение неопределенностей.

2.4.1. Волны вероятности.

В §2.2 отмечалось, что из равенства групповой скорости волн де Бройля и скорости частицы, было заманчиво предполагать, что частица – это волновые образования, т.е. пакет волн де Бройля. Однако от этого положения довольно быстро отказались, поскольку такая “частица” получается нестабильной и за время порядка 10^{-24} секунды расплывается из-за дисперсии волн де Бройля в вакууме. Кроме того, в результате дифракции и интерференции такие частицы должны также делиться или разрушаться.

Что же такое представляют собой волны де Бройля, описываемые функцией $\psi(\vec{r}, t)$?

Рассмотрим интерференционный опыт (см рис. 4.1): пучок электронов бросается на экран с двумя щелями. На некотором расстоянии от щелей на другом экране измеряется число электронов, попавших в различные точки экрана. Пучок может быть такой малой интенсивности, что электроны летят и падают на экран со щелями поочередно. Это делалось для того, чтобы понять обладает ли единичный электрон волновыми свойствами.

Прямые измерения с “единичными” электронами – пучками малой интенсивности – были проведены в 1949 г. Л.М. Биберманом, Н.Г Сушкиным и В.А. Фабрикантом: пучок электронов слабой интенсивности направлялся на дифрагирующий объект. В качестве последнего брались кристаллики окиси магния, нанесённые на коллоидную плёнку. С помощью таких кристаллов получали дифракционную картину. Есть сведения, что эти же авторы проводили также эксперименты по дифракции слабого пучка электронов на

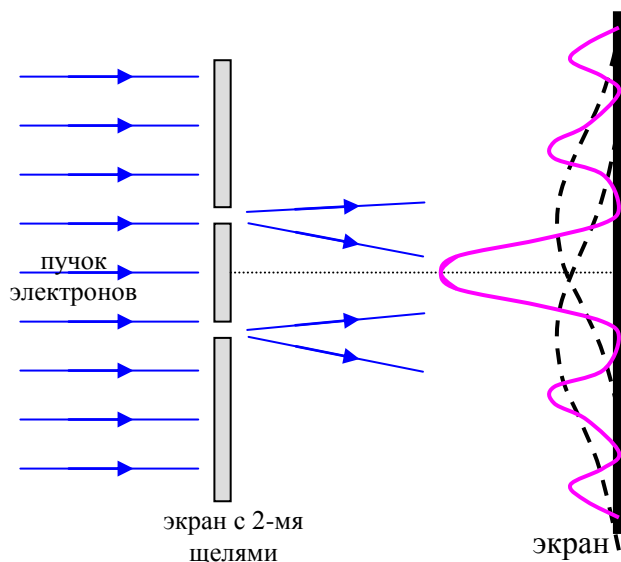


Рис. 4.1.

двух щелях и также получили дифракцию. (Однако часть физиков не признает достоверность измерений, проведенных этими авторами).

В 1961 г. эксперименты по дифракции электронов на двух щелях были проведены Йёнсенсом, а еще позже была получена дифракционная картина от одной до пяти щелей (см публикацию [C. Jönsson, D. Brandt, S. Hirschi. Electron diffraction at multiple slits. // Am. J. Phys., v. 42, 1974, p. 4_11](#)).

Существовавшая ранее точка зрения, что волновые свойства проявляются и существуют в среде с большим числом частиц (электронов), оказалась неверной. Оказалось, что даже единичные электроны, когда взаимодействие между электронами не играет никакой роли, дают интерференционную картину. Отсюда следует вывод: *отдельные электроны обладают волновыми свойствами*.

Если закрывать одну или другую щель, то получаем на экране расширенное изображение щели – пунктир на рисунке 4.1.

Но когда падают одиночные электроны на обе открытые щели, то получаем интерференционную картину.

Однако электрон не делится: он проходит либо через одну, либо через другую щель. Если поставим счетчик на фиксирующем экране, то он “срабатывает” в определенном месте от “целого” электрона и никакой интерференции не увидим. Просто следующий электрон будет зафиксирован в другом месте, за ним другой снова в другом месте и т.д. И там, где амплитуда волнового поля максимальна, там чаще будут регистрироваться электроны, там вероятность нахождения электрона максимальна. Иногда говорят, что как и в случае фотона, электрон интерферирует сам с собой, если не фиксировать его пролет через определенную щель.

Вероятность всегда связывают с квадратом модуля амплитуды волны $|A|^2$. Сама амплитуда имеет различные знаки (плюс-минус) и она является неудобной характеристикой для описания интенсивности поля.

Исходя из этого, М. Борном была предложена статистическая интерпретация волн де Бройля. Волны де Бройля следует рассматривать как волны вероятности: *Интенсивность волн де Бройля в данный момент времени и в данном месте определяет вероятность обнаружить частицу в данное время и в данном месте*. А интенсивность волн пропорциональна квадрату амплитуды.

Но статистические свойства частицы могут быть проверены на опыте не с одной частицей, а лишь со многими частицами (или с одной, если он может быть повторен многократно). То есть могут быть проверены при использовании “квантового ансамбля” – большого числа тождественных частиц.

Итак, при прохождении щелей однозначно предсказать, куда попадет электрон, невозможно. Можно лишь определить вероятность этого попадания. Пусть $\psi(\vec{r}, t)$ дает амплитуду волн де Бройля или, иначе говоря, $\psi(\vec{r}, t)$ – волновая функция, описывающая поведение частицы. Для свободной частицы мы ее уже знаем – это плоская волна:

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cdot \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})\right\} \quad (2.4.1)$$

Вероятность обнаружить частицу в какой-либо точке пространства \vec{r} и в момент времени t равна:

$$W \sim |\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi^* \psi \quad (2.4.2)$$

Для свободной частицы получаем вероятность, не зависящую от координат и времени $W \sim |A|^2$, т.е. в любом месте пространства нахождение частицы равновероятно.

Если частица находится в силовом поле, то волновая функция частицы $\psi(\vec{r}, t)$ не есть плоская волна, однако и в этом случае волновая функция дает амплитуду вероятности, причем можно записать $dW \sim |\psi(\vec{r}, t)|^2$ или более точно:

$$dW(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV, \quad (2.4.3)$$

где dW – вероятность обнаружить частицу в элементе объема dV . Плотность вероятности записывается:

$$w = \frac{dW}{dV} = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (2.4.4)$$

Сама волновая функция – ненаблюдаемая величина, она рассматривается как вспомогательная величина. Физический смысл связывается с квадратом ее модуля: $\psi^* \psi$.

Если частица существует, то где-то она с достоверностью находится, следовательно, должно выполняться условие нормировки:

$$\int dW = \int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \quad (2.4.5)$$

Отметим, что в некоторых случаях такая нормировка невозможна, например, как в случае свободной частицы. В этом случае волновые функции нормируют другим способом.

Примечание 1. Валентин Александрович Фабрикант, советский физик, 1907–1991;

Леонид Михайлович Биберман, советский и российский физик, член-корреспондент РАН, 1915–1998;

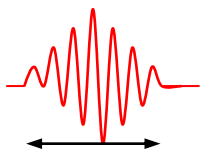
Николай Гаврилович Сушкин, советский и российский физик-изобретатель, 1911–19

Макс Борн, немецкий физик-теоретик, 1882–1970, Нобелевская премия 1954 г. за статистическую интерпретацию волновой функции.

2.4.2. Соотношение неопределенностей.

В 1927 году В. Гейзенбергом было получено соотношение неопределенностей.

Свободная частица – нелокализованная частица, ее волновая функция определяется формулой (2.4.1) и плотность вероятности равна постоянной величине $|A|^2$. Частицу можно локализовать, если описывать ее



Δx

Рис. 4.2.

пакетом волн. Рассмотрим волновой пакет частицы, локализованной по оси x , при этом амплитуда отлична от 0 на отрезке Δx (см рис. 4.2):

$$\psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) \cos\{\omega(k)t - kx\} dk \quad (2.4.6)$$

Соотношение (2.4.6) представляет собой разложение локализованной функции по волнам с определенной частотой. Итак, локализация частицы описывается пакетом или суперпозицией волн де Бройля.

Вспомним, что, изучая оптику (Оптика, Глава 1, §1.8), для пакета волн мы получали следующее соотношение неопределенностей:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 1 \quad (2.4.7)$$

или

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi$$

Здесь Δx – ширина пакета, а Δk – разброс волновых чисел тех волн, суперпозиция которых образует данный пакет. Пример с цугом волны и выводом соотношения неопределенностей мы разбирали в указанном выше разделе Оптика, еще один подобный пример приведен ниже в [Приложении 1](#).

Тогда для волнового пакета частицы, умножая (2.4.7) на постоянную Планка \hbar , получаем соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar, \quad (2.4.8)$$

где Δx – неопределенность координаты частицы, Δp_x – неопределенность проекции импульса на ось x . Их произведение не может быть меньше постоянной Планка \hbar . При рассмотрении конкретных примеров в правой части неравенства (2.4.8) могут стоять различные значения, такие как $\hbar = 2\pi\hbar$, $4\pi\hbar$ и т.д. Это зависит от того, как определяем величины неопределенностей Δx и Δp_x . Физически это означает, что *чем точнее пытаемся определить положение (координату) микрочастицы, тем менее определенным является ее импульс и наоборот*.

Однако если под неопределенностью понимать строгое определение ее как среднеквадратичные отклонения физических величин от их среднего значения, т.е. следующие определения

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} \\ \Delta p &= \sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle} = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

тогда соотношения неопределенностей принимают вид:

$$\begin{aligned} \Delta p_x \Delta x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta p_y \Delta y &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta p_z \Delta z &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Итак, существует предел в точности одновременного измерения координаты и соответствующей компоненты импульса. Таким образом, *нет понятия траектории частицы*, и это есть следствие особой природы частиц микромира (корпускулярно-волновой дуализм). Отметим, что в то же время можно измерить одновременно и с любой точностью координату x , например, и перпендикулярную компоненту импульса p_y (или p_z), т.е. формально можно записать

$$\Delta x \Delta p_y \geq 0$$

Известно, что x и p_x *канонически сопряженные величины*, так же как и пары по другим осям: $y \leftrightarrow p_y$ и $z \leftrightarrow p_z$. Кроме них имеются и другие канонически сопряженные величины, например: $E \leftrightarrow t$, $\varphi \leftrightarrow L_z$. Оказывается, что соотношение неопределенностей всегда верно для любой пары канонически сопряженных (дополнительных друг другу) величин. Так, например, если имеем пару канонически сопряженных величин $A \leftrightarrow B$, тогда произведение неопределенностей значений двух сопряженных переменных не может быть меньше $\hbar/2$:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \hbar/2 \quad (2.4.11)$$

Так как энергия и время являются тоже канонически сопряженными величинами, то имеем еще одно соотношение неопределенностей:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2 \quad (2.4.12)$$

Соотношение (2.4.12) имеет более сложное физическое содержание из-за того, что имеются как стационарные, т.е. постоянные во времени, состояния, так и нестационарные состояния, время жизни которых конечно.

1). Если частица находится в стационарном состоянии, то определение энергии с точностью ΔE должно занять время, по меньшей мере $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$. Т.е. здесь связываемся с процессом измерения или наблюдения: чем меньше время наблюдения, тем меньше точность определения энергии.

2). Если система (или частица) находится в нестационарном состоянии, например в возбужденном состоянии, то получаем следующую интерпретацию (2.4.12): неопределенность энергии ΔE соответствует разбросу энергии этого состояния, иначе, его энергетической ширине, а неопределенность времени $\Delta t = \tau$ – времени жизни этого нестационарного возбужденного состояния.

Из соотношений неопределенностей следует важный вывод: при абсолютном нуле температуры $T = 0$ движение все равно не прекращается, поскольку всегда $\Delta p \neq 0$. Движение при абсолютном нуле температуры – это «нулевое» движение.

Примечание 2. Вернер Карл Гейзенберг, немецкий физик-теоретик, 1901–1976, Нобелевская премия 1932 г. за создание матричной квантовой механики;

Примечание 3. В волновой теории получали аналогичное соотношение для разброса частоты и длительностью импульса $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1$. С другой стороны (2.4.12) можно получить из (2.4.10) с помощью следующих простых рассуждений:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x = p_x \Delta p_x \cdot \frac{\Delta x}{p_x} = \frac{p_x \Delta p_x}{m} \frac{\Delta x}{v_x} = \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Соотношение (2.4.12) позволяет говорить о *виртуальных состояниях и возбуждениях*. Система за короткое время существования имеет большой разброс в энергии и может быть во всех энергетических состояниях, т.е. состояниях с любой энергией. Это не реальные возбуждения, это состояния “временные”, связанные с временным нарушением закона сохранения энергии.

2.4.3. Примеры и выводы.

Рассмотрим несколько примеров, которые иллюстрируют волновые свойства частиц и в которых проявляются соотношения неопределенностей.

Пример 1. На щель размером Δx , изображенной на рис. 4.3, падает пучок электронов определенной энергии и импульса. До щели электрон описывается плоской монохроматической волной де Бройля с определенным значением проекции поперечного импульса $p_x = 0$, при этом его x -ая координата не определена (любая величина). После прохождения щели получаем, что координата прошедшего электрона известна с точностью до Δx – ширины щели. Определим границы дифракционного максимума, т.е. расстояние между ближайшими минимумами. Условие первого минимума (условие минимумов в дифракции Фраунгофера на щели получали в Разделе Оптика §2.5):

$$\Delta x \cdot \sin \varphi = \lambda$$

Но при этом p_x изменяется вследствие дифракции волн де Бройля на щели:

$$\Delta p_x = p \cdot \sin \varphi = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin \varphi \quad (2.4.13)$$

Тогда получаем соотношение неопределенностей в виде:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin \varphi \cdot \frac{\lambda}{\sin \varphi} = 2\pi\hbar > \frac{\hbar}{2} \quad (2.4.14)$$

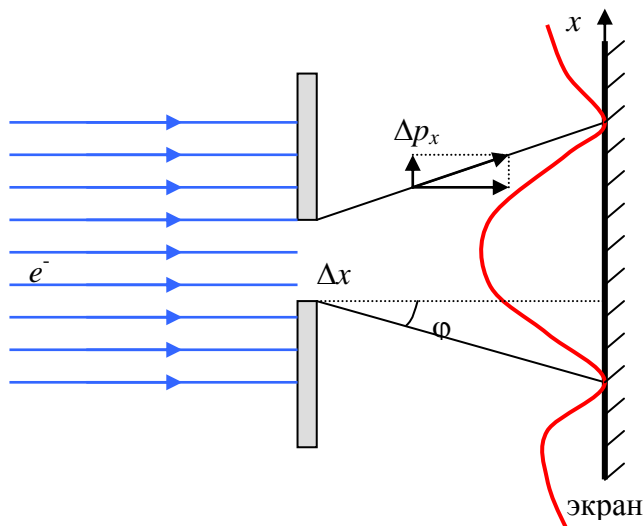


Рис. 4.3.

Пример 2. Рассмотрим мысленный опыт В. Гейзенберга об измерении координаты электрона. Чтобы определить положение электрона, нужно его осветить, т.е. послать фотон и «поймать» рассеянный фотон. Тогда неопределенность в измерении координаты порядка длины волны используемого света $\Delta x \sim \lambda$. При взаимодействии с электроном свет передает ему импульс. Чтобы уменьшить передаваемый импульс можно ослабить интенсивность света так, чтобы с электроном взаимодействовал один фотон. Передаваемый электрону импульс будет порядка импульса кванта: $\Delta p \sim p = 2\pi\hbar/\lambda$. Тогда снова получаем произведение "неточностей" в измерении, удовлетворяющее соотношению неопределенностей:

$$\Delta p \cdot \Delta x = p \cdot \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \cdot \lambda \sim 2\pi\hbar \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.4.15)$$

Какие основные выводы следуют из этого параграфа?

1. Принципиально (т.е. независимо от способа измерения) существует граница в точности одновременного измерения сопряженных переменных. Отсюда следует: *движение при абсолютном нуле температуры существует*. Состояния, в котором частица находится в полном покое, не существует.
2. Понятие "траектории частицы" не существует. Однако понятие траектории можно вводить в зависимости от степени необходимой точности измерения. В самом деле, перепишем соотношение неопределенностей в виде:

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m}$$

Откуда видно, что чем больше масса частицы, тем точнее можно использовать понятие траектории. В связи с этим утверждением рассмотрим некоторые примеры.

а). Рассмотрим рентгеновскую трубку или телеэкран, на котором фиксируются падающие электроны.

Оценим разброс координаты появления электрона на экране: скорость электрона $v_e \sim 10^7 \text{ см/с}$, разброс скоростей $\Delta v_x \sim 10^4 \text{ см/с}$, тогда (учитывая $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{с}$, $m = 0.9 \cdot 10^{-27} \text{ г}$) получаем неопределенность координаты

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{m\Delta v_x} \sim \frac{1.05 \cdot 10^{-27}}{10^4 \cdot 0.9 \cdot 10^{-27}} \sim 10^{-4} \text{ см}$$

т.е. положение электрона на экране фиксируется с хорошей точностью.

б). Рассмотрим электрон, находящийся в атоме (атом Бора). Скорость электрона в атоме $v_e \sim 10^8 \text{ см/с}$. Размеры атома определяют неопределенность координаты электрона $\Delta x \sim 10^{-8} \text{ см}$.

Тогда из соотношения неопределенностей для неопределенности скорости электрона имеем

$$\Delta v_e \sim \frac{\hbar}{m \cdot \Delta x} \sim 10^8 \text{ см/с} \sim v_e.$$

Итак, получаем, что скорость электрона на орбите по порядку величины совпадает с ее неопределенностью. Таким образом, в атоме нельзя говорить об орбите (траектории) электрона.

в). При регистрации микрочастиц в камере Вильсона размер капель, возникающих после прохождения частицы, составляет величину $\Delta x \sim 10^{-4} \text{ см}$. Подсчитаем разброс по импульсам регистрируемой частицы

$$\Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.054 \cdot 10^{-27}}{10^{-4}} \sim 10^{-23} \frac{\text{см}\cdot\text{г}}{\text{с}}.$$

Поэтому с хорошей точностью можно определять импульс и энергию частицы в камере Вильсона.

3. Теряет смысл деление полной энергии на кинетическую $K(\vec{v})$ и потенциальную $U(\vec{r})$ энергии, т.к. из-за соотношения неопределенностей для координаты и импульса и кинетическая и потенциальная энергии по отдельности не имеют определенного значения.

Примечание 4. Чарльз Томсон Рис Вильсон, английский физик, 1869–1959, Нобелевская премия 1927 г. за экспериментальное обнаружение реликтового фонового излучения;

Приложение 1. Имеем волновой пакет (2.4.6). Рассмотрим пакет в начальный момент $t = 0$ и для определенности положим $a(k) = a(k_0) = \text{const}$ во всем интервале $(k_0 - \Delta k) \div (k_0 + \Delta k)$. Тогда вычисляем интеграл:

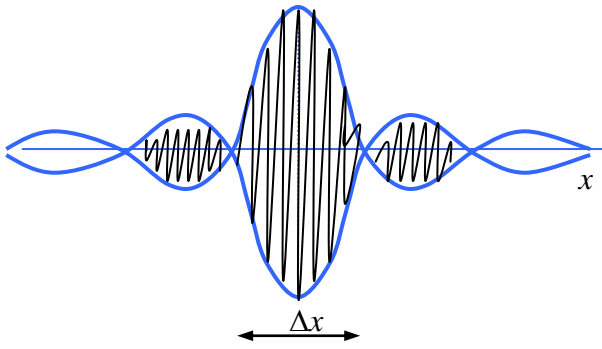


Рис. 4.4.

$$\begin{aligned}
 \psi(\vec{r}, t=0) &= a(k_0) \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \cos kx dk = \\
 &= a(k_0) \frac{\sin kx}{x} \Big|_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} = \\
 &= \frac{a(k_0)}{x} (\sin(k_0 + \Delta k)x - \sin(k_0 - \Delta k)x) = \\
 &= \frac{2a(k_0)}{x} \sin \Delta kx \cdot \cos k_0x
 \end{aligned}$$

Множитель перед косинусом дает медленно меняющуюся амплитуду, которая изображена на рисунке 4.4. Основной максимум расположен около точки $x = 0$ между ближайшими к этой точке нулями

функции Ψ . Ближайшие нули определяются соотношениями

$$\sin \Delta kx = 0 \text{ и } \Delta kx = \pm\pi.$$

Тогда размер области основной локализации пакета равен $\Delta x = 2\pi/\Delta k$ и снова получаем соотношение неопределенностей:

$$\Delta x \Delta k \geq 2\pi \geq 1.$$
