

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-механический институт
Кафедра физики

В. К. Иванов

ФИЗИКА

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ФИЗИКУ

*Рекомендовано
федеральным учебно-методическим объединением
в системе высшего образования по УГСН
16.00.00 «Физико-технические науки и технологии»
в качестве учебного пособия при реализации
основных профессиональных образовательных программ
высшего образования по направлению подготовки
бакалавров 16.03.01 «Техническая физика»*

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2023

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.3я73
И20

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургского национального исследовательского
Академического университета имени Ж. И. Алфёрова Российской академии наук
А. Н. Ипатов
Доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
В. В. Дубов

В.К. Иванов **Физика. Введение в квантовую физику**: учеб. пособие /
В.К. Иванов – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 256 с.

Содержание предлагаемого пособия составляет пятую часть лекционного курса по общей физике для студентов третьего-четвертого семестров обучения на физических направлениях подготовки. В этом пособии содержится изложение материала, относящегося к основным идеям квантовой физики. Последовательность изложения соответствует современным представлениям о логической структуре этого раздела физики. Помимо обнаружения и объяснения корпускулярных характеристик излучения и волновых свойств материальных частиц в пособии рассматриваются основные положения квантовой механики, простейшие задачи атомной физики и основные идеи в ядерной физике.

При создании учебного пособия использован многолетний опыт чтения общего курса физики на физических факультетах и институтах Санкт-Петербургского политехнического университета.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению бакалавриата 16.03.02 «Физика», 16.03.01 «Техническая физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» и 03.03.07 «Прикладная математика и физика». Пособие может быть также использовано будущими бакалаврами, обучающимися по другим физическим направлениям, в качестве дополнительного учебного пособия по физике в рамках общетехнических образовательных программ, начинающимися преподавателями в системах повышения квалификации.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

© В.К.Иванов , 2023
© Санкт- Петербургский государственный
политехнический университет, 2023

ISBN 978-5-7422-8257-0

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ФИЗИКУ

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение.....	7
 <u>Глава 1. Квантовые свойства излучения</u>	
1.1. Тепловое излучение.....	10
1.1.1. Введение	
1.1.2. Равновесное излучение и его количественные характеристики	
1.1.3. Экспериментальные законы. Абсолютно черное тело	
1.1.4. Связь между энергетической светимостью и плотностью энергии излучения	
1.1.5. Закон Стефана-Больцмана	
1.2. Классическое описание излучения абсолютно черного тела.....	21
1.2.1. Критерий и закон смещения Вина	
1.2.2. Теория Рэля – Джинса	
1.2.3. Формула Вина	
1.3. Гипотеза и формула Планка.....	30
1.3.1. Гипотеза квантов	
1.3.2. Вывод формулы Планка по Эйнштейну	
1.3.3. Свойства формулы Планка	
1.4. Поглощение и усиление электромагнитного излучения веществом.....	40
1.4.1. Ослабление потока излучения. Закон Бугера – Ламберта	
1.4.2. Принципы работы лазера	
1.5. Корпускулярные свойства электромагнитного излучения.....	46
1.5.1. Фотоны	
1.5.2. Фотоэффект	
1.5.3. Тормозное рентгеновское излучение	
1.5.4. Эффект Комптона	
 <u>Глава 2. Квантовые и волновые свойства вещества</u>	
2.1. Экспериментальные обоснования структуры атомов.....	64
2.1.1. Распределение заряда в атомах. Модель Резерфорда	
2.1.2. Оптические спектры атомов	
2.1.3. Боровская теория атома	
2.1.4. Опыты Д.Франка и Г.Герца	
2.2. Волны де Бройля.....	74
2.2.1. Гипотеза де-Бройля	
2.2.2. Свойства волн де-Бройля	
2.3. Экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля.....	78
2.3.1. Длина волны электрона	
2.3.2. Опыты Девиссона и Джермера по дифракции электронных волн	

2.3.3. Опыты Томсона и Гартаковского	
2.3.4. Дифракция атомов и молекул, нейтронов	
2.4. Статистическое толкование волн де Бройля и соотношение неопределенностей.....	86
2.4.1. Волны вероятности	
2.4.2. Соотношение неопределенностей	
2.4.3. Примеры и выводы	
2.5. Уравнение Шредингера.....	94
2.5.1. Уравнение Шредингера	
2.5.2. Уравнение Шредингера для стационарных состояний	
2.6. Волновая функция. Интерпретация и нормировка.....	98
2.6.1. Интерпретация и свойства	
2.6.2. Плотность тока вероятности	
2.6.3. Еще раз об интерпретации волновой функции	

Глава 3. Элементы квантовой механики.

3.1. Операторы. Собственные функции и собственные значения.....	103
3.1.1. Операторы в квантовой механике	
3.1.2. Собственные функции и собственные значения	
3.1.3. Правила действия с операторами	
3.2. Самосопряженные или эрмитовы операторы.....	107
3.2.1. Самосопряженные операторы	
3.2.2. Собственные функции и собственные значения самосопряженных операторов	
3.3. Частица в потенциальной яме.....	114
3.3.1. Одномерная потенциальная яма с бесконечно высокими стенками	
3.3.2. Одномерная потенциальная яма с конечными стенками	
3.4. Потенциальные барьеры.....	125
3.4.1. Понятие потенциального барьера. Прямоугольная ступенька	
3.4.2. Прямоугольный потенциальный барьер	
3.4.3. Барьер произвольной формы	
3.5. Физические явления, связанные с туннельным эффектом.....	133
3.5.1. Контактная разность потенциалов	
3.5.2. Явление холодной эмиссии	
3.6. Линейный гармонический осциллятор.....	135
3.6.1. Классический осциллятор	
3.6.2. Квантовый осциллятор	
3.6.3. Операторный подход к задаче о квантовом осцилляторе	
3.7. Движение в центральном поле.....	146
3.7.1. Уравнение Шредингера в центральном поле	
3.7.2. Уравнение для радиальной части	
3.7.3. Уравнение для угловой части	
3.8. Момент импульса в квантовой механике.....	149
3.8.1. Оператор момента импульса	
3.8.2. Оператор проекции момента импульса	
3.9. Оператор квадрата момента импульса. Сферические функции.....	152
3.9.1. Оператор квадрата момента импульса	
3.9.2. Собственные значения оператора квадрата МИ	

- 3.9.3. О собственных функциях оператора квадрата МИ
- 3.9.4. Описание состояний в центрально симметричном поле

Глава 4. Введение в физику атомов.

4.1. Движение в кулоновском поле.....	163
4.1.1. Уравнение для радиальной части волновой функции	
4.1.2. Радиальное уравнение для атома водорода	
4.1.3. Асимптотические решения	
4.1.4. Общее решение уравнения	
4.2. Состояния атома водорода.....	169
4.2.1. Вырождение уровней энергии	
4.2.2. Состояния атома водорода	
4.3. Спин электрона.....	174
4.3.1. Экспериментальные факты существования спина	
4.3.2. Описание спина электрона	
4.4. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме.....	178
4.4.1. Многоэлектронный атом	
4.4.2. Распределение электронов в атомах	
4.5. Сложение моментов в квантовой механике.....	182
4.5.1. Сложение двух моментов импульса	
4.5.2. Полный момент импульса одного электрона	
4.6. Сложение моментов в многоэлектронном атоме. Понятие термина.....	187
4.6.1. Нормальная $L-S$ связь	
4.6.2. $j-j$ связь	
4.7. Оптические спектры. Правила отбора оптических переходов.....	192
4.7.1. Правила отбора для полного момента импульса	
4.7.2. Правила отбора для моментов L и S	
4.7.3. Правила отбора для отдельного электрона	
4.8. Электрон во внешнем магнитном поле. Эффект Зеемана.....	195
4.8.1. Электрон в магнитном поле	
4.8.2. Простой эффект Зеемана	
4.8.3. Сложный эффект Зеемана	
4.9. Атом в электрическом поле. Эффект Штарка.....	203
4.9.1. Расщепление уровней энергии в электрическом поле	
4.9.2. Линейный эффект Штарка	
4.9.3. Еще об эффекте Штарка в атомах	

Глава 5. Элементы ядерной физики

5.1. Атомное ядро.....	209
5.1.1. Состав ядра	
5.1.2. Масса и энергия связи ядра	
5.1.3. Модели ядер	
5.2. Радиоактивность.	215
5.2.1. Радиоактивность	
5.2.2. α – распад	
5.2.3. β - распад	

5.2.4. γ - излучение	
5.2.5. Спонтанное деление ядер	
5.3. Ядерные реакции.....	222
5.3.1. Механизмы ядерных реакций	
5.3.2. Деление ядер	
5.3.3. Термоядерные реакции	
5.4. Элементарные частицы.....	232
5.4.1. Фундаментальные взаимодействия	
5.4.2. О систематике элементарных частиц. Стандартная модель	
5.4.3. Переносчики взаимодействий	
5.4.4. Лептоны	
5.4.5. Кварки и адроны	
Предметный указатель.....	252

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ФИЗИКУ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой пятую часть лекционного курса общей физики, читаемого студентам 2-го года обучения на физических и инженерно-физических направлениях подготовки политехнического университета. Пособие является продолжением четырех предыдущих частей курса физики, опубликованных ранее в 2001-03 годах, а именно "Механика", "Молекулярная физика", "Электромагнетизм" и "Электромагнитные волны". Поэтому изложение этой части курса опирается на пройденный ранее материал и содержит соответствующие ссылки.

Пособие подготовлено с учетом методических разработок кафедры экспериментальной физики политехнического университета (СПбПУ). Основные идеи и содержание обновленного курса общей физики широко обсуждались на научно-методических семинарах под руководством профессоров кафедры экспериментальной физики. Настоящее учебное пособие "Введение в квантовую физику" построено ближе к традиционному изложению этого раздела курса физики на лекциях и практических занятиях. Однако в отличие от широко известных курсов по атомной физике в этом пособии некоторые вопросы квантовой механики рассмотрены с большей степенью подробности.

Пособие состоит из 5 разделов. Первые два посвящены традиционным вопросам, обсуждаемым в атомной физике. После изучения основных свойств электромагнитных волн в предыдущем пособии в этом томе рассматриваются корпускулярные свойства электромагнитных волн и их проявления, введению понятия квантов электромагнитного поля. Этих вопросов в той или иной степени учащиеся касались также при изучении предыдущих частей курса физики. Однако в этом разделе рассматривается последовательное появление идеи квантов света, начиная с описания спектра излучения черного тела, и ее дальнейшего развития в объяснениях фотоэффекта, тормозного излучения, эффекта Комптона и других. В следующем разделе рассматриваются волновые свойства материальных частиц, в частности, явления, связанные с дифракцией электронов, соотношением неопределенностей. Здесь же вводится понятие волновой функции микрочастицы, обсуждается ее интерпретация, записывается уравнения Шредингера в простейшем случае для определения волновой функции.

В последующих разделах пособия рассматриваются простейшие задачи квантовой механики, связанные с квантованием уровней энергии частицы в одномерных потенциальных ямах и прохождением частиц через

потенциальные барьеры, и физические явления, вытекающие из решения этих задач. Несколько подробнее, чем в традиционных учебниках по общей физике, рассматривается задача об электроном, находящимся в центрально-симметричном поле, в частности, кулоновском поле. Вводится общепринятое разделение волновой функции на радиальную и угловые части и решается задача о квантовании углового момента. При этом на усмотрение преподавателя и студентов математические выводы в последних параграфах можно опустить и принимать во внимание только результативную часть.

Введение в физику атомов начинается с решения радиального уравнения Шредингера для электрона в кулоновском поле. Обсуждаются радиальные волновые функции электрона в кулоновском поле и квантовые числа, характеризующие энергетическое состояние электрона. Введение спина электрона и его описание, а также учет принципа Паули для электронов атома приводят к правилам заполнения электронных оболочек в многоэлектронном атоме. Кратко поясняются правила отбора оптических переходов, оптические спектры в атоме, расщепление энергетических уровней в электрических и магнитных полях.

Последний краткий раздел пособия посвящен основным характеристикам ядра, различным видам радиоактивности, ядерным реакциям, а также рассмотрению элементарных частиц и их систематики.

В целом пособие отражает совокупность основных тем и вопросов, которые излагаются на лекциях и проходятся на практических занятиях. Оно построено в рамках утвержденной программы по общей физике для студентов Санкт-Петербургского политехнического университета. В пособии не рассматриваются многие практические приложения, связанные с применением квантовомеханических законов к описанию атомных систем и которые обычно рассматриваются в специальных курсах по квантовой теории. Поэтому в этом смысле пособие не является полноценным учебником по курсу квантовой механики, однако в пособие включен ряд дополнительных сведений по квантовой физике, которые обычно не рассматриваются в учебниках по общей физике.

При подготовке данного учебника автор помимо собственных методических разработок использовал широко известные курсы по общей физике. В частности, ниже приведены основные учебники, которые рекомендованы студентам при подготовке по данному курсу **«Введение в квантовую физику»**

- 1). Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. Часть первая и часть вторая. Москва. Наука, Физматлит. 1986 г.
- 2). И.Е. Иродов. Квантовая физика. Основные законы. Физматлит. Лаборатория базовых знаний. Москва – Санкт-Петербург. 2001 г.

- 3). А.Н. Матвеев. Атомная физика Москва. Высшая школа. 1989 г.
- 4). И.В. Савельев. Курс общей физики. Том 3. Издательство Лань. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. 2005 г.
- 5). Э. В.Шпольский. Атомная физика. Том 1 и 2. Издательство Лань. 2021-22 гг.

С другой стороны, поскольку настоящий курс лекций является продолжением пройденного студентами ранее материала по физике и во многом опирается на уже полученные знания, то в тексте часто указываются ссылки на лекции, опубликованные в предыдущих пособиях автора по курсам "Механика" [1], "Молекулярная физика" [2], "Электромагнетизм" [3] и "Электромагнитные волны" [4]:

1. "Физика. Механика" СПб, Политех-Пресс, 2021,
2. "Физика. Молекулярная физика" СПб, Политех-Пресс, 2021,
3. "Физика. Электромагнетизм" СПб, Политех-Пресс, 2022.
4. "Физика. Электромагнитные волны" СПб, Политех-Пресс, 2023

Автор пособия признателен преподавателям и сотрудникам кафедры экспериментальной физики СПбПУ за обсуждение содержания и критику этого курса, что способствовало его формированию.

Глава 1. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ

1.1. Тепловое излучение

1.1.1. Введение.

К концу XIX века в физике сложилась ситуация кажущегося благополучия и близкого завершения физической картины мира. Напомним основные достижения в ее формировании к этому времени.

1). **Классическая механика Ньютона** приобрела законченный вид и хорошо описывала динамику движения частиц и материальных тел.

2). **Статистические методы** довершили построение теории объектов, состоящих из большого числа частиц, и успешно привели к описанию эмпирических законов термодинамики.

3). **Волновая природа света** "победила" и заняла приоритетное положение в описании электромагнитных явлений. С помощью волновых представлений, выраженных в системе электромагнитных уравнений Максвелла, объяснены и описаны такие явления как интерференция, дифракция, дисперсия. В частности, опыт Фуко с определением скорости света в движущейся среде показал, что скорость света в воде определяется отношением скорости света в вакууме и показателя преломления среды, зависящего от частоты света: $v = c/n(\omega)$, как и предсказывала волновая теория. При этом измеренное значение скорости света совпало с вычисленной скоростью распространения электромагнитных волн в среде. Были объяснены и многие другие оптические явления.

Физическому сообществу казалось, что остается лишь несколько нерешенных небольших проблем, для объяснения которых надо совершить еще одно небольшое усилие, и физическая картина мира будет ясна полностью.

Какие проблемы оставались нерешенными? Приведем к примеру следующие явления и факты, не имевшие в то время объяснения у физиков:

- а). Явление фотоэффекта, открытое в 1887 г. Г. Герцем.
- б). Линейчатые спектры излучения атомов, обнаруженные в 1885 г. И. Бальмером и немногим позже другими экспериментаторами, а также полученные полосатые спектры молекул.
- в). Тепловое излучение вещества, свойства которого изучались достаточно давно многими физиками, однако не были объяснены вплоть до начала 20 века.

С обсуждения проблемы теплового излучения мы и начнем изложение в этом разделе.

Примечание 1. Генрих Рудольф Герц, немецкий физик, 1857–1894;
Иоганн Якоб Бальмер, швейцарский физик, 1825–1898.

1.1.2. Равновесное излучение и его количественные характеристики

Тепловое излучение – испускание электромагнитных волн за счет внутренней энергии тела. Оно происходит при любой конечной температуре T тела и имеет сплошной спектр, положение максимума которого зависит от температуры тела (вещества). При невысоких температурах излучаются лишь электромагнитные волны с большой длиной волны (инфракрасная область спектра). С повышением температуры возрастает общая энергия испускаемого теплового излучения, а положение максимума перемещается в область малых длин волн. Тепловое (электромагнитное) излучение испускается с поверхности любого тела, имеющего температуру выше абсолютного нуля, т.е. обладающего внутренней энергией. Наиболее ярко излучение проявляется с поверхности нагретых тел, в частности накаливаемого металла, в нагретых Солнцем газах и поверхностях на земле, с кожного покрова человека и т.д.

Все остальные виды излучения, возбуждаемые за счет любого другого вида энергии, кроме внутренней (например, налетающими частицами, фотонами, механическим воздействием), носят название – **люминесценции**. Важно отличать ее от теплового излучения: **люминесценция всегда неравновесная, а тепловое излучение может быть равновесным**.

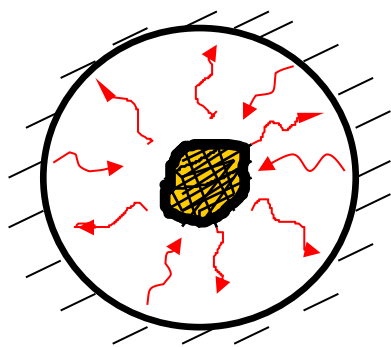


Рис. 1.1.

В качестве примера **равновесного теплового излучения** можно рассмотреть следующую модель (см рис.1.1): имеем идеально отражающую оболочку, внутри которой находится тело при температуре T , и оно, следовательно, излучает. За счет отражения происходит обмен энергией: излучение → отражение → поглощение телом отраженного излучения → снова излучение → ...и так далее. Тело с оболочкой находятся в равновесии и характеризуются постоянной температурой.

Равновесное излучение – процесс, при котором распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны. Другими словами, сколько энергии излучается, столько и поглощается для данной длины волны λ . Такое состояние системы “**тело + излучение**” – **равновесно**, и к нему могут быть применены законы термодинамики.

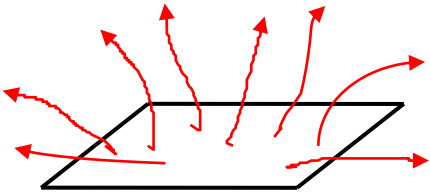
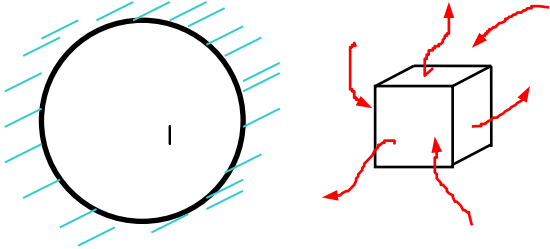
Какие свойства равновесного излучения можно отметить? Экспериментально установлены следующие факты о равновесном излучении:

- 1) излучение не зависит от материала излучаемого тела и его формы;
- 2) характеристики излучения (спектральный состав, интенсивность) зависят только от температуры;
- 3) излучение однородно, изотропно, не поляризовано.

Можно, вообще говоря, отделить равновесное излучение от тела, с которым оно находится в равновесии, и характеризовать его плотностью энергии излучения в пространстве.

Количественные характеристики теплового излучения аналогичны характеристикам, определяемым в фотометрии (собственно это одно и то же): *энергетическая светимость, испускательная способность, плотность энергии излучения, поглощательная способность.*

Равновесное тепловое излучение можно характеризовать двумя способами: через равновесие среды с излучаемым телом и через наличие энергии излучения в пространстве. Введем эти характеристики.

I. <u>Через равновесие с телом</u>	II. <u>Излучение без тела</u>
<p>Определяется как количество энергии, исходящее с единицы поверхности тела в единицу времени</p>  <p>Рис. 1.2 а.</p>	<p>Определяется как количество энергии, содержащееся в единице объема</p>  <p>Рис. 1.2 б.</p>
<p>1). <i>Энергетическая светимость</i> $R = R(T)$ – поток энергии, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям, т.е. в телесный угол 2π. Размерность: $[R] = \text{Эрг}/\text{с}\cdot\text{см}^2$ или $\text{Дж}/\text{с}\cdot\text{м}^2$.</p>	<p>1). <i>Плотность энергии излучения</i> $U = U(T)$ – энергия излучения, приходящаяся на единицу объема пространства. Размерность: $[U] = \text{Эрг}/\text{см}^3$ или $\text{Дж}/\text{м}^3$.</p>

Выше записаны общие характеристики излучения, т.е. интегральные, просуммированные по всем частотам (или длинам) электромагнитных волн.

Спектральные характеристики теплового излучения:

<p>2). <i>Испускательная способность тела</i></p> $r_{\omega} \equiv dR_{\omega}/d\omega = r(\omega, T), \quad (1.1.1)$ <p>где dR_{ω} – поток энергии, испускаемый единицей поверхности в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$.</p> <p>Размерность:</p> $[r_{\omega}] = [d\Phi]/[ds][d\omega] = \text{Эрг}/\text{см}^2.$ <p>При этом энергетическая светимость равна:</p> $R(T) = \int_0^{\infty} dR_{\omega}(T) = \int_0^{\infty} r(\omega, T) d\omega \quad (1.1.3)$	<p>2). <i>Спектральная плотность энергии излучения</i></p> $u_{\omega} = u(\omega, T) \equiv dU_{\omega}/d\omega, \quad (1.1.2)$ <p>где dU_{ω} – энергия в единице объема пространства и в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$.</p> <p>Размерность:</p> $[u_{\omega}] = [dW]/[dV][d\omega] = \text{Эрг} \cdot \text{с}/\text{см}^3.$ <p>При этом плотность энергии излучения равна:</p> $U(T) = \int_0^{\infty} dU_{\omega} = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega \quad (1.1.4)$
<p>3). <i>Испускательная способность в длинах волн (или спектральная энергетическая светимость)</i></p> $r_{\lambda} \equiv dR_{\lambda}/d\lambda = r(\lambda, T). \quad (1.1.5)$ <p>где dR_{λ} – поток энергии, испускаемый единицей поверхности в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$.</p> <p>Размерность: $[r_{\lambda}] = \text{Эрг}/\text{с} \cdot \text{см}^3$.</p> $R(T) = \int_0^{\infty} dR_{\lambda} = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda \quad (1.1.7)$	<p>3). Аналогично имеем <i>спектральную плотность энергии излучения</i> в длинах волн</p> $u_{\lambda} = u(\lambda, T) \equiv dU_{\lambda}/d\lambda. \quad (1.1.6)$ <p>где dU_{λ} – энергия в единице объема пространства и в интервале частот от λ до $\lambda + d\lambda$.</p> <p>Размерность: $[u_{\lambda}] = \text{Эрг}/\text{см}^4$.</p> $U(T) = \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda \quad (1.1.8)$

Чтобы получить связь между испускательными способностями r_{ω} и r_{λ} , воспользуемся определениями (1.1.1) и (1.1.5) для потока энергии

$$r_{\omega} d\omega = r_{\lambda} d\lambda$$

и, так как $\lambda = 2\pi c/\omega$, получаем:

$$r_{\omega} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} r_{\lambda} \quad (1.1.9)$$

Связь между спектральными плотностями энергии излучения u_{ω} и u_{λ} получаем аналогично (1.1.9):

$$u_{\omega} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} u_{\lambda} \quad (1.1.10)$$

4). *Поглощательная способность* тела определяется:

$$a_{\omega,T} = d\Phi'_{\omega} / d\Phi_{\omega},$$

где $d\Phi'_{\omega}$ – часть потока энергии, поглощенная телом в интервале частот $(\omega \div \omega + d\omega)$, $d\Phi_{\omega}$ – падающий поток энергии в том же частотном интервале $d\omega$. Видно, что поглощательная способность $a_{\omega,T}$ – безразмерная величина. По определению $a_{\omega,T} \leq 1$.

1.1.3. Экспериментальные законы. Абсолютно черное тело.

В XIX веке проводились многочисленные исследования излучения нагретых тел. Эти исследования позволили установить, что между испускательной и поглощательной способностью любого тела существует определенная связь.

- 1) Пьер Прево (1809г.) нашел правило: *если два тела поглощают различные количества энергии, то они и излучают разные количества энергии*. В труде “Теория обменов” писал: “равновесие теплоты между соседними свободными объемами состоит в равновесии обменов”.
- 2) Густав Кирхгоф (1859г.) использовал рассуждения Прево при доказательстве теоремы (закона Кирхгофа), доложенной Берлинской Академии в 1859г. (“О связи между испусканием и поглощением света и тепла”). *Закон Кирхгофа: отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела*, оно является для всех тел универсальной (одной и той же) функцией частоты ω (или λ) и температуры T .

$$\left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} \right)_1 = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} \right)_2 = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} \right)_3 = \dots = \frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = f(\omega, T) \quad (1.1.11)$$

где индексы 1,2,3,... соответствуют разным телам, а $f(\omega, T)$ – универсальная функция. Сами величины $r_{\omega,T}$ и $a_{\omega,T}$ могут меняться очень значительно от одного тела к другому, однако их отношение оказывается одинаковым для

всех тел. Другими словами, тело, сильнее поглощающее какие-либо лучи, будет их и сильнее испускать (не путать испускание с отражением).

В конце XIX века перед физиками встала новая задача: найти универсальную функцию $f(\omega, T)$. Трудности ее решения состояли в том, что необходимо иметь дело с двумя характеристиками одновременно: испускательной $r_{\omega, T}$ и поглощательной $a_{\omega, T}$. Проблема состояла в том, чтобы избавиться от поглощательной способности $a_{\omega, T}$, отсюда возникла идея абсолютно черного тела.

3) *Абсолютно черное тело*: поглощательная способность $a_{\omega, T} = 1$, т.е. поглощается все, что падает на это тело при всех частотах излучения. Абсолютно черных тел не бывает в природе. Наиболее близко к нему приближаются: *сажа, платиновая чернь*, но и то лишь в некоторой области частот излучения ω .

Примечание 2. Иногда вводят понятие "серого" тела, у которого $a_{\omega, T} = \text{const} < 1$, т.е. поглощается часть падающей энергии, но одинаковая для всех частот.

Абсолютно черное тело интересно тем, что его испускательная способность равна универсальной функции $r_{\omega, T} = f(\omega, T)$ из (1.1.11). Поэтому основная идея в исследовании теплового излучения состояла в том, чтобы создать модель абсолютно черного тела и изучать его испускательную способность.

Реализация модели абсолютно черного тела (1861г.). Другими словами, необходимо создать устройство, сколь угодно близкое по своим свойствам к

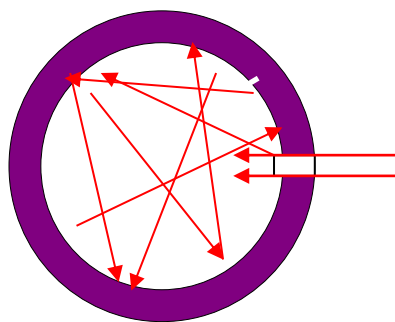


Рис. 1.3.

модели абсолютно черного тела. Такое устройство представляет собой замкнутую полость (см рис. 1.3), снабженную маленьким отверстием, стенки которой поддерживаются при определенной температуре T . Излучение, попадающее через отверстие в полость, может долго находиться внутри нее, испытывая отражение от стенок, поглощаясь ими, переизлучаясь и вновь поглощаясь. Этот непрерывный процесс со временем становится стационарным – происходит, так называемая, *термолизация излучения*. При этом важно, что для маленького отверстия поглощательная способность $a_{\omega, T} \approx 1$ – иначе, все, что попадает внутрь объема, в нем практически и остается.

Пример. Если в яркий солнечный день рассматривать внутренность комнаты через открытое окно, то комната кажется темной.

В полости находится практически равновесное излучение, которое, претерпев многократные отражения, будет выходить из отверстия. Таким образом, если стенки полости поддерживать при некоторой постоянной температуре T , то из отверстия выходит излучение весьма близкое по спектральному составу к излучению абсолютно черного тела при той же температуре T . Разлагая это излучение с помощью дифракционной решетки или системы зеркал в спектр и измеряя интенсивность различных участков спектра, можно экспериментально получить универсальную функцию (1.1.11) $r_{\omega,T} \approx f(\omega,T)$.

Опытным путем было найдено, что энергетическая светимость абсолютно черного тела сильно возрастает с температурой. На рисунке 1.4 показаны экспериментальные зависимости энергетической светимости от частоты излучения (А) и длины волны (Б) при разных температурах. Видно, что максимум испускательной способности с увеличением температуры сдвигается в коротковолновую область спектра, а интегральная интенсивность (площадь под кривой) быстро возрастает.

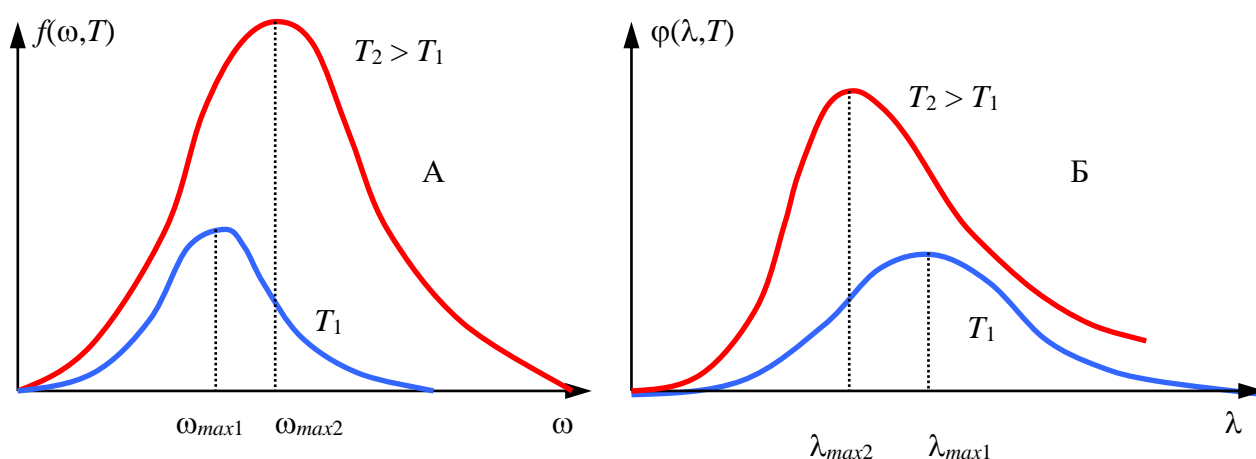


Рис. 1.4.

В экспериментальных исследованиях удобнее пользоваться функцией длины волны $\varphi(\lambda,T)$. В теоретических работах, как правило, используют функцию частоты $f(\omega,T)$. Между этими функциями существует следующая связь в соответствии с (1.1.9):

$$\varphi(\lambda,T) = \frac{\omega^2}{2\pi c} f(\omega,T); \quad f(\omega,T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \varphi(\lambda,T). \quad (1.1.12)$$

Для абсолютно черного тела интегральная испускательная способность, или иначе энергетическая светимость, равна площади под кривой:

$$R(T) = \int_0^{\infty} r(\omega,T) d\omega = \int_0^{\infty} f(\omega,T) d\omega = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda,T) d\lambda. \quad (1.1.13)$$

*Примечание 3. Пьер Прево, швейцарский физик, 1751–1839;
Густав Роберт Кирхгоф, немецкий физик, 1824–1887.*

1.1.4. Связь между энергетической светимостью и плотностью энергии излучения.

Для абсолютно черного тела легко найти связь между энергетической светимостью $R(T)$ и плотностью энергии излучения $U(T)$, или между спектральными характеристиками $r(\omega, T) = f(\omega, T)$ и $u(\omega, T)$.

Пусть имеется полость с абсолютно черными стенками, которые поддерживаются при постоянной температуре T . Внутри полости через любую точку во всех направлениях проходит поток энергии одинаковой плотности $u(\omega, T)$ [или $U(T)$]. Далее, запишем долю объемной плотности энергии, которая распространяется в телесном угле $d\Omega$:

$$du = du_0 = u \frac{d\Omega}{4\pi} = u \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} \quad (1.1.14)$$

Тогда на площадку Δs под углом θ за время Δt попадет энергия (см рис. 1.5)

$$dW = du \cdot \Delta V = u \frac{d\Omega}{4\pi} c \Delta t \Delta s \cos \theta. \quad (1.1.15)$$

Полная энергия, прошедшая через площадку Δs за время Δt (излучение падает со всех сторон, телесный угол полупространства $\Omega = 2\pi$), равна:

$$\Delta W = \frac{uc\Delta t\Delta s}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{c}{4} u \Delta t \Delta s \quad (1.1.16)$$

Плотность потока энергии через (или на) единичную площадку равна:

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta s} = \frac{c}{4} u. \quad (1.1.17)$$

Поток энергии, испускаемый единицей поверхности, также определяется соотношением:

$$R = \frac{\Delta W}{\Delta s \cdot \Delta t}. \quad (1.1.18)$$

Так как в равновесии исходящий и входящий потоки энергии равны, то

$$R(T) = \frac{c}{4} U(T), \quad (1.1.19)$$

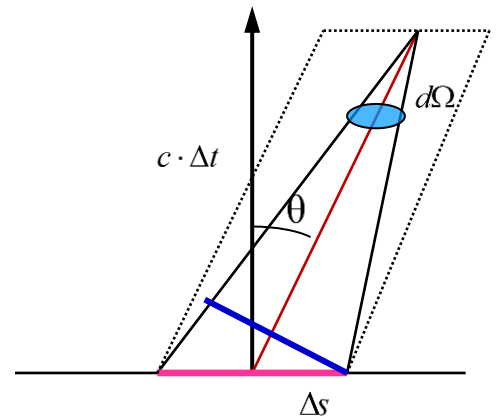


Рис. 1.5.

или для спектральных характеристик имеем

$$r(\omega, T) = f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T). \quad (1.1.20)$$

Соотношения (1.1.19) и (1.1.20) и дают связь между энергетической светимостью и плотностью излучения.

1.1.5. Закон Стефана-Больцмана.

Долгое время попытки теоретически получить вид функции $f(\omega, T)$ не приводили к успеху. В 1879 г. Й. Стефан, анализируя экспериментальные данные, пришел к выводу, что энергетическая светимость тел пропорциональна четвертой степени термодинамической температуры: $R(T) \sim T^4$. Стефан считал, что этот закон справедлив для интегральной светимости всех тел. Однако оказалось, что он строго выполняется только для абсолютно черного тела. Это показал в 1884 г. Л. Больцман, исходя из законов классической термодинамики и используя результаты теории электромагнетизма Максвелла.

$$R^{A_{\text{чт}}} = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4. \quad (1.1.21)$$

Приведенное соотношение между энергетической светимостью абсолютно черного тела и его термодинамической температурой получило название *закона Стефана – Больцмана*. Соотношение означает, что площадь под кривой $f(\omega, T)$ растет пропорционально четвертой степени температуры $\sim T^4$. Константу σ называют *постоянной Стефана-Больцмана*. Ее экспериментальное значение равно:

$$\sigma = 5.6696 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4.$$

Из термодинамических соотношений зависимость $R \sim T^4$ можно получить, если использовать одну из общих термодинамических формул (см Приложение 1 в конце параграфа):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P, \quad (1.1.22)$$

где P – давление, V – объем, U – внутренняя энергия газа.

Для газа молекул и, аналогично, для излучения получаем, что внутренняя энергия U аддитивна:

$$U = V \cdot u(T), \quad (1.1.23)$$

где $u(T)$ – объемная плотность энергии излучения. Давление света, согласно максвелловской теории равно (вывод см в Приложении 2 в конце параграфа):

$$P = \frac{1}{3}u(T). \quad (1.1.24)$$

Подставляя (1.1.23) и (1.1.24) в (1.1.22), получаем для производной по объему:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}(V \cdot u(T))_T = u(T)$$

и далее получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} u(T) &= T \frac{1}{3} \frac{du(T)}{dT} - \frac{1}{3} u(T) \\ \frac{4}{3} u(T) &= \frac{1}{3} T \frac{du(T)}{dT} \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Решая это дифференциальное уравнение путем разделения переменных, имеем:

$$4 \frac{dT}{T} = \frac{du(T)}{u(T)} \quad \text{и далее} \quad 4 \ln T = \ln u(T) + \ln A.$$

Откуда получаем закон Стефана – Больцмана:

$$u(T) = AT^4 \quad (1.1.26)$$

Аналогичный результат для плотности энергии излучения можно получить также с помощью рассмотрения цикла Карно.

Приведем несколько примеров, как с помощью закона Стефана – Больцмана можно провести оценки энергии излучения.

- 1) При температуре $T = 300\text{K}$ абсолютно черное тело с 1 м^2 поверхности излучает

$$R(300\text{K}) = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3^4 \cdot 10^8 = 5,67 \cdot 81 \cong 460 \text{ Вт} \cong 0,5 \text{ кВт}.$$

- 2) Пусть абсолютно черное тело с температурой T_1 находится в среде с температурой T_2 , причем $T_2 < T_1$. Количество энергии, уходящей с поверхности тела, определяется

$$W = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \approx 4s\sigma \cdot T^3 \Delta T,$$

при $T_1, T_2 \gg \Delta T = T_1 - T_2$.

- а) Если в комнате теплее, чем на улице (среда) на $\Delta T = 20^\circ$, и температура наружного воздуха $T = 300\text{K}$, то уходящее из помещения через окно (рассматривая его как черное тело) излучение уносит энергию

$$W/S = 4 \cdot 5,7 \cdot 10^{-8} \cdot 3^3 \cdot 10^6 \cdot 20 \cong 123 \text{ Вт/м}^2 \approx 0,1 \text{ кВт/м}^2.$$

- б) У змей высокая чувствительность к тепловому излучению. Кобра улавливает тепловое излучение тел, температура которых отличается от

температуры среды на $10^{-1} \div 10^{-2} K$, что соответствует потоку энергии с единицы ($1 m^2$) поверхности тела приблизительно $0,10 \div 0,06 Вт$.

- в) Высокочувствительные люди – экстрасенсы. Их чувствительность в инфракрасной (ИК) области очень высока, но зависит не только от интегральной интенсивности, но и от положения максимума энергетической светимости.
- 3) Следует отметить, что для нечерных тел закон Стефана-Больцмана не выполняется. Однако в некоторых случаях удовлетворительно выполняется соотношение $R = \gamma \sigma T^4$, если
- а) ввести коэффициент серости $\gamma < 1$.
 - б) изменить показатель степени, сделав его больше или меньше 4.
 - в) существуют селективные излучатели, испускающее тепловое излучение лишь в определенном частотном интервале.

Примечание 4. *Йозеф Стефан, австрийский физик, 1835–1893;*
Людвиг Больцман, выдающийся австрийский физик-теоретик, 1844–1906.

Приложение 1. Вспомним, как получается приведенная выше формула (1.1.22).

1) Первое начало термодинамики:

$$dQ = dU + PdV; \quad dQ = TdS; \quad dU = TdS - PdV,$$

делим на элемент объема dV при постоянной температуре T (напомним, что здесь S – энтропия):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P.$$

2) Свободная энергия $F = F(V, T)$ определяется:

$$F = U - TS; \quad dF = dU - TdS - SdT = -PdV - SdT.$$

При этом

$$\left. \begin{array}{l} S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \\ \text{дифференцируем} \\ \text{по } V \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial F}{\partial T} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial F}{\partial V} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

Таким образом, получаем соотношение (1.1.22).

Приложение 2. Поток энергии равен:

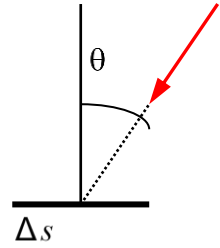
$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \quad \text{или иначе:} \quad |\vec{S}| = c \cdot u(T).$$

Здесь \vec{S} – вектор Пойнтинга. Поглощаемое площадкой Δs излучение, падающее под углом θ , передает за время dt импульс:

$$dp_{\perp} = \frac{1}{c} dW \cdot \cos \theta = \frac{1}{c} \cdot u(T) \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot c \cdot dt \cdot \Delta s \cdot \cos^2 \theta.$$

Давление этой компоненты излучения определяется импульсом, переданным в единицу времени:

$$dP = \frac{dp_{\perp}}{dt \cdot \Delta s} = u(T) \cdot \cos^2 \theta \frac{\sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi}{4\pi}.$$



Полное давление, оказываемое на стенку поглощаемым излучением равно:

$$P = \frac{u(T)}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{6} u(T).$$

Если стенка излучает столько же, сколько поглощает, то $dp_{0\perp} = 2dp_{\perp}$, и давление на стенку, обусловленное поглощением и излучением равных порций излучения определяется формулой (1.1.24).

1.2. Классическое описание излучения абсолютно черного тела

1.2.1. Критерий и закон смещения Вина.

К концу XIX века было много попыток объяснения излучения абсолютно черного тела в рамках классической физики. Из самых общих законов термодинамики и максвелловской электромагнитной теории Вильгельм Вин (1893г.) сформулировал общий критерий или условие для поведения универсальной функции $f(\omega, T)$ (о выводе формулы см, например, IV том Сивухина, §116):

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (1.2.1)$$

Явный вид функции $F(\omega/T)$ не ясен, т.к. для этого необходимо знание физического механизма излучения. Однако с помощью критерия Вина можно было сделать некоторые выводы и получить результаты. Так получено, что из полной функции $f(\omega, T)$ выделена частота ω , а функция $F(\omega/T)$ является лишь функцией одной переменной – отношения (ω/T) . Таким образом, был сформулирован критерий Вина (1.2.1).

Критерий Вина: любая предлагаемая формула для универсальной функции $f(\omega, T)$ не должна противоречить формуле Вина, поскольку последняя получена из общих соображений. Критерий Вина можно записать через переменные λ и T :

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5} \Psi(\lambda T) \quad (1.2.2)$$

С помощью критерия Вина можно получить следующие важные соотношения.

1). *Закон Стефана-Больцмана.* Полная энергетическая светимость определяется

$$R(T) = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \Psi(\lambda T) \frac{d\lambda}{\lambda^5} \quad (1.2.3)$$

Делая замену переменных $x = \lambda T$ и $d\lambda = dx/T$, получаем:

$$R(T) = T^4 \int_0^{\infty} \Psi(x) \frac{dx}{x^5} = \sigma T^4, \quad (1.2.4)$$

где введенное (размерное) число σ есть постоянная Стефана-Больцмана, равная

$$\sigma = \int_0^{\infty} \Psi(x) \frac{dx}{x^5} = \int_0^{\infty} y^3 F(y) dy, \quad (1.2.5)$$

Здесь введена переменная y , определяемая отношением $y = \omega/T$. Таким образом, получаем, что площадь под кривой $f(\omega, T)$, или $\varphi(\lambda, T)$, растет с температурой пропорционально четвертой степени температуры (рис.2.1).

2). *Закон смещения Вина.* Найдем максимум функции распределения $f(\omega, T)$:

$$\left[\omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) \right]'_{\omega} = 0 = 3\omega^2 F\left(\frac{\omega}{T}\right) + \omega^3 \frac{1}{T} F'\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (1.2.6)$$

Корень этого уравнения $\omega = 0$ соответствует минимуму функции, равному нулю, поэтому сократим на ω и снова введем обозначение $y = \omega/T$. Тогда уравнение (1.2.6) приобретает вид:

$$3F(y) + yF'(y) = 0 \quad (1.2.7)$$

Пусть мы нашли решение этого уравнения y_0 , соответствующее максимуму функции распределения, при этом получаем

$$y = y_0 = \frac{\omega_{\max}}{T} \quad (1.2.8)$$

Таким образом автоматически получаем *закон смещения Вина* (1896 г.) (см рис. 2.1 А):

$$\frac{\omega_{\max}}{T} = \text{const} = 0.37 \cdot 10^{12} \text{ (K}^{-1} \text{c}^{-1}) \quad (1.2.9)$$

Итак, положение максимума функции распределения в зависимости от частоты прямо пропорционально температуре. Можно это условие положения максимума функции распределения записать также через длины волн:

$$\lambda_{max} T = b \quad (1.2.10)$$

Закон смещения Вина утверждает, что длина волны λ_{max} , на которую приходится максимум энергии в спектре равновесного излучения, обратно пропорциональна температуре излучающего тела (см рис. 2.1 Б). Этот закон является следствием формулы Вина. Постоянная b носит название *постоянной Вина*.

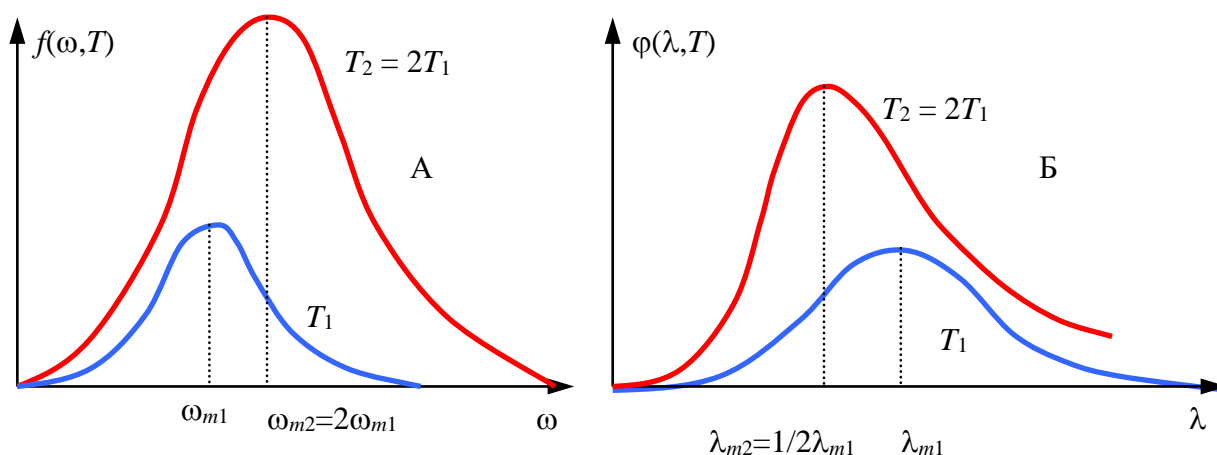


Рис. 2.1.

О. Луммер и Э. Прингсгейм в 1897 г. экспериментально подтвердили справедливость закона смещения Вина, получив при этом значение $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Рассмотрим несколько примеров, когда с помощью закона смещения Вина можно провести оценки интенсивности излучения.

- 1) Если человека рассматривать как абсолютно черное тело, то при температуре $T = 300 \text{ К}$ максимум его светимости находится при длине волны $\lambda \approx 10 \text{ мкм}$, т.е. лежит в инфракрасном (ИК) диапазоне спектра.
- 2) Проведем оценку интенсивности излучения, испускаемой человеком в среду. Пусть средняя площадь поверхности человека $\sim 1 \text{ м}^2$, разность температур тела и среды $\Delta T \sim 10 \text{ К}$, тогда мощность излучения составляет

$$W = 4S \cdot \sigma T^3 \Delta T \approx 4 \cdot 1 \cdot 5,710^{-8} \cdot 27 \cdot 10^6 \cdot 10 \approx 60 \text{ Вт},$$

т.е. по интегральной мощности человек “светит”, как 60-ваттная лампочка, но в основном в ИК диапазоне. На основе инфракрасного излучения создаются приборы ночного видения.

Примечание 1. Вильгельм Вин, немецкий физик, 1864–1928, Нобелевская премия 1911 г. за законы излучения черного тела;

Отто Рихард Луммер (Люммер), немецкий физик, 1860–1925
Эрнст Прингсгейм, немецкий физик, 1859–1917.

1.2.2. Теория Рэлея - Джинса.

Термодинамика не в состоянии определить вид универсальной функции $f(\omega, T)$ или $F(\omega/T)$. Для определения универсальной функции оказалось необходимым привлечь статистические методы.

Д. Релей (1905) и Д. Джинс определяли $f(\omega, T)$, исходя из классических представлений и основываясь на известном законе о равномерном распределении энергии по степеням свободы. В равновесии существующее электромагнитное поле (излучение) можно разложить по стоячим волнам, **как в ряд Фурье**. При этом на каждую стоячую волну приходится средняя энергия равная $2 \cdot (\kappa T/2)$, так как электромагнитная волна имеет две степени свободы, соответствующие электрическому E и магнитному H полю:

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2). \quad (1.2.11)$$

Сосчитаем число стоячих волн, приходящихся на единицу интервала частот.

1). **Одномерный случай.**

Стоячая волна представляет собой сумму 2-х волн, распространяющихся в противоположных направлениях – вдоль и против оси x

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E &= E_0 \cos(\omega t + kx + \alpha) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Если одномерная область ограничена ($0 \leq x \leq a$), то на границах области проявляются либо **узлы** (пример из механики: закрепленная на краях струна), либо **пучности** (стержень, закрепленный посередине).

а) Если $\alpha = 0$, то в точке $x = 0$ будет пучность и сумма двух волн дает:

$$E = 2E_0 \cos kx \cos \omega t \quad (1.2.13)$$

(при $x = 0$ имеем $E = 2E_0 \cdot \cos \omega t$).

б) Если $\alpha = \pi$, то в точке $x = 0$ имеем узел:

$$E = 2E_0 \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 2E_0 \sin kx \sin \omega t \quad (1.2.14)$$

(при $x = 0$ получаем $E = 0$).

Пусть для определенности имеем на границах области узлы (те же результаты могут быть получены для пучностей на границах области), тогда

на правой границе $x = a$ тоже узел, т.е. фаза, входящая в $\text{Sink}x$, должна быть равна:

$$ka = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.2.15)$$

Пусть имеется 2 стоячих волны с разными волновыми числами: $k_1 = (\pi/a)n_1$ и $k_2 = (\pi/a)n_2$. Разность чисел $(n_2 - n_1)$ определяет число стоячих волн ΔN , модули векторов которых лежат в интервале волновых чисел $\Delta k = k_2 - k_1$:

$$\Delta N_k = \frac{a}{\pi} \Delta k \quad (1.2.16)$$

Перейдем к непрерывной последовательности, считая, что Δk между соседними стоячими волнами маленькая величина:

$$dN = \frac{a}{\pi} dk, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad dk = \frac{1}{c} d\omega.$$

Тогда число стоячих волн, частоты которых лежат в диапазоне $\omega \div \omega + d\omega$, определяется:

$$dN = \frac{2a}{\pi c} d\omega, \quad (1.2.17)$$

где множитель 2 появился из-за того, что возможны два типа поляризации э/м волн. Отношение $dN/d\omega$ называют **плотностью состояний**.

2) Трехмерный случай.

Рассмотрим трехмерный ящик с размерами a , b , c (рис. 2.2 А). При рассмотрении этого случая учтем, что при отражении от стенки проекция вектора \vec{k} на направление, перпендикулярное к стенке, т.е. например k_x меняется на “- k_x ” при отражении, как показано на рисунке 2.2 Б. Итак, стоячая волна в прямоугольном ящике возникает при наложении 8-ми бегущих волн, отличающихся знаками проекций вектора \vec{k} :

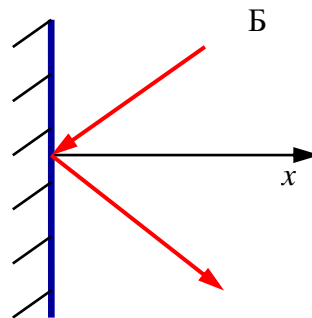
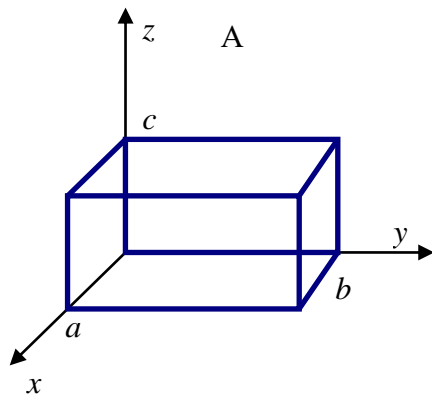


Рис. 2.2.

- 1) (k_x, k_y, k_z) ;
- 2) $(k_x, -k_y, k_z)$;
- 3) $(k_x, k_y, -k_z)$;
- 4) $(k_x, -k_y, -k_z)$;
- 5) $(-k_x, k_y, k_z)$;
- 6) $(-k_x, -k_y, k_z)$;
- 7) $(-k_x, k_y, -k_z)$;
- 8) $(-k_x, -k_y, -k_z)$;

Пусть для определенности имеем на стенках при $x = 0, y = 0, z = 0$ узлы, тогда уравнение стоячей волны приобретает вид:

$$E = 8E_0 \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \cdot \sin \omega t. \quad (1.2.18)$$

Для того чтобы узлы стоячей волны наблюдались также на стенках $x = a, y = b, z = c$ (т.е. во всех восьми вершинах рассматриваемой области), необходимо выполнение условия:

$$k_x = \frac{\pi}{a} n_x; \quad k_y = \frac{\pi}{b} n_y; \quad k_z = \frac{\pi}{c} n_z, \quad (1.2.19)$$

где $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$. В k -пространстве с осями k_x, k_y, k_z каждой стоячей волне отвечает точка, положение которой задается проекцией волнового вектора на координатные оси (см рис. 2.3). На долю каждой точки приходится объем $\frac{\pi^3}{abc} = \frac{\pi^3}{V}$, где V – объем пространственной области (ящика). Следовательно, плотность точек равна V/π^3 . Объем бесконечно малого кубика в k -пространстве, показанного на рис. 2.3, будет равен

$$dk_x dk_y dk_z = \frac{\pi^3}{abc} dn_x dn_y dn_z \quad (1.2.20)$$

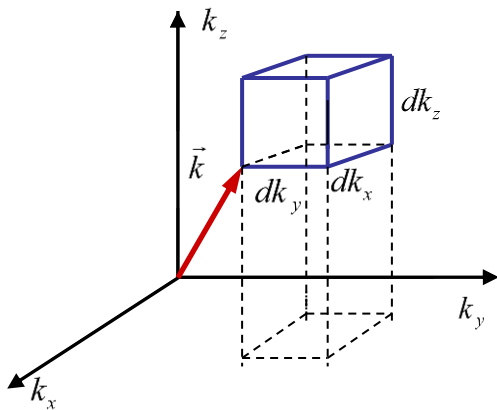


Рис. 2.3.

Тогда число стоячих волн, заключенном в этом кубике определяется выражением

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \frac{abc}{\pi^3} dk_x dk_y dk_z. \quad (1.2.21)$$

Поскольку именно модуль волнового вектора \bar{k} определяет частоту (или длину) волны излучения ($k = \omega/c$), будем рассматривать объем фазового пространства, соответствующий только его изменению. Число стоячих волн, у которых модуль волнового вектора лежит в пределах от k до $k + dk$, равно количеству точек, попадающих в пределы $1/8$ части шарового слоя радиуса k и толщины dk .

$$dN = \frac{V}{8\pi^3} 4\pi k^2 dk = V \frac{k^2 dk}{2\pi^2} = V \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}. \quad (1.2.22)$$

Множитель $1/8$ появляется из-за того, что при сложении бегущих электромагнитных волн уже учтены проекции волнового вектора обоих знаков. Поэтому здесь берутся только положительные значения компонент волнового вектора: $k_x, k_y, k_z > 0$.

Полученное выражение необходимо умножить на 2, поскольку вдоль заданного направления могут распространяться 2 электромагнитные волны

одинаковой частоты, отличающиеся направлением поляризации (поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях). Таким образом, число стоячих волн, приходящихся на единицу объема, в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ равно

$$dn_{\omega} = \frac{2dN}{V} = \frac{2\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3};$$

$$dn_{\omega} = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (1.2.23)$$

Итак, плотность стоячих волн, приходящаяся на единицу частоты, или иначе **плотность состояний**, пропорциональна квадрату частоты. Мы получили *важный результат, справедливый как в классической, так и в квантовой физике, и используемый при решении различных задач, где требуется вычислить плотность состояний.*

Плотность энергии для электромагнитного поля, как известно, равна

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2).$$

Из статистических соображений Рэлей и Джинс предположили, что на каждую стоячую волну будет приходиться в среднем энергия, равная величине $2 \cdot \frac{1}{2} kT$, то есть по одной половинке энергии kT на электрическую и магнитную компоненты электромагнитной волны. Тогда плотность энергии электромагнитного поля, приходящаяся на интервал частот $d\omega$, равна:

$$u(\omega, T) d\omega = \langle \varepsilon \rangle dn_{\omega} = 2 \frac{kT}{2} \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (1.2.24)$$

Отсюда спектральная плотность излучения получается равной:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \quad (1.2.25)$$

и испускательная способность абсолютно черного тела:

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (1.2.26)$$

Формулы (1.2.25) и (1.2.26) – *закон или формулы Рэля-Джинса.*

Перечислим основные свойства соотношений (1.2.25) и (1.2.26).

а). Формула (1.2.26) удовлетворяет критерию Вина (1.2.1):

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT = \frac{k}{4\pi^2 c^2} \omega^3 \left(\frac{T}{\omega} \right) = \omega^3 F \left(\frac{\omega}{T} \right), \quad (1.2.27)$$

или

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{kT}{4\pi^2 c^2} \frac{(2\pi c)^2}{\lambda^2} = \frac{2\pi c}{\lambda^5} k\lambda T = \frac{2\pi c}{\lambda^5} \psi(\lambda T). \quad (1.2.28)$$

б). Сравнение с экспериментом показано на рис. 2.4: формула Рэля-Джинса хорошо описывает экспериментальную кривую только в длинноволновой области спектра ($\lambda > 7 \cdot 10^3$ нм), или при низких частотах, и резко расходится с опытом для малых длин волн. Более того, при расчете энергетической

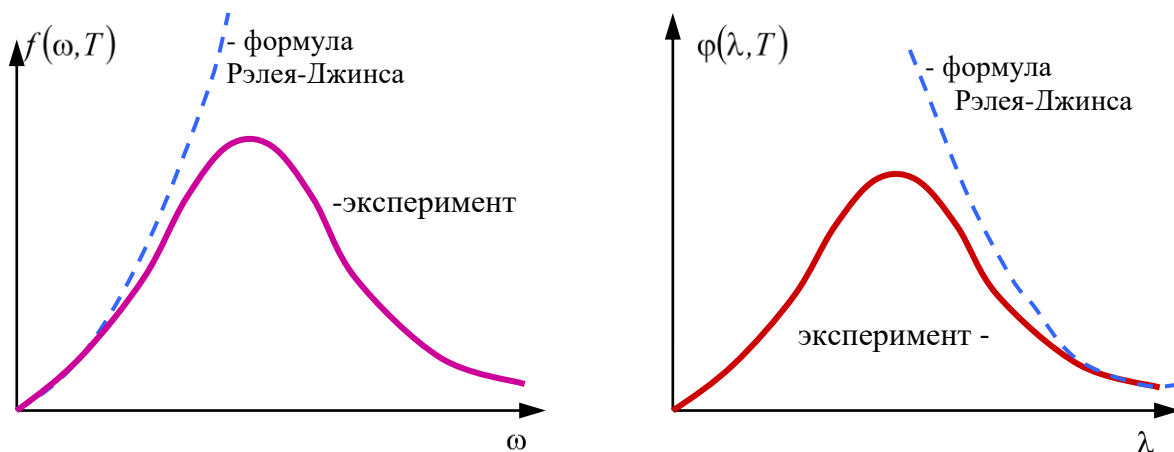


Рис. 2.4.

светимости (интегральной испускательной способности) интегрирование формулы Рэля-Джинса дает расходящееся выражение:

$$R(T) = \int_0^{\infty} A\omega^2 T d\omega = AT \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega = \frac{AT}{3} \omega^3 \Big|_0^{\infty} \rightarrow \infty \quad (1.2.29)$$

Итак, из этой теории получаем, что при любой температуре энергетическая светимость бесконечна. Причем с ростом частоты электромагнитных волн плотность энергии излучения возрастает. Эта нефизическая расходимость получила название *ультрафиолетовой катастрофы*. Опыт показывает, что равновесие между излучением и излучающим телом устанавливается при конечных значениях энергетической светимости или плотности энергии излучения $U(T)$.

*Примечание 2. Джон Уильям Рэлей (Стретт), английский физик, 1842–1919, Нобелевская премия 1904 г. за открытие аргона;
Джеймс Хопвуд Джинс, английский физик, 1877–1946.*

1.2.3. Формула Вина.

В.Вин в 1896 г. предложил конкретный вид для функции $F(\omega/T)$. Он рассмотрел хаотическое движение атомов как квазипериодический процесс, и

средней энергии этого квазипериодического движения сопоставил определенную частоту ω : $\langle \varepsilon \rangle \sim \langle v^2 \rangle \sim \omega$. При этом, как рассуждал Вин, каждая мода колебаний является носителем энергии $\varepsilon(\omega)$, но не все моды данной частоты возбуждены. Относительное число $\Delta N/N$ возбужденных мод задается распределением Больцмана

$$\frac{\Delta N}{N} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \quad (1.2.30)$$

и тогда для средней энергии, приходящейся на возбужденные моды с частотой ω , имеем

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon(\omega) \frac{\Delta N}{N} = \varepsilon(\omega) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \quad (1.2.31)$$

Если $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sim e^{-\frac{m\langle v^2 \rangle}{2kT}} \sim e^{-\frac{B\omega}{T}}$ и, по предположению Вина, $\langle \varepsilon(\omega) \rangle \sim \omega$, то, используя полученное выше выражение для плотности состояний (1.2.23), получаем следующую формулу:

$$u(\omega, T) d\omega = C_1 \omega \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{B\omega}{T}} = A \omega^3 e^{-\frac{B\omega}{T}} d\omega.$$

Итак, формула Вина для универсальной функции (1.2.1) равна:

$$u(\omega, T) = A \omega^3 e^{-\frac{B\omega}{T}}. \quad (1.2.32)$$

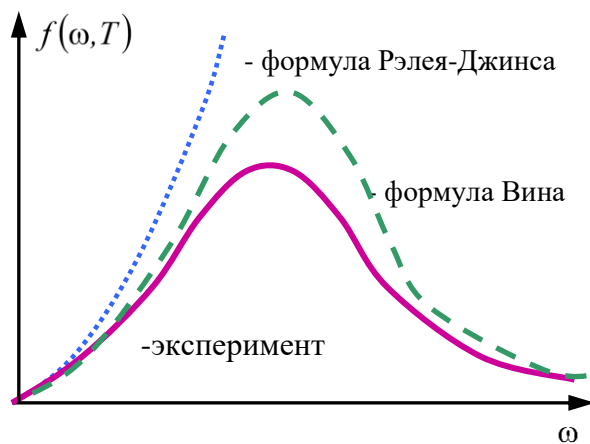


Рис. 2.5.

Здесь A и B – постоянные коэффициенты. Эта формула позволила описать эксперимент в коротковолновой (при больших частотах) области и довольно близка к общей экспериментальной зависимости (рис. 2.5).

Однако она противоречит эксперименту Луммера и Прингсгейма (1899г.) в области низких частот ($\omega < 10^{14} \text{ сек}^{-1}$ или $\lambda > 10^4 \text{ нм}$): при частоте стремящейся к нулю, т.е. в инфракрасной области

спектра, эксперимент дает другую зависимость от частоты:

$$u(\omega, T) / \omega^2 \rightarrow \text{const.}$$

Таким образом, по-прежнему не удается добиться согласия теории с опытом, особенно в “промежуточной” области спектра.

1.3. Гипотеза и формула Планка

1.3.1. Гипотеза квантов.

С классической точки зрения вывод формулы Рэлея-Джинса является безупречным. Поэтому расхождение этой формулы с опытом указывало на существование неизвестных закономерностей, несовместимых с представлениями классической физики.

В октябре 1900 г. немецкий физик М. Планк сначала эмпирически, а затем теоретически (обосновав вывод через 2 месяца,) записал формулу для спектральной плотности излучения черного тела. Универсальная функция $f(\omega, T)$ равна:

$$f(\omega, T) = \frac{A\omega^3}{\exp\left(\frac{B\omega}{T}\right) - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}; \quad (1.3.1)$$

Или плотность энергии излучения $u(\omega, T)$ имеет вид:

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}, \quad (1.3.2)$$

где \hbar – коэффициент пропорциональности между энергией и циклической частотой, получивший название *постоянной Планка*.

Численное значение постоянной Планка

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

было определено из опыта. Сначала эту формулу Планк получил просто интерполяционным путем, скомбинировав закон Рэлея-Джинса и формулу Вина. Далее, уже при теоретическом выводе ему пришлось ввести *гипотезу квантов*.

Через 8 недель после полуэмпирического открытия своей формулы (1.3.1) Планк представил её теоретический вывод на заседании Немецкого физического общества. Это случилось 14 декабря 1900 г. и этот день стал днем рождения *квантовой физики*. При выводе формулы Планк выдвинул гипотезу, в корне противоречащую всему построению классической физики: *излучение* (позже, и поглощение) *происходит не непрерывно, а конечными порциями – квантами света или квантами энергии*.

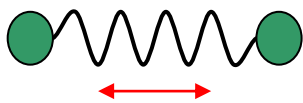


Рис. 3.1.

Основной вопрос – что излучает? **Осцилляторы!** Осцилляторы (атомы, молекулы, рис.3.1) могут находиться только в некоторых **избранных стационарных состояниях**, в которых их энергия является целым

кратным некоторого наименьшего количества энергии ε_0 :

$$\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots, n\varepsilon_0.$$

То есть энергия микроскопических систем может принимать только дискретные, строго определенные значения.

Переход из одного стационарного состояния в другое может происходить скачком в результате излучения (поглощения) осциллятором такого же кратного количества энергии: $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots, n\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \hbar\omega$ (или $\varepsilon_0 = h\nu_0$, $\hbar = h/2\pi$) – отдельная порция излучения, пропорциональная частоте излучения, а n – количество таких порций, испускаемых осциллятором на частоте ω .

Динамическое равновесие в системе осуществляется посредством постоянного обмена квантами между полем излучения и телом – осциллятором. При данной температуре T возбуждены все энергетические уровни, но с разными вероятностями. Поэтому требуется вычислить среднюю энергию осциллятора $\langle \varepsilon \rangle$ в этом состоянии статистического равновесия.

Постоянная Планка \hbar имеет размерность “энергия \times время”. Поэтому её иногда называют *квантом действия* по аналогии с величиной той же размерности в классической механике.

Из доклада М. Планка на заседании 14 декабря 1900 г.: *“Квант действия... либо фиктивная величина, и тогда вывод закона излучения был в принципе ложным и представлял собой всего лишь пустую игру в формулы, лишённую смысла, либо же вывод закона излучения опирается на некую физическую реальность, и тогда квант действия должен приобрести фундаментальное значение в физике и означает нечто совершенно новое и неслыханное, что должно произвести переворот в физике...”*.

Однако такие откровения даются не просто, и сам Планк вплоть до 1911 г. пытался примирить гипотезу о квантах с классической физикой. Вывод закона излучения по методу Планка в какой-то мере неудовлетворителен, поскольку он во многом основан на законах классической физики и лишь частично использует квантовые представления. Поглощение и испускание света осциллятором рассчитывалось с помощью классической электродинамики, в то время как при нахождении средней энергии осциллятора использовалась квантовая гипотеза о его дискретных энергетических уровнях. Успех такой эклектической теории связан со спецификой выбранной модели: для осциллятора классическое и квантовомеханическое рассмотрение процессов поглощения и испускания приводит к одинаковым результатам.

1.3.2. Вывод формулы Планка по Эйнштейну.

В 1916 г. А. Эйнштейн дал сравнительно простой вывод формулы Планка, используя для моделирования механизма излучения переходы в 2^x -уровневой системе и применив к описанию процессов излучения вероятностный подход.

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ – значения энергий, которые характеризуют состояние рассматриваемой системы (атом, молекула и т.д.). Рассмотрим систему атомов (молекул и т.д.), описываемую дискретным энергетическим спектром, совокупность значений которого исчерпывается двумя величинами ε_m и ε_n . В ε -пространстве этим значениям энергий можно сопоставить энергетические уровни ε_m и ε_n , а состояние системы описывать заданием положения этих уровней. Такая система называется *двухуровневой*.

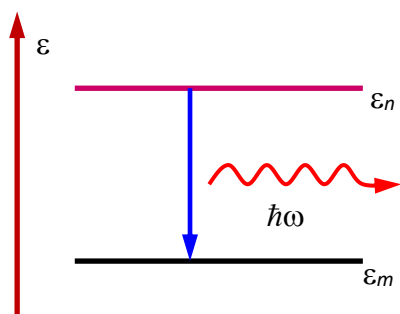


Рис. 3.2.

Процесс излучения (рис. 3.2) можно рассматривать как переход системы из состояния, характеризуемого верхним энергетическим уровнем в состояние, которому соответствует нижний энергетический уровень, или, как принято говорить, переход с верхнего уровня на нижний уровень. При этом энергия излучения равна:

$$\hbar\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m. \quad (1.3.3)$$

То есть для такого элементарного процесса выполняется закон сохранения энергии: энергия испускаемого или поглощаемого фотона равна разности энергий соответствующих стационарных состояний.

Эйнштейн ввел в рассмотрение два типа переходов, сопровождаемых излучением, и переход, связанный с поглощением кванта.

1). *Спонтанное излучение* – самопроизвольный переход с верхнего уровня ε_n на уровень ε_m , который происходит без участия внешних полей, носит статистический характер (рис. 3.3). Предсказать в какой именно момент произойдет этот переход невозможно. Момент испускания фотона есть величина случайная, т.е. мы не можем с достоверностью предсказать, произойдет или нет в данном атоме переход в течение промежутка времени dt , следующего за моментом t , но можем только указать его вероятность.

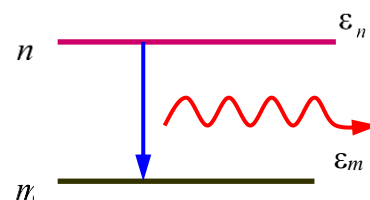


Рис. 3.3.

Пусть в момент времени $t = \tau$ в состоянии n находилось N_n атомов, а через промежуток времени dt часть атомов перешла в состояние m , а часть осталась в состоянии n . Тогда за время dt число переходов $n \rightarrow m$ пропорционально числу атомов на верхнем уровне N_n . Если *вероятность спонтанных переходов* обозначить A_{nm} , то среднее число таких переходов можно записать:

$$dN_{nm}^{cn} = A_{nm} N_n dt. \quad (1.3.4)$$

Статистический характер процессов спонтанного излучения приводит к тому, что фазы, направления распространения и состояния поляризации световых волн, испускаемых отдельными атомами, не согласованы друг с другом. Это означает, что спонтанное излучение *некогерентно*.

2). В электромагнитном поле будут происходить *процессы поглощения*. Это – процессы возбуждения атомов, а именно, переходы атомов из основного

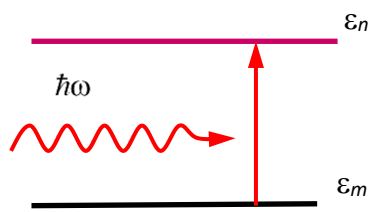


Рис. 3.4.

состояния в возбужденное за счет поглощения фотонов. Переход из нижнего энергетического состояния в верхнее соответствует *поглощению энергии* (см рис. 3.4). Этот переход всегда *вынужденный*. Он описывает резонансный процесс, в котором система, переходя из состояния с энергией ϵ_m в состояние, характеризующееся уровнем ϵ_n , поглощает квант энергии, следуя (1.3.3):

$$\hbar\omega_{mn} = \epsilon_n - \epsilon_m.$$

Вероятность такого процесса в единицу времени пропорциональна плотности энергии электромагнитного поля $u(\omega, T)$ и некоторому коэффициенту B_{mn} , характеризующему *вероятность возбуждения атома*. Среднее число переходов $dN_{mn}^{6\text{вн}}$ из основного состояния в возбужденное за промежуток времени от t до $t + dt$ пропорционально также числу N_m атомов в основном состоянии, поэтому можно записать:

$$dN_{mn}^{6\text{вн}} = B_{mn} N_m u(\omega, T) dt. \quad (1.3.5)$$

3) Допустим, что атомы находятся в термодинамическом равновесии с веществом. Тогда на основании *принципа детального равновесия* число переходов с испусканием и поглощением фотонов должно быть одинаково. Однако, приравняв правые части (1.3.4) и (1.3.5), мы получим не формулу Планка, а её предельный случай при $\hbar\omega/kT \gg 1$, т.е. формулу Вина. Чтобы таким путем получить согласующуюся с опытом формулу Планка, необходимо, как впервые показал Эйнштейн, предположить, что электромагнитное поле вызывает не только переходы из основного состояния

в возбужденное, но **вынуждает совершать и обратные переходы** – из **возбужденного состояния в основное**, сопровождающиеся испусканием фотонов. Такие переходы под действием внешнего поля в отличие от спонтанных получили название *индуцированного* или *вынужденного* (стимулированного) излучения.

Вынужденное (индуцированное) излучение – излучение, появляющееся под действием или влиянием внешнего электромагнитного поля, частота которого близка или равна частоте квантового перехода ω_{nm} (см рис. 3.5).

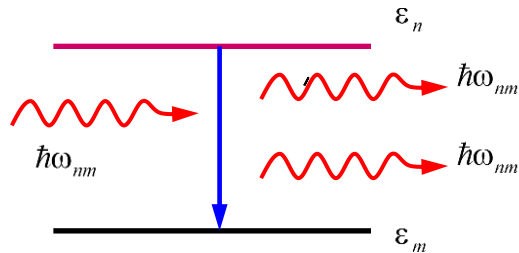


Рис. 3.5.

Иногда его называют *отрицательным поглощением*.

Вынужденное излучение обладает замечательными свойствами, на что впервые обратил внимание П. Дирак в 1927 г. В каждом акте вынужденного испускания происходит увеличение на

единицу числа фотонов в той моде излучения, под действием которой произошел переход. Все фотоны одной моды тождественны. Это означает, что новый фотон неотличим от фотонов, вызывающих его испускание. **Частота, фаза, направление распространения и поляризация волн**, испущенных при вынужденных переходах, точно такие же, как у излучения, вызвавшего переходы. Т.е. эти излучения *когерентны*.

Для описания индуцированного излучения, как и спонтанного, существует классическая аналогия: классический осциллятор в поле световой волны будет совершать вынужденные колебания. В неустановившемся состоянии вблизи резонанса в зависимости от соотношения фаз между колебаниями осциллятора и внешнего поля энергия поля может переходить как от поля к осциллятору (поглощение), так и от осциллятора к полю (вынужденное испускание).

Число вынужденно испущенных фотонов за промежуток времени от t до $t + dt$ пропорционально заселенности верхнего энергетического уровня N_n , спектральной плотности излучения $u(\omega, T)$ и вероятности вынужденных переходов из возбужденного состояния в основное B_{nm} :

$$dN_{nm}^{вн} = B_{nm} N_n u(\omega, T) dt. \quad (1.3.6)$$

Полное число переходов за время dt из возбужденного состояния в основное будет определяться совокупностью спонтанного и вынужденного излучения.

Пусть состояние системы равновесно, тогда имеет место *детальное равновесие*:

$$dN_{nm}^{cn} + dN_{nm}^{6\text{вн}} = dN_{mn}^{6\text{вн}}, \quad (1.3.7)$$

или подробнее с учетом (1.3.4) – (1.3.6):

$$A_{nm}N_n + B_{nm}N_n u(\omega_{nm}) = B_{mn}N_m u(\omega_{nm}). \quad (1.3.8)$$

Таким образом, в состоянии равновесия имеем для отношения «заселенностей» состояний n и m :

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{B_{mn}u(\omega_{nm})}{A_{nm} + B_{nm}u(\omega_{nm})}. \quad (1.3.9)$$

Величины A_{nm} , B_{nm} и B_{mn} называются *коэффициентами Эйнштейна*. Они являются характеристиками только самой системы (атома, молекулы) и могут зависеть лишь от частоты ω_{nm} , которая связана с выбранными энергетическими состояниями ε_n и ε_m , и не зависят от спектральной плотности энергии поля.

Рассмотрим следующие случаи для выбранных уровней.

1) Энергетические уровни m, n – *простые*, иначе говоря, невырожденные или не кратные. Тогда для данной пары уровней коэффициенты Эйнштейна B_{nm} и B_{mn} равны друг другу. Действительно, поскольку вынужденные переходы пропорциональны $u(\omega, T)$, то при очень высокой температуре плотность энергии $u(\omega, T)$ становится настолько большой, что спонтанным излучением можно пренебречь по сравнению с индуцированными переходами. Тогда имеем $B_{nm}N_n = B_{mn}N_m$. Но в равновесии при $\hbar\omega/kT \rightarrow \infty$ населенности уровней выравниваются ($N_n = N_m$), поэтому получаем:

$$B_{nm} = B_{mn} \quad (1.3.10)$$

Равенство $B_{nm} = B_{mn}$, полученное для предельного случая $T \rightarrow \infty$, справедливо всегда, в том числе и в отсутствие теплового равновесия, т.к. коэффициенты B_{nm} и B_{mn} зависят только от свойств атомов и не зависят от внешних условий, в которых происходят переходы.

2) Уровни энергии m, n – *вырожденные* (кратные). В квантовой физике вырождение заключается в том, что некоторая физическая величина, характеризующая данную систему (атом, молекулу и т.д.) имеет одинаковое значение для различных состояний системы. Число таких различных состояний (способов реализации), которым отвечает одно и то же значение данной физической величины, называется *кратностью вырождения* этой величины. При этом уровни m, n могут иметь разный статистический вес. Пусть g_m – статистический вес уровня с энергией ε_m , а g_n – статистический вес уровня с энергией ε_n . Тогда при $T \rightarrow \infty$ получаем следующее равенство

$$g_m B_{mn} = g_n B_{nm}. \quad (1.3.11)$$

Если система атомов находится в равновесии, то атомы населяют энергетические уровни так, как это следует из распределения Больцмана. Тогда вероятность заселения уровня с энергией ε_m равна:

$$W_m = C g_m \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right), \quad (1.3.12)$$

и аналогично для уровня с энергией ε_n :

$$W_n = C g_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right). \quad (1.3.13)$$

Далее для (1.3.9) имеем:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)}{g_m \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)} = \frac{g_n}{g_m} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{kT}\right) = \frac{B_{mn} u(\omega, T)}{A_{nm} + B_{nm} u(\omega, T)}. \quad (1.3.14)$$

Из последнего равенства выражаем спектральную плотность излучения:

$$u(\omega, T) = \frac{g_n A_{nm}}{g_m B_{mn} \exp\left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{kT}\right) - g_n B_{nm}}. \quad (1.3.15)$$

Теперь, устремляя $T \rightarrow \infty$ и помня, что $\hbar\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m$, получаем $\exp(\hbar\omega/kT) \rightarrow 1$ и $u(\omega, T) \rightarrow \infty$. Это возможно получить только при выполнении условия (1.3.11), как обсуждали ранее. Тогда, упрощая выражение (1.3.15), можем записать

$$u(\omega, T) = \frac{A_{nm} g_n}{g_n B_{nm} \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \right]} = \frac{A_{nm}}{B_{nm} \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \right]}. \quad (1.3.16)$$

Чтобы определить отношение A_{nm}/B_{nm} , не производя дополнительных вычислений, воспользуемся формулой Рэля-Джинса, которая справедлива в пределе $\omega \rightarrow 0$ или $\hbar\omega \ll kT$. Если $\hbar\omega/kT \ll 1$, то, раскладывая (1.3.16) в ряд, имеем

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}, \quad (1.3.17)$$

тогда

$$u(\omega, T) \approx \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{kT}{\hbar\omega}. \quad (1.3.18)$$

С другой стороны, формула Рэля-Джинса в рассматриваемом пределе дает:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \quad (1.3.19)$$

Приравнивая правые части (1.3.18) и (1.3.19), получаем для отношения вероятностей переходов

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}. \quad (1.3.20)$$

Таким образом, опуская индексы n и m , можем записать формулу Планка, определяющую плотность энергии равновесного излучения (1.3.2):

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$$

или испускательную способность абсолютно черного тела (1.3.1)

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$$

Примечание 1. *Макс Карл Эрнст Людвиг Планк, немецкий физик-теоретик, 1858 – 1947, Нобелевская премия 1918 г. за открытие кванта действия;*
Альберт Эйнштейн, немецкий физик-теоретик, 1879–1955, Нобелевская премия 1921г. за объяснение законов фотоэффекта;
Поль Анриен Морис Дирак, английский физик-теоретик, 1902–1974, Нобелевская премия 1933г. за создание квантовой механики

1.3.3. Свойства формулы Планка.

Рассмотрим основные свойства формулы Планка, а также как она согласуется с прежними результатами.

- 1) Формула Планка согласуется с экспериментом при всех значениях частоты ω , или длины волны λ .
- 2) Удовлетворяет критерию Вина $f(\omega, T) = A\omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right)$.
- 3) В предельном случае больших частот излучения ($\omega \rightarrow \infty$, малые длины волн λ): $\hbar\omega \gg kT$, $\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \gg 1$, переходит в формулу Вина:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \omega^3 \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right). \quad (1.3.21)$$

- 4) В предельном случае малых частот (при $\omega \rightarrow 0$ или при больших длинах волн λ): получаем $\hbar\omega \ll kT$, $\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$, и формула Планка переходит в формулу Рэлея-Джинса

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (1.3.22)$$

- 5) Интегрируя по всем частотам излучения, получаем закон Стефана-Больцмана:

$$R(T) = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (1.3.23)$$

где $\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3}$ – постоянная Стефана-Больцмана.

- 6) Запишем “по Планку” испускательную способность абсолютно черного тела, перейдя от частоты ω к длине волны λ : $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$,

$$\varphi(\lambda, T) = f(\omega, T) \frac{d\omega}{d\lambda},$$

получаем

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{\hbar(2\pi c)^3}{4\pi^2 c^2 \lambda^3} \frac{2\pi c/\lambda^2}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1} = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1}. \quad (1.3.24)$$

- 7) Получаем закон смещения Вина из (1.3.24): $T\lambda_{\max} = b$. Положение максимума определяется:

$$\frac{d\varphi(\lambda, T)}{d\lambda} = 0 = 4\pi^2 \hbar c^2 \left[\frac{1}{\lambda^5 \left(\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1 \right)} \right]'_{\lambda} = \frac{-5\lambda^{-6}}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1} + \frac{\lambda^{-5} \exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) \cdot \frac{2\pi\hbar c}{kT} \lambda^{-2}}{\left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1 \right]^2}$$

Очевидные корни этого уравнения $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ дают минимум функции $\varphi(\lambda, T)$. Далее вводя обозначение $\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda_{\max}} = x$, получаем трансцендентное

уравнение для нахождения x :

$$-5 + \frac{x e^x}{e^x - 1} = 0 \quad \text{и} \quad x e^x - 5(e^x - 1) = 0.$$

Его решение: $x_0 = \frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda_{\max}} = 4,965$ и получаем закон смещения Вина:

$$T\lambda_{\max} = b = \frac{2\pi\hbar c}{4,965 \cdot k} \quad (1.3.25)$$

Приложение 1. Биографическая справка. Max Karl Ernst Ludwig Plank (1858 – 1947 гг.). Из семьи юриста. Обучался в Мюнхенском и Берлинском университетах (Кирхгоф, Гельмгольц). С 1895 г.- профессор в Киле, с 1889 г.- в Берлине. В 1930 – 37 гг.- президент общества Кайзера Вильгельма за развитие науки. Почетный член АН СССР с 1926 г. Член Лондонского Королевского Общества с 1926 г. Нобелевская премия 1918 г. - “За открытие кванта действия”. (1^{ый} сын погиб в первой мировой войне, 2^{ой} сын казнен в 1945 г. как участник движения Сопротивления).

Приложение 2. Приведем другой вывод формулы Планка, исходя из предположения, что энергетический спектр осциллятора дискретный, эквидистантный, а расстояние между соседними уровнями равно $\hbar\omega$.

При конечной температуре T вероятность того, что осциллятор имеет энергию $n\hbar\omega$ (где $n = 1, 2, 3, \dots$) определяется распределением Больцмана

$$P(n\hbar\omega) = A e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}.$$

Тогда можно сосчитать среднее значение энергии осциллятора при конечной температуре:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\hbar\omega e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega x}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega x}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega x}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega x}}$$

Для упрощения введем $x = 1/kT$ и просуммируем геометрическую прогрессию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega x} = 1 + e^{-\hbar\omega x} + e^{-2\hbar\omega x} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega x}}$$

Представляя сумму в числителе в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\hbar\omega e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}},$$

получаем:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega x}}}{\frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega x}}} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-\hbar\omega x})}{1 - e^{-\hbar\omega x}} = \frac{\hbar\omega e^{-\hbar\omega x}}{1 - e^{-\hbar\omega x}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega x} - 1}$$

Средняя энергия должна быть умножена на статистический вес этого состояния в единице объема, т.е. на плотность состояний. Вспоминая, что плотность состояний (1.2.23) $\omega^2/\pi^2 c^3$, получаем формулу Планка для спектральной плотности энергии излучения

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT} - 1\right)}$$

1.4. Поглощение и усиление электромагнитного излучения веществом.

1.4.1. Ослабление потока излучения. Закон Бугера - Ламберта.

Взаимодействие света (и в целом электромагнитного излучения) с веществом определяется индуцированными, или вынужденными, переходами и вообще сводится к двум процессам:

- 1) поглощение света невозбужденными частицами (атомами или молекулами), что приводит к ослаблению пучка;
- 2) преобразование внутренней энергии (избыточной) частиц в энергию электромагнитного излучения и колебания.

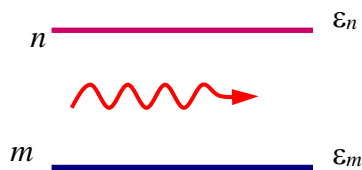


Рис. 4.1.

Рассмотрим для простоты однородную среду и из всех энергетических уровней среды выделим 2 уровня с энергиями ε_n и ε_m (рис. 4.1). Пусть заселенности этих уровней в единице объема равны: N_n – число атомов в состоянии с энергией ε_n , N_m – число атомов в состоянии с энергией ε_m .

Пусть через среду в направлении оси x проходит электромагнитное излучение частоты

$$\omega = (\varepsilon_n - \varepsilon_m)/\hbar = \omega_{mn}.$$

Благодаря индуцированным переходам по мере прохождения излучения через среду его мощность будет меняться, т.е. будет меняться плотность потока энергии I_ω [$\text{Вт}/\text{м}^2$]. Ослабление плотности потока “ $-dI_\omega$ ” на участке $(x, x + dx)$ пропорционально самой плотности потока I_ω и расстоянию dx (см рис. 4.2):

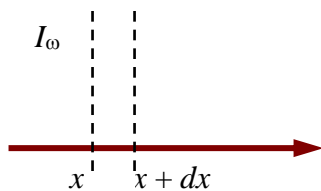


Рис. 4.2.

$$dI_\omega = -\alpha_\omega I_\omega dx \quad (1.4.1)$$

где α_ω – *коэффициент поглощения*. Получаем закон ослабления плотности потока излучения – *закон Бугера - Ламберта*:

$$I_\omega(x) = I_\omega^0 \cdot \exp(-\alpha_\omega x), \quad (1.4.2)$$

где I_ω^0 – плотность потока излучения при $x = 0$. Отметим, что для излучения можно написать, что плотность потока энергии равна

$$I_\omega = c \cdot u(\omega, T).$$

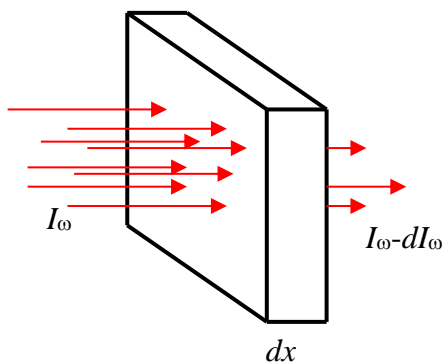


Рис. 4.3.

Как связан коэффициент поглощения α_ω с характеристиками вынужденного излучения и поглощения, которые были введены в предыдущем параграфе? Рассмотрим эти

процессы, подключив равновесную плотность излучения $u(\omega, T)$. Величина “ $-dI_\omega$ ” определяется поглощением и индуцированным излучением атомных частиц среды, находящихся в объеме dV , имеющем площадь основания $S = 1 \text{ см}^2$ и длиной dx (см рис. 4.3). Тогда мощность, поглощаемая частицами объема dV , равна произведению числа поглощенных квантов на энергию кванта (см (1.3.5) - (1.3.6)):

$$dP_{abs} = N_m dV \cdot u(\omega, T) B_{mn} \cdot \hbar\omega \quad (1.4.3)$$

Мощность, получаемая за счет вынужденного (стимулированного) излучения частиц, находящихся в объеме dV , равна:

$$dP_{rad} = N_n dV \cdot u(\omega, T) B_{nm} \cdot \hbar\omega \quad (1.4.4)$$

Поскольку для элемента объема можно записать $dV = S \cdot dx$, а площадь площадки положить равной $S = 1$ (или иначе, можно выражение разделить на S), получаем выражение для изменения интенсивности:

$$-dI_\omega = N_m dx \cdot u(\omega, T) B_{mn} \hbar\omega - N_n dx \cdot u(\omega, T) B_{nm} \hbar\omega \quad (1.4.5)$$

Так как $u(\omega, T) = I_\omega / c$ и из формулы (1.3.11) имеем $g_m B_{mn} = g_n B_{nm}$, где g_m, g_n – статистические веса уровней, тогда получаем:

$$-dI_\omega = \frac{I_\omega}{c} \left(\frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right) B_{mn} g_m \hbar\omega \cdot dx \quad (1.4.6)$$

Интегрируя, в результате вновь получаем закон Бугера - Ламберта

$$I_\omega = I_\omega^0 \cdot \exp(-\alpha_\omega x), \quad (1.4.7)$$

где коэффициент поглощения выражается через коэффициенты Эйнштейна и заселенности уровней:

$$\alpha_\omega = \frac{\hbar\omega}{c} g_m B_{mn} \left(\frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right) \quad (1.4.8)$$

Если статистические веса (или кратности вырождения) уровней одинаковы $g_m = g_n$, то получаем

$$\alpha_\omega = \frac{\hbar\omega}{c} B_{mn} (N_m - N_n) \quad (1.4.9)$$

Рассмотрим 2 случая.

1) В естественных условиях, или просто в равновесии при $\varepsilon_n > \varepsilon_m$, имеем:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} \exp\left[-\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{kT}\right] \quad (1.4.10)$$

то есть $N_n < N_m$ и коэффициент поглощения $\alpha_\omega > 0$. Иначе говоря, происходит поглощение мощности электромагнитного излучения. Качественно зависимость интенсивности света от длины прохождения показана на рис. 4.4 А.

2) Если бы удалось создать *инверсную заселенность*, то есть выполнялось бы условие

$$\frac{N_m}{g_m} > \frac{N_n}{g_n},$$

или $N_m > N_n$ (когда $g_m = g_n$), тогда бы $\alpha_\omega < 0$ и в результате получили бы усиление мощности излучения при его прохождении через среду (см рис. 4.4 Б). На основе идеи создания инверсной заселенности в 1953 году были сформулированы основные принципы мазеров и лазеров.

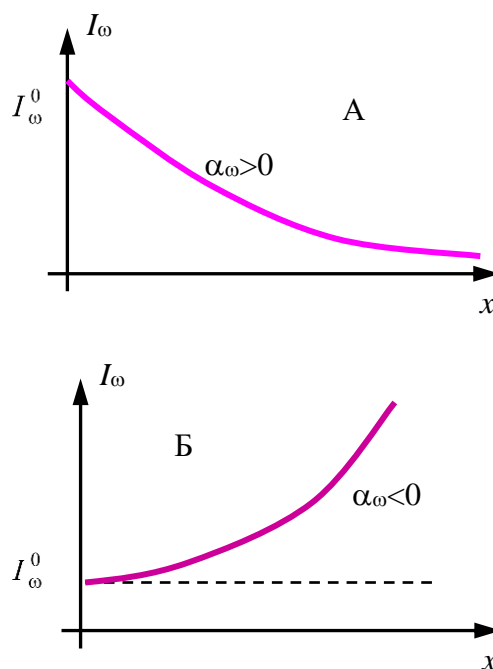


Рис. 4.4.

Главная задача, которую было необходимо решить для усиления мощности излучения, – это создание инверсной заселенности.

Примечание 1. *Пьер Бугер, французский физик, 1698–1758;*
Иоганн Генрих Ламберт, немецкий физик, 1728–1777

1.4.2. Принципы работы лазера.

Создание лазеров стало возможным лишь после того, как нашли способ осуществления инверсной заселенности. Основные принципы работы микроволновых и оптических усилителей были сформулированы А.М. Прохоровым, Н.Г. Басовым и Ч.Х. Таунсом в 1953 году.

В 1954 году были созданы *мазеры* – усилители микроволн. Позже были созданы *лазеры* – оптические квантовые генераторы – *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Создание лазеров стало возможным после осуществления и создания инверсной заселенности.

Наиболее простая схема создания инверсной заселенности – это использование трехуровневых систем с определенными свойствами. Накачкой, которая создается с помощью дополнительного излучения большой мощности, разрядов, столкновений и того подобного, создается возбуждение системы – переход из основного состояния 1 в состояние 3 (см рис. 4.5).

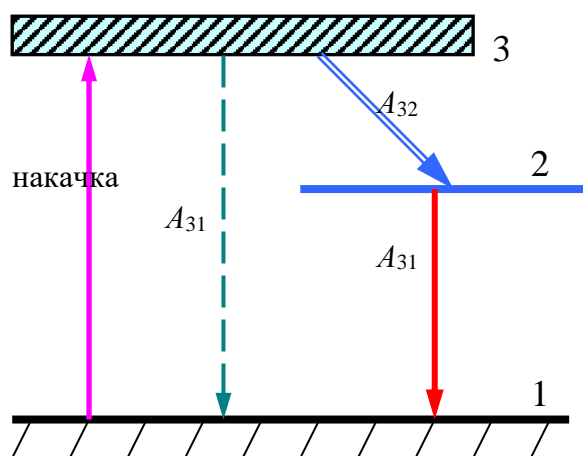


Рис. 4.5.

Уровень 3 подбирается таким, чтобы он имел большую энергетическую ширину, т.е. имел бы малое время жизни и быстро распадался. При этом возбужденная система спонтанно переходит на уровень 1 (обратно в основное состояние) и на другой возбужденный уровень 2. Причем система подобрана таким образом, чтобы вероятность A_{32} перехода на уровень 2 была достаточно большая. Уровень 2 подбирается долгоживущим, так что за время накачки на нем накапливается

значительное число возбуждений и его заселенность становится выше заселенности основного состояния. Так создается инверсная заселенность.

Среда с инверсной заселенностью, способная усиливать проходящий через нее световой поток, называется *активной*. Активная среда помещается между 2-мя зеркалами, чтобы обеспечить многократное прохождение излучения через активную среду. Причем с одной стороны стоит зеркало с максимально возможным коэффициентом отражения, другое зеркало подбирается полупрозрачным, но так, чтобы с одной стороны обеспечить выход лазерного излучения, а с другой – продолжить прохождение излучения в среде для усиления индуцированного излучения. Важно соблюдение точной пропорции между пройденным и отраженным излучением для поддержания генерации. Такая система называется открытым резонатором (напоминает интерферометр Фабри - Перо). Такой резонатор не только усиливает, но также *коллимирует и монохроматизирует излучение*. Коллимация происходит за счет усиления лучей, распространяющихся вдоль оси лазера. Лучи других направлений уходят или поглощаются боковыми стенками в результате отражений. Иногда для уменьшения потерь в лазерах ставят длиннофокусные сферические зеркала.

Накачка лазера бывает различной как по механизму, так и по длительности. По длительности она подразделяется на *непрерывную и импульсную*, отсюда и излучение лазера бывает непрерывным и импульсным. В импульсном режиме можно создать большие мощности излучения.

Перечислим основные свойства лазерного излучения.

- 1). Высокая монохроматичность (ширина линии $\Delta\lambda \leq 0.1 \text{ \AA}$).
- 2). Высокая временная и пространственная когерентность.

- 3). Высокая плотность излучения (интенсивность).
- 4). Малая расходимость пучка.
- 5). Высокая степень поляризации пучка.

В настоящее время имеется громадное разнообразие лазеров, которые отличаются активными средами, мощностями, режимами работы, накачкой и т.д. Рассмотрим некоторые типы лазеров.

1). **Рубиновые лазеры** (1960 г.). В качестве рабочего вещества – рубин ($\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Cr}_2\text{O}_3$). Красноватый цвет рубина из-за ионов хрома, которые замещают в решетке ионы алюминия. Схема задействованных уровней аналогична трехуровневой системе (см рис. 4.6), однако, при этом используются две полосы поглощения: зеленая и голубая. Наряду с ними имеются 2 узких уровня, при переходе с которых испускается красный свет с длинами волн $\lambda = 694.3 \text{ нм}$ и $\lambda = 692.8 \text{ нм}$. Более интенсивная линия с длиной волны $\lambda = 694.3 \text{ нм}$, которая и обычно и усиливается при работе лазера. Однако, генерация возможна на обоих переходах и излучение лазера зависит от выбранных зеркал.

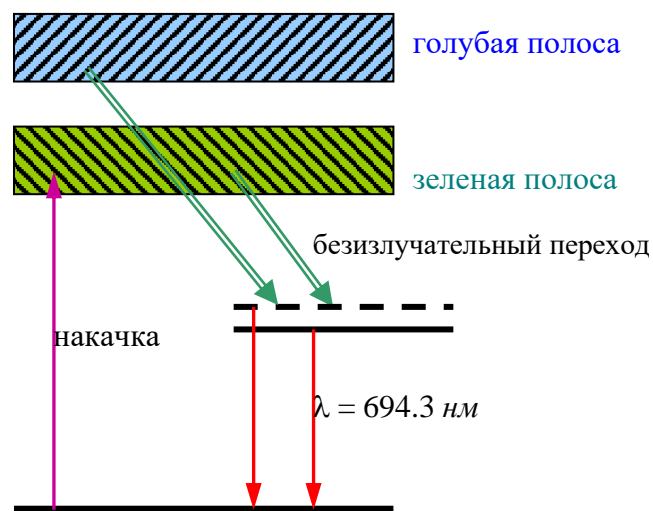


Рис. 4.6.

Накачка осуществляется при вспышке неоновой лампы при прохождении через нее импульса тока, нагревающего газ до $\geq 1000\text{K}$. Непрерывная накачка в этом случае не проходит, поэтому рубиновый лазер – импульсный лазер.

Кристалл рубина вырезается цилиндрической формы определенного размера: длиной 5 см и диаметром 1 см (см рис. 4.7). С одной стороны кристалла устанавливается зеркало или срез для обеспечения полного внутреннего отражения.

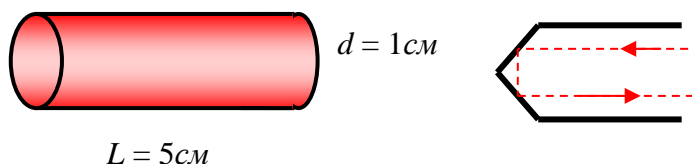


Рис. 4.7.

2). **Гелий-неоновый лазер.** Активная среда – газовая смесь гелия He и неона Ne. Генерация осуществляется за счет переходов между энергетическими уровнями Ne. Гелий играет роль посредника, через атомы которого энергия передается атомам Ne для создания инверсной заселенности. Ток пропускается через He – Ne смесь (см рис.4.8), при этом атомы Ne возбуждаются в метастабильные (долгоживущие) состояния 2^3S и 2^2S . В результате столкновений с атомами Ne они передают им энергию и возбуждают $3S$ и $2S$ уровни, откуда происходит генерация излучения. Неон может давать 130 переходов, наиболее интенсивные переходы дают инфракрасную линию и линию в видимом диапазоне. Это лазеры непрерывного действия.

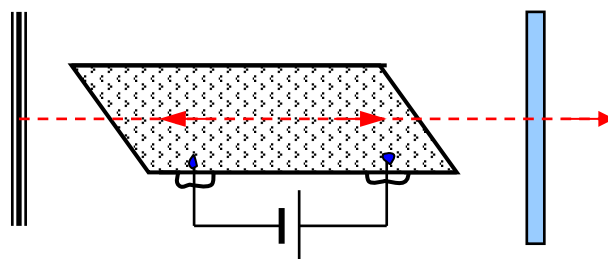


Рис. 4.8.

3). **Лазеры на красителях.** Активная среда – сложные молекулы с сильно выраженными колебательными уровнями энергии. При этом эти энергетические уровни очень широкие, поэтому энергию можно менять почти непрерывно в пределах энергетической полосы (рис. 4.9). Накачка происходит с помощью газоразрядной лампы.

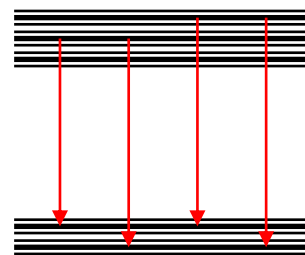


Рис. 4.9.

4). **Твердотельные лазеры,** в частности **полупроводниковые.** Создаются на люминесцирующих средах (рубины, стекла, активированные Nd) и гетероструктурах. Гетеролазеры работают в импульсном и непрерывном режимах. Накачка происходит с помощью инжекции электронов через гетеропереход или электронным пучком.

5). **Лазеры на свободных электронах.** Активная среда – поток релятивистских электронов, колеблющихся под действием внешнего электрического или магнитного поля.

Лазеры в рентгеновском и гамма диапазонах широко обсуждаются в научной литературе.

Примечание 2. Александр Михайлович Прохоров, советский физик, 1916–2004, окончил Ленинградский университет;

Николай Геннадиевич Басов, советский физик, 1922;

Чарльз Хард Таунс, американский физик, 1915.

Все получили Нобелевскую премию за фундаментальные исследования в области квантовой радиофизики в 1964 году

1.5. Корпускулярные свойства электромагнитного излучения.

1.5.1. ФОТОНЫ.

М. Планк выдвинул идею квантов, что излучение происходит порциями энергии – *квантами*. Впоследствии было отмечено, что не только излучение, но и поглощение происходит также квантами. Революционные идеи Планка были по достоинству оценены и получили дальнейшее развитие, прежде всего, в работах А. Эйнштейна.

В 1905 г. А. Эйнштейн выдвинул гипотезу световых квантов. Он предположил, что дискретный характер присущ не только процессам испускания и поглощения света, но и самому свету, т.е. что свет распространяется в виде дискретных частиц-квантов – *фотонов*. Эта гипотеза не получала должного признания в течение 15-17 лет, несмотря на то, что с её помощью удалось объяснить за это время экспериментальные результаты (фотоэффект, границу тормозного рентгеновского излучения). В 1916 г. Эйнштейн выпускает работу “К квантовой теории излучения”, где он ввел понятие спонтанного и индуцированного излучений. Однако сам Эйнштейн до конца своей жизни считал вероятностное описание недостатком теории.

Так рекомендация, данная в 1913 г. Планком и рядом других физиков Эйнштейну при выдвижении последнего в члены Прусской Академии наук, содержала такие любопытные слова: “В целом можно сказать, что вряд ли найдется какая-нибудь из важных проблем современной физики, в решение которой Эйнштейн не внес бы замечательного вклада. То, что он иногда не попадает в цель, как, например, в случае гипотезы световых квантов, нельзя считать отрицательным аргументом, поскольку невозможно выдвинуть новую идею, даже в наиболее точной науке, без некоторой доли риска”.

Отрицательное отношение физиков к гипотезе световых квантов сказалось даже в формулировке Нобелевского комитета, когда в 1921 г. Эйнштейну присудили Нобелевскую премию: “*За вклад в теоретическую физику и, особенно, за открытие законов фотоэффекта*”. Об открытии квантов электромагнитного поля в формулировке – ни слова.

Действительно представление о свете как о потоке классических корпускул несовместимо с эмпирически совершенно явными волновыми свойствами света. Эйнштейн пришел к заключению, что “природа излучения должна быть не такой, какой мы её считаем в настоящее время”. За этими словами скрывается то, что теперь принято называть *двойственной природой света* или *корпускулярно-волновым дуализмом*. Корпускулярный аспект излучения проявляется наиболее отчетливо в коротковолновой части спектра, где для спектральной плотности $u(\omega, T)$ справедлива формула Вина, а волновой аспект – в длинноволновой, где применима формула Рэлея-Джинса. Ни один из этих аспектов не дает полного представления об излучении, ибо

для полного объяснения наблюдаемых явлений необходимо их сочетание. Закон излучения Планка, который содержит в себе предельные случаи, соответствующие корпускулярному и волновому аспектам, представляет собой диалектический синтез двух, казалось бы, несовместимых теорий и снимает противоречие между ними.

Только в 1923-24 гг. после исследований А. Комптона, открывшего эффект, названный его именем, кванты электромагнитного поля перестали быть для физиков гипотетическими частицами. Сам термин *фотон* введен Дж. Льюисом в 1926 г.

Ранее в курсе релятивистской механики мы уже рассматривали элементы фотонной теории света (Глава 2 в [1]). Здесь напомним основные положения *фотонной теории электромагнитного излучения*.

- 1) Масса покоя фотона $m_0 = 0$.
- 2) Энергия фотона $\varepsilon = \hbar\omega = h\nu$. Напомним, что часто энергии микрочастиц измеряют в электронвольтах (эВ). Один эВ – энергия, которую приобретает электрон при прохождении разности потенциалов в 1 Вольт. Например, для зеленого света энергия кванта $\hbar\omega = 2,5 \text{ эВ}$ и длина волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$.
- 3) Скорость фотона всегда есть скорость света c . Фотоны движутся со скоростью c не только в вакууме, но и в веществе. “Замедление” света в веществе обусловлено тем, что фотоны поглощаются атомами и затем испускаются вновь. Между актами поглощения и испускания проходит некоторое время, вследствие чего средняя скорость фотонов в веществе оказывается меньше c .
- 4) Масса фотона как ультррелятивистской частицы определяется

$$m_\phi = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2}.$$

- 5) Импульс фотона $p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$.

Напомним, что согласно классической электромагнитной теории, бегущая электромагнитная волна обладает импульсом \vec{p} , направленным вдоль волнового вектора \vec{k} и пропорциональным энергии волны: $p = \varepsilon/c$. Такое соотношение между энергией и импульсом выполняется и для элементарного кванта излучения – фотона: $p = \varepsilon/c = \hbar\omega/c$. Учитывая, что отношение ω/c равно волновому числу k , запишем

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (1.5.1)$$

Частота ω и волновой вектор \vec{k} характеризуют *волновые свойства* монохроматического излучения, а энергия ε и импульс \vec{p} – *корпускулярные*.

Соотношение, связывающее импульс фотона с волновым вектором, неизбежно следует из первого уравнения (1.5.1), связывающего энергию с частотой, если обратиться к равноправию всех инерциальных систем отсчета, т.е. к принципу относительности. Действительно, отношение энергии к скорости света ε/c и импульс частицы образуют четырехмерный вектор $\{\varepsilon/c, \vec{p}\}$, а отношение частоты к скорости света c и волновой вектор образуют четырехмерный волновой вектор $\{\omega/c, \vec{k}\}$ монохроматической волны. При переходе от одной ИСО к другой пространственные и временные компоненты 4-векторов в соответствии с преобразованиями Лоренца перемешиваются друг с другом. Фундаментальное соотношение $\varepsilon = \hbar\omega$ между временными компонентами этих 4-векторов будет удовлетворять требованию релятивистской инвариантности, т.е. выполняться одновременно во всех системах отсчета, тогда и только тогда, когда такое же соотношение $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ имеет место и между их пространственными компонентами.

Запишем инвариант энергии-импульса как разность квадратов временной и пространственной компонент

$$\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2.$$

Эта величина, которая дает квадрат длины 4-х вектора энергии – импульса, одинакова во всех ИСО, то есть является релятивистским инвариантом. Из инварианта, учитывая, что для фотона $p = \varepsilon/c$, получаем, что масса покоя фотона $m_0 = 0$. Этот результат, если рассматривать фотон как частицу, говорит лишь о том, что фотон похож на обыкновенную частицу не во всех отношениях: он в любой системе отсчета имеет скорость c , и не существует такой системы отсчета, в которой бы он покоился. Равенство нулю массы покоя означает, что фотон в состоянии покоя – лишенное смысла понятие.

Рассмотрим ниже корпускулярные свойства фотонов (света).

Примечание 1. *Артур Холли Комптон, американский физик, 1892–1962, Нобелевская премия 1927г. за эффект, названный его именем;*

Гилберт Ньютон Льюис, американский физико-химик, 1875–1946

1.5.2. Фотоэффект.

Корпускулярные свойства излучения наиболее отчетливо обнаруживаются в явлениях освобождения электронов из вещества под действием света, получившем название *фотоэффекта*. Влияние света на электрические процессы было открыто Г. Герцем (1887 г.), заметившим, что проскакивание искры между находящимися под напряжением цинковыми электродами облегчается при освещении их ультрафиолетовым излучением. Другие исследователи этого явления В. Гальвакс, А. Риги, А.Г. Столетов также внесли существенный вклад в установление физических закономерностей фотоэффекта.

Первое обстоятельное исследование фотоэффекта было выполнено в 1888-1890 гг. А.Г. Столетовым. С помощью установки для измерения тока через гальванометр, схема которой представлена на рисунке 5.1, им было установлено следующее:

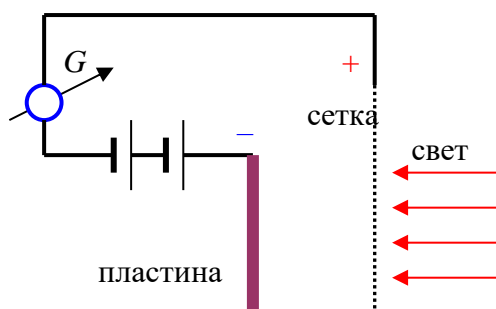


Рис. 5.1.

- 1) под действием света, т.е. при освещении ультрафиолетовыми лучами, металлическое тело теряет отрицательный заряд (испускаемые заряды отрицательны);
- 2) действие света на вещество пропорционально световому потоку, причем фототок сначала растет с увеличением разности потенциалов, а затем насыщается и остается неизменным – ток насыщения;
- 3) эффект вызывается преимущественно ультрафиолетовыми лучами;
- 4) явление протекает практически безынерционно.

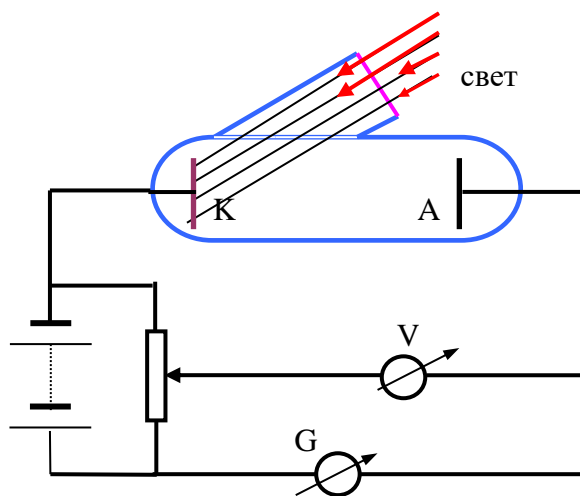


Рис. 5.2.

В 1897 г. Дж.Дж. Томсон открыл электрон. Затем он же и Ф. Леннард в 1898 году, наблюдая отклонение испускаемых частиц в электрическом и магнитном полях, измерили отношение заряда этих частиц к массе. Измерения показали, что под действием света освобождаются электроны.

Для исследования закономерностей фотоэффекта используют установку, схематически показанную на рисунке 5.2. В сосуде

поддерживается высокий вакуум. При освещении металлической пластины К через кварцевое окно в цепи возникает ток (фототок), измеряемый гальванометром G . Явление в сильной степени зависит от чистоты освещаемой поверхности, поэтому в точных опытах используют срезы или поверхности, напыленные в вакууме.

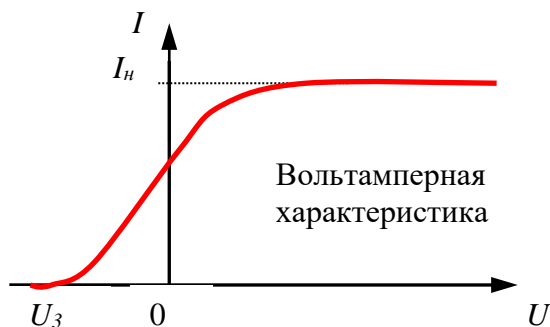


Рис. 5.3.

Примерная зависимость силы фототока от приложенного напряжения U , измеряемого вольтметром V , изображена на рис. 5.3. При неизменном световом потоке характерно существование участка тока насыщения I_n , когда все освобождаемые светом электроны (фотоэлектроны) достигают анода, и участка нарастания, начинающегося при некотором значении задерживающего напряжения

U_3 . По измерениям U_3 можно определить максимальную скорость v фотоэлектронов с помощью соотношения $eU_3 = \frac{1}{2}mv^2$. Многочисленными экспериментами установлены следующие основные законы фотоэффекта:

1. Сила тока насыщения прямо пропорциональна падающему световому потоку при его неизменном спектральном составе. Этот закон проверен для очень широкого интервала интенсивностей. Отсюда следует, что число электронов, освобождаемых светом в единицу времени, пропорционально мощности падающего излучения.
2. Для каждого металла существует максимальная длина волны (минимальная частота) света, при которой еще происходит освобождение электронов, так называемая *красная граница фотоэффекта*. Если длина волны падающего света превышает эту границу, то эмиссия электронов отсутствует даже при сравнительно большой интенсивности освещения.
3. Максимальная энергия фотоэлектронов линейно зависит от частоты ω падающего света и не зависит от его интенсивности.

С точки зрения классических волновых представлений о природе излучения сам факт освобождения электрона из металла неудивителен, т.к. падающая на поверхность электромагнитная волна вызывает вынужденные колебания электронов в металле. Поглощая энергию волны, электрон может накопить её в количестве, достаточном для преодоления потенциального барьера, удерживающего электрон в металле (т.е. для совершения работы выхода). Если эта картина верна, то энергия фотоэлектрона должна находиться в прямой связи с интенсивностью падающего света. Но опыт показывает, что энергия фотоэлектронов совершенно не зависит от интенсивности освещения

образца. Увеличение интенсивности приводит лишь к пропорциональному увеличению числа фотоэлектронов. Энергия же отдельного фотоэлектрона зависит только от частоты падающего света.

Более того, даже при очень малой интенсивности фотоэлектроны появляются практически сразу после начала освещения (безынерционность фотоэффекта), хотя, по классическим представлениям, в таких случаях требуется конечное, экспериментально регистрируемое, время, чтобы электрон мог накопить необходимую энергию.

В 1905 г. Эйнштейн объяснил экспериментальные закономерности фотоэффекта на основе гипотезы световых квантов. Качественная картина с этой точки зрения выглядит следующим образом. Падающее монохроматическое излучение рассматривается как поток фотонов, энергия которых связана с частотой соотношением $\varepsilon = \hbar\omega$. При поглощении фотона его энергия целиком передается одному электрону, и если эта энергия достаточна для того, чтобы освободить от удерживающих его связей, то он может выйти за пределы поверхности металла. Вероятность одновременного поглощения двух фотонов одним электроном мала, поэтому каждый фотоэлектрон получает энергию от одного фотона. Вообще говоря, не каждый поглощенный фотон приводит к освобождению электрона. *Квантовый выход*, определяемый отношением числа фотоэлектронов к числу поглощенных фотонов

$$\eta = \frac{n_e}{n_{\text{фот}}}, \quad (1.5.2)$$

обычно заметно меньше единицы: $\eta \sim 10^{-5} \div 10^{-3}$, для фотокатодов со специальным пленочным покрытием $\eta \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$. По квантовым представлениям, полное число освобожденных электронов пропорционально числу поглощенных фотонов, т.е. сила тока насыщения пропорциональна интенсивности. Но энергия отдельного фотоэлектрона определяется энергией поглощенного фотона $\varepsilon = \hbar\omega$.

Приобретаемая электроном энергия $\varepsilon = \hbar\omega$ может лишь частично затрачиваться на освобождение из металла. Её излишек остается в форме кинетической энергии фотоэлектрона. Минимальную энергию A , необходимую для освобождения электрона из металла, называют *работой выхода*. Таким образом, для фотоэлектронов, имеющих *максимальную* скорость v и массу покоя m , закон сохранения энергии в элементарном акте поглощения фотона можно записать в виде

$$\hbar\omega = \frac{1}{2}mv^2 + A \quad (1.5.3)$$

Это уравнение и есть *уравнение Эйнштейна* для объяснения фотоэффекта.

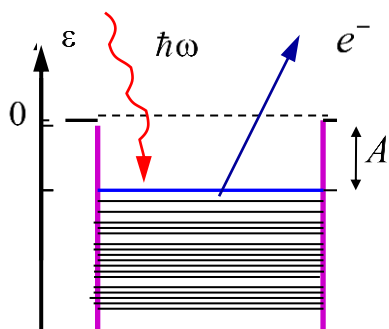


Рис. 5.4.

Качественно физическую картину на границе металл-вакуум можно представить следующим образом (см рис. 5.4). Потенциальная яма, в которой находятся электроны, подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака, с концентрацией $\sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$. При абсолютном нуле ($T = 0 \text{ K}$) работа выхода (A) и значение энергии Ферми (ε_F) совпадают. Из уравнения Эйнштейна следует наличие *красной границы фотоэффекта*, т.е. существование некоторой минимальной частоты излучения $\omega_{\min} = A/\hbar$, при которой ещё возможен фотоэффект. При меньших частотах $\omega < \omega_{\min}$

фотоэффект не наблюдается.

Для различных металлов работа выхода и, следовательно, граничная частота имеют различные значения. Кроме того, на работу выхода существенное влияние оказывают состояние и чистота поверхности металла, в особенности наличие пленки адсорбированного газа. Для большинства металлов красная граница фотоэффекта приходится на ультрафиолетовую область спектра (в опытах Столетова с освещением цинковой пластинки фотоэффект пропадал при переходе от ультрафиолетовых к видимым лучам). Только у щелочных металлов красная граница попадает в область видимого света.

Опытные проверки теории Эйнштейна осуществлялись многими физиками: В. Ричардсоном и К. Комптоном в 1912 г., а также Р. Милликеном в 1916 г. В частности, Р. Милликен получил численное значение постоянной Планка.

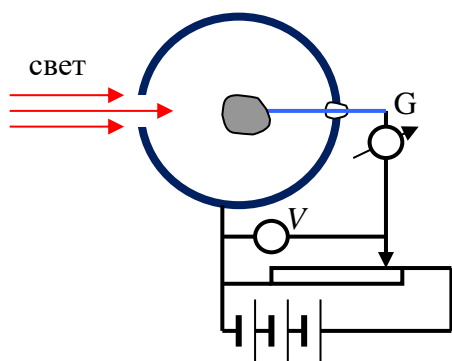


Рис. 5.5.

Весьма чистые измерения были проведены П.И. Лукирским и С.С. Прилежаевым в 1926 г. Лукирский и Прилежаев использовали сферический конденсатор (рис. 5.5), внутри которого создавался вакуум. Внутренняя обкладка состояла из объекта, из которого вылетали фотоэлектроны. Наружная сферическая обкладка была покрыта серебром. Измерялся фототок через конденсатор для разных частот падающего излучения. Строился график (см рис. 5.6 А) зависимости фототока от

напряжения на конденсаторе при различных частотах излучения, и определялись потенциалы запираения U_1, U_2, U_3, \dots , т.е. красные границы фотоэффекта.

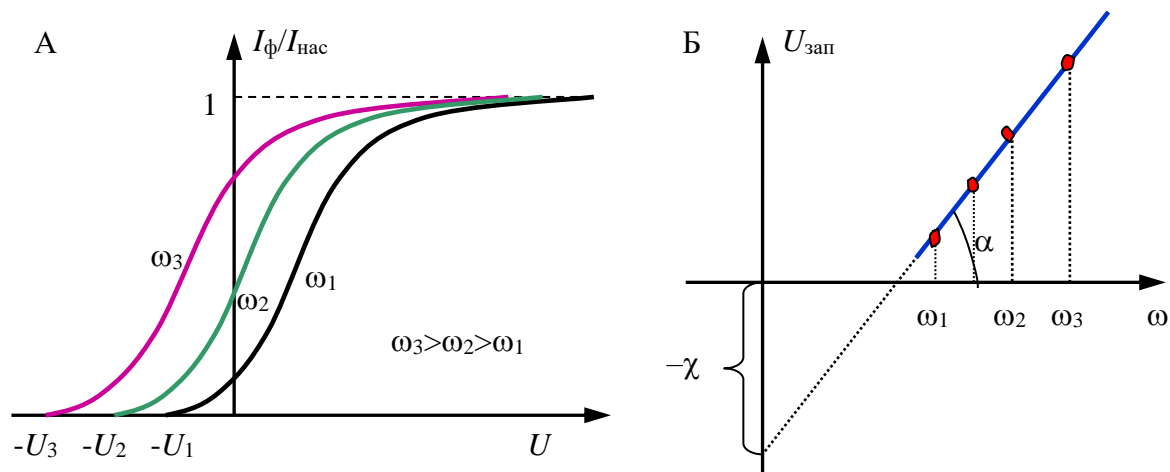


Рис. 5.6.

Эти измерения позволяли получать потенциалы выхода χ и отношение постоянной Планка к заряду электрона. В самом деле, исходя из уравнения Эйнштейна (1.5.3) $\hbar\omega = e\chi + eU_{\text{зап}}$ строилась прямая зависимость (рис. 5.6 Б) потенциалов запираения от частоты фотонов

$$U_{\text{зап}} = \frac{\hbar}{e}\omega - \chi \quad (1.5.4)$$

и при дальнейшей экстраполяции определялись угол наклона прямой к оси абсцисс α и отрезок отсечения от оси ординат. Тангенс угла наклона $\text{tg}\alpha = \hbar/e$ позволял определять отношение постоянной Планка к заряду электрона, отрезок отсечения давал потенциал выхода “ $-\chi$ ”.

Примечание 2. Строго говоря, вывод о существовании красной границы фотоэффекта имеет смысл только для однофотонных процессов. Необходимо отметить, что при очень высоких интенсивностях возможен многофотонный (нелинейный) эффект. Вероятность поглощения в элементарном акте двух или большего числа фотонов пропорциональна произведению интенсивностей соответствующего числа пучков. В экспериментах со сфокусированным лазерным излучением достигаются столь высокие плотности световой энергии, что становятся доступными наблюдению процессы, в которых атом одновременно поглощает до 7-8 фотонов. В результате может произойти фотоионизация атома светом малой частоты, т.е. в интенсивных световых пучках *исчезает красная граница фотоэффекта*. Интересно, что Эйнштейн в работе 1905 г., содержащей вывод основного уравнения фотоэффекта, не исключал принципиальной возможности процессов с участием более чем одного фотона.

В настоящее время понятие фотоэффекта существенно расширилось.

а). *Внутренний фотоэффект* (см рис. 5.7) – наблюдаемый в полупроводниках межзонный переход, связанный с «забросом» электрона из валентной зоны ε_v через запрещенную зону в зону проводимости ε_c при поглощении светового кванта.

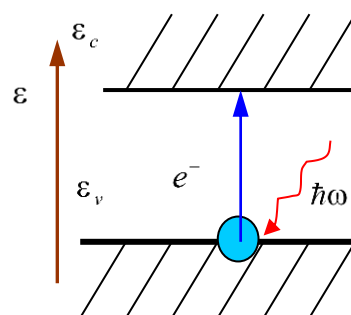


Рис. 5.7.

б). *Атомный фотоэффект* (молекулярный, кластерный). Фотоэффект, наблюдаемый при поглощении электронами, находящимися на определенных уровнях энергии (оболочках) атома, характеризуемых потенциалом ионизации и резонансными частотами. В объектах с большим количеством электронов наблюдаются многоэлектронные, коллективные эффекты, в частности, вырывание двух электронов одним фотоном и многие другие.

в). *Многофотонные* (нелинейные) эффекты. Наблюдаются в экспериментах с фокусированными (импульсными) лазерными пучками, т.е. при создании достаточно сильных электромагнитных полей.

г). *Селективный фотоэффект*. Волновые свойства при фотоэффекте наблюдаются в тех случаях, когда поляризованное излучение падает на поверхность металла под некоторым углом к нормали.

д). Фотоэффект на *свободном электроном не наблюдается*. В самом деле, возможность поглощения свободным электроном фотона противоречит законам сохранения энергии и импульса:

$$\left. \begin{aligned} \hbar\omega + mc^2 &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ \hbar\omega/c &= p \end{aligned} \right\} \longrightarrow (\hbar\omega)^2 + m^2 c^4 + 2mc^2 \hbar\omega = \hbar^2 \omega^2 + m^2 c^4,$$

Сокращая подобные слагаемые, отсюда получаем, что либо $\hbar\omega = 0$, либо $mc^2 = 0$. Таким образом, свободный электрон не может поглотить квант света.

Электромагнитная теория, рассматривающая свет как классические электромагнитные волны (т.е. как возможные решения уравнений Максвелла), исчерпывающе описывает распространение света в пустоте, интерференцию и дифракцию. Будучи дополненной электронной теорией, она оказывается в состоянии охватить и широкий круг вопросов, относящихся к взаимодействию света с веществом, таких как рассеяние, поглощение, преломление, дисперсия. Но применимость классической теории в вопросах взаимодействия света с веществом все же имеет предел. Так, например, в фотоэффекте проявляется внезапная пространственная локализация конечной порции энергии света на одном электроном. Такое поведение несовместимо с классической волновой картиной, но получает естественное объяснение в корпускулярной картине, трактующей свет как поток фотонов. Ведь именно частица может доставить конечную порцию энергии в определенную точку.

Локализация кванта энергии излучения особенно ярко проявляется в фотоэффекте на отдельных атомах или молекулах (фотоионизация). В классической электромагнитной волне энергия непрерывно распределена по всему волновому фронту. Исходя из известного значения площади эффективного сечения, можно оценить, сколько времени должно пройти с момента начала облучения для того, чтобы атом мог накопить достаточную для вырывания электрона (ионизации) энергию ε_i . В условиях реального эксперимента это могут быть недели или месяцы. Однако тот же эксперимент показывает, что фотоэлектроны с энергией $\hbar\omega - \varepsilon_i$ появляются практически сразу после начала облучения. Значит, классическое непрерывное распределение энергии по фронту волны характеризует перенос энергии излучения только в среднем, но не для элементарных актов взаимодействия излучения с веществом, свидетельствующих о пространственной локализации переносимой энергии, что характерно для потока частиц.

Волновой и корпускулярный аспекты излучения связаны друг с другом: атрибут волновой картины частота ω входит в соотношение $\varepsilon = \hbar\omega$, определяющее энергию световой частицы – фотона. В опытах по фотоэффекту это соотношение проверяется измерением энергии фотоэлектронов, образуемых фотонами монохроматического излучения известной частоты. Другое подтверждение ему дает обратный процесс – испускание фотонов быстрыми электронами при торможении.

Примечание 3. *Генрих Рудольф Герц, немецкий физик, 1857–1894;*

Вильгельм Людвиг Франц Гальвакс, немецкий физик, 1859-1922;

Аугусто Риги (Ричи), итальянский физик, 1850-1921;

Александр Григорьевич Столетов, русский физик, 1839-1896;

Джозеф Джон Томсон, английский физик, 1856–1940, Нобелевская премия 1906 г. за открытие электрона;

Филипп Эдуард Антон Леннард, немецкий физик, 1862–1947, Нобелевская премия в 1905 г. “За исследование катодных лучей»;

Оуэн Вильямс Ричардсон, английский физик, 1879-1959, Нобелевская премия 1928 г. за исследования термоэлектронной эмиссии;

Роберт Эндрюс Милликен, американский физик, 1868-1953, Нобелевская премия 1923 г. за работы в области элементарных зарядов и фотоэлектрического эффекта;

Энрике Ферми, итальянский и американский физик-теоретик, 1901 – 1954; Нобелевская премия по физике (1938) за доказательство существования новых радиоактивных элементов;

Петр Иванович Лукирский, советский физик, 1894–1954, академик, работал в Физико-техническом институте и заведовал кафедрой в ЛПИ;

Сергей Сергеевич Прилежаев, советский физик, 1903–1979

1.5.3. Тормозное рентгеновское излучение.

Испускание фотонов наблюдается при торможении быстрых электронов в веществе. В 1895 г. В. Рентген обнаружил электромагнитное излучение, возникающее при бомбардировке стекла и металлов быстрыми электронами.

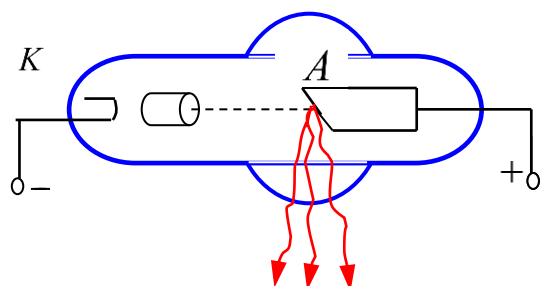


Рис. 5.8.

Это излучение с длиной волны $\lambda \sim 10^{-5} \div 10^2 \text{ нм}$ позднее получило название *рентгеновских лучей*. В устройстве, имеющем название рентгеновской трубки и изображенном на рис. 5.8, для получения тормозного рентгеновского излучения электроны, испускаемые катодом в результате термоэлектронной эмиссии, фокусируются цилиндрическим электродом и ускоряются высоким

напряжением, создаваемым между катодом и анодом (антикатодом). Мишенью для электронного пучка служит антикатод. Почти вся энергия электронов пучка выделяется в антикатоде в виде тепла. На долю рентгеновского излучения приходится всего (1÷3)% энергии, запасенной в пучке. При достаточно высокой скорости электронов помимо тормозного рентгеновского излучения наблюдается также *характеристическое излучение*, вызванное возбуждением внутренних электронных оболочек атомов антикатада.

Согласно классической электродинамике при торможении электрона должно возникать излучение с длинами волн от нуля до бесконечности – сплошной спектр излучения. Излучение происходит при ускоренном движении электронов, при этом мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения \ddot{x}^2 :

$$I = \frac{dW}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x}^2 \sim e^2 \ddot{x}^2 \quad (1.5.5)$$

Тогда полная энергия излучения пропорциональна:

$$W \sim I\tau \sim e^2 \ddot{x}^2 \tau = \frac{e^2 v_0^2}{\tau} \quad (1.5.6)$$

где τ – время торможения, v_0 – начальная скорость электрона. Чем выше начальная скорость электрона и чем меньше время торможения, тем больше энергии переходит в излучение. При этом длина волны, на которую попадает максимум интенсивности излучения, должна уменьшаться по мере увеличения скорости электронов, т.е. повышения ускоряющего напряжения. Выводы классической теории в основном подтверждаются на опыте.

Однако опыт показывает одно принципиальное отличие от классического описания. А именно, при фиксированном ускоряющем напряжении U в

рентгеновском сплошном спектре отсутствует излучение с длинами волн, меньшими некоторого значения λ_{min} , т.е. возникает *коротковолновая граница в сплошном рентгеновском спектре* (см рис. 5.9). При этом коротковолновая граница тормозного излучения λ_{min} определяется только ускоряющим напряжением U и не зависит от материала мишени.

В целом процесс излучения при торможении электрона в электрических полях, создаваемых атомами мишени, весьма сложен, но наличие коротковолновой границы в корпускулярной картине получает очень простое объяснение. Как и в уравнении Эйнштейна для фотоэффекта, можно записать закон сохранения энергии в элементарном акте испускания кванта излучения. Фотон получает наибольшую энергию в том случае, когда электрон полностью останавливается при столкновении с ядром атома мишени. Из-за большой массы ядра такой процесс не противоречит закону сохранения импульса. Тогда максимальная энергия испускаемых фотонов $\hbar\omega_{max}$ равна кинетической энергии электронов

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU = \hbar\omega_{max}; \quad (1.5.7)$$

$$\omega_{max} = \frac{eU}{\hbar} = \frac{2\pi c}{\lambda_{min}}; \quad \text{или} \quad \lambda_{min} = \frac{2\pi c\hbar}{eU} = \frac{ch}{eU}. \quad (1.5.8)$$

Если длину волны мерить в Ангстремах, а разность потенциалов в Вольтах, то (1.5.8) записывается:

$$\lambda_{min} = \frac{12390}{U}$$

Существование граничной длины волны λ_{min} , или максимальной частоты ω_{max} , демонстрирует квантовый характер испускания рентгеновского излучения. По измерению её зависимости от ускоряющего напряжения можно с высокой точностью определить значение постоянной Планка.

Несколько слов о современном состоянии физики тормозного излучения. Подробно исследуется тормозное излучение при переходе заряженных частиц через границу двух сред. Это, так называемое, *переходное тормозное излучение*. Наблюдается тормозное излучение при рассеянии этих частиц на атомах и атомных системах. При этом помимо обычного тормозного излучения, рассматривается *поляризованное тормозное излучение*, когда налетающая частица поляризует частицу мишени и при этом испускается фотон. Обнаружено большое усиление тормозного излучения при частотах,

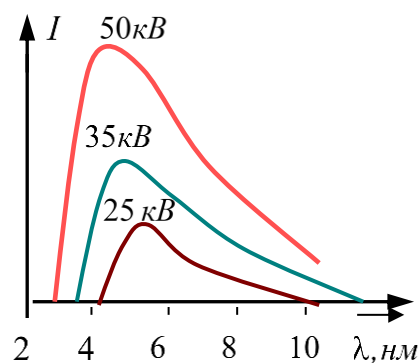


Рис. 5.9.

совпадающих с энергиями переходов между дискретными состояниями атома. Большой интерес вызывает излучение заряженных частиц, распространяющихся внутри кристаллов, в процессе «каналирования» этих частиц.

В рассмотренных явлениях фотоэффекта и тормозного излучения мы учитывали только закон сохранения энергии при испускании или поглощении фотона, так как массивный катод мог, не участвуя в энергетическом балансе, “принять на себя” любой импульс и этим обеспечить выполнение закона его сохранения. Но существуют явления, в которых импульс фотона обнаруживает себя явно и соотношение $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ допускает экспериментальную проверку. В качестве примера рассмотрим рассеяние рентгеновского излучения свободными или слабо связанными электронами, впервые количественно исследованное А.Комптоном в 1922 г.

Примечание 4. Вильгельм Конрад Рентген, немецкий физик, 1845–1923, первый из физиков получил Нобелевскую премию в 1901г.

1.5.4. Эффект Комптона.

Опыты Комптона показали, что при рассеянии пучка монохроматических рентгеновских лучей на мишени из вещества с небольшим атомным номером в рассеянном излучении наряду с неизменной длиной волны появляется

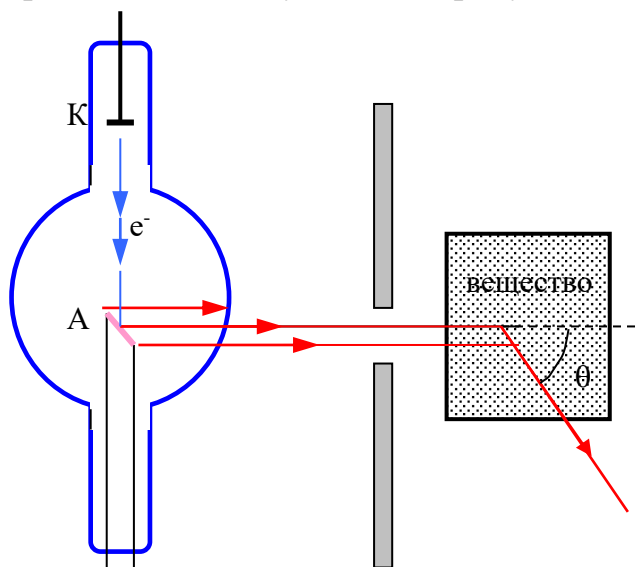


Рис. 5.10.

спектральная компонента, смещенная в сторону длинных волн.

Комптон-эффект наблюдается при рассеянии излучения малых длин волн – рентгеновского и γ –излучения. Рентгеновское излучение от рентгеновской трубки падало на мишень, а рассеянные кванты регистрировались под углом θ (см рис. 5.10). Наблюдаемое изменение длины волны $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не зависит от длины волны падающего света, а определяется

лишь углом θ между направлением падающего пучка и направлением рассеянного излучения. Графики интенсивностей падающего и рассеянного излучения изображены на рисунке 5.11. С увеличением угла θ интенсивность несмещенной компоненты падает, а смещенной – растет.

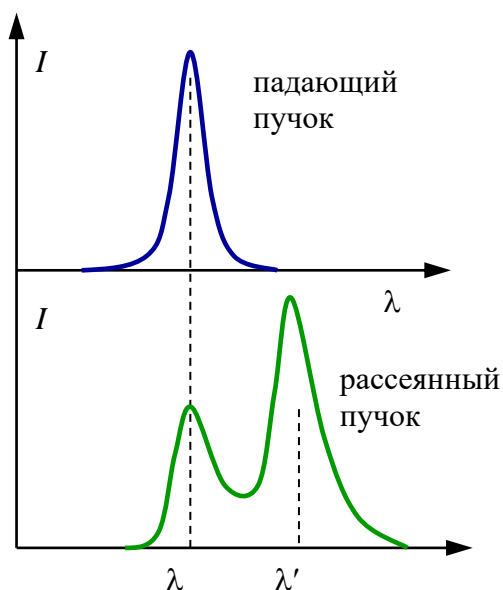


Рис. 5.11.

Принято считать, что в Комpton - эффекте впервые во всей полноте проявились корпускулярные свойства электромагнитного излучения (в частности, света). Согласно классической теории рассеяния света, развитой Дж. Томсоном, длина световой волны при рассеянии не должна меняться: под действием периодического электрического поля световой волны электрон колеблется с частотой поля и поэтому излучает вторичные (рассеянные) волны той же частоты.

В квантовой теории эффект Комптона выглядит как **упругое столкновение двух частиц** – налетающего фотона и покоящегося электрона. В каждом акте столкновения соблюдаются законы сохранения энергии и импульса. Фотон передает часть своей энергии и импульса электрону и изменяет направление движения – рассеивается. *Уменьшение энергии фотона и означает увеличение длины волны рассеиваемого света.* Электрон, получивший от фотона энергию и импульс, приходит в движение – испытывает отдачу. Направления движения частиц после столкновения и их энергии определяются законами сохранения энергии и импульса. Т.к. при рассеянии фотонов высокой энергии электрон отдачи может приобрести значительную скорость, необходимо использовать релятивистские соотношения.

В атомах легких элементов энергия связи электрона (энергия ионизации) порядка 10 эВ , что примерно в тысячу раз меньше энергии рентгеновского фотона ($\hbar\omega \approx 10 \text{ кэВ}$). Поэтому электроны мишени в этих опытах можно считать практически свободными.

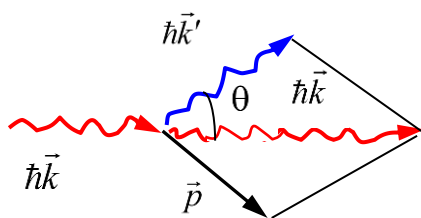


Рис. 5.12.

Запишем законы сохранения энергии и импульса, считая электрон покоящимся в начальном состоянии:

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \quad (1.5.9)$$

$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}$$

где m – масса покоя электрона, $\hbar\omega$ – энергия фотона, $\hbar\vec{k}$ – импульс фотона. Сначала преобразуем первое из уравнений (1.5.9). Для этого представим разность энергий фотона в виде

$$\hbar\omega - \hbar\omega' = \hbar c(k - k')$$

и, выделив квадратный корень, возведём первое уравнение в квадрат

$$m^2 c^2 + p^2 = \hbar^2 (k - k')^2 + 2mc\hbar(k - k') + m^2 c^2$$

$$p^2 = \hbar^2 (k - k')^2 + 2m\hbar c(k - k') \quad (1.5.10)$$

Теперь возводим в квадрат второе уравнение в (1.5.9):

$$\hbar^2 (\vec{k} - \vec{k}')^2 = (\vec{p})^2$$

$$\hbar^2 (k^2 + k'^2 - 2kk' \cos\theta) = p^2 \quad (1.5.11)$$

Сравнивая (1.5.10) и (1.5.11), можем записать

$$mc(k - k') = \hbar k k' (1 - \cos\theta).$$

Умножая последнее равенство на дробь $2\pi/mckk'$ и учитывая, что $\lambda = 2\pi/k$, получаем

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta); \quad (1.5.12)$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc} \quad (1.5.13)$$

где λ_c – *комптоновская длина волны электрона*, численное значение которой равно $\lambda_c = 0,0243 \text{ \AA}$.

Рассмотрим физические следствия из такого рассмотрения и объяснение полученных результатов.

1). Происхождение несмещенной компоненты в спектре рассеянного излучения обусловлено взаимодействием рентгеновских лучей с внутренними электронами и ядрами атомов мишени. Их энергия связи, особенно в тяжелых атомах, сравнима с энергией рентгеновских фотонов и, следовательно, такие электроны уже нельзя рассматривать как свободные. Поэтому в акте рассеяния фотон обменивается энергией и импульсом с атомом в целом. Так как масса атома велика, то из закона сохранения импульса следует, что фотон практически не передает ему своей энергии. Фотоны, рассеянные внутренними электронами, и образуют несмещенную компоненту (это рассеяние когерентно). Поэтому в спектре излучения, рассеянного на тяжелых атомах присутствует как смещенная, *комптоновская*, линия от

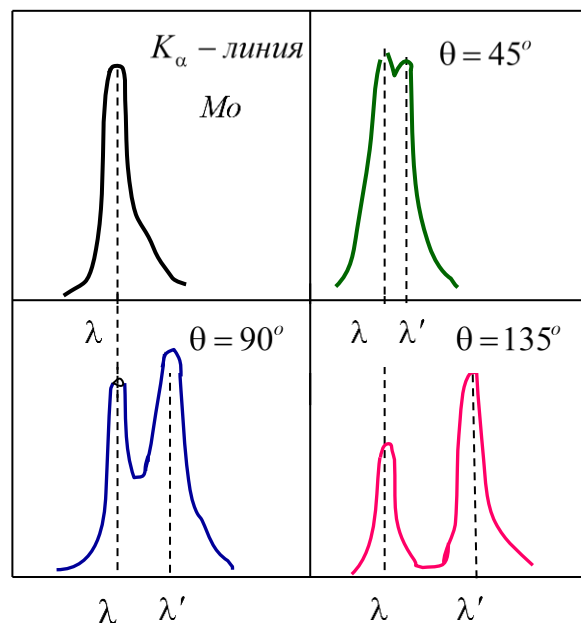


Рис. 5.13.

рассеяния на периферийных электронах таких атомов, так и несмещенная линия от рассеяния на атоме в целом.

2). Из соотношения (1.5.12) видно, что чем больше угол рассеяния θ , тем больше смещение рассеянной волны. Более того, при увеличении угла рассеяния увеличивается относительная доля “свободных” электронов, т.е. увеличивается отношение интенсивностей смещенной и несмещенной компонент.

3). С ростом атомного номера вещества рассеивателя относительное число связанных электронов увеличивается и отсюда при фиксированном угле рассеяния θ при переходе к более тяжелым элементам растет интенсивность несмещенной линии.

4). При рассеянии фотона часть его энергии передается электрону. Электроны отдачи играют важную роль в процессе ионизации газов рентгеновским излучением. Их энергия также зависит от угла рассеяния фотонов и определяется простым соотношением:

$$E_e = \hbar(\omega - \omega') = 2\pi\hbar c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \quad (1.5.14)$$

Используя камеру Вильсона, помещенную в магнитное поле, можно найти энергию и импульс электронов отдачи, что позволяет еще более полно проверить выполнение законов сохранения. Измерения показали, что в каждом элементарном акте рассеяния электрон приобретает как раз такие импульс и энергию, какие теряет фотон.

Из приведенных выше рассуждений ясно, почему эффект Комптона нельзя наблюдать в видимой области спектра. Энергия фотона видимого света составляет лишь несколько электрон-вольт. При этом даже внешние электроны нельзя считать свободными.

Рассмотренная упрощенная теория Комpton- эффекта не позволяет вычислить все характеристики комptonовского рассеяния, в частности интенсивность рассеяния фотонов под разными углами. Полную теорию эффекта Комптона дает *квантовая электродинамика*.

Примечание 5. Интенсивность комptonовского рассеяния зависит как от угла рассеяния, так и от длины волны падающего излучения. В угловом распределении рассеянных фотонов наблюдается асимметрия: больше фотонов рассеивается вперед, причем эта асимметрия увеличивается с ростом энергии фотона ε . Полная интенсивность, или сечение σ , комptonовского рассеяния падает с ростом ε . Зависимость σ от ε дается формулой Клейна–Нишины, представляющей собой результат расчетов, отвечающих диаграммам Фейнмана.

Существует также обратный эффект Комптона. Если электроны, на которых упруго рассеивается электромагнитное излучение, релятивистские, то энергия (и импульс) фотонов

будет увеличиваться за счет энергии (и импульса) электронов, т.е. длина волны фотона при рассеянии будет уменьшаться. Это явление называют *обратным комптон-эффектом*.

Опыты Комптона ярко продемонстрировали, что энергия и импульс фотона действительно выражаются формулами $\varepsilon = \hbar\omega$ и $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ и что законы сохранения энергии и импульса выполняются в элементарных актах рассеяния.

Таким образом, опытные факты говорят о том, что в ряде явлений свет обнаруживает корпускулярные свойства: взаимодействие излучения с веществом имеет характер дискретных процессов, в которых поглощается, испускается или рассеивается целый квант. Но представление о свете как о потоке классических корпускул несовместимо с классической картиной электромагнитных волн, которая, в свою очередь, находит опытное подтверждение в явлениях интерференции и дифракции.

Впрочем, вопрос о природе света не всегда стоит так категорично: или частицы, или волны. Существует ряд явлений, допускающих корректное объяснение с любой из этих точек зрения. В качестве примеров можно привести эффект Доплера и давление света.

Итак, что же такое свет – частица или волна? Квантовая теория отвечает на этот вопрос так: ни то, ни другое. Когда мы описываем поведение фотона как поведение частицы или волны, мы навязываем классическое описание этому объекту, имеющему существенно неклассическую природу. Свет может характеризоваться только с той его стороны (корпускулярной или волновой), проявление которой определяется внешними условиями, создаваемыми экспериментальными *средствами наблюдения*. Такая постановка вопроса позволяет рассматривать и тот случай, когда один и тот же исследуемый объект (свет) обладает не совместимыми по классическим представлениям корпускулярными и волновыми свойствами. В квантовой теории эти свойства не исключают, а дополняют друг друга, так как в “чистом” виде они могут проявиться лишь в разных опытах, производимых при взаимоисключающих условиях. Этим и объясняется отсутствие логического противоречия в понятии “корпускулярно-волновой дуализм”. Действительно, нет необходимости пытаться представить себе, как это фотон может быть сразу и волной, и частицей. Свет обладает *потенциальной возможностью* проявлять и волновые, и корпускулярные свойства, но эти дополняющие друг друга свойства в чистом виде проявляются лишь при взаимоисключающих условиях эксперимента. Адекватный способ описания света определяется выбранным способом наблюдения, а вопрос о том, что же существует “на самом деле” – волна или частица, - лишен содержания.

Корпускулярно-волновой дуализм присущ не только фотонам, но и любым другим микрообъектам – электронам, протонам, нейтронам и т.п.

Другие эксперименты, которые подтверждали квантовую природу света, проводились многими известными физиками. В частности, опыты А.Ф. Иоффе и Н.И. Добронравова в 1925 г. подтвердили квантовую картину фотоэффекта. С.И. Вавилов – наблюдал флуктуации слабых световых потоков. В. Боте (1924 г.) проводил известные эксперименты по совпадению рассеянного фотона и выбитого электрона.

Примечание 6. *Сергей Иванович Вавилов, советский физик, 1891–1951, академик, Президент АН СССР (1945-1951);*
Вальтер Вильгельм Георг Боте, немецкий физик, 1891–1957, лауреат Нобелевской премии по физике за 1954 год;
Абра́м Фёдорович Ио́ффе, советский физик, 1880–1960, академик; вице-президент АН СССР; директор Физико-технического института, завкафедрой физики в ЛПИ;
Николай Иванович Добронраов, советский физик, 1891–1949. работал ФТИ, ЛПИ, ЛГУ.
