

Министерство образования и науки Российской Федерации

---

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

---

***В.К. Иванов***

**ФИЗИКА**

**МЕХАНИКА**

**КОЛЕБАНИЯ**

*Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненным группам специальностей и направлений подготовки 16.00.00. Физико-технические науки и технологии в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01. Техническая физика*

**ПОЛИТЕХ-ПРЕСС**

Санкт-Петербургский политехнический университет

Петра Великого

Санкт-Петербург

2021

УДК 530.1  
ББК 22.3  
И20

*В.К.Иванов* **Физика. Механика. Колебания:** учеб. пособие / В.К.Иванов – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. – 224 с.

Учебное пособие содержит лекции по физике для студентов первого курса физических направлений подготовки. Последовательность изложения механики соответствует логической структуре физики как науки. В первую часть курса входят разделы посвященные законам и явлениям механики, как нерелятивистской, так и релятивистской, в инерциальных системах отсчета. Рассматривается также движение в неинерциальных системах отсчета и колебательное движение. В основу разделов положены законы сохранения и соответствующие им свойства симметрии пространства - времени. При создании учебного пособия использован многолетний опыт чтения общего курса физики на физических факультетах и институтах Санкт-Петербургского политехнического университета.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению бакалавриата 011200 «Физика» и 140400 «Техническая физика». Пособие может быть также использовано будущими бакалаврами, обучающимися по другим физическим направлениям, начинающими преподавателями, в системах повышения квалификации, в качестве дополнительного учебного пособия для общетехнических образовательных программ

Редакторская правка *В.К. Иванова*

Печатается по решению  
Совета по издательской деятельности Ученого совета  
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

© В.К.Иванов , 2021  
© Санкт- Петербургский политехнический  
университет Петра Великого, 2021

ISBN 978-5-7422-7134-5

## СОДЕРЖАНИЕ

|   | Стр. |
|---|------|
| Вводная лекция. Общая физическая картина мира (конспективно).....           | 5    |
| <br><u>Глава 1. Классическая механика. Инерциальные системы отсчета.</u>    |      |
| 1.1. Введение.....  | 16   |
| 1.2. Инерциальные системы отсчета и законы Ньютона.....                     | 23   |
| 1.3. Преобразования Галилея.....  | 25   |
| 1.4. Закон сохранения импульса. Сохранение массы.....                       | 30   |
| 1.5. Центр инерции.....   | 33   |
| 1.6. Основные задачи динамики.....  | 35   |
| 1.7. Работа и энергия.....  | 38   |
| 1.8. Консервативные и неконсервативные силы.....                            | 43   |
| 1.9. Потенциальная энергия. Потенциал поля.....                             | 47   |
| 1.10. Закон сохранения энергии. Границы движения.....                       | 54   |
| 1.11. Момент импульса и момент силы.....                                    | 59   |
| 1.12. Закон сохранения момента импульса.....                                | 64   |
| 1.13. Движение частицы в центральном поле.....                              | 66   |
| 1.14. Столкновение двух тел.....  | 72   |
| 1.15. Рассеяние частиц. Эффективное сечение.....                            | 78   |
| 1.16. Вращение твердого тела.....   | 86   |
| 1.17. Момент инерции.....   | 94   |
| 1.18. Законы сохранения и симметрия пространства и времени.....             | 99   |
| <br><u>Глава 2. Релятивистская механика.</u>                                |      |
| 2.1. Принципы специальной теории относительности.....                       | 103  |
| 2.2. Эксперименты по определению скорости света.....                        | 104  |
| 2.3. Замедление времени и сокращение длины. Одновременность<br>событий..... | 115  |
| 2.4. Преобразования Лоренца.....  | 119  |
| 2.5. Следствия из преобразований Лоренца.....                               | 124  |
| 2.6. Интервал. Четырехмерное пространство-время.....                        | 131  |
| 2.7. Релятивистская механика.....   | 143  |
| 2.8. Энергия и способы ее выражения.....                                    | 149  |
| 2.9. Примеры применения релятивистской механики.....                        | 155  |
| <br><u>Глава 3. Классическая механика. Неинерциальные системы отсчета.</u>  |      |
| 3.1. Силы инерции.....  | 160  |
| 3.2. Движение в произвольной системе отсчета.....                           | 164  |

|  |     |
|--|-----|
| 3.3. Движение материальной точки относительно Земли.....           | 170 |
| 3.4. Инертная и гравитационная массы. Принцип эквивалентности..... | 174 |

#### Глава 4. Колебания.

|  |     |
|--|-----|
| 4.1. Малые отклонения от положения равновесия. Гармонические..<br>..... колебания..... | 185 |
| 4.2. Собственные колебания.....  | 190 |
| 4.3. Сложение колебаний.....   | 197 |
| 4.4. Затухающие колебания.....   | 204 |
| 4.5. Вынужденные колебания.....  | 208 |
| 4.6. Автоколебания. Параметрические колебания.....                                     | 215 |
| 4.7. Распространение колебаний. Волны.....   | 218 |
| Литература.....  | 223 |

## ВВОДНАЯ ЛЕКЦИЯ ОБЩАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ КАРТИНА МИРА (конспективно)

### 1. Общие слова о физике

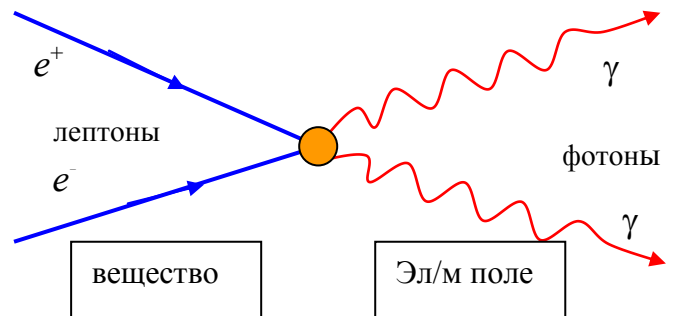
1.1. Физика – раздел естествознания, изучающий наиболее общие свойства и формы движения материи.

Под материей понимается и вещество, и различные физические поля. Поле и вещество взаимосвязаны.

*Примеры вещества:* твердые и жидкие тела, атомы и молекулы, электроны, протоны, нейтроны и другие элементарные частицы.

*Примеры полей:* электромагнитное поле (безмассовые переносчики электромагнитного взаимодействия - кванты поля – *фотоны*), гравитационное поле (переносчики взаимодействия - гравитационные волны. кванты поля – *гравитоны*) и другие.

*Пример взаимосвязи вещества и поля:* аннигиляция электронно-позитронной пары с образованием квантов электромагнитного поля (см диаграмму) и обратный аннигиляции процесс – рождение электронно-позитронной пары при взаимодействии кванта света с вакуумом (при наличии дополнительного тела).



1.2. Основные законы (или основные принципы).

В науке важно установить основные *законы* (или основные принципы) при изучении всякого круга явлений. Исходя из них, можно объяснить известные явления и предсказать новые явления. Родоначальником метода принципов был Исаак Ньютон, который установил основные законы механики.

Законы и принципы не выводятся, они не могут быть доказаны логически. Их доказательством является опыт. Отсюда следует, что *физика – наука экспериментальная*.

Законы выражаются в виде количественных соотношений, записанных в виде формул.

Все физические законы носят *приближенный* характер, они ограничены своей областью применения.

Более общие законы содержат в себе менее общие – частные, при этом частные законы и следствия из них могут быть получены из более общих принципов (основных) логическим путем.

### 1.3. Метод познания в физике.

Построение физики как науки носит модельный характер. При создании моделей принимаются во внимание только существенные для данного круга явлений свойства и связи, и пренебрегается остальными менее существенными.

Когда можно говорить о *появлении науки*? Наука характеризуется созданием принципов, из которых могут быть получены следствия и проверены на опыте. При построении теории или модели явления характерно несущественные связи отбрасывать, оставлять только существенные связи.

Упрощенно можно представить следующую последовательную *схему познания* в физике:

на первом этапе изучается физическое явление →  
 далее строится физическая модель (или теория) явления →  
 в рамках модели проявляются новые черты явления →  
 проводится их проверка на опыте (направленная) →  
 в процессе проверок происходит уточнение модели →  
 в связи с ними появляются новые предсказания →  
 проводятся снова опыты для проверки предсказаний →  
 в модель включается новое, что не описывается старой теорией →  
 происходит расширение и уточнение (обобщение) теории →  
 сравнение с обновленным экспериментом и т.д.

Нильс Бор в 1923 г. выдвинул *Принцип соответствия*, который состоит в следующем: *каждая новая теория, претендующая на более широкую область применимости, чем старая, должна включать последнюю как предельный случай.*

## 2. **Фундаментальные взаимодействия**

Современные экспериментальные данные свидетельствуют, что существует только *четыре качественно различных вида взаимодействия*. Их называют *фундаментальными взаимодействиями*. Фундаментальные взаимодействия переносятся квантами – переносчиками взаимодействий. Все остальные силы в нашем мире являются частными проявлениями этих фундаментальных взаимодействий.

В настоящее время большое значение приобретает идея объединения фундаментальных взаимодействий, поэтому, строго говоря, при их объединении фундаментальных взаимодействий становится меньше. Однако при энергиях, реализующихся в нашей обычной жизни, эти проявления фундаментальных взаимодействий имеют качественные и количественные различия, поэтому рассмотрим их отдельно в порядке увеличения интенсивности.

### 1) *Гравитационное взаимодействие*

*Гравитационное взаимодействие* присуще всем видам материи, имеет вид притяжения или тяготения и описывается Общей Теорией Относительности (ОТО – Альберт Эйнштейн 1915-16 г.г.). В случае пренебрежения всеми релятивистскими эффектами (т.е. в случае малых скоростей) и рассмотрения слабых стационарных гравитационных полей, ОТО сводится к Ньютонской *теории всемирного тяготения*. Тогда сила  $F$  и энергия  $U$  взаимодействия двух точечных частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$  определяются следующими фундаментальными соотношениями:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad U(r) = G \frac{m_1 m_2}{r}$$

где  $r$  – расстояние между частицами,  $G$  – *Ньютоновская гравитационная постоянная*, играющая роль константы гравитационного взаимодействия. Константа  $G$  равна

$$G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2 / \text{г}^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2.$$

(напомним единицы силы  $\text{дин} = \text{г} \cdot \text{см} / \text{с}^2$  и  $\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$ ).

Видно, что энергия взаимодействия убывает достаточно медленно с расстоянием между частицами – обратно пропорционально  $r$ . Сила взаимодействия убывает с расстоянием обратно пропорционально квадрату расстояния. О таких силах, которые убывают с расстоянием обратно пропорционально квадрату расстояния, говорят, как о дальнедействующих силах. Радиус действия таких сил равен бесконечности.

Чтобы говорить о величине взаимодействия (интенсивности) удобно иметь безразмерную константу связи. Чтобы получить такую константу, можно использовать *фундаментальные постоянные*:

$$\text{постоянную Планка} \quad \hbar = 1.05459 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 1.05459 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

(напомним единицы энергии  $\text{Дж} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$  и  $\text{эрг} = \text{г} \cdot \text{см}^2 / \text{с}^2$ ) и

$$\text{скорость света} \quad c = 2.9979 \cdot 10^{10} \text{ см/с} = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

а также необходимо ввести эталонную массу, например,

$$\text{массу протона} \quad m_p = 1.67265 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1.67265 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Тогда безразмерная константа связи гравитационного взаимодействия равна

$$\frac{G m_p^2}{\hbar c} \sim 6 \cdot 10^{-39},$$

что, конечно, является очень малой величиной. Гравитационные взаимодействия ответственны за силу тяготения на Земле, за образование звезд, планет, планетарных и звездных систем, галактик.

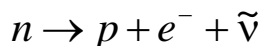
В квантовой теории тяготения переносчиками гравитационного взаимодействия являются *гравитоны* (или гравитационные волны) – безмассовые частицы  $m_G = 0$ . Гравитационные волны предсказываются *общей теорией относительности* и многими другими теориями гравитации,

но ввиду их чрезвычайной малости не были зарегистрированы в течение 100 лет со времени их предсказания Эйнштейном.

14 сентября 2015 года коллаборация LIGO (лазерно-интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория), в которую входят более 1000 человек (из 16 стран, в том числе из России), впервые наблюдала колебания пространства-времени — гравитационные волны, дошедшие до Земли от катастрофы, произошедшей далеко во Вселенной. Физики утверждают, что гравитационные волны возникли в результате слияния двух черных дыр массами 36 и 29 солнечных масс и образования одной более массивной вращающейся черной дыры. Это произошло на расстоянии около 1,3 млрд световых лет от Земли, при этом три солнечных массы ушли на излучение. Ранее столкновения двух черных дыр никогда не наблюдалось. Это открытие подтверждает одно из важных положений общей теории относительности Эйнштейна о существовании гравитационных волн.

## 2) *Слабое взаимодействие.*

Так называемые *слабые взаимодействия* присущи всем элементарным частицам (кроме фотона, гравитона). Они ответственны за распад элементарных частиц, причем за счет этих сил происходит нарушение пространственной четности. Характерно, что, если в каком-либо процессе появляется или участвует элементарная частица *нейтрино* (или *антинейтрино*), то взаимодействие, определяющее этот процесс, является слабым. Типичный пример: распад нейтрона  $n$  ( $\beta$ -распад нейтрона) на протон  $p$ , электрон  $e^-$  и антинейтрино  $\bar{\nu}$ :



Существуют также слабые взаимодействия, не сопровождающиеся участием нейтрино или антинейтрино.

Интенсивность слабого взаимодействия характеризуется константой связи Ферми  $G_F$ . Эта константа имеет размерность и, чтобы образовать безразмерную величину для сравнения с другими константами взаимодействия, необходимо использовать какую-нибудь эталонную массу, например, массу протона  $m_p$  ( $1.67265 \cdot 10^{-27}$  кг). Тогда безразмерная константа связи слабого взаимодействия будет равна

$$G_F m_p^2 \sim 10^{-5}.$$

Видно, что слабое взаимодействие гораздо интенсивнее гравитационного, однако, с другой стороны, оно является самым слабым взаимодействием, которое проявляется в распадах элементарных частиц.

Слабое взаимодействие в отличие от гравитационного является короткодействующим, характерный радиус действия сил  $r \leq 10^{-15}$  см. Переносчиками слабых взаимодействий являются частицы конечной массы — заряженные  $W^\pm$  - *бозоны* и нейтральные  $Z^0$  - *бозоны*. Эти элементарные частицы имеют спин, равный 1, и массы, равные по порядку величины  $100m_p$



или  $160000m_e$ . Масса электрона  $m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28}$  г. Если взять в качестве эталонной массы массу электрона, то безразмерная константа слабого взаимодействия примерно равна  $G_F m_e^2 \sim 10^{-10}$ .

---

**Примечание 1.** Можно оценить массу  $W$  - бозона, исходя из соотношения неопределенностей  $pr \sim \hbar$ , где  $r \sim 2 \cdot 10^{-16}$  см – радиус действия сил и скорости движения бозона близкой к скорости света:  $m_W \sim \frac{p}{c} \sim \frac{\hbar}{rc} \sim \frac{1.05 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \sim 1.6 \cdot 10^{-22}$  г.

---

### 3) Электромагнитное взаимодействие.

Электромагнитные взаимодействия проявляются при взаимодействии зарядов, магнитных моментов (токов) и электромагнитных полей. Они осуществляются квантами электромагнитного поля – *фотонами* (частицы-волны с массой покоя  $m_\gamma = 0$ ).

*Простейший пример:* два покоящихся заряда  $q_1$  и  $q_2$  взаимодействуют с

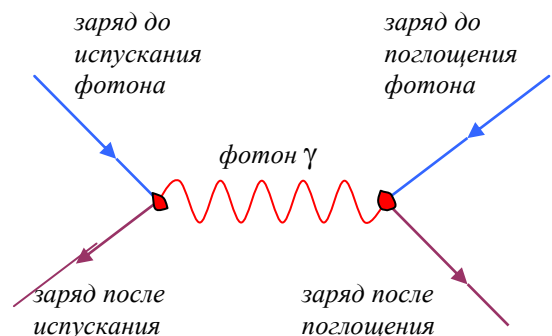
$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad \vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

где  $r$  – расстояние между ними,  $k$  – коэффициент, зависящий от выбора системы единиц, заряды в системе СГС измеряются в единицах заряда СГС, а в системе СИ – в Кулонах. Зависимость силы Кулона от расстояния означает, что взаимодействие является дальнедействующим как и гравитационное взаимодействие (радиус действия сил  $r \sim \infty$ ).

Классическая теория электромагнитного взаимодействия – электродинамика Максвелла – обобщение опытных фактов и явлений в виде системы дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитные явления. В качестве константы связи служит *заряд электрона* как минимальный обнаруженный электрический заряд свободной частицы

$$e = 4.8032 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

В квантовой теории переносчиком электромагнитного взаимодействия является квант электромагнитного поля - *фотон*, частица имеющей нулевую массу покоя и спин 1. Квантовое электромагнитное взаимодействие 2-х зарядов изображается следующим образом: заряд испускает фотон, в силу чего его состояние изменяется. Другой заряд поглощает этот фотон и также изменяет свое состояние.



Удобно ввести безразмерную константу связи электромагнитного взаимодействия, для чего используем фундаментальные постоянные  $\hbar$  и  $c$ . Эта константа называется *постоянной тонкой структуры*:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Таким образом, безразмерная константа электромагнитного взаимодействия  $\sim 10^{-2}$ . Это означает, что электромагнитное взаимодействие значительно сильнее слабого и гравитационного взаимодействия.

С современной точки зрения электромагнитное и слабое взаимодействия представляют собой различные стороны единого *электрослабого взаимодействия*. Создана объединенная теория электрослабого взаимодействия – теория Вайнберга- Салама- Глэшоу, объясняющая с единых позиций все аспекты электромагнитных и слабых взаимодействий. Пока энергии взаимодействия достаточно малы электромагнитное и слабое взаимодействия отделены и не влияют друг на друга. С ростом энергии начинается их взаимовлияние, и при достаточно больших энергиях эти взаимодействия сливаются в единое. Характерная энергия объединения оценивается по порядку величины как  $10^2 \text{ ГэВ} = 10^{11} \text{ эВ}$  (электронвольт  $\rightarrow 1 \text{ эВ} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). Для сравнения отметим, что энергия связи атома водорода  $\sim 10^{-8} \text{ ГэВ}$ , а энергия связи атомного ядра  $\sim 10^{-2} \text{ ГэВ}$  существенно меньше характерной энергии объединения. По этой причине электромагнитное и слабое взаимодействия не проявляют в обычных физических явлениях своей единой сущности.

#### 4) *Сильное взаимодействие.*

Сильное взаимодействие ответственно за устойчивость атомных ядер, проявляется в ядерных реакциях, т.е. описывает взаимодействие между *нуклонами* и *гиперонами*, объединенными общим названием – *адроны*. Адроны – сильно взаимодействующие элементарные частицы, к которым относятся нейтрон  $n$ , протон  $p$ , гипероны  $\lambda$ ,  $\Sigma$  .... Сильное взаимодействие зарядонезависимое, т.е. оно одинаковое для протонов и нейтронов.

Классическая квантовая теория ядра описывала сильные взаимодействия как обмен  $\pi$  - *мезонами*. Поскольку масса  $\pi$  - мезона конечная, то и радиус действия ядерных сил конечен  $r \leq 10^{-13} \text{ см}$ . Безразмерная *константа сильного взаимодействия*  $\sim 1$ , т.е. сильное взаимодействие является, в самом деле, наиболее сильным из всех фундаментальных взаимодействий.

---

Примечание 2. Оценка массы  $\pi$  - мезона. Пользуясь длиной волны де Бройля, укладываемой на орбите одного нуклона вокруг другого или, что то же самое, соотношением неопределенностей, имеем:

$$m_{\pi} \sim \frac{p}{c} \sim \frac{\hbar}{cr} \approx \frac{1.05 \cdot 10^{-27}}{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-13}} \approx 0.3 \cdot 10^{-24} \text{ з} \approx 300m_e$$


---

Современная квантовая теория сильных взаимодействий– *квантовая хромодинамика*. Согласно этой теории, все адроны состоят из кварков. *Кварки* – элементарные частицы ненулевой массы со спином 1/2 и с дробным электрическим зарядом по отношению к электронному заряду. Кварки формируются в три пары (дублеты) и записываются парами в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Каждый тип кварков принято называть *ароматом* (6 ароматов). При этом *u*-, *c*-, *t*- кварки имеют электрический заряд  $\frac{2}{3}|e|$ , а *d*-, *s*-, *b*- кварки –  $-\frac{1}{3}|e|$ .

Кроме того, каждый кварк (каждый аромат) может обладать разным *цветом* (так называют их различные характеристики – квантовые числа). Выделяют три цвета: желтый, синий и красный. Каждому кварку соответствует *антикварк*, имеющий по отношению к данному кварку, противоположный электрический заряд и антицвет. В итоге существует 36 кварков и антикварков.

Силы между кварками осуществляются квантами сильных взаимодействий – *глюонами*, которые являются переносчиками сильных взаимодействий со спином 1 и массой равной 0. При этом в процессе взаимодействия цвета кварков могут меняться. Все наблюдаемые частицы (адроны) – бесцветны, т.е. они есть объединение как минимум 3-х разноцветных кварков. Мезоны также бесцветные частицы, но они образуются двумя кварками с одним цветом и антицветом.

Отличительная черта кварк-кваркового взаимодействия через глюоны состоит в том, что с уменьшением расстояния между кварками их взаимодействие ослабляется, а с увеличением расстояния растет. Внутри адрона кварки можно рассматривать как свободные частицы (понятие *асимптотической свободы*), но они не могут вылетать из адронов. Поэтому одиночные кварки и глюоны, как частицы, обладающие цветом, не могут существовать как свободные частицы. Явление удержания элементарных частиц, обладающих цветом, внутри адронов получило название *конфайнмента*.

В настоящее время существует тенденция объединения всех фундаментальных взаимодействий в одно с единой константой. Создана модель *великого объединения*, в рамках которой объединяются сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия и при этом характерная энергия объединения оказывается  $\sim 10^{15}$  ГэВ. Отметим, что наибольшая энергия,

достижимая на современных ускорителях, не превышает  $10^3$  ГэВ. Проблема объединения всех фундаментальных взаимодействий остается открытой.

### 3. Кратко об общей картине мира

#### 3.1. Предельные размеры и времена жизни изучаемых объектов

Согласно современным физическим представлениям о мире получаем следующую иерархию объектов по мере уменьшения их размеров:

Вселенная → Метагалактики и Галактики → Звезды и звездные системы  
→ Планеты → Макротела → Микроструктуры → Макромолекулы →  
Наноструктуры → Молекулы и атомы → Ядра → Элементарные частицы.

Приведем кратко диапазон их характерных размеров и времен жизни.

1) Размер Вселенной  $10^{28}$  см =  $10^{10}$  световых лет  $\Leftrightarrow$  радиус элементарных частиц  $10^{-17}$  см. (1 световой год равен  $\approx 10^{18}$  см).

Часто для оценки больших расстояний вводится единица расстояния

$$1 \text{ Парсек} = 3.0857 \cdot 10^{18} \text{ см.}$$

2) Времена жизни: время жизни Вселенной  $10^{10}$  лет (=  $10^{18}$  секунд)  $\Leftrightarrow$  время жизни некоторых микрочастиц и резонансов  $10^{-24} \div 10^{-25}$  с. Время жизни Вселенной отсчитывается от момента ее образования – рождение как взрыв – особая точка.

3) Массы: масса млечного пути (наша галактика) порядка  $4 \cdot 10^{44}$  г  $\Leftrightarrow$  масса Солнца  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$  г  $\Leftrightarrow$  масса электрона  $m_e = 0.91 \cdot 10^{-27}$  г.

4) Общее число звезд во Вселенной  $\sim 10^{23}$ , в нашей Галактике  $\sim 10^{11}$ .

5) Число атомов в видимой части Вселенной  $\sim 10^{80} \div 10^{82}$ . Число атомов в Солнце  $\sim 10^{57}$ , Земле  $\sim 4 \cdot 10^{51}$ .

6) Средняя плотность вещества во Вселенной  $\rho \sim 10^{-30}$  г/см<sup>3</sup>

Во Вселенной постоянно происходят эволюционные процессы рождения и умирания звезд и звездных систем. Рождаются новые и сверхновые звезды. Вспышка сверхновой – явление, в ходе которого звезда резко увеличивает свою яркость на 4–8 порядков с последующим сравнительно медленным затуханием вспышки.

#### 3.2. Макрофизика

Космофизика (астрофизика) – наука изучающая физические явления в космосе. За последние 20 - 30 лет в этой области произошла подлинная революция, обнаружены интереснейшие объекты.

А) **Нейтронные звезды** – состоят в основном из нейтронов, образуются в результате гравитационного коллапса: средняя плотность  $\rho \sim 2 \cdot 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>, средний радиус  $r \sim 20$  км, масса  $M < 2M_{\odot}$ . Черные дыры – особые сильно сжатые объекты, нейтронные звезды, которые поглощают все, что на них попадает.

- Б) *Пульсары* – нейтронные звезды, испускающие импульсное излучение (за счет аккреции вещества).
- В) *Барстеры* – двойные системы (звезда + нейтронная звезда) с периодическим излучением в рентгеновской области.
- Г) *Квazarы* – объекты, обладающие самым мощным излучением (в основном в радиодиапазоне) во Вселенной. Размер квазаров – несколько парсек.

Важный фундаментальный вопрос: Вселенная замкнута или нет? Этот вопрос остается открытым до настоящего времени. Более того, последние измерения скорости разбегания галактик приводят к новым еще до конца неисследованным явлениям во Вселенной.

Так, появились новые данные о Вселенной.

*Тёмная материя* в астрономии и космологии – это гипотетическая форма материи, которая не испускает *электромагнитного излучения* и не взаимодействует с ним. Это свойство данной формы вещества делает невозможным её прямое наблюдение. Однако возможно обнаружить присутствие тёмной материи по создаваемым ею *гравитационным эффектам*. Обнаружение тёмной материи поможет решить проблему *скрытой массы*, которая, в частности, заключается в аномально быстрой скорости вращения внешних областей *галактик*.

*Тёмная энэргия* (*dark energy*) в космологии – феномен, объясняющий факт, что Вселенная расширяется с ускорением. На основании проведённых в конце 1990-х годов наблюдений *сверхновых звёзд* был сделан вывод, что расширение Вселенной ускоряется со временем. Затем эти наблюдения были подкреплены другими источниками: измерениями реликтового излучения, гравитационного линзирования, нуклеосинтеза Большого Взрыва.

Существует два варианта объяснения сущности тёмной энэргии:

- тёмная энэргия есть *космологическая константа* – неизменная энергетическая плотность, равномерно заполняющая пространство *Вселенной* (иначе говоря, постулируется ненулевая энэргия вакуума);
- тёмная энэргия есть некая квинтэссенция – динамическое поле, энергетическая плотность которого может меняться в *пространстве* и во *времени*.

Окончательный выбор между двумя вариантами требует высокоточных измерений скорости расширения Вселенной, чтобы понять, как эта скорость изменяется со временем. Темпы расширения Вселенной описываются *космологическим уравнением состояния*. Разрешение уравнения состояния для тёмной энэргии является одной из самых насущных задач современной наблюдательной космологии.

Тёмная энэргия также должна составлять значительную часть так называемой *скрытой массы* Вселенной.

### 3.3. Микрофизика

За последние 30-40 лет в микрофизике также произошла революция, поменялись многие привычные представления в следующей цепочке:

А Т О М  $\Rightarrow$  Я Д Р О  $\Rightarrow$  ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Наиболее существенные изменения произошли в физике элементарных частиц в связи с достижениями как в области экспериментальных исследований, так и теоретических достижений. Была создана и развита **Стандартная модель** – теоретическая конструкция в физике элементарных частиц, описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие всех элементарных частиц. Стандартная модель не является теорией всего, так как не описывает тёмную материю, тёмную энергию и не включает в себя гравитацию. В середине 80-х годов прошлого столетия было подтверждено существование промежуточных векторных бозонов, что привело к принятию Стандартной модели как основной модели в физике элементарных частиц. В дальнейшем модель расширялась, в частности после обнаружения в 2002 году **нейтринных осцилляций**. В рамках этой модели предсказывалось существование некоторого бозонного поля (**бозона Хиггса**, постулирован британским физиком Питером Хиггсом в его фундаментальных статьях), которое отвечало бы за появление инертной массы всех элементарных частиц.

**Бозон Хиггса** или **Хиггсовский бозон** – элементарная частица (бозон, скалярная частица с нулевым спином), квант поля Хиггса, с необходимостью возникает в Стандартной модели физики элементарных частиц вследствие механизма спонтанного нарушения электрослабой симметрии. Предсказанный первоначально в теории, после нескольких десятков лет поисков, 4 июля 2012 года, в результате исследований на Большом адронном коллайдере (БАК), был обнаружен кандидат на его роль – новая частица с массой около 125–126 ГэВ/c<sup>2</sup>. В марте 2013 года появились сообщения от отдельных исследователей Европейского Центра ядерных исследований (ЦЕРН), что найденная полугодом ранее частица действительно является бозоном Хиггса. В апреле 2014 года сообщили, что ширина распада этого бозона меньше 17 МэВ. Он обладает нулевыми спином, электрическим зарядом, цветным зарядом.

Стандартная модель не может являться последним словом в физике элементарных частиц, ибо она содержит слишком много внешних параметров, а также не включает гравитацию. Поэтому поиск отклонений от Стандартной модели – одно из самых активных направлений исследования, начиная с 2010-х годов. Ожидалось, что эксперименты на Большом адронном коллайдере смогут зарегистрировать множество отклонений от Стандартной модели (с добавлением массивных нейтрино), однако по состоянию на конец 2019 года после 10 лет экспериментов таких отклонений обнаружено не было



### 3.4. Проблемы в современной физике

В заключении вводной части кратко перечислим области исследований и проблемы в физике, решению которых посвящено последние несколько десятков лет.

- 1) Единая теория поля. Связанная с этим проблема квантования пространства, т.е. наличие фундаментальной длины.
- 2) Теория физического вакуума.
- 3) Космология – настоящее и будущее Вселенной.
- 4) Проблема темной материи и темной энергии.
- 5) Масса нейтрино.
- 6) Термоядерный синтез. Проблемы энергетики будущего.
- 7) Высокотемпературная сверхпроводимость. Скачок произошел в 86-87 гг., когда нашли соединения (керамические соединения) с температурой сверхпроводящего перехода  $\sim 90\text{ K}$ .
- 8) Создание когерентных источников света - лазеров - высоких энергий.
- 9) Поведение вещества в сверхсильных электрических, магнитных и гравитационных полях.
- 10) Создание новых материалов с заданными свойствами.
- 11) Кластеры и фуллерены.
- 12) Наночастицы, наноструктуры, нанотехнологии.
- 13) Атомные ячейки памяти.
- 14) Физика открытых систем.
- 15) И другие

## Глава 1. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА.

### 1.1. Введение.

#### 1.1.1. О механике. Границы применимости классической механики.

*Механика* – раздел физики, в котором изучается простейшая форма движения материи – перемещение тел в пространстве и времени. Основные принципы (законы) механики были сформулированы И. Ньютоном.

В принципе ранее считалось, что все в мире может быть описано этими законами. На этих законах построена классическая механика. Однако опыт показал, что законы Ньютона справедливы не всегда, поэтому классическая механика имеет определенные границы применимости. Далее в курсе физики мы взглянем на классическую механику немного с другой стороны, исходя из законов сохранения, которые являются в некотором смысле более общими, чем законы Ньютона.

*Первое ограничение* классической механики связано со скоростями рассматриваемых объектов. Опыт показал, что законы Ньютона справедливы при не слишком больших скоростях материальных тел

$$v \ll c \quad \left( \frac{v^2}{c^2} \ll 1 \right),$$

где  $c$  – скорость света ( $c = 2.9979 \cdot 10^{10}$  см/с). При этих скоростях линейные масштабы и промежутки времени не изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой (подробнее системы отсчета рассмотрим ниже в следующем пункте 1.1.2). В этом смысле пространство и время *абсолютны* в классической механике.

Итак, классическая механика описывает движение с малыми относительными скоростями, т.е. классическая механика – *нерелятивистская физика*. Это является первым ограничением применимости классической механики Ньютона – ограничение со стороны больших скоростей.

Опыт также показал, что применение законов Ньютоновой механики *неправомерно к микрообъектам*, таким как молекулы, атомы, ядро, электроны и т.д. При описании поведения микрообъектов, начиная с размеров

$$R \leq 10^{-8} \text{ см} = 10^{-10} \text{ м} \approx 1 \text{ Ангстрем},$$

справедливы другие законы – *квантовые*. Их необходимо учитывать, когда одна из характерных величин размерности  $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с} = \text{Дж} \cdot \text{с}$  (это размерность момента импульса) имеет порядок величины  $\hbar$  – постоянной Планка

$$1.05459 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 1.05459 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$



Скажем, для электрона, находящегося в атоме, имеем следующие значения физических величин, характеризующих его движение:

масса электрона  $m_e \sim 10^{-30}$  кг;

его скорость  $v_e \sim 10^{-2} \cdot c$  м/с;

радиус орбиты  $r \sim 10^{-10}$  м.

Тогда величина, имеющая размер момента импульса, равна:

$$m_e v_e r \sim 10^{-34} \sim \hbar.$$

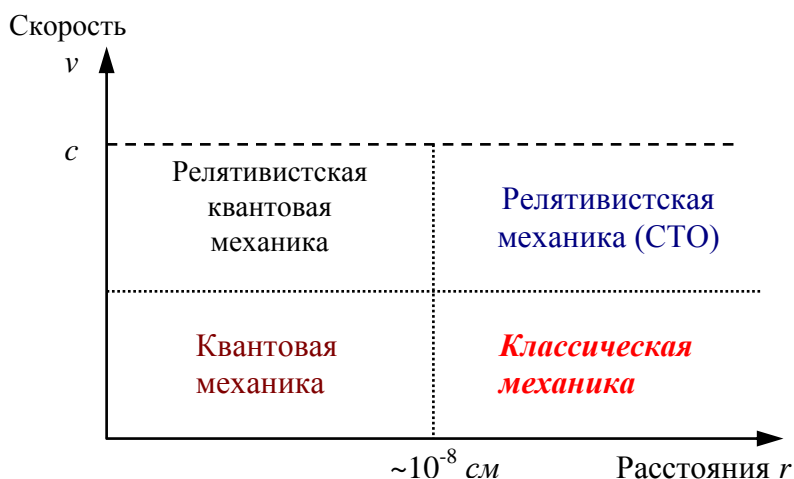


Рис. 1.1.

Таким образом, движение электрона в атоме не может быть описано в рамках классической механики, а описывается *квантовой теорией*.

При столкновении частиц высоких энергий, т.е. больших скоростей и явлений, происходящих на малых расстояниях, необходимо учитывать и релятивистские и квантовые эффекты

одновременно. Этой областью физики занимается *релятивистская квантовая механика*.

Таким образом, на рис. 1.1 в пространстве масштабов расстояний и скоростей схематически показано положение классической механики относительно других разделов физических теорий: релятивистской механики (СТО), квантовой механики и релятивистской квантовой механики.

---

*Примечание 1. Исаак Ньютон, великий английский ученый, создатель классической физики, 1643–1727*

---

### 1.1.2. Системы координат. Система отсчета.

Любое физическое явление – *последовательность событий*. *Событием* называется то, что происходит в данной точке пространства в данный момент времени. Для описания событий необходимо провести разметку пространства и времени. Последняя осуществляется путем введения отсчетных и реперных (масштабных) тел и связанной с ними системой координат.

В механике, и в физике вообще, в разных задачах удобно пользоваться различными системами координат. Рассмотрим наиболее часто употребляемые системы координат.

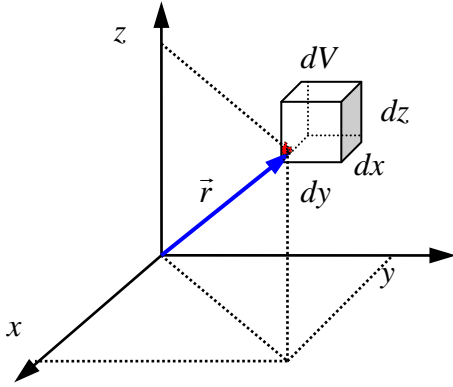


Рис. 1.2.

координаты точки,  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – единичные вектора вдоль осей  $x, y, z$ , соответственно.

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1. \quad (1.1.2)$$

Малый элемент объема в такой системе определяется через малые интервалы координат как их произведение (объем параллелепипеда, см рис. 1.2):

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.1.3)$$

Или бесконечно малый элемент объема записывается через бесконечно малые приращения координат:

$$d^3V = dx dy dz \quad (1.1.4)$$

2) *Цилиндрическая система координат*: в качестве осей в цилиндрической системе выбираются: расстояние до оси  $z$  –  $\rho$ , угол поворота от оси  $x$  –  $\varphi$  (по правилу правого винта) и высота вдоль оси  $z$  от тела отсчета (рис. 1.3а). Радиус-вектор точки определяется:

$$\vec{r} = \vec{\rho}(\rho, \varphi) + z \vec{e}_z \quad (1.1.5)$$

где  $\vec{\rho}$  вектор в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ .

Пределы изменения координат в цилиндрической системе (см рис. 1.3а):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < \infty \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ -\infty &< z < \infty \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

При этом декартовы координаты точки выражаются через координаты цилиндрической системы отсчета следующим образом:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1.1.7)$$

Бесконечно малый элемент объема равен произведению ребер малого кубика или параллелепипеда, образованного бесконечно малыми изменениями координат –  $\rho, \varphi, z$  (см рис. 1.3б):

$$d^3V = \rho d\rho \cdot d\varphi \cdot dz \quad (1.1.8)$$

1) *Декартова система координат*: вводится тело отсчета и три взаимно перпендикулярных оси с масштабами по всем трем осям (линейки, см рис. 1.2). Пределы изменения этих координат от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При этом координаты точки (материальной точки) определяются вектором (или *радиус-вектором*):

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z. \quad (1.1.1)$$

где  $x, y, z$  – проекции вектора на три взаимно перпендикулярные оси или иначе

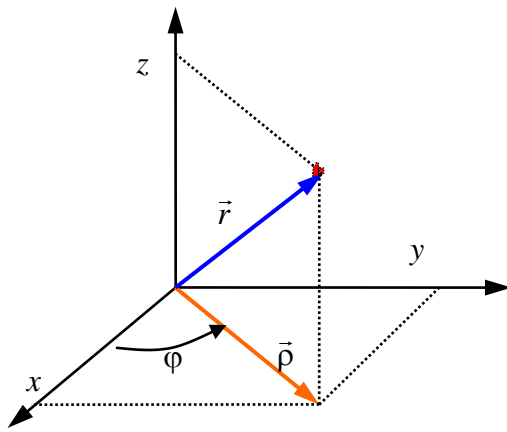


Рис. 1.3а.

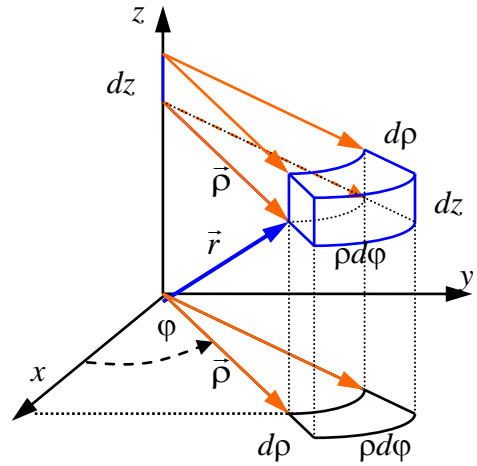


Рис. 1.3б.

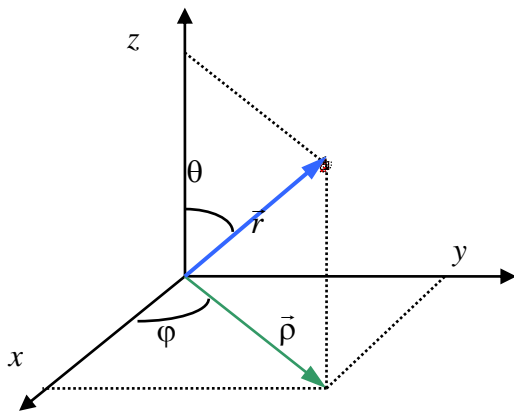


Рис. 1.4.

3) *Сферическая система координат*: вводится расстояние от тела отсчета до материальной точки  $r$  и углы поворота от осей  $x$  и  $z$  –  $\theta$ ,  $\varphi$  (рис. 1.4). Радиус-вектор есть функция этих координат:  $\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, \varphi)$ , а координаты имеют следующие пределы изменения:

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

При этом декартовы координаты определяются через координаты сферической системы следующим образом (рис. 1.4):

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Бесконечно малый элемент объема в сферической системе координат равен как обычно произведению трех ребер криволинейного кубика или параллелепипеда (см рис. 1.5, криволинейностью кубика можно пренебречь в пределе

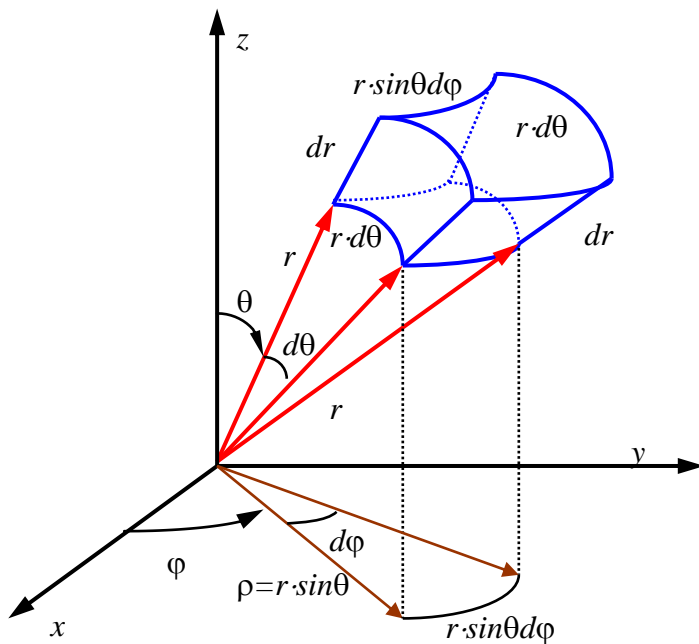


Рис. 1.5.

малых размеров):

$$\begin{aligned}d^3V &= dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi \\d^3V &= r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi\end{aligned}\quad (1.1.11)$$

Система Отсчета. Система координат дополняется *часами*. Часы находятся в различных точках пространства, поэтому их нужно синхронизовать. Синхронизация часов производится с помощью сигналов. Пусть время распространения сигнала из точки, где произошло событие, до точки наблюдения равно  $\tau$ . Тогда наши часы должны показывать время  $t = t' + \tau$ , если часы в точке события в момент его появления показывают время  $t'$ . Такие часы будем считать синхронизированными.

В классической механике считаем, что скорость сигнала (скорость света)  $c = \infty$ . Тогда можно ввести одни часы во всем пространстве (абсолютное время).

Совокупность Системы Координат и множества синхронизированных между собой часов в каждой точке пространства образуют *Систему Отсчета* (СО). Имеется бесконечное множество систем отсчета. Опыт дает, что пока скорости невелики по сравнению со скоростью света  $v^2/c^2 \ll 1$ , то линейные масштабы и промежутки времени не изменяются при переходе от одной СО к другой. Иначе говоря, *пространство и время абсолютны в классической механике*.

Если  $v^2/c^2 \leq 1$ , то масштабы и интервалы времени зависят от выбора Системы Отсчета, т.е. пространство и время становятся понятиями относительными. Это область *релятивистской механики*.

### 1.1.3. Основные кинематические характеристики движения.

Рассмотрим для простоты материальную точку в декартовой системе отсчета. *Материальная точка* – это физическое тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Отметим, что понятие «материальная точка» – это чисто модельное рассмотрение положения реального тела, идеализация реальной ситуации. Положение материальной точки определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ , или, например в декартовой системе координат, тремя координатами  $x, y, z$ . При этом *радиус-вектор* определяется (1.1.1)

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

При перемещении материальной точки координаты  $x(t), y(t), z(t)$ , и, соответственно радиус-вектор  $\vec{r}(t)$ , являются функциями времени  $t$ . Начало вектора находится в точке отсчета (при  $t = 0$ ), а конец вектора в зависимости от времени определяет траекторию движения тела.

*Скорость* материальной точки при этом определяется как производная по времени от радиуса-вектора

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \quad (1.1.12)$$

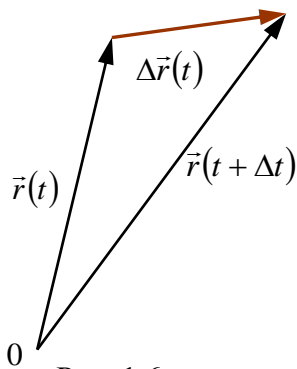


Рис. 1.6.

Здесь вектор элементарного перемещения равен  $\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  (см рис. 1.6), а  $d\vec{r}$  – бесконечно маленькое приращение радиус-вектора. Иначе вектор скорости записывается:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \quad (1.1.13)$$

где компоненты вектора скорости (скорости распространения вдоль координатных осей) равны соответственно:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.1.14)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения точки.

**Ускорение** материальной точки определяется производной скорости по времени (см рис. 1.7):

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z \quad (1.1.15)$$

Или определяется как вторая производная от радиус-вектора.

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.1.16)$$

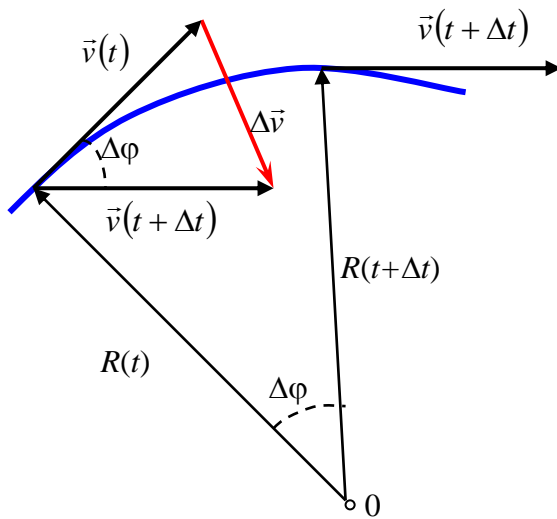


Рис.1.7.

При этом вектор ускорения может быть записан в обычной декартовой системе координат

$$\vec{a}(t) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (1.1.17)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2},$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Вектор ускорения в общем случае движения не совпадает с направлением скорости. Поэтому при рассмотрении многих задач о движении тел удобно раскладывать вектор ускорения на 2 составляющих: **тангенциальную** составляющую  $\vec{a}_\tau$ , направленную параллельно скорости движения, и **нормальную**  $\vec{a}_n$ , направленную перпендикулярно вектору скорости (траектории).

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (1.1.18)$$

Тангенциальное ускорение определяет **численное изменение** скорости:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \quad (1.1.19)$$

Нормально ускорение или иначе центростремительное ускорение отвечает за *изменение направления* скорости материальной точки:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.1.20)$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории.

Иногда удобно ввести понятия угловой скорости и углового ускорения, если ввести угол поворота радиус-вектора точки  $\varphi(t)$ , изменяющийся во времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.1.21)$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Более подробно криволинейное движение рассмотрим ниже в курсе механики.

#### 1.1.4. Системы единиц

Для описания движения материальной точки необходимо ввести основные единицы измерения физических величин. В механике к ним относятся единицы *длины*, *времени* и *массы*. Из них строятся все остальные единицы, описывающие движение, так называемые, производные единицы.

В настоящем курсе физики мы будем использовать обе общепринятые системы единиц:

СГС: сантиметр (*см*), грамм (*г*), секунда (*с*) и

СИ: метр (*м*), килограмм (*кг*), секунда (*с*).

| Система единиц | Основные единицы                |          |                                 | Производные единицы   |                         |                           |                           |
|----------------|---------------------------------|----------|---------------------------------|-----------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
|                | Линейные размеры                | Время    | Масса                           | Линейная скорость $v$ | Ускорение $a$           | Угловая скорость $\omega$ | Угловое ускорение $\beta$ |
| СГС            | <i>см</i>                       | <i>с</i> | <i>г</i>                        | <i>см/с</i>           | <i>см/с<sup>2</sup></i> | <i>рад/с</i>              | <i>рад/с<sup>2</sup></i>  |
| СИ             | <i>м</i>                        | <i>с</i> | <i>кг</i>                       | <i>м/с</i>            | <i>м/с<sup>2</sup></i>  | <i>рад/с</i>              | <i>рад/с<sup>2</sup></i>  |
|                | $1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$ |          | $1 \text{ кг} = 10^3 \text{ г}$ |                       |                         |                           |                           |

Напоминаем, что радиан (*рад*) – это безразмерная единица угла и равна отношению длины дуги, описывающей угол, к ее радиусу.

## 1.2. Инерциальные системы отсчета и законы Ньютона.

### 1.2.1. Инерциальные системы отсчета (ИСО).

Классическая механика Галилея-Ньютона строится на законах, полученных на опыте и представленных в виде принципов Ньютоном. Удобно и необходимо выбрать такую систему отсчета, чтобы законы механики выглядели наиболее просто. Такую систему отсчета позволяет выбрать *первый закон Ньютона*. Именно первый закон Ньютона предполагает существование *инерциальных систем отсчета* (ИСО).

*Существует такая система отсчета, в которой материальная точка, если исключить ее взаимодействие со всеми иными телами, будет двигаться по инерции, т.е. сохранять свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.* Такая система носит название инерциальной системы отсчета - ИСО. Таким образом, ИСО связана с движением этих *свободных* тел. Все остальные системы отсчета – неинерциальные системы отсчета.

*Свободное тело* (тело или материальная точка без взаимодействия) – это идеализация, свободных тел, строго говоря, нет в природе. Так как ИСО связана со свободным телом, то и *инерциальная система отсчета – идеализация*. Утверждение о существовании таких ИСО, хотя бы в принципе, – один из основных законов природы. Важно, что можно ввести бесконечное множество ИСО, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, т.е. с постоянной скоростью, но по физическим свойствам все они эквивалентны. В этом смысле нет выделенной, или иначе абсолютной ИСО.

---

*Примечание 1. Галилео Галилей, итальянский физик, 1564–1642*

---

### 1.2.2. Законы Ньютона.

Итак, основные принципы (законы) механики были сформулированы Ньютоном. Кратко повторим эти принципы, т.е. *законы Ньютона*:

*Первый закон Ньютона.* Если сумма всех сил действующих на тело равна нулю, то тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Значение этого закона становится ясно из первого пункта этого параграфа, когда рассматривали инерциальные системы отсчета.

*Второй закон Ньютона:* основное уравнение динамики – ускорение тела  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  пропорционально приложенной к телу силе:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{или} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (1.2.1)$$



где  $\vec{F}$  – равнодействующая всех сил, действующих на тело. Напомним, что здесь скорость определяется как производная от радиус-вектора точки или тела  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$  по времени:  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , поэтому ускорение есть вторая производная от радиус-вектора:  $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ . Масса  $m$  здесь выступает как коэффициент пропорциональности, который определяет меру инертности тела.

Часто второй закон Ньютона записывают через *импульс* тела  $\vec{p} = m\vec{v}$ :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.2.2)$$

Второй закон Ньютона служит для определения единиц силы, поскольку все остальные единицы уже определены. В системе СИ сила измеряется в **Ньютонах**:

$$H = \frac{кг \cdot м}{с^2}$$

В системе СГС (CGS) сила измеряется в **Динах**:  $Дн = \frac{г \cdot см}{с^2}$ . Связь между единицами силы определяется соотношением  $1 H = 10^5 Дн$ .

3) *Третий закон Ньютона*: Во взаимодействии двух тел каждое из них действует на другое тело с одинаковой по значению, но противоположной по направлению силой.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (1.2.3)$$

Законы Ньютона позволяют описывать основные явления и решать задачи динамики в классической механике.

#### 1.2.4. Реализация ИСО.

Выбор ИСО на практике зависит от точности описания того или иного явления или задачи. Рассмотрим несколько систем отсчета, которые с различной точностью можно рассматривать как инерциальные.

1) Для обычных механических задач часто рассматривают систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, как инерциальную. При этом можно считать ускорение силы тяжести постоянным и примерно равным  $g \approx 9.8 м/с^2 = 980 см/с^2$ . Но для более строгих рассмотрений необходимо учитывать, что Земля вращается и все тела, находящиеся на поверхности Земли движутся с ускорением, причем различным на экваторе и на полюсе. Поэтому система отсчета, связанная с поверхностью Земли – неинерциальная. С какой точностью?

Рассмотрим положение тела на экваторе. Ускорение (центростремительное)  $a_n$ , связанное с вращением Земли с угловой скоростью  $\omega$  ( $\omega = d\varphi/dt = v/R_3$ ,  $\varphi$  – угол поворота Земли) определяется:



$$a_n = \omega^2 R_3 = \frac{v^2}{R_3} \quad (1.2.4)$$

где  $R_3$  – радиус Земли:  $R_3 = 6.4 \cdot 10^3 \text{ км} = 6.4 \cdot 10^8 \text{ см}$ . Оценим угловую скорость вращения Земли, зная, что время оборота Земли вокруг оси ( $\varphi = 2\pi$ ) составляет  $T = 1 \text{ сутки} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с} = 86400 \text{ с}$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{6.28}{86400} \approx 0.7 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{\text{Рад}}{\text{с}} \right] \quad (1.2.5)$$

Подставляя в (1.2.4), получаем оценку ускорения на экваторе:

$$a_n = 0.49 \cdot 10^{-8} \cdot 6.4 \cdot 10^8 = 3.2 \left[ \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \right] \quad (1.2.6)$$

Центростремительное ускорение меняется при изменении широты, а на полюсе равно 0. Таким образом, получили, что с такой точностью (1.2.6) система отсчета, связанная с поверхностью Земли, может считаться инерциальной, поскольку ускорение силы тяжести на полюсе отличается от ускорения силы тяжести на экваторе на величину  $\sim 3.2 \text{ см/с}^2$ .

2) Рассмотрим степень неинерциальности системы отсчета, связанной с центром Земли. Земля вращается вокруг Солнца, что дает поправку на ускорение величину на порядок меньшую по сравнению с (1.2.6). Период обращения Земли вокруг Солнца  $T = 1 \text{ год} = 3 \cdot 10^7 \text{ с}$ . Радиус орбиты Земли  $R_o = 1.5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ . Тогда ускорение центра Земли при вращении вокруг Солнца равно:

$$a_3 = \omega^2 R_o \approx \frac{(6.28)^2}{9 \cdot 10^{14}} 1.5 \cdot 10^{13} = 0.6 \left[ \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \right] \quad (1.2.7)$$

Эту поправку необходимо учитывать, если рассматриваем движение космических объектов с точностью до  $10^{-4}$ .

3) Система отсчета, связанная с центром Солнца – это инерциальная система отсчета с высокой точностью. В самом деле, скорость движения Солнца  $v_c \approx 3 \cdot 10^5 \text{ м/с}$  и ускорение Солнца вокруг центра Галактики:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{9 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{20}} \sim 3 \cdot 10^{-10} \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right] \quad (1.2.8)$$

Получаем ничтожно малое ускорение, и с такой точностью центр Солнца является инерциальной системой отсчета.

### 1.3. Преобразования Галилея.

#### 1.3.1. Принцип относительности Галилея.

Принцип относительности гласит: *Все инерциальные системы отсчета (ИСО) по своим физическим свойствам эквивалентны, т.е. никакими механическими опытами, проводимыми внутри ИСО, нельзя установить покоится ли эта система отсчета или движется равномерно и прямолинейно.*

Принцип относительности утверждает, что все законы механики (природы) инвариантны во всех ИСО. Рассмотрим две ИСО: К и К' системы, изображенные на рис. 3.1. В каждой системе отсчета имеются свои тела отсчета в точках О и О' и свои часы.

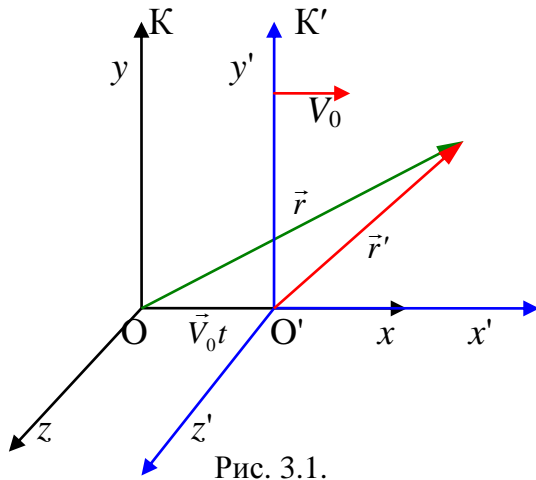


Рис. 3.1.

Любое событие с точки зрения наблюдателя из К системы характеризуется координатами и временем, пусть они равны  $(x, y, z, t)$ . Пусть с точки зрения наблюдателя из К' системы эти величины равны «штрихованным» координатам  $(x', y', z', t')$ . Найдем связь между «штрихованными» и «нештрихованными» координатами и временем.

Итак, рассмотрим преобразование координат и времени события при переходе от системы К' к системе К, если скорость системы К' равна  $\vec{V}_0$  и направлена вдоль оси x (рис. 3.1):

$$\begin{cases} x = x' + V_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (1.3.1)$$

В общем случае, когда направление скорости системы К' относительно К системы произвольно, формулу преобразования координат при переходе от системы К' к системе К можно записать в следующем виде:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}_0 t \quad (1.3.2)$$

Обратный переход от системы К к системе К' записывается:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t' = \vec{r} - \vec{V}_0 t \quad (1.3.3)$$

Отметим, что согласно принципу относительности Галилея, все механические явления в ИСО К и К' происходят одинаково. То есть движения тел отсчета в точках О и О' друг относительно друга происходят с одной и той же скоростью и в К и в К' системах:

$$V_0 = V'_0; \vec{V}_0 = -\vec{V}'_0.$$

Тогда сравнивая уравнения (1.3.2) и (1.3.3), находим, что  $t = t'$ , что уже было записано в (1.3.1). Это означает, что время «течет» одинаково во всех ИСО. Иначе говоря, равенство  $t = t'$  – условие абсолютной одновременности событий. Время *инвариантно* во всех ИСО.

Для получения преобразования скорости дифференцируем радиус-вектор материальной точки по времени  $t$  в системе К:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.3.4)$$

и дифференцируем по времени  $t'$  в системе  $K'$ :

$$\vec{v}' = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t'} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \quad (1.3.5)$$

Итак, дифференцируя (1.3.2) и (1.3.3) по времени  $t$  и учитывая, что скорость  $\vec{V}_0$  не зависит от времени, получаем *преобразование Галилея для скорости*:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{V}_0 \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{V}_0 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Рассмотрим ускорение материальной точки:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{a}' \equiv \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t'} = \frac{d\vec{v}'}{dt'} \quad (1.3.7)$$

Дифференцируя (1.3.6) по времени и учитывая, что скорость  $\vec{V}_0$  постоянна, получаем *инвариантность ускорения* в любых ИСО:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (1.3.8)$$

Таким образом, координаты и скорость материальной точки преобразуются при переходе от одной ИСО к другой, следуя преобразованиям Галилея, а ускорение остается инвариантным.

### 1.3.2. Инварианты и инвариантность законов Ньютона.

Помимо ускорения существуют и другие физические величины, которые остаются неизменными в различных ИСО, т.е. являются инвариантами. Рассмотрим важнейшие из них.

- 1) *Расстояние между двумя точками* – инвариант; что легко увидеть из (1.3.2) и (1.3.3); в самом деле имеем

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' = \Delta \vec{r}' \quad (1.3.9)$$

- 2) *Относительная скорость двух тел*  $\vec{v}_{отн}$  – инвариант; действительно, из (1.3.6) имеем

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1' = \vec{v}'_{отн}; \quad (1.3.10)$$

- 3) *Сила* всегда есть функция разности координат (парная сила, например) и относительных скоростей (например, сила трения)  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ . Поэтому сила инвариантна относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F} = \vec{F}' \quad (1.3.11)$$

Пример. Сила упругости в  $K$  системе имеет вид:  $F = -k(x - x_0)$ , где  $k$  – коэффициент упругости. В  $K'$  системе эта сила равна:  $F' = -k(x' - x'_0)$ .

Подставив преобразования координат  $x' = x + vt$  и  $x'_0 = x_0 + vt$ , получаем:  $F' = -k(x' - x'_0) = -k(x - vt - x_0 + vt) = -k(x - x_0) = F$ .

- 4) *Масса* – инвариант  $m = m'$  при переходе от одной ИСО к другой.

Отсюда получаем важный результат: *законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея*. Так, второй закон Ньютона – *основное уравнение динамики* –

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \sum_i \vec{F}_i, \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i, \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

*инвариантен в любой ИСО.*

### 1.3.3. Уравнение движения тела с переменной массой.

Получим уравнение для движения тела с переменной массой, пользуясь инвариантностью законов в различных ИСО. В качестве примера рассмотрим движение ракеты. Пусть:

- а) в момент времени  $t$  ракета имеет массу  $m$ ;
- б) присоединяемая (отделяемая) масса имеет скорость  $\vec{u}$  относительно массы  $m$ ;
- в) рассмотрим ИСО, скорость которой  $\vec{V} = \vec{v}$  совпадает со скоростью ракеты в момент времени  $t$ , такая система отсчета называется сопутствующей системой отсчета;
- г) за время от  $t$  до  $t + dt$  материальная точка приобретает импульс  $m d\vec{v}$  как за счет внешних сил  $\vec{F} dt$ , так и за счет присоединяемой (отделяемой) массы  $dm \cdot \vec{u}$ :

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt + \vec{u} dm$$

Разделив обе части на  $dt$ , получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u} \quad (1.3.13)$$

Это – *уравнение И.В. Мещерского*. Оно описывает движение тела, к которому присоединяется масса со скоростью  $\vec{u}$  (это определяется знаком “+” в уравнении (1.3.13)). В силу принципа относительности Галилея это уравнение справедливо в любой ИСО, а не только в сопутствующей ИСО, где оно было получено.

Рассмотрим частные случаи уравнения Мещерского.

А). Величину  $\vec{F}_R = \vec{u} dm/dt$  в уравнении (1.3.13) обычно называют *реактивной силой*. Пусть движущееся тело теряет массу, т.е.  $dm/dt < 0$ , и скорость выброса массы  $\vec{u}$  направлена в противоположную сторону скорости тела  $\vec{v}$ . Тогда реактивная сила есть сила ускорения (движение ракеты)  $F_R > 0$ .

Как меняется скорость ракеты, если внешняя сила равна нулю  $\vec{F} = 0$ ? Тогда уравнение Мещерского для замкнутой системы “ракета-газ” (внешние силы равны нулю, а масса  $dm$  отделяется с относительной скоростью  $u$ ) имеет вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u},$$

и запишем проекции уравнения этого уравнения на направление движения, сократив на  $dt$ :

$$m dv = -u dm$$

Если скорость истечения газов постоянна  $u$ , находим решение для скорости ракеты

$$v = -u \ln m + C$$

Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а масса равна  $m = m_0$ , то имеем:

$$v = -u \ln \frac{m}{m_0} = u \ln \frac{m_0}{m} \quad (1.3.14)$$

Это уравнение К.Э. Циолковского.

Б). Если скорость  $\vec{u} = 0$ , то  $\vec{F}_R = 0$  и уравнение похоже на основное уравнение динамики, но только с массой зависящей от времени  $m = m(t)$ :

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (1.3.15)$$

Пример такого движения: движение цистерны, из которой выливается вода.

В). Рассматривая случай, когда  $\vec{u} = -\vec{v}$  (т.е. присоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета или отделяемая масса становится неподвижной в этой системе отсчета), имеем:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1.3.16)$$

т.е. получили основное уравнение динамики для тела с переменной массой. Пример такого движения: движущаяся платформа, на которую сыплется песок из неподвижного бункера.

---

Примечание 1. Иван Всеволодович Мещерский, 1859-1935, русский и советский механик, с 1902 года профессор, заведующий кафедрой механики Политехнического института;

Константин Эдуардович Циолковский, 1857-1935, русский и советский философ, изобретатель и школьный учитель, основоположник теоретической космонавтики

---

## 1.4. Закон сохранения импульса. Сохранение массы.

### 1.4.1. Импульс (количество движения).

Импульс частицы массы  $m$  определяется:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.4.1).$$

где  $\vec{v}$  – скорость частицы. Импульс системы материальных точек равен сумме импульсов каждой из точек:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots = \sum_i \vec{p}_i \quad (1.4.2)$$

Для дальнейшего введем понятие замкнутой системы. *Замкнутая система* – совокупность материальных точек (или тел), взаимодействующих друг с другом, но не взаимодействующих с другими (внешними) телами. Понятие замкнутой (иначе изолированной) системы справедливо только в ИСО, иначе в другой, неинерциальной системе возникают дополнительные силы.

Важнейший экспериментальный закон – *закон сохранения полного импульса* замкнутой системы во времени:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = const, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (1.4.3)$$

Или иначе в проекциях имеем:

$$p_x = const, \quad p_y = const, \quad p_z = const \quad (1.4.4)$$

Закон сохранения импульса – следствие *однородности пространства*. Иначе, если замкнутую систему перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе последующих явлений.

### 1.4.2. Столкновение двух частиц.

Пусть замкнутая система состоит из двух материальных точек, которые сталкиваются друг с другом. В любой момент времени импульс системы сохраняется:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const \\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Это уравнение верно для упругих и неупругих ударов. Для абсолютно неупругих ударов массы сталкивающихся тел объединяются, поэтому в правой части уравнения (1.4.5) можно записать импульс объединенного тела  $(m_1 + m_2)\vec{v}'$ . Введем изменение скоростей  $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 - \vec{v}_1$ ,  $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 - \vec{v}_2$  за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2 = 0 \quad (1.4.6)$$

или по модулю получаем

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Изменение скоростей обратно пропорционально массам. Рассмотрим изменение скоростей частиц  $\Delta \vec{v}_1$  и  $\Delta \vec{v}_2$  за малый промежуток времени  $\Delta t$ . Делим обе части уравнения (1.4.6) на малый промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \quad (1.4.7)$$

Из уравнения (1.4.6) видно, что сообщить одно и то же ускорение большому телу значительно труднее, чем маленькому. Отсюда получаем известное определение *массы как меры инертности тела*. С другой стороны, равенство (1.4.7) определяет третий закон Ньютона.

### 1.4.3. Сохранение массы в процессах столкновения.

В релятивистской механике масса связана с энергией:

$$E = mc^2$$

где  $c$  – скорость света (об этом соотношении подробнее далее в Главе 2), и, в принципе, получаем, что масса системы частиц зависит от энергии столкновения. Так, масса составной частицы может оказаться меньше суммарной массы отдельных частиц. Это проявление, так называемого, дефекта масс, когда часть массы переходит в энергию связи составной частицы.

Однако в классической механике подобной связи энергии и массы нет, поскольку масса взаимодействующих частиц сохраняется в процессах столкновения и взаимодействия. Это обстоятельство можно доказать, исходя из принципа относительности Галилея и закона сохранения импульса (кстати, уже ранее в первом пункте §1.4. мы воспользовались тем, что масса постоянна).

Рассмотрим *абсолютно неупругое столкновение* двух частиц в ИСО. Именно неупругое взаимодействие сопровождается наибольшим изменением энергии движения, и оно, скорее всего, должно приводить к изменениям массы. Итак, в системе  $K$  записываем закон сохранения импульса до столкновения 2-х частиц массами  $m_1$  и  $m_2$  и имеющих скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  и после столкновения:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m \vec{v} \quad (1.4.8)$$

где  $m$  – масса составной частицы,  $\vec{v}$  – ее скорость. В системе  $K'$ , которая движется со скоростью  $\vec{V}_0$  относительно системы  $K$ , закон сохранения импульса имеет вид:

$$m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m \vec{v}' \quad (1.4.9)$$

Запишем преобразования скорости при переходе из  $K$ - системы в  $K'$ - систему:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_0, \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_0, \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_0, \quad (1.4.10)$$



Далее подставляя (1.4.10) в (1.4.9) и учитывая (1.4.8), получаем:

$$m_1 \vec{V}_0 + m_2 \vec{V}_0 = m \vec{V}_0$$

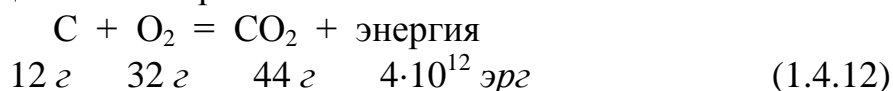
Сокращая на скорость  $\vec{V}_0$  системы К', имеем:

$$m_1 + m_2 = m \quad (1.4.11)$$

Это уравнение дает условия аддитивности массы и ее сохранения. *Аддитивность и закон сохранения массы* верны лишь приближенно, в меру справедливости преобразования Галилея.

С другой стороны в силу релятивистского соотношения, связывающего энергию и массу  $E = mc^2$ , всякие неупругие процессы в системе частиц должны приводить к изменению ее массы. Рассмотрим, с какой точностью можно считать справедливым закон сохранения массы в других процессах, в которых выделяется или поглощается энергия.

*Химические реакции.* М.В. Ломоносов провозгласил: сумма масс вещества до реакции равна сумме масс после реакции. Проверим, насколько верно это утверждение, ведь в химических реакциях выделяется энергия, следовательно, в силу взаимосвязи энергии и массы это сохранение массы приближенное. Рассмотрим конкретный пример химической реакции горения, в которой выделяется энергия:



Тогда при таких количествах вещества изменение массы составляет:

$$\Delta m = E/c^2 = 4 \cdot 10^{12} / 9 \cdot 10^{20} \approx 0.45 \cdot 10^{-8} \text{ г}$$

Итак, относительное изменение массы продуктов до и после реакции равно:

$$\frac{\Delta m}{m} \leq 10^{-10} \quad (1.4.13)$$

Это маленькая величина, т.е. с очень большой точностью масса в химических реакциях сохраняется.

*Ядерные реакции.* В ядерной физике происходят реакции с очень большим энерговыделением, при этом относительное изменение массы  $\Delta m/m$  – заметная величина. Это явление приводит к, так называемому, дефекту масс в атомных ядрах и элементарных частицах. Рассмотрим это явление подробнее в Главе 2.

---

*Примечание 1.* Михаил Васильевич Ломоносов, 1711–1765, русский учёный-естествоиспытатель, профессор химии (1745), действительный член Санкт-Петербургской Императорской академии наук (1745) и почётный член Королевской Шведской и Болонской академий наук.

---



## 1.5. Центр инерции.

### 1.5.1. Центр инерции системы частиц.

*Центр инерции* (сокращения: ЦИ или ЦМ – *центр масс*) системы частиц есть точка, координаты которой определяются средним значением координат частиц, взятых с весовыми множителями, пропорциональными их массам. Так,  $X$  – координата ЦИ системы частиц определяется:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad (1.5.1)$$

Аналогично определяются другие координаты  $Y$  и  $Z$ .

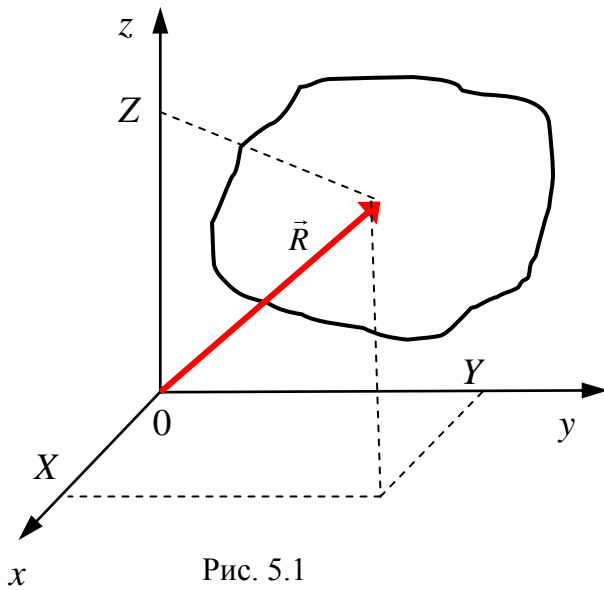


Рис. 5.1

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots},$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad (1.5.1a)$$

Тогда в векторной форме радиус-вектор, определяющий положение центра инерции  $\vec{R}$ , может быть записан:

$$\vec{R} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z \quad (1.5.2)$$

И учитывая, что координаты точек (частиц тела) могут быть записаны в векторной форме

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z,$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z, \dots$$

из (1.5.1)-(1.5.2) получаем:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{M} \quad (1.5.3)$$

где  $M$  – полная масса системы  $N$  частиц.

Когда система материальных точек имеет непрерывное распределение масс (жидкое или твердое тело), то тело разбивается на маленькие кусочки массой  $\Delta m_i = \rho \Delta V_i$  ( $\rho$  – плотность вещества,  $\Delta V_i$  – элементарный объем  $i$ -го кусочка) и центр масс такой системы определяется через предел:

$$\vec{R} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M} \int_{V_0} \vec{r} \cdot dm = \frac{1}{M} \int_{V_0} \vec{r} \rho dV, \quad (1.5.3a)$$

где  $M$  – полная масса тела. Интеграл от векторной величины разбивается на интегралы по проекциям на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и каждый из них вычисляется отдельно в пределах объема тела  $V_0$ .

Продифференцируем обе части уравнения (1.5.3) по времени и получим скорость перемещения ЦИ, выраженную через скорости отдельных частиц (массы материальных точек неизменны):

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (1.5.4)$$

Здесь  $\vec{P}$  – полный импульс системы, т.е. скорость Центра Инерции есть полный импульс системы, деленный на полную массу системы. Отсюда получаем, что Центр Инерции замкнутой системы обладает замечательным свойством: *скорость ЦИ замкнутой системы постоянна* (поскольку полный импульс сохраняется), тогда как отдельные частицы движутся с изменяющимися скоростями. Итак, имеем:

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (1.5.5)$$

Физический смысл соотношения (1.5.5): *полный импульс системы можно рассматривать как импульс одной материальной точки, находящейся в центре инерции системы и имеющей массу, равную сумме масс всех частиц.*

### 1.5.2. Система Центра Инерции.

*Система Центра Инерции* (СЦИ) – это система отсчета, начало координат которой находится в точке центра инерции. Эти системы играют важную роль в механике. В замкнутой системе частиц СЦИ является инерциальной системой отсчета. Переход в СЦИ обычно приводит к упрощению задачи, т.к. при рассмотрении в ней системы частиц скорость центра инерции равна нулю  $\vec{V} = 0$  и, значит, исключается движение частиц как целого, при этом остается только *относительное движение частиц*. В СЦИ становятся ясными свойства внутренних процессов, проходящих в системе частиц.

Пример: атом водорода состоит из протона (масса  $M$ , координата  $\vec{r}_N$ ) и электрона (масса  $m$ , координата  $\vec{r}_e$ ). Координата центра инерции запишем по определению

$$\vec{R} = \frac{M \vec{r}_N + m \vec{r}_e}{M + m} \quad (1.5.6)$$

Перейдем в СЦИ и определим координаты протона и электрона в этой системе отсчета. Получаем следующие координаты ядра и электрона:

$$\vec{r}'_N = \vec{r}_N - \vec{R} = \frac{m}{m + M} (\vec{r}_N - \vec{r}_e), \quad \vec{r}'_e = \vec{r}_e - \vec{R} = \frac{M}{m + M} (\vec{r}_e - \vec{r}_N) \quad (1.5.7)$$

Таким образом, в СЦИ координаты обеих частиц выражаются через вектор  $\vec{r} = (\vec{r}_N - \vec{r}_e)$ , равный относительному расстоянию между электроном и ядром. Атом как целое покоится, а все движение электрона и ядра внутри системы описывается этой относительной координатой.

Итак, для замкнутых систем, состоящих из большого числа частиц, переход в систему центра инерции уменьшает число независимых координат частиц, исключая координаты, определяющие движение системы как целого.

## 1.6. Основные задачи динамики.

### 1.6.1. Основное уравнение динамики.

В параграфе 1.2 законы Ньютона были рассмотрены как законы, основанные на экспериментальных измерениях и являющиеся обобщением полученных данных. Во втором законе Ньютона сила и параметры движения (координата, скорость, ускорение) определялись независимо. Однако этот закон можно рассматривать иначе и силу вводить как величину, определяющую скорость изменения импульса, т.е. как причину нарушения закона сохранения импульса в неизолированной системе. В самом деле, если система изолирована (замкнута), то имеем:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \quad (1.6.1)$$

Если система не изолирована (или рассматриваем отдельные тела внутри замкнутой системы), то импульс системы (тела) не сохраняется:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \neq 0 \quad \text{и} \quad \vec{P} \neq \text{const}. \quad (1.6.2)$$

Функцию координат и скорости материальной точки, определяющую производную ее импульса по времени называют *силой*. Поэтому *основное уравнение динамики* или 2-ой закон Ньютона записывается

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) \\ \text{или} \\ m\vec{a} &= \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Это векторное уравнение, поэтому на самом деле это три уравнения для трех проекций

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dP_z}{dt} = F_z. \quad (1.6.4)$$

Это общее определение силы, однако конкретное содержание эти уравнения получают лишь тогда, когда определена эта функция  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ . Установление таких зависимостей является основной задачей динамики.

В ряде конкретных задач в силу независимости движения по осям  $x, y, z$ , могут сохраняться некоторые проекции импульса  $\vec{P}$ , тогда как для других проекций записываются уравнения типа (1.6.3) и (1.6.4).

**Пример 1:** Рассмотрим сохранение компоненты импульса по оси  $x$ :  $dP_x/dt = 0$ ,  $P_x = const$ . Получаем, что проекция силы на ось  $x$   $F_x$  равна нулю, а проекция скорости  $v_x = const$ . Т.е. если проекция силы равна нулю, то тело сохраняет движение с постоянной скоростью вдоль оси  $x$ . Это фактически первый закон Ньютона. Итак, получаем, что 1-ый закон Ньютона является как бы следствием 2-го закона Ньютона. Однако имеет смысл еще раз напомнить, что выделение 1-го закона Ньютона в отдельный закон необходимо, т.к. с его помощью определяется инерциальная система отсчета, т.е. такая система отсчета (ИСО), в которой справедлива запись 2-го закона Ньютона в виде (1.6.3).

**Пример 2:** Рассмотрим 2 тела в замкнутой системе, при этом полный импульс тел сохраняется:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const . \quad (1.6.5)$$

Дифференцируя по времени, мы имеем:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \text{или} \quad m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \quad (1.6.6)$$

Отсюда получаем 3-ий закон Ньютона

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (1.6.7)$$

В силу того, что в замкнутой системе  $d\vec{P}/dt = 0$  получаем важное следствие, что сумма внутренних сил в замкнутой системе равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_{i(\text{int})} = 0 \quad (1.6.8)$$

Это условие позволяет нам отделять **движение системы тел как целого от внутреннего движения** тел относительно центра инерции.

### 1.6.2. Основные задачи динамики.

Движение тел определяется вторым законом Ньютона, при этом существует два основных типа задач динамики:

- 1) Известна зависимость координаты от времени (траектория частицы)  $\vec{r}(t)$ , и тогда находим силу  $\vec{F}$ .
- 2) Известна сила  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ , и тогда находим траекторию частицы  $\vec{r}(t)$ .

**Первая задача** решается прямым дифференцированием координаты по времени. Например, зависимость координаты от времени для тела, брошенного со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту в однородном поле тяжести, равна:

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \vec{e}_x + \left( v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \right) \vec{e}_z \quad (1.6.9)$$

Здесь единичные вектора  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_z$  направлены вдоль поверхности и перпендикулярно поверхности Земли, соответственно,  $g$  – ускорение свободного падения. Дифференцируя (1.6.9) дважды по времени, получаем

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0 \cdot \vec{e}_x - mg \vec{e}_z = -mg \vec{e}_z \quad (1.6.10)$$

Получаем, как и следовало ожидать, силу тяжести Земли.

Еще один пример: пусть изменение координат частицы со временем выражается следующим соотношением:

$$\vec{r}(t) = \alpha t^2 \vec{e}_x + \beta (1 - e^{-kt}) \vec{e}_y + \gamma t \vec{e}_z \quad (1.6.11)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $k$  – постоянные известные величины. Сила, действующая на тело массы  $m$  с такими координатами, равна:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 2\alpha m \vec{e}_x - \beta k^2 m e^{-kt} \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z = m (2\alpha \vec{e}_x - \beta k^2 e^{-kt} \vec{e}_y) \quad (1.6.12)$$

Действующая сила имеет положительную постоянную составляющую по оси  $x$ , и убывающую (по экспоненте) отрицательную составляющую по оси  $y$ . Вдоль оси  $z$  сила равна нулю.

Вторая задача решается интегрированием, при этом используются начальные условия на положение и скорость частицы. Для примера рассмотрим одномерное движение, когда внешняя сила, действующая на тело массы  $m$ , зависит только от времени действия  $t$  и определяется следующим выражением:

$$F(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \quad (1.6.13)$$

Пусть нас интересует зависимость пути от времени, если в начальный момент времени  $t = 0$ , координата его равна нулю  $x(t=0) = 0$ , а скорость  $v(t=0) = v_0$ . Уравнение динамики приобретает вид:

$$F(t) = A \cdot e^{-\alpha t} = m \frac{dv}{dt} \quad (1.6.14)$$

Решаем это уравнение методом разделения переменных: все, что зависит от скорости, переносим в одну сторону уравнения, а все, что зависит от времени, – в другую. Тогда можно взять неопределенный интеграл от обеих частей уравнения и добавить произвольную постоянную в одну из сторон уравнения:

$$\begin{aligned} m dv &= A e^{-\alpha t} dt \\ m \int dv &= A \int e^{-\alpha t} dt + C \\ mv &= -\frac{A}{\alpha} e^{-\alpha t} + C \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Константа  $C$  определяется из начального условия, что в начальный момент времени скорость равна  $v(t=0) = v_0$ :

$$mv_0 = -\frac{A}{\alpha} + C \quad \text{и} \quad C = mv_0 + \frac{A}{\alpha} \quad (1.6.16)$$

Далее используем определение скорости и снова разделяем переменные:

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m} e^{-\alpha t}$$

$$dx = \left( v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m} e^{-\alpha t} \right) dt$$

Интегрируем обе части уравнения и добавляем новую константу:

$$x = \int \left( v_0 + \frac{A}{\alpha m} - \frac{A}{\alpha m} e^{-\alpha t} \right) dt + C_1 = \left( v_0 + \frac{A}{\alpha m} \right) t + \frac{A}{\alpha^2 m} e^{-\alpha t} + C_1 \quad (1.6.17)$$

Константа  $C_1$  определяется из начального условия для координаты  $x(t=0) = 0$ :

$$0 = \frac{A}{\alpha^2 m} + C_1 \quad \text{и} \quad C_1 = -\frac{A}{\alpha^2 m} \quad (1.6.18)$$

Окончательно получаем, что  $x$  – ая координата частицы под действием силы (1.6.13) меняется со временем по закону:

$$x = \left( v_0 + \frac{A}{\alpha m} \right) t + \frac{A}{\alpha^2 m} e^{-\alpha t} - \frac{A}{\alpha^2 m} = \left( v_0 + \frac{A}{\alpha m} \right) t + \frac{A}{\alpha^2 m} (e^{-\alpha t} - 1) \quad (1.6.19)$$

Нетрудно привести и разобрать также другие примеры движения частицы под действием силы, зависящей от времени.

Стоит отметить, что чаще в задачах необходимо определять траекторию движения, когда сила зависит от координат или/и скорости движения. В этом случае задача также решается путем интегрирования, но пути решения уравнений динамики могут быть различны для каждой конкретной ситуации.

## 1.7. Работа и энергия.

### 1.7.1. Работа силового поля. Мощность.

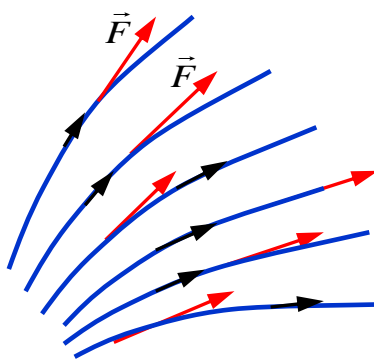


Рис. 7.1.

Если на материальную точку (частицу) в каждой точке пространства действует сила, то всю совокупность сил называют *силовым полем*. В общем случае величина силы может меняться при переходе от одной точки пространства к другой и, кроме того, зависеть от времени. Силовое поле можно изображать в виде силовых линий, построенных в пространстве, касательная к которым определяет направление действия силы в данной точке (см рис. 7.1).

Рассмотрим движение материальной точки в

силовом поле  $\vec{F}$  (рис. 7.1). Пусть перемещение в поле сил равно  $d\vec{l}$ . Тогда *элементарная работа*, совершаемая силой  $\vec{F}$ , определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения:

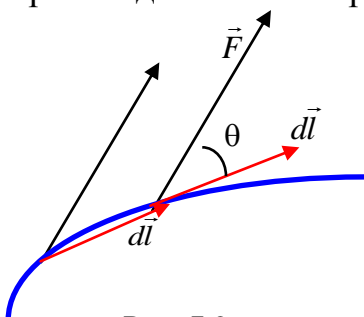


Рис. 7.2.

$$\delta A = F \cdot dl \cdot \cos \theta = F_l \cdot dl = (\vec{F}, d\vec{l})$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x dl_x + F_y dl_y + F_z dl_z \quad (1.7.1)$$

где  $\theta$  – угол между направлением действующей силы и вектором перемещения (рис. 7.2), а  $F_l$  – проекция силы на направление перемещения.

Работа – скалярная величина. В зависимости от угла между силой и перемещением работа может иметь разные знаки:

$$\left. \begin{array}{l} \theta < \pi/2 \\ \theta = \pi/2 \\ \theta > \pi/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta A > 0 \\ \delta A = 0 \\ \delta A < 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} - \text{работа совершена силой} \\ - \text{работа силой не совершается} \\ - \text{работа совершена против силы} \end{array} \right.$$

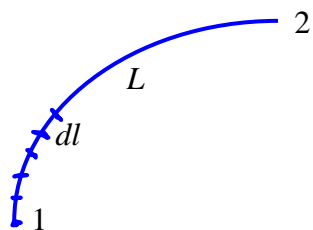


Рис. 7.3.

Рассмотрим работу на конечном пути от точки 1 до точки 2 (см траекторию частицы на рис.7.3). Разобьем весь путь  $L$  от точки 1 до точки 2 на элементарные перемещения  $dl$ , на каждом из которых силу можно считать постоянной. Работа аддитивная величина, т.е. работа на конечном участке пути равна алгебраической сумме работ, совершенных над частицей на таких элементарных перемещениях:

$$A_{12} = \sum_i \delta A_i = \sum_i (\vec{F}_i, d\vec{l}_i) = \sum_i F_i dl_i \cos \theta_i \quad (1.7.2)$$

Устремив к нулю длины перемещений, а их число – к бесконечности, получим предел суммы, который есть не что иное, как интеграл, вычисляемый по пути движения частицы, т.е. иначе, *интеграл по траектории*:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L F_l dl \quad (1.7.3)$$

Такой интеграл по траектории еще называют криволинейным интегралом. Итак, работа – криволинейный интеграл вектора  $\vec{F}$  вдоль траектории  $L$ . Этот интеграл дает по определению работу силы  $F$  при перемещении частицы по траектории  $L$ .

Графическая иллюстрация представлена на рис. 7.4. На графике

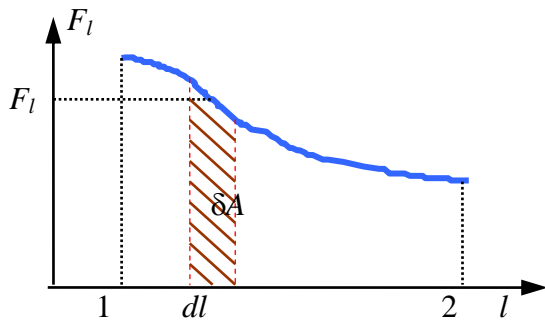


Рис.7.4.

отложена проекция силы на направление движения  $F_l$  в зависимости от положения частицы на траектории  $L$ . Площадка под кривой на расстоянии элементарного перемещения  $dl$  равна элементарной работе  $\delta A = F_l dl$ . Работа на всем участке 1-2 равна площади под всей кривой от точки 1 до точки 2.

Рассмотрим несколько примеров.

а). Рассмотрим постоянную силу  $F = const$ . На рис. 7.5 эта сила показана пунктирной линией. Работа постоянной силы  $A$  прямо пропорциональна, пройденному расстоянию  $L$  (на рис.7.5 – красная линия). Пример такой работы: работа силы тяги против постоянной силы трения.

б). Рассмотрим силу упругости, которая пропорциональна смещению из положения равновесия  $x$ :

$$F = - kx,$$

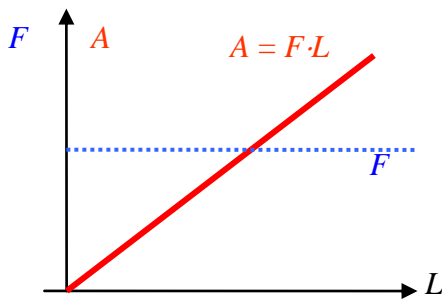


Рис. 7.5.

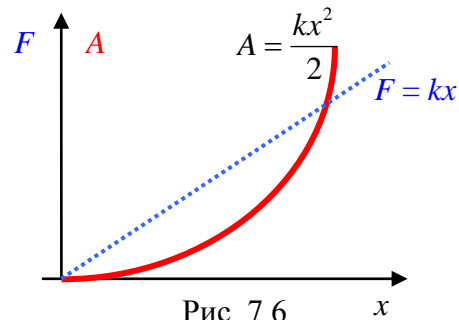


Рис. 7.6.

где  $k$  – постоянная упругости. Сейчас нас интересует только модуль силы упругости  $F = kx$ . На рисунке 7.6 она изображается прямо пропорциональной зависимостью от  $x$  (пунктирная линия). Полная работа силы упругости определяется интегралом

$$A = \int_0^x kx' dx' = \frac{kx^2}{2} \quad (1.7.4)$$

т.е. работа зависит от пути перемещения квадратично (парабола – красная линия на рис. 7.6).

Примечание 1. Элементарная работа  $\delta A$  – это работа силы на бесконечно малом пути, и она не есть полный дифференциал какой-либо функции, поскольку определяется именно переходом из одной точки в другую. Иначе говоря:

$$\delta A \neq d(A) \quad \text{и} \quad \int_1^2 \delta A = A_{12} \neq A_2 - A_1.$$



Однако, в дальнейшем мы часто будем писать  $dA$  вместо  $\delta A$ , подчеркивая бесконечно малую работу и по-прежнему понимая, что для работы интеграл по пройденному пути равен работе на этом пути  $\int_1^2 dA = A_{12}$ .

### Единицы работы:

Система СИ (основные единицы: м, кг, с):

$$\text{единица работы } 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$$

Система СГС (основные единицы: см, г, с):

$$\text{единица работы } 1 \text{ эрг} = 1 \text{ Дн} \cdot 1 \text{ см} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^2 / \text{с}^2$$

Связь между единицами работы:  $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$ ,

Внесистемные единицы работы – электрон-вольт, килоэлектрон-вольт и т.д.:

$$1 \text{ эВ} = 1.602 \cdot 10^{-12} \text{ эрг},$$

$$1 \text{ КэВ} = 10^3 \text{ эВ},$$

$$1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ},$$

$$1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ},$$

$$1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ},$$

*Работа равнодействующей силы равна сумме работ* каждой отдельной силы. Так, если сила, действующая на тело, может быть представлена в виде суммы двух сил  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , то работа полной силы равна:

$$dA = (\vec{F}, d\vec{l}) = (\vec{F}_1, d\vec{l}) + (\vec{F}_2, d\vec{l}) = dA_1 + dA_2 \quad (1.7.5)$$

Работа, отнесенная к единице времени, – *мощность силы*:

$$W = \frac{dA}{dt} \quad (1.7.6)$$

Обычные единицы мощности: в системе СГС –  $\text{Эрг/с}$ , единица мощности в СИ имеет специальное название Ватт –  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$ . Зная мощность, можно получить работу за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$dA = W \cdot dt,$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} W(t) \cdot dt \quad (1.7.7)$$

Весьма полезно выражение мощности через мгновенную скорость тела  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ :

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F}, d\vec{l})}{dt} = \left( \vec{F}, \frac{d\vec{l}}{dt} \right) \equiv \left( \vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (\vec{F}, \vec{v}) \quad (1.7.8)$$

### 1.7.2. Кинетическая энергия.

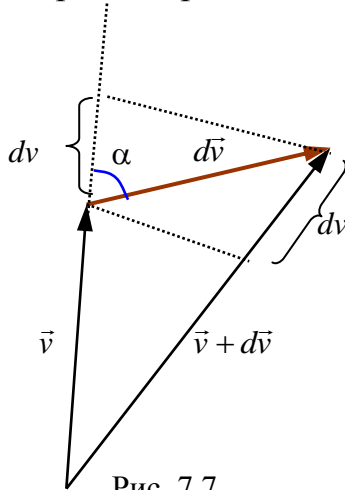
Преобразуем выражение для работы, пользуясь основным уравнением динамики (1.6.3) и выражением для элементарного перемещения  $d\vec{l} = \vec{v} dt$ :

$$A = \int_L (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_L (\vec{F}, \vec{v}) dt = \int_L \left( \frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{v} \right) dt = \int_L (\vec{v}, d\vec{p}) \quad (1.7.9)$$

Скалярное произведение под интегралом можно представить в виде:

$$\vec{v}d\vec{p} = m\vec{v}d\vec{v} = mv dv \quad (1.7.10)$$

Заметим, что это соотношение (1.7.10) сразу не очевидно, т.к. вектор скорости  $\vec{v}$  и вектор ее изменения  $d\vec{v}$  находятся под углом друг к другу. Однако из графической иллюстрации (см рис.7.7), где  $\alpha$  – угол между вектором скорости и вектором ее изменения, можно увидеть следующее:



$$(\vec{v}, d\vec{v}) = v \cdot |d\vec{v}| \cos \alpha = v \cdot dv$$

где  $dv$  – элементарное приращение **длины вектора скорости**, заметим при этом, что  $|d\vec{v}| \neq dv$ .

Соотношение (1.7.10) получить и другим способом. Продифференцируем обе части очевидного соотношения:  $(\vec{v}, \vec{v}) = v^2$  и тогда имеем

$$2(\vec{v}, d\vec{v}) = 2v dv$$

Итак, подставляя (1.7.10) в (1.7.9) и рассматривая работу на конечном участке пути

от точки 1 до точки 2, получаем:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{v}, d\vec{p}) = m \int_1^2 v dv = m \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad (1.7.11)$$

Введем **кинетическую энергию** как величину характеризующую движение тела в данной системе отсчета:

$$E_{kin} \equiv K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (1.7.12)$$

Таким образом, из (1.7.11) делаем вывод: работа силы при перемещении материальной точки из положения 1 в 2 равна приращению кинетической энергии этой точки

$$A_{12} = K_2 - K_1 \quad (1.7.13)$$

Кинетическая энергия **аддитивна**. Для системы частиц кинетическая энергия всей системы материальных точек равна сумме кинетических энергий отдельных частиц:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} \quad (1.7.14)$$

Отметим важный момент: **кинетическая энергия системы определяется работой не только внешних, но и внутренних сил**. Этим кинетическая энергия отличается от импульса, который меняется только за счет внешних сил (внутренние силы не меняют импульса всей системы).

Пример: система двух сталкивающихся зарядов (рис. 7.8) – кинетическая энергия системы меняется, а импульс всей системы остается постоянным:



Рис. 7.8.

Можно также записать преобразование кинетической энергии при переходе от одной ИСО к другой:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}' + \vec{V})^2 = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + m\vec{v}' \cdot \vec{V} = K' + \frac{mV^2}{2} + \vec{p}' \cdot \vec{V} \quad (1.7.15)$$

Видно из (1.7.15), что *кинетическая энергия не инвариантна* относительно преобразований Галилея.

## 1.8. Консервативные и неконсервативные силы.

### 1.8.1. Определение консервативных сил.

Все силы в макроскопической механике делятся на *консервативные* и *неконсервативные*.

Начнем рассмотрение с примера работы силы тяжести:

$$mg = \text{const},$$

Пусть материальное тело переходит из точки 1, находящейся на высоте  $z_1$ , в точку 2 на высоте  $z_2$  (рис. 8.1). Вычислим сначала работу силы тяжести вдоль прямой линии 1-2 (зеленая линия на рис. 8.1):

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 mg \cdot \cos \alpha \cdot dl = mg \cos \alpha L_{12} = mgh = mg(z_1 - z_2)$$

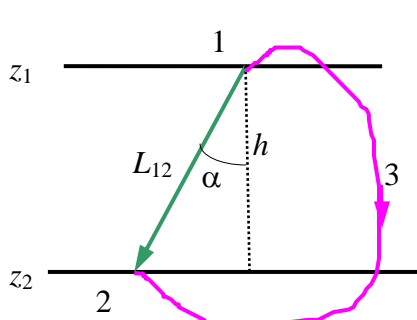


Рис. 8.1.

где  $h = z_1 - z_2 = L_{12} \cos \alpha$ .

Однако же эта формула справедлива при перемещении вдоль произвольной кривой, например, по пути 1-3-2. Это легко увидеть, если разбить путь на маленькие участки, считая их прямолинейными. Тогда элементарная работа на таких малых участках равна:

$$dA = mg \cos \alpha dl,$$

где теперь угол  $\alpha$  – угол между касательной к траектории и вертикалью (силой тяжести) в каждой точке траектории. Суммируя по всем участкам и учитывая, что  $\cos \alpha dl = dz$ , получаем ту же формулу для полной работы силы тяжести, что и выше:

$$A = mg(z_1 - z_2) = U_1 - U_2 \quad (1.8.1)$$

Здесь мы ввели функцию  $U = mgz$ , зависящую только от положения точки. Итак, работа силы тяжести не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.

**Определение:** *Консервативными называются силы, работа которых не зависит от пути перемещения, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.*

Таким образом, работа консервативных сил не зависит от пути перехода.

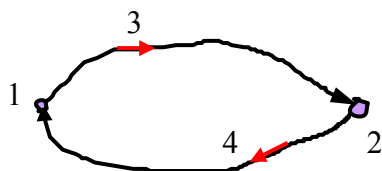


Рис.8.2.

Сила тяжести – консервативная сила.

Можно ввести другое определение консервативных сил:

*работа консервативных сил по замкнутому контуру равна 0.*

Легко увидеть, что эти определения эквивалентны, если рассмотрим работу по последовательному перемещению по произвольной замкнутой траектории 1-3-2-4-1 (рис.8.2). В самом деле, для консервативной силы имеем:

$$A_{132} = A_{142}$$

С другой стороны работа меняет знак при изменении направления обхода, т.е.  $A_{142} = -A_{241}$ . Тогда и получаем:

$$A_{132} + A_{241} = 0 \quad (1.8.2)$$

что и доказывает, что работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю.

### 1.8.2. Поле центральных сил.

Это важный пример силового поля. Сила  $\vec{F}$  называется *центральной*, если она направлена к одной и той же точке (или от нее) и зависит только от расстояния  $r$  до этой точки, которую называют *силовым центром*:

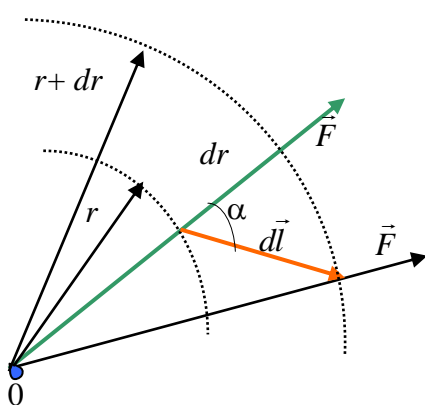


Рис. 8.3.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r) = F(r) \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \vec{e}_r \quad (1.8.3)$$

где  $\vec{e}_r$  – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора. Формула (1.8.3) действительна в системе координат, начало которой помещено в силовой центр (рис. 8.3).

Пусть под действием силы точка перемещается на величину  $d\vec{l}$ . Тогда элементарная работа в поле центральных сил равна:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F \cdot dl \cos \alpha$$

Из рис. 8.3 легко увидеть, что

$$dl \cdot \cos \alpha = dr,$$

где  $dr$  – приращение абсолютного радиуса. Таким образом, элементарная работа также зависит только от абсолютного значения и приращения  $r$ :

$$dA = F(r)dr \quad (1.8.4)$$

Полная работа, как и в случае однородной силы тяжести, может быть записана как разность двух функций в начальной и конечной точках:

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)dr = U(r_1) - U(r_2) \quad (1.8.5)$$

Примеры такого силового поля или взаимодействия: гравитационное  $F = Gm_1m_2/r^2$  и кулоновское  $F = kq_1q_2/r^2$  взаимодействия.

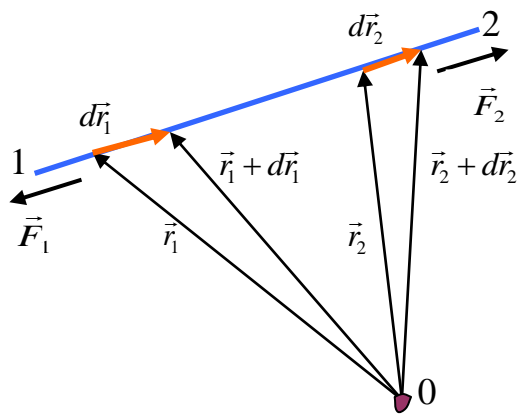


Рис.8.4.

Если имеется система 2 частиц, взаимодействующих по этим законам, тогда силы зависят только от модуля относительного расстояния  $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ . Силы подчиняются 3-му закону Ньютона  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -\vec{F}$  и направлены вдоль прямой 1-2, соединяющей эти точки (см рис. 8.4). В общем случае перемещаются и материальная точка, и силовой центр, тогда элементарная работа при их перемещении:

$$dA = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 = \vec{F}(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} d\vec{r}$$

Здесь  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  вектор относительного расстояния. Поскольку сила направлена по вектору относительного расстояния, то работа равна:

$$dA = Fdr$$

т.е. записывается в виде алгебраического произведения (вместо скалярного произведения, как и в (1.8.4)). При этом полная работа записывается таким же интегралом (1.8.5). Таким образом, значение этого интеграла зависит только от относительного перемещения взаимодействующих точек и не зависит от абсолютных перемещений каждой из точек в отдельности.

**Выводы:** работа центральных сил не зависит от пути перехода. *Все центральные силы консервативны.*

### 1.8.3. Неконсервативные силы.

К неконсервативным силам относятся все остальные силы. Среди них выделяют *диссипативные* и *гироскопические* силы.

#### 1) Диссипативные силы.

К диссипативным силам относятся, прежде всего, силы трения, пропорциональные силе нормального давления  $N$ :

$$F_{mp} = kN$$

где  $k$  – коэффициент сопротивления, а также любые силы сопротивления при движении тел в среде. Для жидкостей и газов обычно сила сопротивления пропорциональна скорости частицы  $F_c \sim v$ :

$$\vec{F}_{cонp} = -r\vec{v},$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления среды. Важно, что для *замкнутой системы работа диссипативных сил всегда отрицательна*, т.к. действие силы всегда направлено против вектора перемещения или скорости.

$$A_{mp} = \int \vec{F}_{mp} d\vec{l} = -\int F_{mp} dl < 0 \quad (1.8.6)$$

Примечание 1. Для незамкнутой системы сила трения может быть источником движения, т.е. их работа может быть положительна.

Итак, получаем определение диссипативных сил: диссипативными называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в *замкнутой* системе всегда отрицательна.

## 2) Гироскопические силы.

Гироскопические силы зависят от скорости движения материальной точки  $\vec{v}$  и действуют перпендикулярно к направлению этой скорости. *Работа гироскопических сил всегда равна нулю.*

Приведем примеры гироскопических сил. К ним относится, например, сила Лоренца. Сила Лоренца – это сила, действующая на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле индукции  $\vec{B}$

$$\vec{F}_{лор} = q[\vec{v}, \vec{B}] \quad \text{в системе СИ} \quad (1.8.7a)$$

$$\vec{F}_{лор} = \frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{B}] \quad \text{в системе СГС} \quad (1.8.7б)$$

Здесь  $c$  – скорость света, квадратные скобки означают векторное произведение векторов. Векторное произведение дает новый вектор, который перпендикулярен векторам в квадратных скобках и имеет длину:

$$|\vec{F}_{лор}| = qvB \cdot \sin \alpha, \quad \text{или} \quad |\vec{F}_{лор}| = \frac{q}{c} vB \cdot \sin \alpha \quad (1.8.8)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

В классической механике при описании движения относительно неинерциальной системы отсчета вводится *сила Кориолиса* – сила, возникающая при движении тела со скоростью  $\vec{v}_{отн}$  относительно вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  системы отсчета:

$$\vec{F}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\omega}] \quad (1.8.9)$$

Модуль вектора силы Кориолиса равен:

$$|\vec{F}_{\text{кор}}| = 2mv_{\text{отн}} \omega \cdot \sin \alpha \quad (1.8.10)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}_{\text{отн}}$  и  $\vec{\omega}$ .

Геометрический и физический смысл векторного произведения, а также гироскопические силы будут рассмотрены подробнее ниже в курсе физики.

## 1.9. Потенциальная энергия. Потенциал поля.

### 1.9.1. Понятие потенциальной энергии.

Если поле сил (сила, определенная в каждой точке пространства) не зависит от времени, то такое поле сил называется *стационарным*.

Определение: *стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между любыми двумя точками не зависит от выбора пути, а только от положения самих этих точек, называется потенциальным полем, а силы – консервативными.*

Верно и обратное, если работа сил на замкнутом пути равна 0, то силовое поле потенциально.

Для потенциального поля можно ввести понятие *потенциальной энергии*. В системе, где действуют консервативные силы, зависящие только от конфигурации (взаимного расположения тел), всякая работа связана с изменением конфигурации. Работа таких сил равна нулю, если все тела в системе вернулись в исходную конфигурацию. Тела, находящиеся в силовых полях, обладают возможностью совершить работу. Так, например, тело, находящееся в поле силы тяжести, или растянутая пружина – обладают определенным запасом работы, которую они могут совершить.

Определение: запас работы, определяемый начальной конфигурацией тел системы, называется *потенциальной энергией системы*.

Запас работы можно отсчитывать от разных конфигураций или разного положения тел.

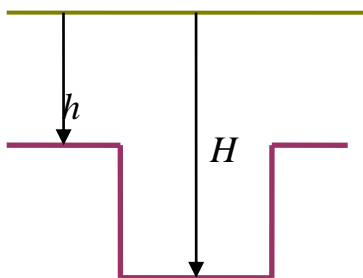


Рис. 9.1.

Пример: тело поднято на высоту  $h$  от поверхности земли и на высоту  $H$  от дна колодца. Для этих двух случаев запас работы различен, таким образом, запас работы зависит от точек отсчета (рис.9.1). Однако при перемещении тела в поле сил работа, равная изменению потенциальной энергии, не зависит от отсчетной конфигурации: просто заменяя одно нулевое положение (положение точки

отсчета) другим, потенциальная энергия меняется на постоянную величину. Итак, потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной, определяемой точкой отсчета.



Потенциальная энергия может быть, как положительной величиной ( $>0$ ), так и отрицательной ( $<0$ ). Так, потенциальная энергия взаимодействия двух положительных зарядов, или двух отрицательных зарядов, больше нуля (обычно на бесконечности потенциальная энергия положена равной 0), а потенциальная энергия взаимодействия положительного и отрицательного зарядов – меньше 0.

Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из положения 1 в положение 2, равна разности (или убыли) потенциальной энергии:

$$A_{12} = U_1 - U_2 \quad (1.9.1)$$

Легко увидеть, что работа при переходе из одного положения (1) в другое (2) не зависит от точки отсчета потенциальной энергии. Пусть точка (0) – какое-то начальное положение, от которой производится отсчет потенциальной энергии с неопределенной константой  $C$ :

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = (U_1 + C) - (U_2 + C) = U_1 - U_2 \quad (1.9.2)$$

Физический смысл имеет только работа при переходе между рассматриваемыми положениями точки. Из (1.9.2) видно, что начало отсчета потенциальной энергии никоим образом не влияет на работу при переходе из точки (1) в (2). Поэтому говорят, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной величины, а работа определяется разностью потенциальных энергий в двух состояниях системы, поэтому постоянная не играет роли.

### 1.9.2. Примеры потенциальных энергий.

1) *Однородное поле тяжести* (уже рассматривали в §1.8).

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2 = U_1 - U_2 \quad (1.9.3)$$

Потенциальная энергия в однородном поле тяжести

$$U = mgh + C$$

Можно условно положить константу равной 0 (отсчитывать высоту, скажем, от уровня моря), тогда

$$U = mgh \quad (1.9.4)$$

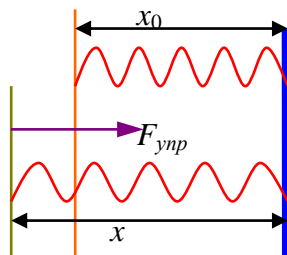


Рис. 9.2.

2) *Потенциальная энергия растянутой (сжатой) пружины* (см рис. 9.2). Растянутая или сжатая пружина за счет возвращающей силы совершает колебательное движение около положения равновесия (после того как отпущена). Такие системы, совершающие колебательные движения, называются *осцилляторами*. Возвращающая сила растянутой пружины – *сила упругости*, равна:

$$F_{упр} = -k(x - x_0) \quad (1.9.5).$$

Здесь  $x_0$  определяет координату недеформированной пружины, а  $x$  – координату подвижного конца пружины. Смещение от положения равновесия определяется разностью  $\Delta x = x - x_0$ . Элементарная работа растяжения на расстояние  $dx$  определяется:

$$dA = |F| \cdot |dx| \cdot \cos\theta = -|F| \cdot |dx| \quad (1.9.6)$$

Знак минус в (1.9.6) появился из-за того, что вектор перемещения и вектор силы направлены в разные стороны (рис. 9.2). Полная работа сил упругости при возвращении пружины в недеформированное состояние равна:

$$A = - \int_{x-x_0}^0 k l dl = \frac{k(x-x_0)^2}{2} = \frac{k \Delta x^2}{2} \quad (1.9.7)$$

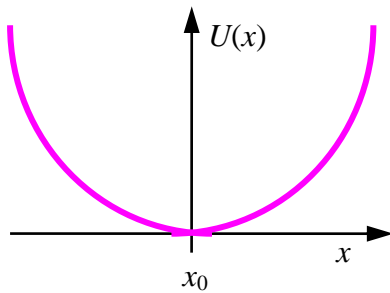


Рис. 9.3.

Эта работа равна убыли потенциальной энергии пружины:  $A = U(x) - U(x_0)$ . Если энергию недеформированной пружины положить равной 0 (в точке  $x = x_0$ , см рис. 9.3), то запишем потенциальную энергию упругой силы:

$$U(x) = \frac{1}{2} k(x-x_0)^2 \quad (1.9.8)$$

Это есть потенциальная энергия растянутой ( $x > x_0$ ) или сжатой ( $x < x_0$ ) пружины.

Поскольку под действием такой силы тело совершает колебательное (осцилляционное) движение, то говорят, что (1.9.8) – *потенциальная энергия осциллятора*.

Часто во многих задачах начало отсчета по оси  $x$  берется от координаты недеформированной пружины  $x_0 = 0$ . Тогда координата  $x$  определяет отклонение пружины от равновесия.

3) *Потенциальная энергия гравитационного поля*. Сила притяжения 2-х материальных точек с массами  $M$  и  $m$ , находящихся на расстоянии  $r$ , равна:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}. \quad (1.9.9)$$

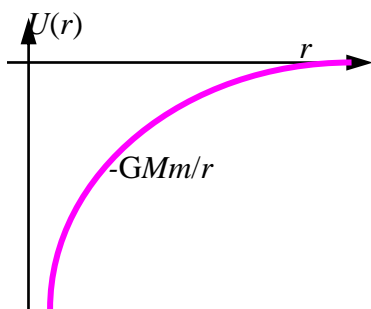


Рис. 9.4.

где  $G$  – *гравитационная постоянная*. Это сила – центральная, консервативная. Для простоты считаем, что масса  $M$  покоится, а масса  $m$  притягивается к ней и перемещается. Сосчитаем работу по перемещению точки  $m$  из бесконечности в точку  $r_0$ , отсчитанную от тела массы  $M$ :

$$A = - \int_{\infty}^{r_0} G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} d\vec{r} = G \frac{Mm}{r_0} = U(\infty) - U(r_0) \quad (1.9.10)$$

Выберем начало отсчета потенциальной энергии, считая, что на бесконечности  $U(\infty)=0$  (см рис. 9.4):

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r} \quad (1.9.11)$$

Энергия отрицательна. Это означает, что чтобы развести два этих тела на бесконечность нужно совершить эту работу внешними силами против сил притяжения. Или иначе, модуль этого выражения дает запас гравитационной энергии (работы) на бесконечном расстоянии между телами до их сближения на расстояние  $r$ .

Отметим, что такие же соотношения (с точностью до знака) справедливы для кулоновского взаимодействия, при этом потенциальная энергия взаимодействия зарядов  $q_1$  и  $q_2$ :

$$U(r) = k \frac{q_1 q_2}{r} \quad (1.9.12)$$

где  $k$  – постоянная, зависящая от системы единиц. Знак потенциальной энергии зависит от знаков взаимодействующих зарядов.

### 1.9.3. Связь между силой и потенциальной энергией (градиент).

Установим связь между потенциальной энергией и силой. По заданным консервативным силам можно найти потенциальную энергию. Нас сейчас интересует обратная задача: пусть имеется силовое поле, характеризуемое потенциальной энергией  $U(\vec{r})=U(x, y, z)$ , и требуется найти силу. Интегральная работа определяется соотношением (1.9.1). Запишем в том же ключе элементарную работу как скалярное произведение силы на перемещение

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z,$$

где  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – единичные вектора вдоль осей  $x, y, z$  (орты). С другой стороны, элементарная работа есть убыль потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \delta A &= U(\vec{r}) - U(\vec{r} + d\vec{r}) = -dU(\vec{r}) = \vec{F} d\vec{r} \\ F_x dx + F_y dy + F_z dz &= -dU(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.9.13)$$

Совершим элементарную работу при бесконечно малом перемещении вдоль оси  $x$ :

$$F_x dx = U(x, y, z) - U(x + dx, y, z), \quad (1.9.14)$$

где  $y$  и  $z$  не меняются. Тогда, разделив на  $dx$ , получаем *частную производную* от потенциальной энергии по координате  $x$  (частная производная от функции нескольких переменных означает производную по одной из переменных, когда остальные переменные остаются постоянными):

$$F_x = - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \quad (1.9.15)$$

Формально (математически) правильнее поступать, рассматривая перемещение на расстояние  $\Delta x$ , и затем переходить к пределу  $\Delta x$  и оставляя  $y$  и  $z$  постоянными, получить частную производную:

$$F_x = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \equiv - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \quad (1.9.16)$$

Аналогичные соотношения получим для двух других осей. Итак, проекции силы определяются частными производными по соответствующим координатам:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.9.17)$$

Полный вектор силы равен:

$$\vec{F} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right) \quad (1.9.18)$$

Символически уравнение (1.9.18), если формально вынести потенциальную энергию за скобку, можно записать следующим образом:

$$\vec{F} = - \left( \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) U(x, y, z) = - \text{grad} U(x, y, z) = - \nabla U(x, y, z) \quad (1.9.19)$$

При этом мы ввели *оператор градиента*:

$$\nabla \equiv \text{grad} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.9.20)$$

---

**Примечание 1.** Оператором называется то действие, которое нужно совершить с функцией, стоящей справа от оператора. Оператор градиента определяет взятие частных производных от функции, стоящей за оператором справа, и превращает скалярную величину в векторную. В общем смысле, оператором называется правило, по которому функции одного класса переводятся в функции другого класса.

---

Итак, зная потенциальную энергию поля можно определить силу, действующую в каждой точке пространства. Отметим также, что с точки зрения математики в выражении (1.9.13) стоит полный дифференциал функции – потенциальной энергии, который записывается в виде:

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (1.9.21)$$

Приращение потенциальной энергии представляет собой скалярное произведение вектора силы  $\vec{F}$  в виде (1.9.18)-(1.9.19) и вектора перемещения  $d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$ , взятое со знаком минус.

### Физический смысл оператора градиента.

Рассмотрим частную производную от потенциальной энергии по оси  $x$ :  $\partial U/\partial x$  – это касательная к кривой  $U(x)$ . Если  $\partial U/\partial x > 0$ , то сила  $F_x = -\partial U/\partial x < 0$  и, следовательно, направлена против направления оси  $x$ . Таким образом, сила имеет то направление, в котором потенциальная энергия убывает.

Пусть частные производные по координатам от потенциальной энергии возрастают  $\partial U/\partial x > 0$ ,  $\partial U/\partial y > 0$ ,  $\partial U/\partial z > 0$ . Тогда градиент потенциальной энергии есть вектор, который складывается из трех направлений возрастания потенциальной энергии по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . По правилам обычного сложения векторов получаем суммарный трехмерный вектор, который указывает направление наиболее быстрого возрастания потенциальной энергии. Сила равна  $\vec{F} = -\nabla U$ , т.е. направлена в сторону наиболее быстрого убывания потенциальной энергии.

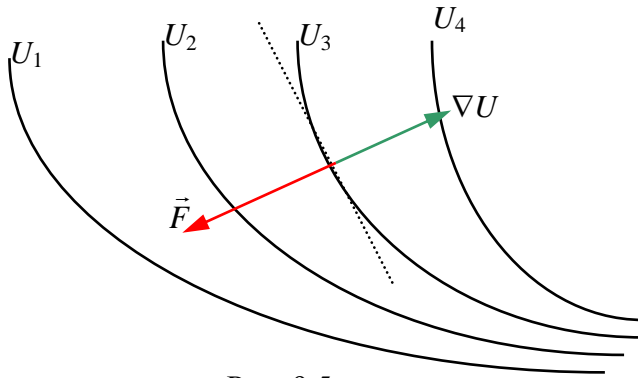


Рис. 9.5.

В точках минимума (и максимума) потенциальной энергии сила равна 0:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Можно построить поверхности равного потенциала, на которых выполняется условие:

$$U(x, y, z) = \text{const} \quad (1.9.22)$$

Такие поверхности носят название *экипотенциальных поверхностей*.

На рисунке 9.5, для примера, приведена серия экипотенциальных поверхностей. При условии, что

$$U_4 > U_3 > U_2 > U_1,$$

на рисунке 9.5 показано направление векторов градиента и силы. Вектор градиента и, соответственно, вектор силы всегда будут направлены перпендикулярно экипотенциальным поверхностям.

#### 1.9.4. Поле и потенциал поля.

Рассмотрим силу тяготения между двумя телами (или кулоновскую силу взаимодействия между двумя зарядами) в векторной форме:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \quad \left( \vec{F} = k \frac{qq_0}{r^3} \vec{r} \right) \quad (1.9.23)$$

Рассмотрим эту силу с точки зрения тела массы  $m$  (заряда  $q$ ). Тогда сила может быть представлена в виде:

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (\vec{F} = q\vec{E}) \quad (1.9.24)$$

где вектор  $\vec{g}$  (или  $\vec{E}$ ) характеризует силу, действующую на единицу массы (заряда) и носит название *напряженности поля* сил.

В общем случае сила, действующая на тело, может являться результирующей силой со стороны многих тел (зарядов):

$$\vec{F} = -Gm \sum_i \frac{M_i}{r_i^3} \vec{r}_i \quad \left( \vec{F} = kq \sum_i \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i \right) \quad (1.9.25)$$

При этом все равно можно ввести понятие напряженности поля со следующей интерпретацией: частица массы  $m$  (заряда  $q$ ) находится в поле, создаваемом окружающими телами и характеризуемым вектором напряженности  $\vec{g}$  (или  $\vec{E}$ ). Таким образом, для напряженности поля выполняется принцип суперпозиции:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots + \vec{g}_i + \dots = \sum_i \vec{g}_i \quad (1.9.26)$$

Отметим, что для статических задач (статика рассматривает равновесие тел, которое не меняется со временем), понятие поля – условно и без него вполне можно обойтись. Однако в динамике (процессы, зависящие от времени) – поле является физической реальностью.

Можно ввести потенциал поля (по аналогии с потенциальной энергией):

$$\int_1^2 \vec{g} d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (1.9.27)$$

где потенциал поля определяется как потенциальная энергия частицы единичной массы

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{m} \quad (1.9.28)$$

Гравитационный потенциал равен:

$$\varphi_{gp}(r) = -G \frac{M}{r} \quad (1.9.29)$$

Соответственно потенциал кулоновского поля записывается:

$$\varphi_{кул}(r) = k \frac{q}{r} \quad (1.9.30)$$

---

**Примечание 2.** Иногда в физике, особенно в квантовой физике, когда рассматривают конкретную задачу или частицу, под потенциалом понимают потенциальную энергию  $U(r)$ .

---

Работу поля можно представить в виде

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.9.31)$$

Для поля, создаваемого несколькими телами, потенциал равен сумме потенциалов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i \quad (1.9.32)$$

Связь напряженности и потенциала поля определяется также через градиент аналогично (1.9.19):

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \quad (1.9.33)$$

## 1.10. Закон сохранения энергии. Границы движения.

### 1.10.1. Полная механическая энергия в потенциальном поле.

Рассмотрим движение материальных точек или тел в силовом потенциальном поле. В § 1.7 было показано, что при перемещении из точки 1 в точку 2 работа силового поля равна изменению кинетической энергии  $K$ :

$$A_{12} = \frac{1}{2} mV_2^2 - \frac{1}{2} mV_1^2 = K_2 - K_1 \quad (1.10.1)$$

Здесь  $V_1, V_2$  – скорости тела массы  $m$  в точках 1 и 2. С другой стороны, для консервативных сил работа равна “уменьшению” потенциальной энергии силового поля:

$$A_{12} = U_1 - U_2 \quad (1.10.2)$$

Откуда получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2} mV_2^2 - \frac{1}{2} mV_1^2 = U_1 - U_2 \quad (1.10.3)$$

Для любого числа частиц (т.е. любой системы), находящихся в поле консервативных сил, выполняется это равенство:

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий называется *полной энергией*:

$$E = K + U \quad (1.10.4)$$

Таким образом, получаем *закон сохранения полной механической энергии*:

$$E_1 = E_2 \quad (1.10.5)$$

или

$$E = const$$

В системе с одними консервативными (и гироскопическими) силами полная энергия остается постоянной. В такой системе могут лишь происходить превращения потенциальной энергии в кинетическую энергию и обратно.

### 1.10.2. Система с диссипативными силами.

Пусть в системе наряду с консервативными силами действуют диссипативные силы (например, силы трения). Тогда работа всех сил при перемещении из точки 1 в точку 2, по-прежнему, равна изменению



кинетической энергии. Разделим всю работу на две части: на работу консервативных и диссипативных сил:

$$A_{12} = A_{12}^{\text{кон}} + A_{12}^{\text{дисс}} = K_2 - K_1 \quad (1.10.6)$$

Работу консервативных сил можно записать через изменение потенциальной энергии поля:

$$A_{12}^{\text{кон}} = U_1 - U_2 \quad (1.10.7)$$

Тогда получаем следующий *закон изменения полной энергии*:

$$\begin{aligned} K_2 - K_1 &= U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дисс}} \\ E_2 - E_1 &= A_{12}^{\text{дисс}} \end{aligned} \quad (1.10.8)$$

Таким образом, в системе с *диссипативными силами полная механическая энергия не остается постоянной*, а уменьшается, так как работа диссипативных сил отрицательна.

### 1.10.3. Границы движения.

Для простоты рассмотрим одномерное движение, при котором движение материальной точки осуществляется таким образом, что она может перемещаться только вдоль определенного направления (в частности, вдоль прямой). Положение точки задается одной координатой  $x$ , отсчитываемой вдоль этой траектории.

При движении в поле консервативных сил имеем кинетическую  $K(V)$  и потенциальную  $U(x)$  энергии и при этом выполняется закон сохранения энергии:

$$E = \frac{mV^2}{2} + U(x) = \text{const} \quad (1.10.9)$$

Поскольку кинетическая энергия всегда больше 0 ( $K \geq 0$ ), тогда полная энергия  $E \geq U(x)$ . То есть частица может находиться только в той области пространства, где потенциальная энергия не превосходит величины полной энергии. Точки, в которых выполняется равенство полной энергии и потенциальной, а кинетическая энергия равна нулю

$$E = U(x) \quad (1.10.10)$$

служат для определения границ области пространства, где может происходить движение материальной точки.

**Определение:** Движение, при котором частица остается в конечной области пространства, называется *финитным движением*.

**Пример 1.** Потенциальная энергия  $U(x)$  материальной точки в зависимости от координаты изображена на рис. 10.1. Прямая линия постоянной энергии  $E = \text{const}$  пересекает  $U(x)$  в двух точках  $x_1$  и  $x_2$ . Так как движение возможно только при условии  $E \geq U(x)$ , то точки  $x_1$  и  $x_2$ , называемые *точками поворота*, определяют границы движения. В этих точках полная энергия  $E = U(x)$ , а кинетическая энергия равна нулю  $K = 0$ , то

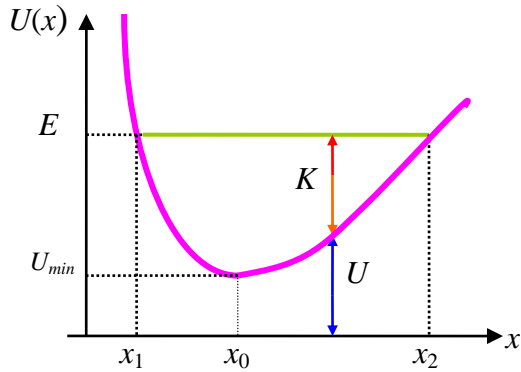


Рис. 10.1.

энергия, тем больше (шире) область движения точки, т.е. тем больше амплитуда колебаний.

Положение равновесия определяется точкой, где сила равна 0:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 = F \quad (1.10.11)$$

Когда в этой точке имеем минимум потенциальной энергии – положение равновесия устойчивое, когда максимум – неустойчивое положение равновесия.

**Пример 2.** Рассмотрим более сложный вид зависимости потенциальной

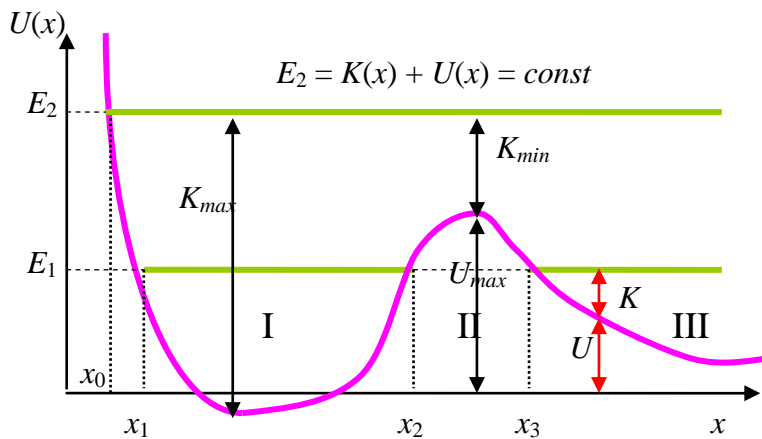


Рис. 10.2.

Движение в области III имеет другой характер. Если частица начинала свое движение из точки  $x_3$ , то вследствие того, что  $dU/dx < 0$  и сила  $F > 0$  (т.е. сила действует направо по оси  $x$ ), то частица будет двигаться направо с ускорением и уйдет на бесконечность. Причем на бесконечности, где потенциальная энергия равна 0, ее скорость определяется соотношением:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (1.10.12)$$

Если частица первоначально двигалась справа налево, то в окрестности точки она движется с замедлением, в точке  $x = x_3$  она остановится, повернет

есть частица не движется. При движении внутри области меняются кинетическая и потенциальные энергии, при этом минимальная потенциальная энергия и максимальная кинетическая энергия достигаются в точке  $x = x_0$ . Справа от точки  $x_0$  сила действует против оси  $x$ , т.е. в сторону  $x_0$ , а слева – вдоль оси  $x$ , т.е. опять к точке  $x_0$ . Это пример *колебательного (осцилляторного) движения*. Чем больше (выше) полная

энергии от координаты, изображенный на рис. 10.2. При этом имеем два случая.

1). Рассмотрим движение частицы с энергией  $E = E_1$ . Движение частицы возможно только в областях I и III, т.к. только здесь  $E \geq U(x)$ . Движение в области I, как и в случае примера 1, носит финитный (колебательный) характер.

и пойдет обратно на бесконечность. Такое движение носит название – *инфинитное движение*.

Движение в области II запрещено для частицы с энергией  $E_1$ , поэтому переход из области I в область III (и наоборот) запрещен в классической механике. В этом случае говорят, что область II – *потенциальный барьер*, а область I – *потенциальная яма*.

2). В случае, когда полная энергия  $E = E_2$ , (см рис. 10.2) частица, идущая из бесконечности, проходит над потенциальным барьером до точки  $x_0$  и отразившись снова уйдет на бесконечность. Она совершает инфинитное движение. Из бесконечности частица движется с переменной скоростью. Сначала до вершины потенциального барьера частица движется с замедлением, проходит вершину барьера с минимальной скоростью (там, где потенциальная энергия достигает локального максимума), затем ускоряется над скатом потенциальной ямы при уменьшении  $x$ , проходит минимум ямы с максимальной скоростью ( $K_{max}$ ) и снова замедляет свое движение до скорости, равной 0 в точке  $x_0$ . Аналогично рассматривается ее движение в обратную сторону от точки  $x_0$  на бесконечность.

#### 1.10.4. Излучение квантов. Эффект Мессбауэра.

Рассмотрим *эффект Мессбауэра* как иллюстрацию законов сохранения энергии и закона сохранения импульса.

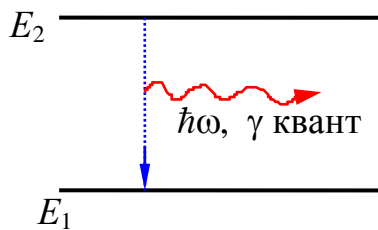


Рис. 10.3.

Согласно квантово–механическим представлениям атомные ядра (или атомы) имеют дискретные уровни энергии. Если ядро (атом) находится в возбужденном состоянии 2, то затем система переходит в нижнее состояние 1 с испусканием  $\gamma$  кванта энергии.

Из закона сохранения энергии без учета движения ядра имеем:

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_0 \quad (1.10.13)$$

где  $\omega_0$  – частота фотона, определяемая разностью энергий уровней,  $\hbar$  – постоянная Планка. Однако атом в газе может двигаться, поэтому закон сохранения энергии должен учитывать кинетическую энергию атомов в начальном 1 и конечном 2 состоянии:

$$\left( \frac{p_2^2}{2M} + E_2 \right) - \left( \frac{p_1^2}{2M} + E_1 \right) = \hbar\omega \quad (1.10.14)$$

где  $\omega$  – частота фотона с учетом движения атома,  $M$  – масса атома. Закон сохранения импульса для такого процесса имеет вид:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \hbar\vec{k} \quad (1.10.15)$$

Здесь в правой части стоит импульс фотона:  $\vec{k}$  – *волновой вектор* фотона, его модуль – *волновое число* – обратно пропорционален длине волны фотона  $\lambda$ :

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad (1.10.16)$$

где  $c$  – скорость фотона (света). Выразим  $\vec{p}_2$  из (1.10.15) и подставим в (1.10.16):

$$E_2 - E_1 + \frac{(\hbar\vec{k} + \vec{p}_1)^2}{2M} - \frac{\vec{p}_1^2}{2M} = \hbar\omega$$

Т.к. масса атома  $M$  велика, а фотон безмассовая частица, то импульс фотона мал  $\hbar k \ll p$  или  $\hbar^2 k^2 / 2M \ll p^2 / 2M$ . Тогда раскрывая скобки и пренебрегая квадратом фотонного импульса, имеем:

$$E_2 - E_1 + \frac{\hbar \cdot (\vec{k}, \vec{p}_1)}{M} = \hbar\omega \quad (1.10.17)$$

Итак, величина  $\hbar(\vec{k}, \vec{p}_1)/M$  зависит от скорости атома в конечном состоянии и описывает *энергию отдачи* атома при испускании  $\gamma$ -кванта. В газовой среде атомы могут быть с разными скоростями (по величине и по направлению), поэтому из-за скалярного произведения  $(\vec{k}, \vec{p}_1)$  отдельный атом получает различную отдачу. Таким образом, атомы (или ядра) излучают *различные по энергии кванты*, поэтому спектр выглядит примерно так, как изображено на рисунке 10.4, где  $I$  – интенсивность (количество) излученных квантов.

Если зафиксируем импульс атома  $p_1$ , то тогда максимальные отклонения в энергии кванта определяются значениями косинуса  $\pm 1$ :  $(\hbar\vec{k}\vec{p}_1)_{max} = \pm \hbar k p_1$ , т.е. из (1.10.17) и (1.10.13) получаем:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar\omega p_1}{cM} \approx \hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar\omega_0 p_1}{cM} = \hbar\omega_0 \left( 1 \pm \frac{p_1}{Mc} \right)$$

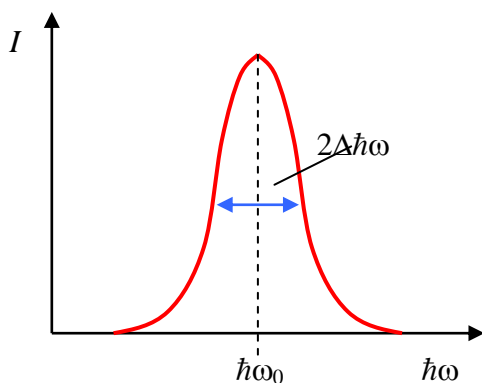


Рис. 10.4.

Вводя скорость атома в конечном состоянии  $v_1 = p_1/M$ , получаем для максимальных отклонений:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \left( 1 \pm \frac{v_1}{c} \right) \quad (1.10.18)$$

Поэтому, даже если атомы в начальном состоянии имеют одну и ту же энергию, мы вместо определенной линии получаем уширение линии за счет отдачи атома и за счет его движения. Из (1.10.18) получаем

оценку для относительного уширения линии за счет теплового движения атомов:

$$\frac{\hbar\omega - \hbar\omega_0}{\hbar\omega_0} = \frac{\Delta\hbar\omega_0}{\hbar\omega_0} \sim \frac{v}{c} \sim 10^{-4} \div 10^{-10} \quad (1.10.19)$$

Минимальная цифра в оценке (1.10.19) получалась при очень низких температурах в газах. Несмотря на небольшое относительное уширение это ограничивало экспериментальные возможности спектроскопии при изучении очень близких энергетических уровней (когда близкие по энергии линии излучения перекрывались).

Идея Мессбауэра (1958 г.) состояла в том, чтобы уменьшить отдачу атома, поместив атомы в кристалл, где они практически неподвижны. При этом отдачу при испускании  $\gamma$ -кванта будет испытывать не отдельный атом с массой  $M$ , а весь кристалл в целом с огромной массой. Таким образом, в соотношении (1.10.16) слагаемое  $\hbar(\vec{k}, \vec{p}_1)/M_{\text{кристалл}} \rightarrow 0$  и ширина линии резко уменьшается (см рис. 10.5). В кристаллах относительное уширение достигает практически величины *естественной ширины* уровня возбужденного атома:

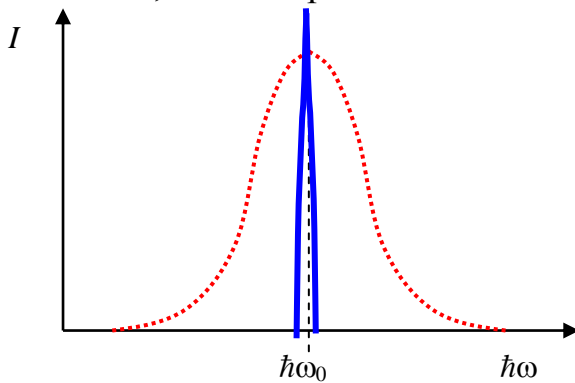


Рис. 10.5.

$$\frac{\Delta\hbar\omega}{\hbar\omega} \sim 10^{-15} \quad (1.10.20)$$

Этот эффект открыл новые возможности в спектроскопии. Не только разрешать близкие по энергии линии в спектре, но и измерять малые смещения энергетических линий за счет взаимодействия атомов с окружением. В 1961 году Мессбауэр получил Нобелевскую премию за новую экспериментальную методику в измерении спектров.

---

*Примечание 1. Рудольф Людвиг Мессбауэр, немецкий физик, 1929 г.р., Нобелевская премия 1961 г. за открытие эффекта безотдачного гамма-резонанса*

---

## 1.11. Момент импульса и момент силы.

### 1.11.1. Линейное и вращательное движения.

В кинематике между поступательным и вращательным движением имеем полное соответствие. Отличие состоит лишь в том, что векторы, определяющие вращательное движение, обладают немного другими свойствами, чем обычные. Это так называемые *аксиальные вектора*, которые определяются через векторные произведения обычных векторов. Вместо

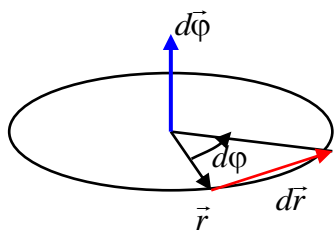


Рис. 11.1.

вектора элементарного перемещения вводится вектор малого поворота на угол  $d\phi$  через векторное произведение (см рис. 11.1 и ниже напоминание о векторном произведении векторов, а также Приложение 1 в конце параграфа). Итак, скорости и ускорение при вращении материальной точки вводим по аналогии с поступательным движением:

$$\text{Перемещение} - d\vec{r} \Leftrightarrow d\vec{\phi} - \text{угол поворота} \quad d\vec{r} = [d\vec{\phi}, \vec{r}] \quad (1.11.1)$$

$$\text{Скорость} - \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} - \text{угловая скорость} \quad \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad (1.11.2)$$

$$\text{Ускорение} - \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \text{угловое ускорение} \quad (1.11.3)$$

$$\text{Импульс} - \vec{p} = m\vec{v} \Leftrightarrow \vec{L} - \text{момент импульса} \quad (1.11.4)$$

Определение: *Моментом импульса* материальной точки (МИ, или устаревшее название – *момент количества движения*) относительно точки 0 называется векторное произведение:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] \quad (1.11.5)$$

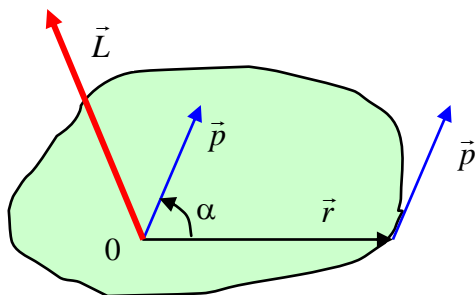


Рис. 11.2.

Следовательно, направление вектора МИ перпендикулярно плоскости, образуемой вектором импульса  $\vec{p}$  (скорости) и радиус-вектором  $\vec{r}$ , и определяется по правилу «буравчика». Как показано на рис. 11.2, вращаем буравчик в направлении от первого вектора в квадратных скобках ( $\vec{r}$ ) ко второму ( $\vec{p}$ ), тогда поступательное

движение буравчика дает направление результирующего вектора  $\vec{L}$ . По модулю вектор МИ равен:

$$L = mvr \cdot \sin(\angle \vec{v}, \vec{r}), \quad (1.11.6)$$

где величину « $r \cdot \sin(\angle \vec{v}, \vec{r}) = r \sin \alpha = l$ » обычно называют плечом вектора импульса относительно точки 0 (перпендикуляр, опущенный из точки 0 на направление вектора импульса).

МИ системы есть векторная сумма МИ каждой из частиц:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] \quad (1.11.7)$$

Иначе говоря, момент импульса системы есть аддитивная величина.

### 1.11.2. Уравнение моментов.

Рассмотрим движение одной частицы под действием силы  $\vec{F}$ , тогда изменение МИ во времени равно:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v}, \vec{p}] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = 0 + [\vec{r}, \vec{F}]$$

Первое векторное произведение в правой части уравнения равно нулю, т.к. вектор скорости параллелен вектору импульса. Таким образом, получаем уравнение, связывающее изменение момента импульса с действием силы – *уравнение моментов*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (1.11.8)$$

Вектор, стоящий в правой части уравнения, называется *моментом силы* относительно начала отсчета – точки 0:

$$\vec{M} \equiv [\vec{r}, \vec{F}] \quad (1.11.9)$$

Формулировка полученного соотношения (1.11.8) звучит так: производная по времени от момента импульса материальной точки относительно неподвижного начала равна моменту действующей силы относительно того же начала.

Модуль вектора момента силы равен:

$$M = Fr \sin(\angle \vec{F}, \vec{r}) = F \cdot l \quad (1.11.10)$$

где  $l$  плечо вектора силы  $F$  относительно точки 0. Итак, уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (1.11.11)$$

Уравнение моментов является записью основного уравнения динамики (второго закона Ньютона) для вращательного и криволинейного движения.

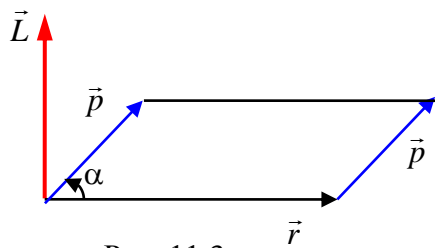


Рис. 11.3.

Поясним геометрический смысл векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$ , и вообще векторного произведения. Направление, как сказано выше, определяется с помощью правила правого винта («буравчика»). Величина вектора  $|\vec{L}|$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  (рис. 11.3):

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \alpha \quad (1.11.12)$$

В самом деле, величина  $|\vec{p}| \sin \alpha$  дает высоту параллелограмма, а величина  $|\vec{r}|$  его основание. То же можно сказать о векторе момента силы  $\vec{M}$  (см (1.11.9) и (1.11.10)).

Уравнение моментов (1.11.11), как и основное уравнение динамики, позволяет решать задачи 2-х типов.

1). Известна зависимость МИ относительно точки 0, найти момент сил относительно той же точки 0. Задача решается дифференцированием.



2). Известна зависимость от времени момента сил, действующего на частицу относительно точки 0, найти приращение МИ этой частицы. Задача решается интегрированием:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M} dt \quad (1.11.13)$$

Если известна зависимость момента силы от параметров движения, например, угловой скорости, то тогда составляется дифференциальное уравнение, которое решается при заданных граничных и начальных условиях.

### 1.11.3. Момент импульса и момент силы относительно оси.

Уравнение моментов – векторное уравнение, то есть вместо уравнения (1.11.11) можно записать три уравнения для проекций:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z \quad (1.11.14)$$

Нужно различать МИ относительно точки и относительно оси.

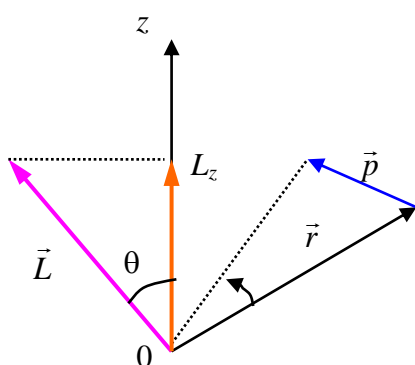


Рис. 11.4.

Пусть ось  $z$  неподвижна и точка отсчета 0, относительно которой рассматриваются моменты, находится на этой оси. *Моментом импульса относительно оси*  $z$  называют проекцию вектора  $\vec{L}$  на эту ось, который определен относительно произвольной точки 0 на данной оси (см рис. 11.4). Аналогично определяется и момент силы относительно оси.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad (1.11.15)$$

Если  $M_z = 0$ , то проекция на ось  $z$  не меняется  $L_z = const$ , хотя сам вектор

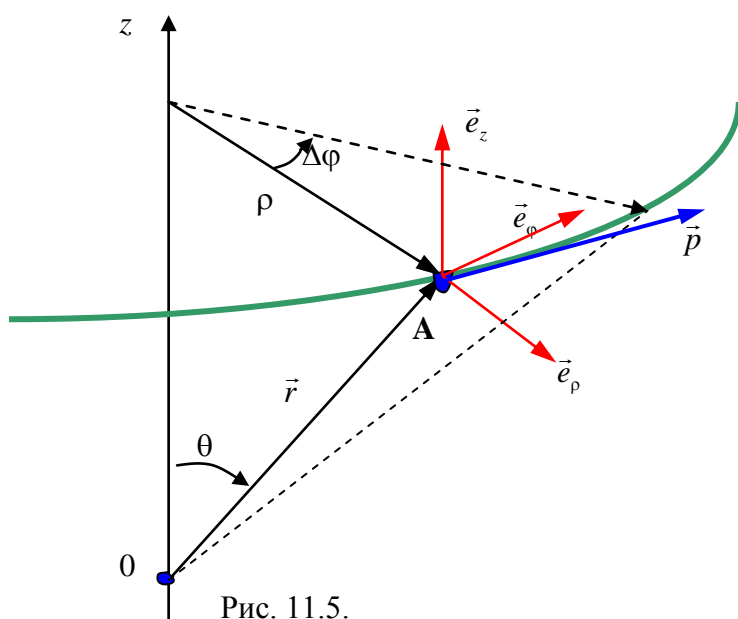


Рис. 11.5.

момента импульса может меняться. Например, вектор  $\vec{L}$  может вращаться («прецессировать») вокруг оси  $z$  при постоянном угле  $\theta$  (см рис. 11.4).

Покажем, что проекции момента импульса и момента силы на ось вращения  $z$  не зависят от выбора точки 0 на оси  $z$ . Запишем вектора  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  в цилиндрической системе координат, в которой введем

координатные оси  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  как показано на рис. 11.5. На рис. 11.5 показана траектория движения точки **A**, и вектор импульса, направленного по касательной к траектории. Радиус-вектор  $\vec{r}$  точки **A** записывается:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z, \quad (1.11.16)$$

где  $\rho$  плечо (т.е. перпендикуляр, опущенный из точки **A** на ось  $z$  как показано на рис. 11.5). Вектор импульса имеет вид:

$$\vec{p} = p_\rho \vec{e}_\rho + p_\varphi \vec{e}_\varphi + p_z \vec{e}_z \quad (1.11.17)$$

Проекция  $L_z$  определяется из векторного произведения следующим образом (см в конце параграфа Приложение 1):

$$L_z = r_\rho p_\varphi - r_\varphi p_\rho \quad (1.11.18)$$

Но проекции радиус-вектора равны

$$r_\varphi = 0 \quad \text{и} \quad r_\rho = r \cdot \sin\theta = \rho,$$

а проекция импульса

$$p_\varphi = mv_\varphi = m\rho\omega_z,$$

так как линейная скорость выражается через угловую скорость с помощью (1.11.2)

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad \text{и} \quad v_\varphi = \rho\omega_z.$$

Тогда получаем момент импульса относительно оси  $z$  в виде:

$$L_z = \rho p_\varphi = \rho m v_\varphi = \rho^2 m \omega_z \quad (1.11.19)$$

Аналогично имеем

$$M_z = \rho F_\varphi \quad (1.11.20)$$

Видно, что проекции МИ и силы на ось  $z$  зависят только от расстояния  $\rho$  до оси и не зависят от координаты  $z$ . Отсюда следует вывод: проекции момента силы  $M_z$  и импульса  $L_z$  не зависят от выбора точки на оси  $0z$ .

**Приложение 1.** Напомним, что векторное произведение в декартовой системе координат для векторов  $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$  и  $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$  есть вектор  $\vec{C}$ , модуль которого равен:

$$|\vec{C}| = C = \left| [\vec{A}, \vec{B}] \right| = A \cdot B \cdot \sin(\angle \vec{A}, \vec{B})$$

Сам вектор  $\vec{C}$  в компонентах записывается в виде:

$$\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

Векторное произведение в цилиндрической системе координат для векторов  $\vec{A}(A_\rho, A_\varphi, A_z)$  и  $\vec{B}(B_\rho, B_\varphi, B_z)$  записывается аналогичным образом:

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{e}_\rho (A_\varphi B_z - A_z B_\varphi) + \vec{e}_\varphi (A_z B_\rho - A_\rho B_z) + \vec{e}_z (A_\rho B_\varphi - A_\varphi B_\rho)$$

## 1.12. Закон сохранения момента импульса.

### 1.12.1. Момент импульса системы точек.

Рассмотрим систему материальных точек (частиц). Момент импульса (МИ) системы определяется суммой МИ отдельных частиц:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \quad (1.12.1)$$

Все вектора в (1.12.1) определены относительно одной и той же точки отсчета 0. Момент сил относительно той же точки также равен сумме моментов сил:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i \quad (1.12.2)$$

Разбивая все силы, действующие на частицы системы, на внутренние и внешние силы, последнее уравнение можно записать:

$$\vec{M} = \vec{M}_{int} + \vec{M}_{ext} = \sum_{i,k} [\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}] + \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \quad (1.12.3)$$

где  $\vec{F}_{ik}$  – сила, действующая на частицу  $i$  со стороны материальной точки  $k$ , а  $\vec{F}_i$  – внешняя сила, действующая на  $i$  точку. Нетрудно увидеть, что

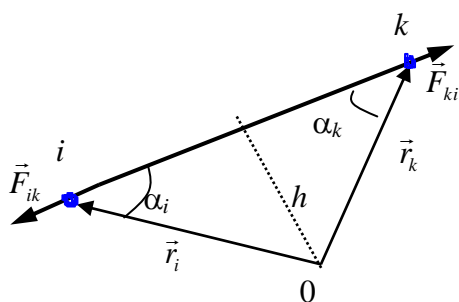


Рис. 12.1.

суммарный момент внутренних сил равен нулю  $\vec{M}_{int} = 0$ . Это следует из того, что внутренние парные силы равны по модулю и противоположны по направлению  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ , а плечи этих сил одинаковы. В самом деле, из рисунка 12.1 видно, что для пары взаимодействующих частиц  $i$  и  $k$  имеем следующее соотношение:

$$h = r_i \sin \alpha_i = r_k \sin \alpha_k.$$

Из этого следует, что

$$[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}] + [\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}] = 0. \quad (1.12.4)$$

Итак, для системы взаимодействующих частиц уравнение моментов имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} \quad (1.12.5)$$

куда входят моменты внешних сил только.

### 1.12.2. Закон сохранения МИ для замкнутых систем.

Для **замкнутой системы внешних сил нет** и, следовательно, момент внешних сил  $\vec{M}_{ext} = 0$ . Тогда из (1.12.5) получаем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \quad (1.12.6)$$

Или иначе получаем, что момент импульса замкнутой системы сохраняется:

$$\vec{L}=\text{const} \quad (1.12.7)$$

Соотношение (1.12.7) отражает *закон сохранения момента импульса замкнутой системы*. Наряду с законами сохранения импульса и энергии, закон сохранения МИ является фундаментальным законом природы.

Для одной материальной точки, если момент силы равен нулю  $\vec{M}_{ext}=0$ , получаем также:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = \text{const} \quad (1.12.8)$$

Рассмотрим несколько примеров.

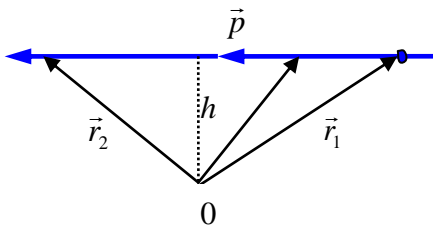


Рис. 12.2.

а). Рассмотрим движение свободной частицы и относительно точки отсчета 0 имеем  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = \text{const}$ . Как видно из рисунка 12.2, можно записать:

$$L = ph, \quad (1.12.9)$$

где  $h$  – перпендикуляр, опущенный из точки 0 на направление движения частицы. Итак, при свободном движении частицы вдоль прямолинейной траектории ее МИ не меняется относительно выбранного центра 0.

б). При движении частицы по кругу с постоянной скоростью  $v$  сила, действующая на частицу, может быть направлена к центру или от него (см рис. 12.3). Таким образом, вектор силы можно записать  $\vec{F} = F\vec{e}_r$ , и тогда момент этой силы равен нулю  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0$ , поскольку угол между радиус-вектором и вектором силы равен нулю. Поэтому МИ не меняется при движении частицы по окружности с постоянной скоростью:

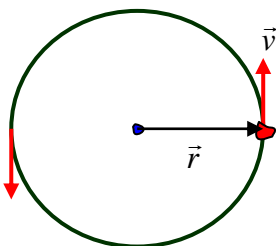


Рис. 12.3.

$$L = rp = mvr = m\omega r^2 \quad (1.12.10)$$

Вращение с постоянной скоростью оставляет постоянным момент импульса, вектор которого направлен по оси вращения (на рис. 12.3 вектор смотрит на нас из плоскости рисунка).

При переходе к другой точке отсчета момент импульса меняется. В самом деле, рассмотрим отсчет момента импульса от точек 0 и 0'. Как видно из рис. 12.4, переход к другой системе отсчета (т.е. от точки 0 к точке 0') МИ преобразуется следующим образом:

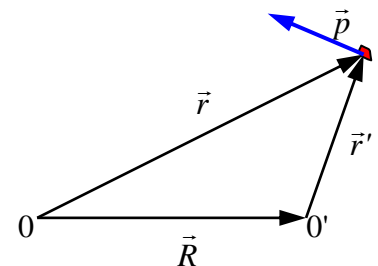


Рис. 12.4.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}' + \vec{R}, \vec{p}] = [\vec{r}', \vec{p}] + [\vec{R}, \vec{p}] \\ \vec{L} &= \vec{L}' + [\vec{R}, \vec{p}],\end{aligned}\quad (1.12.11)$$

где  $\vec{R}$  – вектор относительного расстояния между точками отсчета.

### 1.13. Движение частицы в центральном поле.

#### 1.13.1. Сохранение момента импульса в центральном поле.

В §1.8 рассматривались центральные силы, и было показано, что их работа не зависит от пути перехода между двумя точками, т.е. центральные силы консервативны. Итак, центральная сила записывается в виде:

$$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{e}_r = F(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.13.1)$$

где  $r$  – расстояние от центра поля. Очевидно, что в этом случае удобнее задачу рассматривать в сферической системе координат. Поскольку эта сила консервативна, то можно ввести потенциальную энергию, которая также зависит только от расстояния до центра поля:

$$\vec{F} = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r \quad (1.13.2)$$

При движении в центральном поле момент силы равен нулю, так как угол между векторами в векторном произведении равен нулю:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = F(r) [\vec{r}, \vec{e}_r] = 0 \quad (1.13.3)$$

Тогда из уравнения моментов (1.12.5) получаем, что момент импульса (МИ) есть постоянная величина.

*При движении частицы в центральном поле полный момент импульса сохраняется.* Сохранение МИ происходит несмотря на то, что система (одна

частица во внешнем поле) не является замкнутой.

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = \text{const} \quad (1.13.4)$$

Итак, вектор  $\vec{L} = \text{const}$ , т.е. его величина и его направление сохраняются.

С другой стороны вектор МИ перпендикулярен к векторам  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  (рис. 13.1), откуда следует, что движение частицы происходит в плоскости перпендикулярной к  $\vec{L}$ . Получаем, что частица, двигаясь в

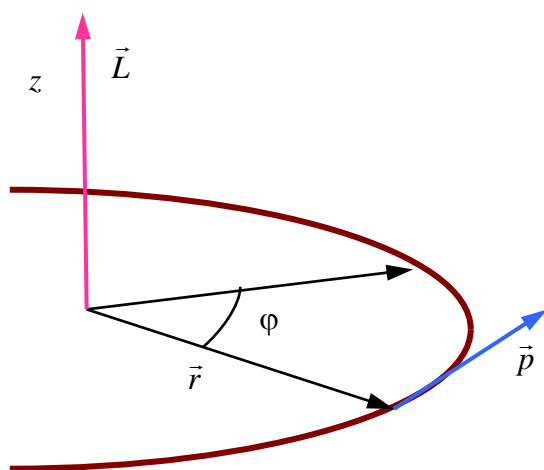


Рис. 13.1.

центральном поле, *имеет плоскую орбиту* (траекторию).

Если направим ось  $z$  по вектору  $\vec{L}$ , тогда  $L = L_z$  и траектория лежит в плоскости  $(x,y)$ , перпендикулярной оси  $z$ . В §1.11 получали, что проекция

МИ на ось равна  $L_z = m r^2 \omega_z$ . В нашем случае вектор  $\vec{r}$  лежит в плоскости орбиты, тогда для момента импульса имеем:

$$L = m r^2 \omega = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} \quad (1.13.5)$$

Таким образом, МИ частицы характеризуется скоростью изменения азимутального угла  $\varphi$  (угловой скоростью) и расстоянием до центра поля.

Геометрическая интерпретация движения частицы по орбите. Найдем площадь малого сектора  $OAB$  (рис. 13.2), определяемого двумя лучами  $OA$  и  $OB$  и бесконечно малой дугой  $AB$ :

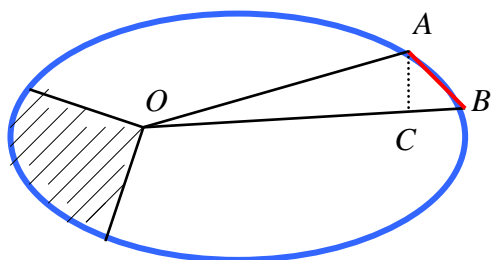


Рис. 13.2.

$$dS = S_{OAB} \cong \frac{1}{2} (OB) \cdot (AC) = \frac{1}{2} r \cdot (AB) \sin \alpha.$$

Здесь  $\alpha$  – угол между радиусом  $r = (OB)$  и бесконечно малой дугой  $(AB) = v \cdot dt$  (в пределе маленькая дуга  $AB$  направлена по касательной к орбите). Тогда для площади сектора получаем:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} r \cdot v dt \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} |[\vec{r}, \vec{v}]| dt = \\ &= \frac{dt}{2m} |[\vec{r}, \vec{p}]| = \frac{dt}{2m} L \end{aligned} \quad (1.13.6)$$

Введем понятие *секториальной скорости* как площади, описываемой радиусом- вектором частицы за единицу времени:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} \equiv \dot{\vec{S}} = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}] \quad (1.13.7)$$

Здесь “точка” над вектором (или другой величиной) означает производную от этой величины по времени – такое обозначение, часто встречается в механике. В силу сохранения МИ (1.13.4) секториальная скорость постоянна. Суть этого утверждения – 2-ой закон Кеплера, гласящий, что *секториальная скорость постоянна при движении частицы в центральном поле*:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (1.13.8)$$

Примечание 1. 1-ый закон Кеплера касается траектории тела в поле с потенциальной энергией  $U(r) = \alpha/r$ .

В результате имеем следующие свойства движения частицы в центральном поле:

- 1) движение плоское, плоскость проходит через точку  $O$ ,
- 2) секториальная скорость постоянна.

### 1.13.2. Закон сохранения энергии.

Центральные силы консервативны, следовательно, полная энергия частицы постоянна (как в замкнутой системе). Разложим импульс частицы на две составляющие вектора:  $\vec{p} = \vec{p}_r + \vec{p}_\phi$  (напомним, что ось  $z$  направлена перпендикулярно траектории частицы и проекция импульса на эту ось равна 0, а ось  $\vec{e}_\phi$  направлена перпендикулярно к оси  $\vec{e}_r$ , см рис.13.1). Тогда момент импульса и полная энергия определяются, соответственно:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}_r + \vec{p}_\phi] = [\vec{r}, \vec{p}_\phi]; \quad L = rp_\phi \quad (1.13.9)$$

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m} + U(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \quad (1.13.10)$$

Слагаемое в (1.13.10)  $L^2/2mr^2$  носит специальное название: *центробежная энергия*, поскольку оно связано с вращательным движением частицы. Из уравнения (1.13.10) видно, что в уравнении для определения энергии остается только одна переменная – расстояние до центра  $r$ . Таким образом, движение частицы в центральном поле можно рассматривать как одномерное (радиальное) движение в поле с *эффективной потенциальной энергией*:

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + U_{eff}(r), \quad U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \quad (1.13.11)$$

Таким образом, к обычному центральному потенциалу мы добавили часть, связанную с угловым движением, которая также имеет центральную симметрию.

*Задача о движении частицы в центральном поле сводится фактически к одномерной задаче о движении частицы вдоль радиуса в эффективном потенциале.*

В качестве примера рассмотрим эффективную потенциальную энергию гравитационного поля, с потенциальной энергией

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} = m\phi(r),$$

где  $\phi(r)$  – потенциал поля, введенный в параграфе 1.9. Гравитационный потенциал имеет характер

притяжения, а центробежный потенциал имеет отталкивающий характер, как показано на рис. 13.3. Там же показана эффективная (суммарная) потенциальная энергия  $U_{eff}$ , которая представляет собой отталкивание на малых расстояниях и притяжение на больших расстояниях и имеет потенциальную яму на промежуточных расстояниях.

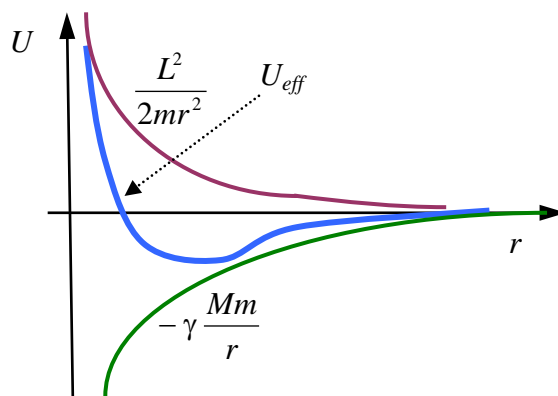


Рис. 13.3.



### 1.13.3. О траектории частицы.

Запишем уравнения для компонент импульса несколько иначе:

$$\begin{aligned}\vec{p}_r &= m\vec{v}_r = m \frac{dr}{dt} \vec{e}_r = m\dot{r}\vec{e}_r \\ \vec{p}_\varphi &= m\vec{v}_\varphi = m \left[ \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r} \right] \equiv m[\vec{\omega}, \vec{r}]\end{aligned}\quad (1.13.12)$$

Вектор угловой скорости направлен перпендикулярно плоскости орбиты, т.е. вдоль вектора  $\vec{L}$  и оси  $z$ . Так как угол между вектором угловой скорости и радиус-вектором равен  $\pi/2$ , то

$$p_\varphi = m \frac{d\varphi}{dt} r \equiv mr\dot{\varphi}$$

Тогда подставляя импульс в уравнения (1.13.9) и (1.13.10), получаем:

$$\left. \begin{aligned}E = const &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + U(r) \\ L = const &= mr^2\dot{\varphi}\end{aligned} \right\} \quad (1.13.13)$$

Подставляя  $\dot{\varphi}$  из второго уравнения (1.13.13) в первое, получаем для скорости радиального движения (производной длины радиуса) следующее выражение:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \quad (1.13.14)$$

Последнее уравнение осуществляет связь между радиусом нахождения частицы и временем движения, или в данном случае неявную зависимость радиуса  $r = r(t)$  от времени:

$$\begin{aligned}dt &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \\ t &= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} + Const\end{aligned}\quad (1.13.15)$$

Исключим время в (1.13.14) и (1.13.15) с помощью второго уравнения в (1.13.13)

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt .$$

При этом находим уравнение, определяющее плоскую траекторию частицы, т.е. связь между  $r$  и  $\varphi$ :

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} + const \quad (1.13.16)$$

Границы радиального движения частицы определяются равенством (1.13.13), когда радиальная скорость частицы равна нулю  $\dot{r} = 0$  (рис.13.4а):

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \quad (1.13.17)$$

Отметим, что равенство нулю радиальной скорости  $\dot{r} = 0$  не означает, что частица остановилась, поскольку она обладает скоростью вдоль траектории  $v_\varphi \neq 0$  ( $L = const$ ).

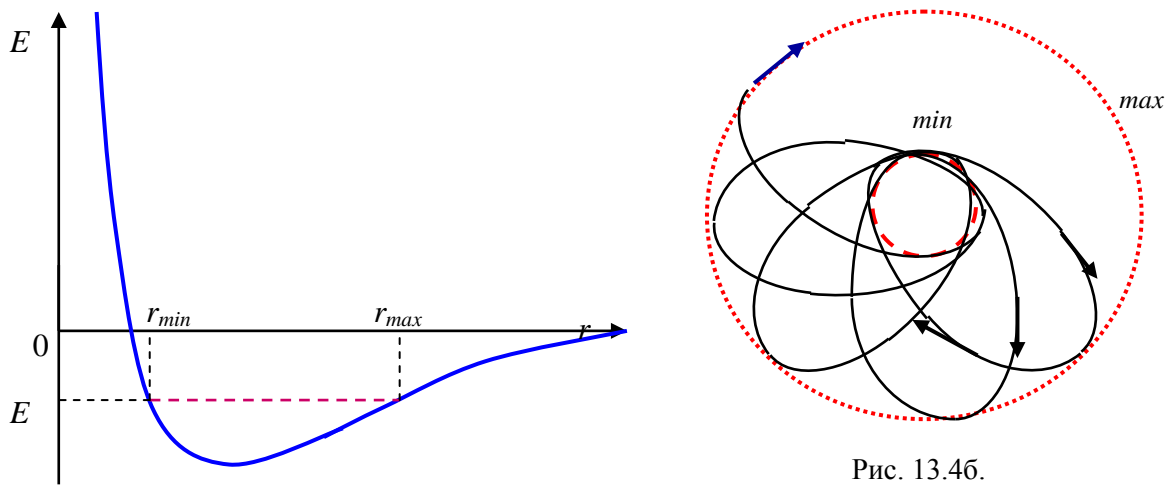


Рис. 13.4а

При финитном движении, т.е. когда существуют  $r_{min}$  и  $r_{max}$ , траектория не обязательно является замкнутой (рис. 13.4б). За одну петлю, т.е. при прохождении от  $r_{max}$  до  $r_{min}$  и снова до  $r_{max}$ , радиус-вектор частицы повернется на следующий угол:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{2m(E - U) - L^2/r^2}} \quad (1.13.18)$$

Условие замкнутости траектории состоит в том, чтобы  $\Delta\varphi$  было равно рациональной части от  $2\pi$ , или иначе  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа.

В общем случае потенциальной энергии  $U(r)$  траектория финитного движения не замкнута. Существуют, однако, *два типа полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты*. Это поля с потенциальной энергией обратно пропорциональной расстоянию до центра или прямо пропорциональной квадрату расстояния:

$$U(r) \sim \frac{1}{r}, \quad U(r) \sim r^2. \quad (1.13.19)$$

Задача о движении в кулоновском или гравитационном поле с потенциальной энергией  $U(r) = \alpha/r$  – это задача Кеплера. Не решая уравнения (1.13.15) и (1.13.16) для этого поля, запишем ответ: траектория частицы представляет собой одно из *конических сечений* плоскостью, а именно – *Эллипс*, *Гипербола*, *Парабола* (см рис. 13.5, т.е. представляет собой кривую, получающуюся при пересечении поверхности конуса и плоскости).

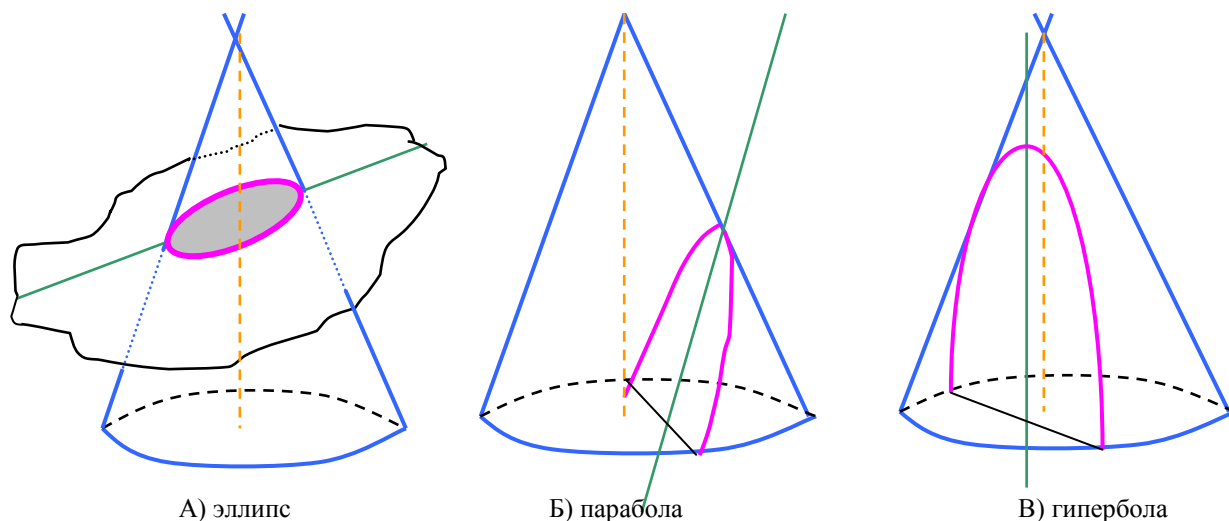


Рис. 13.5.

Эллипс получается при произвольном сечении плоскостью конической поверхности под углом к оси и боковой образующей. В частном случае получаем окружность, когда плоскость сечения перпендикулярна оси конической поверхности. Гипербола получается, когда плоскость сечения параллельна оси конической поверхности. А парабола – есть результат сечения плоскостью, которая параллельна боковой образующей конической поверхности.

Какая траектория реализуется – это зависит от знака постоянной  $\alpha$  в формуле  $U(r) = \alpha/r$ . Так, при отталкивающем взаимодействии  $\alpha > 0$ , всегда будет гипербола (см рис. 13.5.В и 13.6.А).

Если имеем притяжение  $\alpha < 0$ , то траектория может быть любой из вышеприведенных типов, а какая именно, зависит от полной энергии частицы  $E$ . Если  $E < 0$ , то имеем финитное движение и траектория частицы есть эллипс. При энергии, равной  $E = 0$ , движение

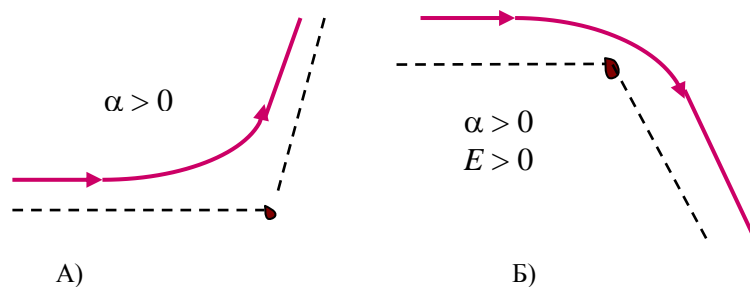


Рис. 13.6.

инфинитное и траектория имеет вид параболы (со скоростью, равной 0 на

бесконечности). Когда полная энергия частицы  $E > 0$ , получаем также инфинитное движение с траекторией по гиперболе (рис. 13.6.Б).

## 1.14. Столкновение двух тел.

### 1.14.1. Приведенная масса.

В механике только задача двух тел имеет аналитическое решение в общем виде. В предыдущем параграфе 1.13 рассматривалось движение одной частицы в поле, центр которого не двигался. Более реалистичский случай – это когда взаимодействуют две частицы, и они образуют замкнутую систему. Поэтому задачу об их движении удобнее решать в системе центра инерции (СЦИ). Центр инерции замкнутой системы из 2-х частиц либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно вследствие закона сохранения импульса.

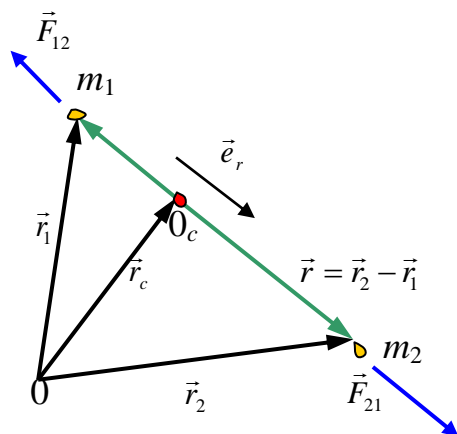


Рис. 14.1.

Радиус-вектор (координаты) центра инерции (ЦИ) определяется (рис. 14.1, см также §1.5):

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.14.1)$$

Выберем новую систему отсчета, центр которой поместим в центр инерции (т.е. на рис. 14.1 совмещаем центры  $O$  и  $O_c$ ), тогда в формуле (1.14.1) имеем  $\vec{r}_c = 0$  и следующее соотношение:

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2 \quad (1.14.2)$$

С другой стороны, расстояние между двумя частицами (рис. 14.1) – это относительное расстояние:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.14.3)$$

Из этих двух уравнений (1.14.2) и (1.14.3) находим радиус-векторы частиц в системе ЦИ через вектор относительного расстояния:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (1.14.4)$$

Силы взаимодействия по третьему закону Ньютона могут быть записаны (направления векторов определены в соответствие с рис. 14.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -F(r) \vec{e}_r \quad (1.14.5)$$

Запишем уравнения движения для каждой из частиц:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -F(r) \vec{e}_r \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = F(r) \vec{e}_r \end{cases} \quad (1.14.6)$$

Перенеся массу в уравнениях (1.14.6) в правую часть, вычтем первое уравнение из второго:

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(r) \vec{e}_r = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F(r) \vec{e}_r$$

Итак, получаем уравнение движения в виде:

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F(r) \vec{e}_r, \quad (1.14.7)$$

где ввели обозначение  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  – *приведенная масса*.

Формально мы перешли к задаче движения одной “эффективной” частицы в поле центральных сил  $F(r)$ , причем эта движущаяся частица обладает эффективной массой  $\mu$ .

Таким образом, любая задача о движении *двух взаимодействующих тел* сводится к решению задачи о движении одного тела с эффективной массой в центральном поле. Поэтому все выводы, полученные в предыдущем параграфе, справедливы при решении этой задачи двух тел. В частности, получаем плоские траектории движения двух частиц: сначала находим координаты относительного движения  $r(t)$  или траекторию  $r(\varphi)$ , и затем координаты отдельных частиц  $r_1(t)$  и  $r_2(t)$ . При этом получаем те же траектории для отдельных частиц. Так для полей типа (1.13.19): эллипсы, параболы и гиперболы.

Приведем несколько примеров задачи двух тел.

А) *Двойные системы звезд*: в такие системы обычно входят звезды с разными массами и, соответственно, с разными по размерам траекториями – эллипсами (рис. 14.2А).

Б). *Позитроний* – система, состоящая из электрона и позитрона: у частиц одинаковые массы и одинаковые траектории.

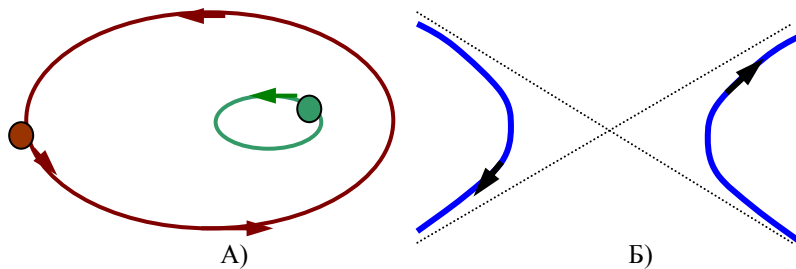


Рис. 14.2.

В). *Рассеяние заряженных частиц* друг на друге. На рис. 14.2Б показаны траектории сталкивающихся частиц с зарядами одинаковых знаков.

### 1.14.2. Неупругие столкновения

Неупругие столкновения – это такие столкновения, при которых часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию сталкивающихся тел. Степень неупругости зависит от того, какая часть энергии переходит во

внутреннюю энергию. В качестве примера можно рассмотреть следующую задачу: пуля пробивает доску и теряет часть энергии, которая идет на изменение внутренней структуры и теплоту.

Предельный случай неупругого удара – *абсолютно неупругий удар* – это когда оба тела при столкновении сливаются в одно общее (см рис. 14.3). При этом выполняется закон сохранения импульса, а в законе сохранения энергии необходимо учитывать, что часть кинетической энергии удара переходит во внутреннюю энергию частиц.

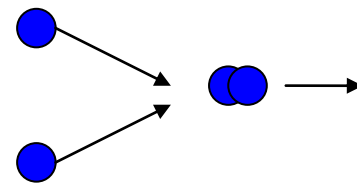


Рис. 14.3.

В столкновениях атомных частиц часто неупругие процессы начинают происходить, только начиная с некоторой энергии сталкивающихся частиц, а при меньших энергиях происходят только упругие столкновения. Таким образом, обнаруживается порог неупругой реакции. В качестве пороговой реакции рассмотрим, например, процесс, обратный процессу столкновения частиц – процесс распада составной частицы.

#### Распад частиц.

Рассмотрим распад частицы массы  $m$  на две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Рассмотрим этот процесс как в лабораторной системе отсчета, где распадающаяся частица массы  $m$  имеет скорость  $\vec{V}$  (рис. 14.4), так и в СЦИ (рис. 14.5), где она покоится. Частицы, появившиеся в результате распада, имеют скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  в лабораторной системе отсчета и скорости  $\vec{v}_{01}$  и  $\vec{v}_{02}$  в СЦИ.

*Лабораторная система отсчета*

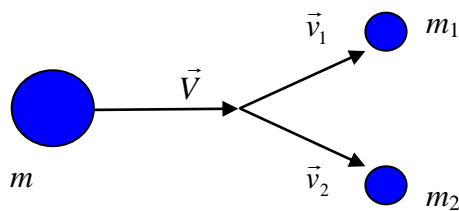


Рис. 14.4.

*Система центра инерции*

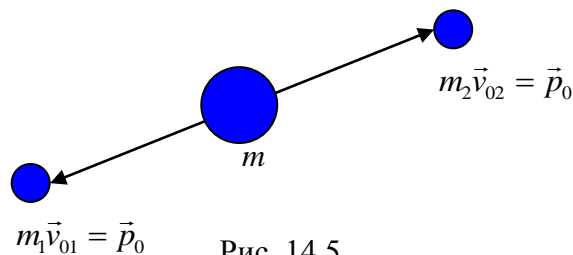


Рис. 14.5.

В СЦИ имеем закон сохранения импульса  $p_1 = mv_{01} = p_2 = mv_{02} = p_0$ , тогда закон сохранения энергии запишется в следующем виде:

$$E_{\text{вн}} = E_{1\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_2} \quad (1.14.8)$$

где  $E_{\text{вн}}$  – внутренняя энергия частицы до распада,  $E_{1\text{вн}}$  и  $E_{2\text{вн}}$  – внутренние энергии частиц после распада. Введем энергию распада, т.е. ту часть энергии, которая выделилась из внутренней энергии распадающейся частицы:

$$\varepsilon = E_{\text{вн}} - E_{1\text{вн}} - E_{2\text{вн}} \quad (1.14.9)$$

Тогда получаем:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{(m_1 + m_2)}{2m_1m_2} p_0^2$$

Таким образом энергия распада частицы равна кинетической энергии частицы с приведенной массой:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2\mu} \quad (1.14.10)$$

Если  $\varepsilon$  известно, то находим  $p_0$  и скорости частиц в СЦИ:

$$v_{01} = \frac{p_0}{m_1}, \quad v_{02} = \frac{p_0}{m_2} \quad (1.14.11)$$

---

Примечание 1. Эти же уравнения (1.14.10)-(1.14.11) справедливы для абсолютно неупругого удара, если процесс рассматривать в системе центра масс (СЦИ).

---

Проанализируем возможные углы вылета  $\theta$  одной из частиц по отношению к скорости первоначальной частицы в лабораторной системе. Пусть  $\vec{V}$  – скорость первичной частицы в Лабораторной системе отсчета (ЛСО),  $\vec{v}_1$  – скорость одной из частиц в ЛСО,  $\vec{v}_{01}$  – ее скорость в СЦИ. Тогда, следуя преобразованиям Галилея для скорости, имеем следующее соотношение:

$$\vec{v}_1 - \vec{V} = \vec{v}_{01}, \quad (1.14.12)$$

Последнее равенство возводим в квадрат:

$$v_1^2 + V^2 - 2v_1V\cos\theta = v_{01}^2 \quad (1.14.13)$$

Здесь  $\theta$  и есть угол вылета частицы по отношению к скорости первоначальной частицы как угол между векторами  $\vec{V}$  и  $\vec{v}_1$  в ЛСО. Это уравнение дает зависимость скорости частицы после распада от направления ее вылета в ЛСО.

Можно проанализировать эти зависимости графически, как показано на Рис.14.6. Для этого строим окружность радиуса  $v_{01}$ . Затем к центру окружности проводим вектор  $\vec{V}$ . Вектор  $\vec{v}_1$  представляет собой сумму векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{v}_{01}$ .



Существует 2 возможности (см рис. 14.6).

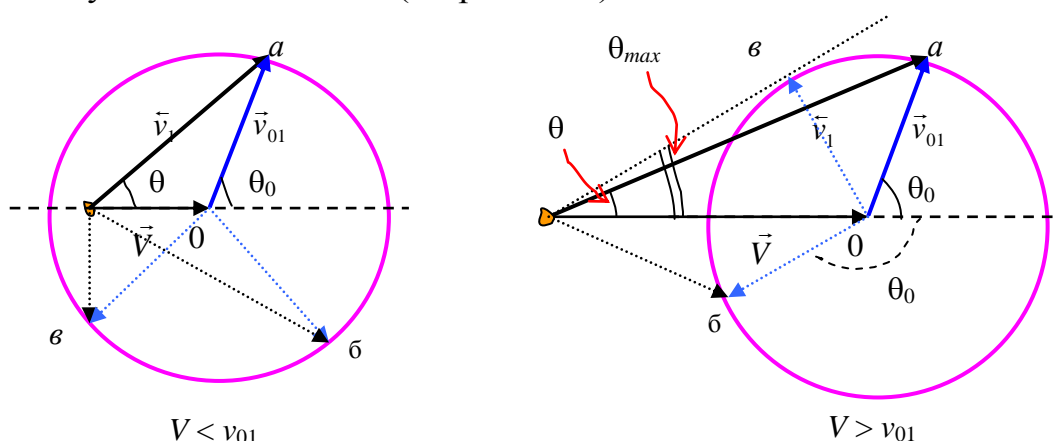


Рис. 14.6.

1). Скорость первичной частицы меньше скорости одной из вылетевших частиц (пусть частицы 1) в СЦИ  $V < v_{01}$ . Это показано на левой части изображения рис. 14.6, где помечены 3 возможные ситуации с разными направлениями  $\vec{v}_{01}$  (т.е. разными углами  $\theta_0$ ):  $a$ ,  $b$ ,  $v$  (синим цветом помечены вектора в СЦИ). В этом случае частица 1 может вылететь под любым углом  $\theta$  от 0 до  $2\pi$ , так как при любом выбранном угле  $\theta_0$  имеется угол  $\theta$ .

2). Скорость первичной частицы больше скорости частицы 1 в СЦИ  $V > v_{01}$  как это показано на правой части рис. 14.6, где также помечены 3 возможные ситуации:  $a$ ,  $b$ ,  $v$ . Из рис. 14.6 видно, что какое бы мы не брали  $\theta_0$ , частица 1 может вылететь только вперед. Существует максимальный угол вылета частицы  $\theta_{max}$ , который определяется касательной к окружности, случай  $v$  на правом рисунке 14.6, и который получается из уравнения:

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_{01}}{V} \quad (1.14.14)$$

Аналогичный анализ можно провести для неупругого столкновения.

### 1.14.3. Упругие столкновения

Столкновение двух частиц называется *упругим*, если оно не сопровождается изменением их внутреннего состояния. В законе сохранения энергии внутреннюю энергию тел можно не учитывать. Выберем лабораторную систему отсчета, где одна из частиц покоится  $\vec{p}_2 = 0$ , а другая частица налетает с импульсом  $\vec{p}_1$ . Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{2m_1} &= \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \\ \vec{p}_1 &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \end{aligned} \quad (1.14.15)$$

Выразим  $\vec{p}_1'$  из закона сохранения импульса и подставим в закон сохранения энергии:

$$\frac{p_1^2}{m_1} = \frac{p_1^2 + p_2'^2 - 2\vec{p}_1\vec{p}_2'}{m_1} + \frac{p_2'^2}{m_2}$$

Вводя угол  $\theta_2$  между векторами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2'$ , выразим  $p_2'$ :

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos\theta_2 \quad (1.14.16)$$

Будем интерпретировать полученный результат графически. Проведем вектор  $\vec{p}_1$ , построим окружность радиуса  $m_2 p_1 / (m_1 + m_2)$ , центр которой лежит на векторе  $\vec{p}_1$ , а ее левый край (см рис. 14.7) проходит через начало вектора  $\vec{p}_1$ . При этом возможны два случая, когда  $m_1 > m_2$  и  $m_1 < m_2$  (на рис. 14.7 случаи *a* и *б* соответственно).

Диаметр окружности, равный  $2m_2 p_1 / (m_1 + m_2)$  и будучи умноженный на  $\cos\theta_2$ , дает вектор  $\vec{p}_2'$  (на рис. 14.7 угол  $\theta_2$  – как угол, вписанный в окружность). Из закона сохранения импульса видно: угол  $\theta_1$  – угол отклонения 1-ой частицы (налетающей) после столкновения. Угол  $\alpha$  – угол разлета 1 и 2-ой частиц после столкновения.

- 1) При  $m_1 > m_2$  видно (на рис. 14.7*a* передвигаем точку 1 по линии окружности и смотрим как меняются углы), что угол разлета  $\alpha$  меняется от 0 до  $\pi/2$ . Также видно, что имеется максимальный угол отклонения  $\theta_{1max}$ , определяемый моментом, когда  $\vec{p}_1'$  касается окружности. Таким образом, когда налетает частица (тело) большей массы и упруго сталкивается с частицей (телом) меньшей массы, то обе частицы летят *вперед* после столкновения.

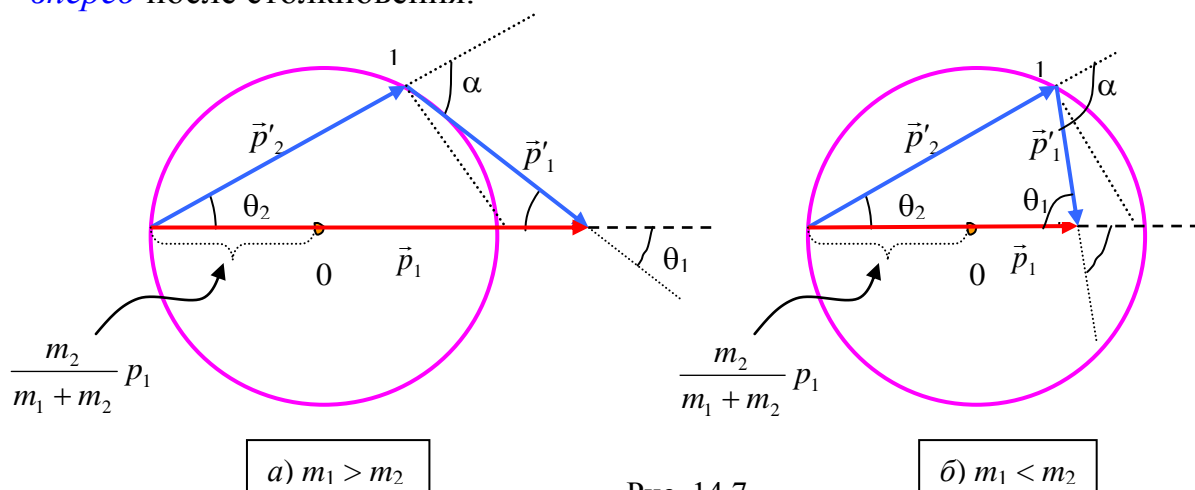


Рис. 14.7.

- 2) При  $m_1 < m_2$  (также меняем положение точки 1 на рис. 14.7*б*) угол разлета  $\alpha$  меняется от  $\pi/2$  до  $\pi$ , а угол рассеяния  $\theta_1$  меняется от 0 до  $\pi$ . В этом случае, когда налетает частица меньшей массы на покоящуюся частицу большей массы, то после столкновения частицы разлетаются в разные стороны.

- 3) При  $m_1 = m_2$  все точки начала и конца векторов лежат на окружности. Угол разлета частиц  $\alpha = \pi/2$ , то есть разлет частиц происходит под прямым углом. При этом  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ . При лобовом столкновении  $\theta_2 = 0$ .

### 1.15. Рассеяние частиц. Эффективное сечение.

#### 1.15.1. Рассеяние на силовом центре.

Рассмотрим снова рассеяние на силовом центре или в качестве силового центра возьмем центр инерции двух сталкивающихся частиц.

Если имеем отталкивающие силы, то в качестве траектории получаем всегда гиперболу, выгнутую от отталкивающего центра (рис. 15.1). При притяжении между налетающей частицей и силовым центром траектория также имеет вид гиперболы, но "изогнутую" к центру. Однако, параметры и решение самой задачи одинаково для обоих случаев, поэтому рассмотрим один из конкретных случаев – пример, изображенный на рисунке 15.1, – отталкивающий центр.

Введем следующие параметры движения частицы:  $\rho$  – прицельное расстояние,  $\theta$  – угол рассеяния частицы,  $m$  – ее масса,  $v_\infty$  – скорость налетающей частицы, находящейся далеко от центра (на бесконечности). Введем также центральный угол  $\varphi$ , отсчитанный от горизонтальной оси,

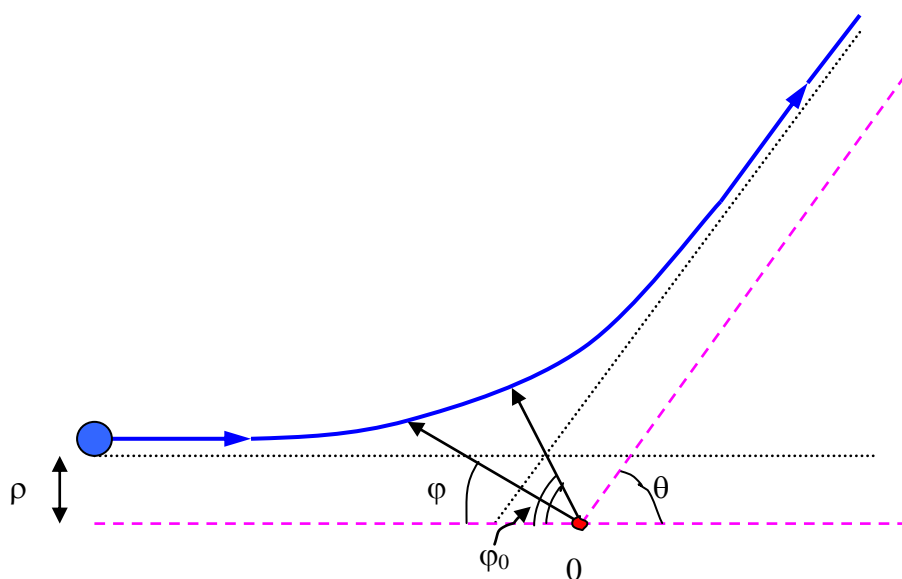


Рис. 15.1.

параллельной начальной скорости частицы. Легко также видеть из рисунка 15.1, что центральный угол  $\varphi_0$ , определяющий кратчайшее расстояние от центра  $O$  до траектории частицы, связан с углом рассеяния следующим соотношением:

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 \quad (1.15.1)$$

Итак, на бесконечности, где, считаем, потенциальная энергия равна нулю, полная энергия и момент импульса имеют следующие значения:

$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}, \quad L = m\rho v_{\infty} \quad (1.15.2)$$

Тогда угол  $\varphi_0$ , определяемый формулой (1.13.16) из §1.13, равен:

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} dr = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_{\infty}^2}}} dr \quad (1.15.3)$$

Здесь мы уже воспользовались соотношениями (1.15.2). Формула (1.15.3) дает связь между прицельным параметром  $\rho$  и углом  $\varphi_0$ , а, следовательно, и углом рассеяния  $\theta$ .

Кулоновская или гравитационная потенциальная энергия может быть записана как

$$U = \frac{\alpha}{r}.$$

Для кулоновского поля потенциальная энергия имеет вид  $U = kq_1q_2/r$ , для гравитационного –  $U = -\gamma mM/r$ . Не вычисляя в нашем курсе интеграл (1.15.3), запишем для этих полей конечный результат – связь между прицельным параметром  $\rho$  и углом рассеяния  $\theta$  ( $\varphi_0$ ):

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mv^2 \rho}{\alpha} \quad (1.15.4)$$

В 1910 году Эрнест Резерфорд вместе с Хансом Гейгером и Эрнстом Марсденом измеряли рассеяние  $\alpha$ -частиц (заряд  $2e$ ) на тонких пластинках золота и серебра, фактически на ядрах Ag и Au. По сути они рассеивали  $\alpha$ -частицы на центрах с потенциальной энергией, равной:

$$U = \frac{Ze \cdot 2e}{r} \quad (1.15.5)$$

где  $Ze$  – заряд ядра. Фактически это была попытка экспериментально проверить формулу (1.15.4).

---

**Примечание 1.** Эрнест Резерфорд (Ernest Rutherford), английский физик, 1871-1937, Нобелевская премия 1908 г. по химии за исследование превращения элементов и химии радиоактивных веществ;  
 Ханс Вильгельм Гейгер (Hans Geiger), немецкий физик, 1882-1945;  
 Эрнест Марсден (Ernest Marsden), новозеландский физик, 1889-1970

---

### 1.15.2. Эффективное сечение.

Однако, формулу (1.15.4) непосредственно на опыте не проверить, поскольку она написана для определенного прицельного параметра  $\rho$ .

Реально  $\alpha$ -частицы от источника летят под любыми прицельными параметрами, которые не определить на эксперименте. В эксперименте с микрочастицами мы имеем дело не с индивидуальным отклонением одной частицы, а с рассеянием целого пучка одинаковых частиц, падающих на рассеивающий центр с одинаковыми скоростями  $v_\infty$ , но под разными прицельными параметрами  $\rho$ . Следовательно, частицы пучка рассеиваются также под разными углами  $\theta$ .

Поэтому в физике вводится другая, очень важная, характеристика процесса рассеяния – *сечение* или *эффективное сечение*.

Определение: *Эффективное сечение* – величина, характеризующая вероятность перехода системы сталкивающихся частиц в результате их рассеяния как упругого, так и неупругого в определенное конечное состояние.

Конечное состояние характеризуется углом рассеяния  $\theta$ . Пусть  $dN$  – число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ . Само это число  $dN$  зависит от числа падающих частиц, точнее от плотности частиц в потоке.

Обозначим за  $n$  плотность падающих частиц (количество частиц в единице объема), а за  $v$  их скорость вдоль пучка, тогда число падающих частиц на поперечную площадку  $\Delta S$  (см рис. 15.2) за время  $dt$  равно

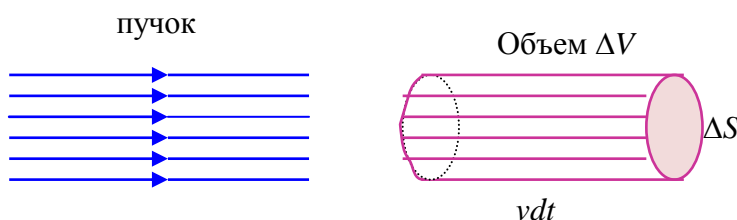


Рис. 15.2.

$$dN_{\text{пад}} = nv\Delta Sdt.$$

Значит, за единицу времени через единицу площадки проходит  $nv$  частиц. Величина  $nv$  носит название *плотности потока частиц*.

Тогда эффективное сечение определяется как отношение числа рассеянных частиц под определенным углом (в растворе  $d\theta$ ) к числу падающих частиц на единицу площади в единицу времени:

$$d\sigma = \frac{dN}{nv} \quad (1.15.6)$$

Иначе, эффективное сечение – это число «положительных» событий (попадание при рассеянии в нужный раствор углов) при единичной плотности потока падающих частиц. Размерность сечения равна размерности площади, так как имеем следующие размерности входящих в (1.15.6) величин

$$[dN]=1/T, [v]=L/T, [n]=1/L^3,$$

где  $L$  длина, а  $T$  время. Тогда получаем, что размерность сечения – квадрат длины:

$$[d\sigma]=L^2. \quad (1.15.7)$$

Величина сечения определяется видом рассеивающего поля и является *важнейшей характеристикой процесса рассеяния*. Измеряется экспериментально и служит для определения структуры сталкивающихся частиц.

В классической механике связь между углом рассеяния  $\theta$  и прицельным параметром  $\rho$  взаимно однозначна. Это означает, что в интервал углов рассеяния от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$  рассеиваются только те частицы, которые летят в соответствующем интервале прицельных расстояний от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ . Поэтому число частиц, летящих в интервал  $(\theta \div \theta + d\theta)$  в единицу времени, можно записать:

$$dN = dS n v = 2\pi\rho |d\rho| n v \quad (1.15.8)$$

где  $dS$  – площадь кольца между радиусами от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$  (см рис. 15.3).

Примечание 2. В (1.15.8) стоит модуль прицельного параметра, поскольку большим прицельным параметрам соответствуют меньшие углы рассеяния. Таким образом, интервалу прицельных параметров  $(\rho \div \rho + d\rho)$  соответствует интервал углов  $(\theta \div \theta - d\theta)$ , как показано на рисунке 15.3, и поэтому  $d\rho \sim -d\theta$ . Поскольку сечение положительная величина, мы пишем модуль прицельного параметра.

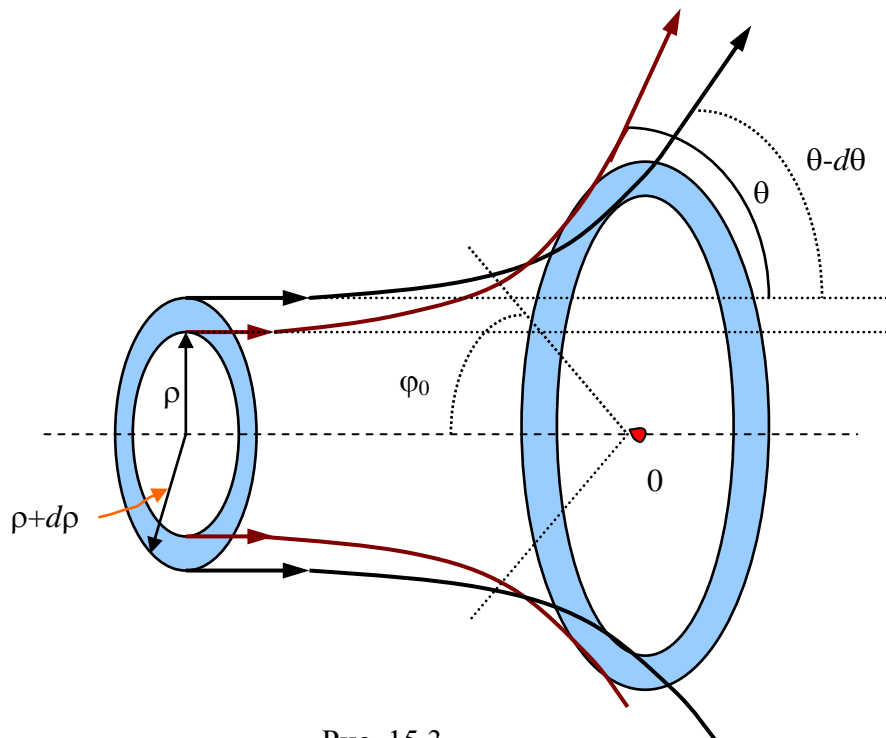


Рис. 15.3.

Итак, пользуясь определением (1.15.6), сечение может быть выражено через прицельное расстояние

$$d\sigma = 2\pi\rho |d\rho| \quad (1.15.9)$$

Однако часто удобнее с экспериментальной точки зрения характеризовать сечение углами, под которыми вылетают частицы, поскольку на эксперименте приборы – детекторы – измеряют число рассеянных частиц под каким-то углом. Этот угол при измерении может меняться, таким образом исследуется зависимость количества зафиксированных частиц (сечение) от угла рассеяния. Поэтому перепишем (1.15.9) в виде:

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta \quad (1.15.10)$$

Все частицы, которые попали в кольцо между радиусами  $(\rho \div \rho + d\rho)$ , попадают в кольцевой ”раструб”  $(\theta \div \theta - d\theta)$ , изображенный на рис. 15.3, т.е. рассеиваются под одними и теми же углами. Удобнее выразить сечение через ”объемный” или *телесный* угол, при этом получим информацию обо всех частицах, который пересекли кольцевую площадку.

**Примечание 3.** О телесном угле. Телесный угол вводят как отношение площадки  $dS$  на поверхности сферы радиуса  $r$  к квадрату этого радиуса (рис. 15.4):

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \quad (1.15.11)$$

Можно провести лучи из начала координат, проходящие через границы площадки  $dS$ , которые образуют некоторый ”раструб”. Причем любая поверхность  $dS_1$ , опирающаяся на  $dS$ , или имеющая свои границы на стенках ”раструба”, будет иметь один и тот же телесный угол  $d\Omega$ .

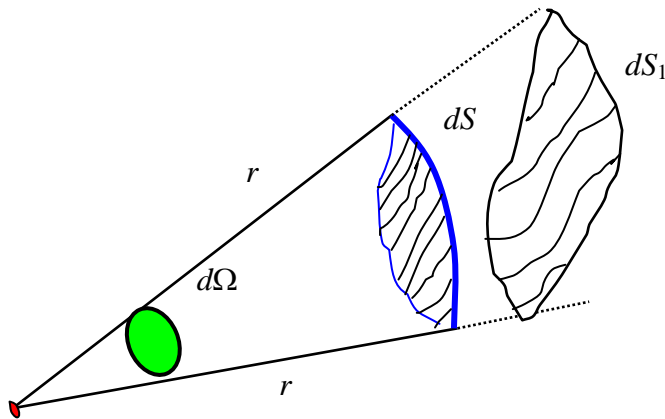


Рис. 15.4.

В качестве примера телесного угла можно привести «рупор»: любая поверхность внутри его границ имеет тот же телесный угол. Полный телесный угол равен:

$$\Omega = 4\pi, \quad (1.15.12)$$

что легко получить, если подставить всю площадь поверхности сферы  $S = 4\pi r^2$  в (1.15.11).

**Примечание 4.** В сферической системе координат бесконечно малый элемент поверхности имеет вид

$$d^2S = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Тогда бесконечно малый элемент телесного угла равен:

$$d\Omega = \frac{d^2S}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Выбирая в качестве поверхности площадь кольца



$$dS = r^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta,$$

получаем элемент телесного угла в виде (1.15.13).

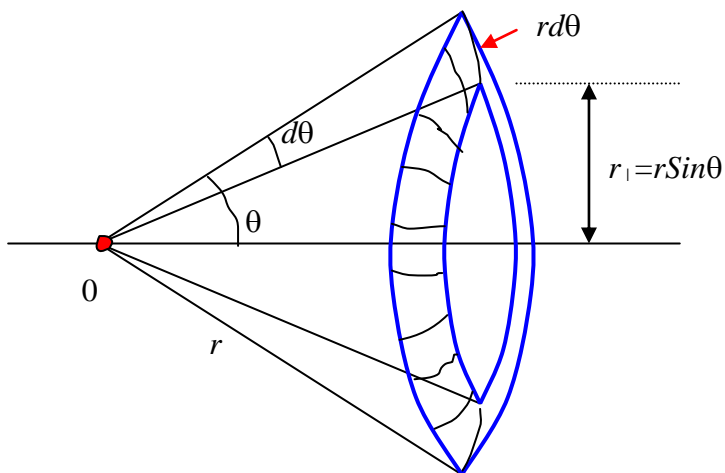


Рис. 15.5.

В нашем случае рассеяния получаем, что телесный угол определяется площадью кольца на поверхности сферы, вырезаемого двумя конусами с углами раствора  $\theta$  и  $\theta - d\theta$  (см рис. 15.5). Сосчитаем площадь этого кольца, считая, что в случае бесконечно малого угла  $d\theta$ , кривизной поверхности можно пренебречь. Площадь тонкого кольца равна

произведению длины окружности

$$2\pi r_{\perp} = 2\pi r \sin\theta$$

на ширину кольца  $rd\theta$  (длина малой дуги):

$$dS = 2\pi r_{\perp} \cdot rd\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta.$$

Откуда телесный угол, под которым видна поверхность кольца, равен:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = 2\pi \sin\theta d\theta \quad (1.15.13)$$

Тогда сечение из (1.15.10) равно:

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega \quad (1.15.14)$$

Поскольку в (1.15.14) фиксируется малый телесный угол рассеяния  $d\Omega$ , то такое сечение обычно называют *дифференциальным сечением*. Или чаще дифференциальное сечение записывают как отношение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| \quad (1.15.15)$$

Зная зависимость прицельного параметра от угла рассеяния  $\rho = \rho(\theta)$  и вычислив производную, получим дифференциальное сечение как функцию угла  $\theta$ . Это дает зависимость числа рассеянных частиц от угла рассеяния, что может измеряться на эксперименте.

Чтобы получить полное сечение  $\sigma$ , определяющее тот факт, что рассеяние вообще состоялось, и что учитываются все углы рассеяния, надо проинтегрировать (1.15.14) по всем углам.

### 1.15.3. Упругое рассеяние на твердом шаре.

Рассмотрим в качестве примера процесса рассеяния в механике рассеяние частицы на упруго отражающем шаре радиуса  $R_0$  (рис. 15.6). Чтобы воспользоваться результатами предыдущего пункта, надо найти связь между прицельным параметром  $\rho$  и углом рассеяния  $\theta$ :

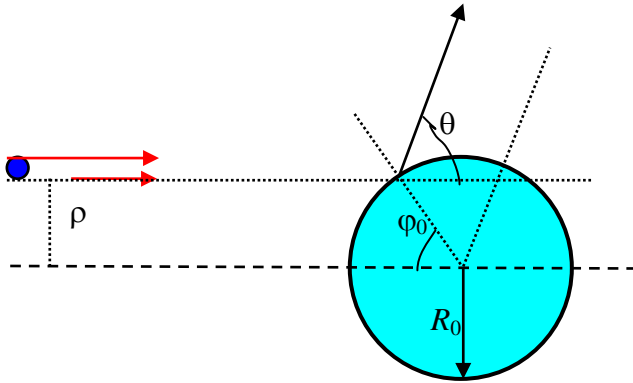


Рис. 15.6

$$\begin{aligned} \rho &= R_0 \sin \phi_0 = \\ &= R_0 \sin \left( \frac{\pi - \theta}{2} \right) = R_0 \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (1.15.16)$$

Вычисляем производную (берем ее модуль):

$$\left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = \frac{R_0}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

и подставим в формулу для дифференциального сечения (1.15.10):

$$d\sigma = 2\pi R_0 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{R_0}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi R_0^2}{2} \sin \theta d\theta$$

Вводя телесный угол (1.15.13) и разделив на него, получаем дифференциальное сечение (1.15.15) в виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R_0^2}{4}, \quad (1.15.17)$$

а полное сечение рассеяния на твердом шаре равно:

$$\sigma = \frac{\pi R_0^2}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \pi R_0^2 \quad (1.15.18)$$

Полученный результат для полного сечения рассеяния можно проинтерпретировать следующим образом: чтобы частице вообще рассеяться на твердом шаре, ей надо попасть в прицельную площадь, равную площади сечения шара. Тогда в любом случае произойдет рассеяние. А чтобы рассеяться в единицу телесного угла (дифференциальное сечение), ей достаточно попасть в площадку размером, определяемым соотношением (1.15.17). Причем дифференциальное сечение рассеяния одинаково для всех углов рассеяния.

### 1.15.4. Кулоновское рассеяние.

Рассеяние на кулоновском центре описывается формулой Резерфорда. Получим ее, учитывая связь между  $\rho$ ,  $\phi_0$  и  $\theta$  (см формулу (1.15.4)). Запишем квадрат прицельного параметра, который продифференцируем и подставим в формулу для сечения (1.15.14):

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}$$

$$2\rho d\rho = -\frac{\alpha^2}{m^2 v^4} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (1.15.19)$$

Для дифференциального сечения имеем:

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi\alpha^2}{m^2 v^4} \frac{\operatorname{Cos} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{Sin}^3 \frac{\theta}{2}} d\theta = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{4\pi \operatorname{Sin} \frac{\theta}{2} \operatorname{Cos} \frac{\theta}{2} d\theta}{\operatorname{Sin}^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{2\pi \operatorname{Sin} \theta d\theta}{\operatorname{Sin}^4 \frac{\theta}{2}}$$

И окончательно получаем сечение в следующем виде:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\operatorname{Sin}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.15.20)$$

Формула Резерфорда получается, когда для рассеяния  $\alpha$ - частиц на ядре с зарядом  $Ze$  положим коэффициент в потенциале  $\alpha = 2Ze^2$ :

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\operatorname{Sin}^4(\theta/2)} \quad (1.15.21)$$

Для сравнения с реальным экспериментом по рассеянию на фольгах необходимо еще просуммировать по числу ядер в  $1 \text{ см}^3 - n_{nucl}$ , на которых возможно рассеяние  $\alpha$ - частиц. Если ядра по площади поперечного сечения не перекрывают друг друга, то измеряемое сечение  $d\sigma^{macro}$  равно:

$$d\sigma^{macro} = n_{nucl} d\sigma \quad (1.15.22)$$

При анализе результатов эксперимента Резерфордом с коллегами проверялась следующая величина:

$$dN \cdot \operatorname{Sin}^4 \frac{\theta}{2} = nv \cdot n_{nucl} \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 d\Omega \quad (1.15.23)$$

Условия эксперимента не менялись, тогда правая часть уравнения (1.15.23) остается постоянной и число рассеянных частиц под углами  $\theta$  должно быть пропорционально

$$dN \sim \frac{1}{\operatorname{Sin}^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Эта зависимость и была получена на опыте. Таким образом, опытами Резерфорда, Гейгера и Марсдена и сравнением с формулой Резерфорда удалось установить, что  $\alpha$ - частицы рассеивает точечный центр с положительным зарядом. Этот массивный центр – *ядро атома*. Теоретическое объяснение этих экспериментов привело Резерфорда к созданию планетарной модели атома: в центре атома находится массивный положительный заряд, малых размеров по сравнению с размерами атома, в поле которого движутся электроны.

## 1.16. Вращение твердого тела.

### 1.16.1. Движение твердого тела.

*Твердое тело* – система материальных точек, расстояние между которыми неизменно. Такое определение справедливо для абсолютно твердого тела, в реальности это свойство является приближением.

Движение твердого тела, иначе перемещение **любой точки твердого тела**, всегда можно разбить на 2 движения: *поступательное* и *вращательное*. В механике доказывается общая теорема (правило):

**произвольное движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела со скоростью какой-либо его точки  $O$  и вращения этого тела вокруг оси, проходящей через эту точку.**

Для описания движения твердого тела обычно вводят 2 системы координат:  $(x, y, z)$  – лабораторная система и  $(x', y', z')$  – система, связанная с точкой  $O$  (см рис. 16.1). При этом поступательная скорость тела  $\vec{V}$  зависит от того, какую точку  $O$  выбрать в качестве основной точки отсчета. Угловая скорость  $\vec{\omega}$  от этого выбора не зависит: она абсолютна.

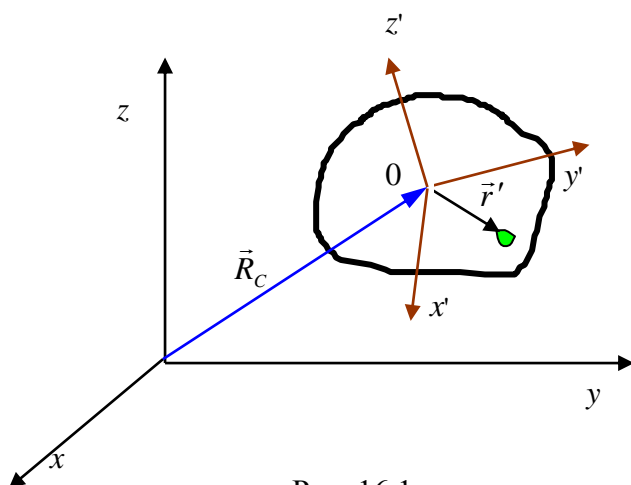


Рис. 16.1.

Обычно в качестве основной точки выбирают центр инерции тела, определяемый радиус-вектором  $\vec{R}_c$  и скоростью перемещения  $\vec{V}_c$ . Бесконечно малые перемещения любой точки твердого тела и скорость этой точки относительно лабораторной системы координат записываются:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d\vec{R}_c + [d\vec{\varphi}, \vec{r}'] \\ \vec{v} &= \vec{V}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}'] \end{aligned} \quad (1.16.1)$$

Как и для системы материальных точек можно написать 2 векторных уравнения, которые полностью описывают движение твердого тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (1.16.2)$$

Итак, 6 переменных (3 поступательных и 3 вращательных) описывают движение твердого тела, и, соответственно, имеется 6 уравнений. Это позволяет решить задачу о движении твердого тела.

### 1.16.2. Вращение вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим твердое тело в системе центра инерции – СЦИ, тогда мы имеем дело только с вращательным движением. Положим для простоты, что

эта ось неподвижна в пространстве (в общем случае не так). Тогда для материальной точки массы  $m$  можно записать:

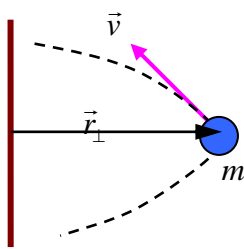


Рис. 16.2.

$$|\vec{L}| = L = |m[\vec{r}, \vec{v}]| = mr_{\perp}v = mr_{\perp}^2\omega \quad (1.16.3)$$

Здесь  $r_{\perp}$  – расстояние от оси вращения до материальной точки,  $L$  проекция МИ на ось вращения. Для системы материальных точек проекция МИ на ось вращения может быть получена суммированием по материальным точкам, учитывая, что угловая скорость одинакова для всех точек системы:

$$L = \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 \omega = I\omega \quad (1.16.4)$$

Здесь мы ввели *момент инерции* системы  $I$  относительно оси:

$$I \equiv \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 \quad (1.16.5)$$

(см также ниже Примечание 1).

Определение: Величина  $I$ , равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения, называется *моментом инерции системы относительно этой оси*.

Момент инерции во вращательном движении играет ту же роль, что и масса в поступательном движении. Момент инерции относительно оси определяет инертность тела при повороте вокруг данной оси. Момент инерции твердого тела зависит от распределения масс относительно интересующей нас оси и является величиной аддитивной. Для твердого тела момент инерции определяется:

$$I = \int r_{\perp}^2 \rho dV = \int r_{\perp}^2 dm \quad (1.16.6)$$

где  $r_{\perp}$  – расстояние от элемента объема  $dV$  до оси вращения,  $\rho = \rho(\vec{r})$  – плотность вещества в данной точке. Элемент объема  $dV$  выбирается в зависимости от системы координат:

в декартовой системе координат  $dV = dx dy dz$ ,

в цилиндрической  $dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\varphi dz$ ,

в сферической системе  $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$ .

Момент инерции твердого тела зависит от положения оси вращения. Рассмотрим моменты инерции для нескольких вращающихся тел, представленных на рис. 16.3 (подробнее см следующий параграф 1.17).

а). Диск радиуса  $R$  и ось вращения проходит через диаметр диска, тогда его момент инерции относительно такой оси вращения равен:

$$I = \frac{1}{4} mR^2 \quad (1.16.7)$$

где  $m$  – масса диска.

б). Тот же диск радиуса  $R$ , а ось вращения проходит через его центр и вдоль оси симметрии, тогда его момент инерции равен:

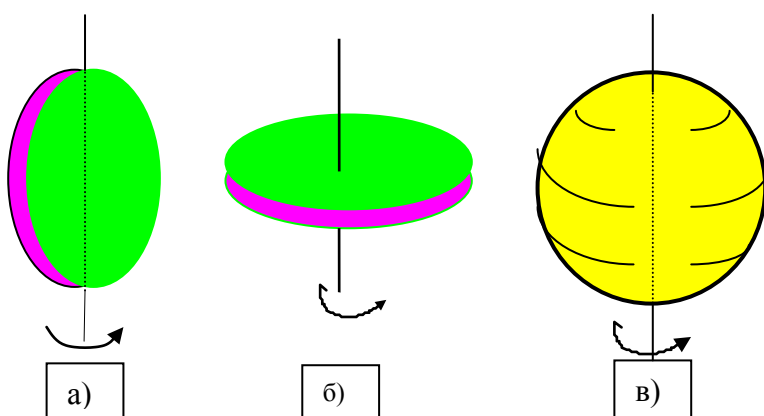


Рис. 16.3.

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \quad (1.16.8)$$

в). Момент инерции шара массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через его центр, определяется:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \quad (1.16.9)$$

Уравнение моментов записывается, как и прежде в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (1.16.10)$$

Для симметричных волчков, когда ось вращения проходит по оси симметрии можно написать:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (1.16.11)$$

Тогда можно записать уравнение движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} \quad (1.16.12)$$

Если момент инерции тела во время движения не меняется ( $I = const$ ), то получаем следующее уравнение:

$$M = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (1.16.13)$$

где  $M$  момент внешних сил относительно оси вращения. Уравнение (1.16.13) – аналог 2-го закона Ньютона при записи через массу тела.

**Примечание 1.** Для несимметричного (или неоднородного) тела (рис. 16.4) момент импульса  $\vec{L}$ , вообще говоря, не совпадает по направлению с вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Из рисунка 16.4 видно, что для симметричной части тела относительно оси угловая скорость совпадает по направлению с МИ. Однако момент импульса каждой части, не входящей в симметричную часть, дает  $\vec{L}_i$ . Из-за этой части получаем отклонение направлений МИ и угловой скорости. При вращении  $\vec{L}$  описывает конус  $d\vec{L} = \vec{M}_{ext} dt$ , «нанизанный» на

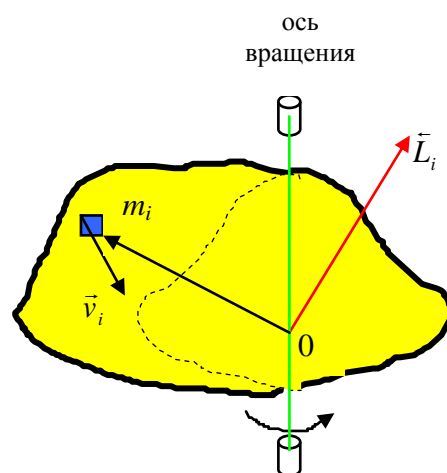


Рис. 16.4.

ось вращения. Однако выражение для проекции МИ на ось вращения остается всегда правильным:

$$L_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = I\omega,$$

где  $r_i$  – опять расстояние элемента объема массы  $\Delta m_i$  до оси.

**Примечание 2.** Демонстрация закона сохранения момента импульса в замкнутой системе – скамья Жуковского. Рассматривается система: вращающаяся скамья + демонстратор, сидящий на скамье (момент внешних сил  $\vec{M}_{ext} \approx 0$ , если пренебречь силами трения). 1). Демонстратор вращается на скамье и держит в руках гири. Поскольку  $\vec{M}_{ext} \approx 0$  и тогда  $I\omega = const$ , то при разведении рук с гирями - угловая скорость уменьшается, так как увеличивается момент инерции системы относительно оси вращения. 2). Демонстратор на покоящейся скамье держит вращающееся велосипедное колесо. Поскольку сохраняется МИ вдоль оси вращения, то при изменении угла вращения колеса (руками демонстратора) скамья также приходит в движение, чтобы сохранить МИ вдоль оси вращения.

### 1.16.3. Кинетическая энергия вращающегося тела.

Энергия поступательного движения твердого тела  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , где  $v$  – скорость, одинаковая для всех точек тела. Кинетическую энергию вращающегося тела в системе центра инерции (СЦИ) получим, разбив тело на маленькие кусочки и учитывая, что угловая скорость  $\omega$  одинаковая для всех точек (рис. 16.5):

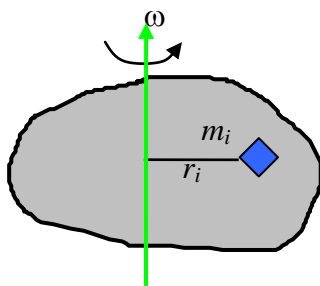


Рис. 16.5.

$$v_i = \omega r_{\perp i}, \quad \Delta E_{kin} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{\perp i}^2 \quad (1.16.14)$$

Здесь  $r_i = r_{\perp i}$  – расстояние до оси вращения. Проводя суммирование по всем кусочкам или интегрирование по объему тела, получим:

$$E_{ep} = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r_{\perp}^2 dm = \frac{I\omega^2}{2} \quad (1.16.15)$$

Для твердого тела, участвующего в поступательном и вращательном движении, **кинетическую энергию можно представить в виде суммы, если ось вращения проходит через центр инерции:**

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} \quad (1.16.16)$$

где  $I_0$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции. Формула (1.16.16) справедлива для, так называемого, **плоского движения**, это такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно одной плоскости. Иначе, центр системы совершает движение лишь в плоскости, тогда в СЦИ остается только вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр инерции. Покажем это. Пусть в системе центра инерции  $K'$  кинетическая энергия равна:



$$E' = \frac{1}{2} I_0 \omega^2.$$

Тогда в лабораторной системе К в соответствии с (1.16.1) имеем:

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} (\vec{V} + [\vec{\omega}, \vec{r}'_i])^2 = \\ &= \sum_i \frac{\Delta m_i V^2}{2} + \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} \omega^2 r_i'^2 + \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} 2(\vec{V}, [\vec{\omega}, \vec{r}'_i]) \end{aligned} \quad (1.16.17)$$

Здесь  $\vec{V}$  – скорость центра инерции (или скорость системы К'). Последний член в (1.16.17) преобразуем с помощью формулы векторной алгебры (в смешанном произведении векторов можно производить циклическую перестановку векторов):

$$\sum_i \frac{\Delta m_i}{2} 2(\vec{V}, [\vec{\omega}, \vec{r}'_i]) = \sum_i \Delta m_i (\vec{r}'_i, [\vec{V}, \vec{\omega}]) = \left( \sum_i \Delta m_i \vec{r}'_i, [\vec{V}, \vec{\omega}] \right) = 0$$

Здесь мы воспользовались тем, что для системы центра инерции  $\sum_i \Delta m_i \vec{r}'_i = 0$ . Таким образом, получаем кинетическую энергию вращающегося тела в виде (1.16.16):

$$E_{kin} = \frac{V^2}{2} \sum_i \Delta m_i + \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i'^2 = \frac{mV^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2} \quad (1.16.18)$$

Рассмотрим пример.

Скатывание шара по наклонной плоскости с высоты  $h$  без проскальзывания с начальной нулевой скоростью (рис. 16.6). Найдём скорость перемещения шара в конце спуска. Из закона сохранения энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2} + mgh = const$$

имеем:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2}$$

Условие движения без проскальзывания означает, что линейная скорость центра масс связана с угловой скоростью  $v = \omega r$ , момент инерции шара (см (1.16.9)) равен  $I_0 = \frac{2}{5} mr^2$ . Тогда находим скорость шара в конце спуска:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} gh} \quad (1.16.19)$$

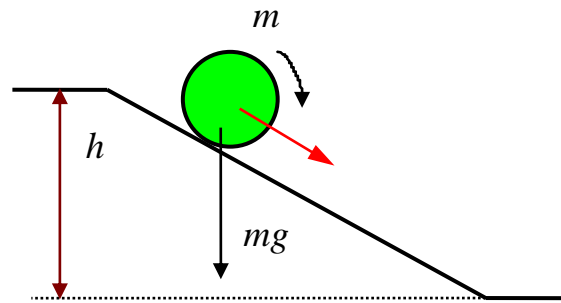


Рис. 16.6.

#### 1.16.4. Гироскоп

**Гироскопом** называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии. Поскольку ось гироскопа совпадает с одной из главных осей инерции, то пользуемся уравнением (1.16.11)

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

где  $I$  – момент инерции гироскопа относительно этой оси;  $\vec{\omega}$  – угловая скорость собственного вращения.

Если суммарный момент внешних сил, действующих на гироскоп, равен нулю, то момент его импульса постоянный. Отсюда следует важное для практического применения свойство гироскопа сохранять неизменным направление оси в пространстве. Если к вращающемуся гироскопу приложить момент сил, который стремится повернуть его вокруг оси, перпендикулярной оси вращения гироскопа, то он станет поворачиваться вокруг третьей оси, перпендикулярной первым двум. Такое поведение гироскопа полностью соответствует законам динамики вращательного движения.

Точное решение задачи о вращении гироскопа относительно произвольных осей сопряжено с математическими трудностями. Рассмотрим приближенное решение этой задачи для простейшего случая.

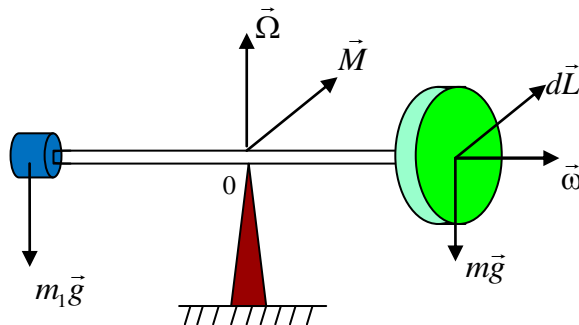


Рис. 16.7

Пусть гироскоп представляет собой насаженный на ось массивный диск массы  $m$ , который вращается с большой угловой скоростью  $\omega$ , как показано на рис. 16.7, и уравновешен с помощью подвижного груза массой  $m_1$ . Момент импульса диска направлен вдоль оси вправо, как и вектор угловой скорости, и если момент внешних сил (силы тяжести) равен нулю, то

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = const$$

Если переместить груз  $m_1$  вправо, то нарушается равновесие в горизонтальном направлении и возникает суммарный момент внешних сил  $\vec{M}$  относительно центра вращения  $0$ , направленный перпендикулярно плоскости чертежа от наблюдателя. В силу уравнения моментов (1.16.10)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

ось гироскопа повернется за плоскость чертежа (от нас), поскольку приращение момента импульса гироскопа  $d\vec{L} = \vec{M}dt$  имеет такое же направление, как и  $\vec{M}$ . Таким образом, за время  $dt$  ось симметрии гироскопа повернется в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси на

некоторый угол  $d\varphi$ . Поскольку вектор  $\vec{M}$  продолжает оставаться перпендикулярным оси гироскопа, то ось все время будет вращаться в горизонтальной плоскости с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1.16.20)$$

Вращение гироскопа под действием момента сил называется *прецессией*.

Чем меньше приращение момента импульса, тем меньше угловая скорость прецессии. Если  $\Omega \ll \omega$ , то бесконечно малое приращение угла  $d\varphi$  можно определить из отношения:

$$d\varphi = \frac{dL}{L} \quad (1.16.21)$$

Подставляя это значение в равенство (1.16.20), получаем для модуля угловой скорости прецессии:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega} \quad (1.16.22)$$

Угловая скорость прецессии прямо пропорциональна моменту сил и обратно пропорциональна моменту инерции  $I$  и угловой скорости собственного вращения  $\omega$  гироскопа. Нетрудно получить векторное соотношение

$$[\vec{\Omega}, \vec{L}] = \vec{M} \quad (1.16.23)$$

Из уравнения (1.16.22) видно, что момент силы  $M$  определяет угловую скорость прецессии (а не ускорение). Поэтому говорят, что прецессия не имеет инерции: мгновенное устранение момента силы  $M$  приводит к мгновенному исчезновению и прецессии.

Момент действующих на гироскоп сил может иметь любую природу. Для обеспечения регулярности прецессии, т.е. постоянства угловой скорости  $\Omega$ , важно, чтобы вектор  $\vec{M}$ , не изменяясь по модулю, поворачивался вместе с осью гироскопа.

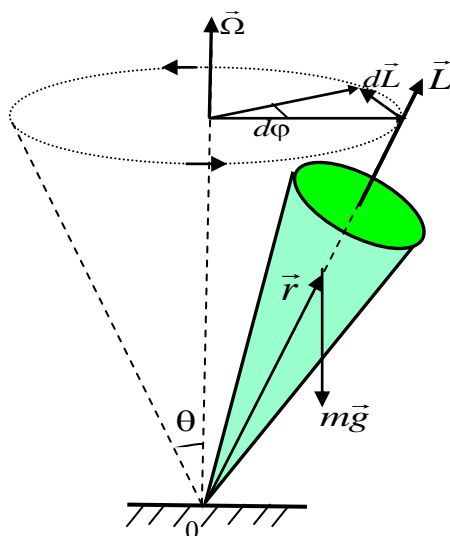


Рис.16.8

Заметим, что при кратковременном действии на ось гироскопа даже довольно большой силы, вызывающей временное несовпадение оси вращения и главной оси инерции, наблюдаются лишь колебания оси, называемое *нутацией*. При наличии трения такие колебания затухают.

Другой часто встречающийся вид гироскопа – так называемый *волчок* (рис. 16.8). Опыт показывает, что если ось вращающегося волчка отклонена от вертикали на некоторый угол  $\theta$ , то волчок не падает под действием силы тяжести, а совершает прецессионное движение. Его ось, определяемая векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{L}$ ,

описывает конус вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ . И чем больше угловая скорость  $\omega$  вращения волчка вокруг своей оси, тем меньше угловая скорость прецессии  $\Omega$ .

Под действием момента силы тяжести  $\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}]$  момент импульса гироскопа получает приращение  $d\vec{L} = \vec{M}dt$ . Из рис. 16.8 видно, что  $d\vec{L} \perp \vec{L}$ . В результате вектор  $\vec{L}$ , а значит, и ось волчка будут поворачиваться вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус.

Найдем угловую скорость прецессии наклоненного волчка массой  $m$ , который вращается с большой угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси симметрии. Пусть момент инерции волчка относительно этой оси равен  $I$ , а центр масс находится на расстоянии  $r$  от точки опоры. Из выражения (1.16.22) получаем угловую скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{L \sin \theta dt} = \frac{M}{L \sin \theta} = \frac{mgr \sin \theta}{I \omega \sin \theta} = \frac{mgr}{I \omega} \quad (1.16.24)$$

Отметим, что если ось гироскопа закреплена в подставке и подставка поворачивается под действием внешних сил, то это в общем случае приводит к приращению момента импульса  $d\vec{L}$ . Это означает, что на гироскоп действует момент сил  $\vec{M}$  со стороны подставки, который совпадает по направлению с вектором  $d\vec{L}$ . Ось же гироскопа в соответствии с третьим законом Ньютона будет действовать на подставку с противоположным по направлению моментом сил. Эти силы называют гироскопическими, они создают гироскопический момент  $\vec{M}' = -\vec{M}$ . Гироскопический эффект лежит в основе конструкций разных приборов: гироскопа, «искусственного горизонта» в самолетах, гироскопического успокоителя качки корабля, гироскопического стабилизатора положения ракеты и др. В ряде случаев при наличии в механизмах частей с быстрым вращением гироскопические силы могут оказывать вредное влияние. Например, при резком повороте корабля быстро вращающаяся ось турбины оказывает значительное дополнительное давление на подшипники, что может привести к их разрушению.

---

**Приложение 1.** Еще раз напомним об аналогии между двумя видами движения: поступательным и вращательным.

|                    |                                 |                   |  |                    |           |                                     |
|--------------------|---------------------------------|-------------------|--|--------------------|-----------|-------------------------------------|
| Скорость           | $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ | $\Leftrightarrow$ | $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ | угловая скорость,  | их связь: | $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ |
| Импульс            | $\vec{p} = m\vec{v}$            | $\Leftrightarrow$ | $\vec{L}$                                  | момент импульса,   | их связь: | $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$      |
| Масса              | $m$                             | $\Leftrightarrow$ | $I$  | момент инерции,    |           | $I = \int r_{\perp}^2 dm$           |
| Уравнение движения | $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ | $\Leftrightarrow$ | $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$            | уравнение моментов |           |                                     |
| Работа сил         | $dA = \vec{F}d\vec{r}$          | $\Leftrightarrow$ | $dA = \vec{M}d\vec{\varphi}$               | работа момента сил |           |                                     |

---

## 1.17. Момент инерции.

### 1.17.1. Моменты инерции диска и шара.

Одна из основных задач механики связана с определением характеристик вращательного движения. Для этого часто необходимо знать моменты инерции тел относительно различного расположения осей вращения. В качестве примера сосчитаем моменты инерции диска и шара относительно осей симметрии.

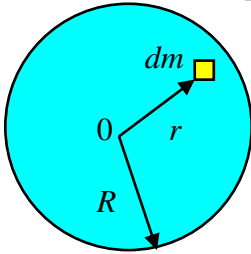


Рис. 17.1.

1) Момент инерции диска (цилиндра) относительно оси симметрии проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости (рис. 17.1). Пусть масса однородного диска  $m$ , а его радиус и толщина равны  $R$  и  $h$ , соответственно. Тогда момент инерции маленького кусочка  $dm$  равен:

$$d^2I = r^2 dm = r^2 \rho dV = \rho r^2 \cdot h r dr d\varphi = \rho h r^3 dr d\varphi \quad (1.17.1)$$

где  $\rho$  – плотность вещества диска,  $r$  – расстояние до оси вращения, а элемент объема  $dV$  взят в цилиндрической системе координат. Напомним, что объем всего диска или цилиндра равен  $V = \pi R^2 h$ . Интегрируя выражение (1.17.1) по углу  $\varphi$  и радиусу  $r$ , получаем момент инерции диска (цилиндра):

$$I = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho h \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{1}{2} R^2 \cdot \rho \pi R^2 h$$

$$I = mR^2/2. \quad (1.17.2)$$

Получили формулу (1.16.8), которую приводили ранее в параграфе 1.16.

2) Момент инерции однородного шара массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси проходящей через центр. Удобнее его вычислять в сферической системе координат. Тогда момент инерции маленького кусочка шара  $dm$  равен (рис. 17.2):

$$d^3I = (r_{\perp})^2 dm = (r \sin \theta)^2 \rho dV = \rho (r \sin \theta)^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

где  $r_{\perp} = r \sin \theta$  – расстояние кусочка массы  $dm$  до оси вращения,  $\rho$  – плотность шара. Интегрируя по всем переменным:

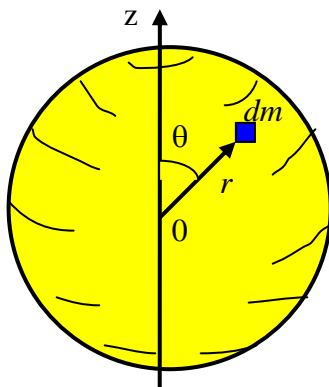


Рис. 17.2.

$$I = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (1.17.3)$$

и учитывая, что масса шара равна  $m = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$ , получаем момент инерции шара относительно оси симметрии:

$$I_{zz} = 2mR^2/5 \quad (1.17.4)$$

Достаточно просто вычисляются моменты инерции относительно оси, проходящей через центр симметрии и центр инерции. Однако непосредственно вычислять момент инерции относительно

произвольной оси достаточно сложно. В этом случае помогает теорема Штейнера.

### 1.17.2. Теорема Штейнера.

Теорема Штейнера гласит (см рис. 17.3):

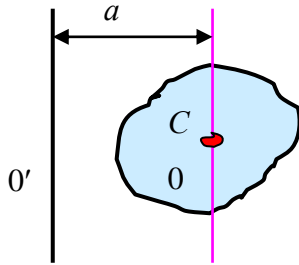


Рис. 17.3.

*Момент инерции  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_c$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

$$I = I_c + ma^2 \quad (1.17.5)$$

Так, например, для диска момент инерции относительно оси  $O'$ , проходящей через край диска перпендикулярно его плоскости, равен:

$$I_{O'} = I_0 + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \quad (1.17.6)$$

Докажем теорему Штейнера. Пусть точка  $C$  – центр инерции тела (см рис. 17.4), ось проходит через точку  $C$  перпендикулярно к плоскости чертежа. Таким же образом проходит ось через точку  $O$ . Вектор  $\vec{a}$  – вектор направленный от точки  $O$  к точке  $C$ . Выберем кусочек  $dm_i$  и проведем вектора  $\vec{R}_i$  и  $\vec{R}'_i$ . При этом получаем

$$\vec{R}'_i = \vec{a} + \vec{R}_i \quad (1.17.7)$$

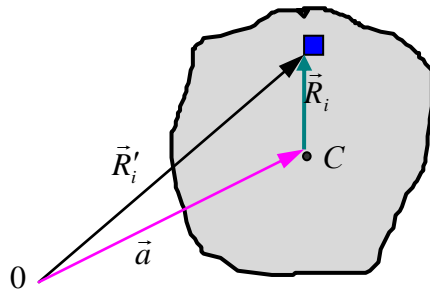


Рис. 17.4.

Тогда момент инерции относительно точки  $O$  равен:

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_i \Delta m_i R_i'^2 = \\ &= a^2 \sum_i \Delta m_i + 2\vec{a} \sum_i \Delta m_i \vec{R}_i + \sum_i \Delta m_i R_i^2 \end{aligned} \quad (1.17.8)$$

Последнее слагаемое в (1.17.8) дает момент инерции относительно оси, проходящий через центр инерции, т.е.  $I_c$ . Второе слагаемое равно нулю, т.к. сумма  $\sum_i \Delta m_i \vec{R}_i = 0$

для точки, являющейся центром инерции (эта сумма определяет радиус-вектор центра инерции, который равен нулю, если отсчитывать от самого центра инерции). Итак, получаем теорему Штейнера – соотношение (1.17.5), что и требовалось доказать.

### 1.17.3. Главные моменты инерции.

В принципе тело при вращении вокруг различных осей, проходящих через центр инерции, имеет различные моменты инерции. Так, момент инерции диска относительно оси, изображенной на рисунке 17.5, имеет

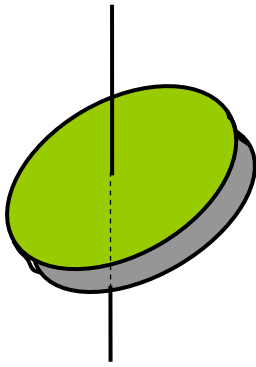


Рис. 17.5.

другое значение, чем относительно оси симметрии, при этом момент импульса не совпадает по направлению с вектором угловой скорости. Вращение вокруг такой оси является неустойчивым.

Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением массы существуют 3 взаимно перпендикулярные, проходящие через центр инерции тела, оси, которые могут служить *свободными осями*. Это такие оси, положение которых в пространстве остается неизменным при вращении вокруг нее тела в отсутствие внешних сил. Иначе говоря, для сохранения вращения не нужно прикладывать внешние силы. Это такие оси, при вращении вокруг которых направление вектора  $\vec{L}$  совпадает с направлением вектора  $\vec{\omega}$ .

Три такие оси называются *главными осями инерции тела*, а моменты инерции относительно их называются *главными моментами инерции*.

Примеры главных осей для цилиндра изображены на рисунке 17.6, а для параллелепипеда – на рис. 17.7.

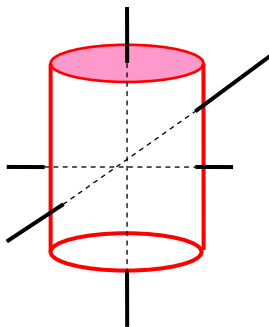


Рис. 17.6.

Рассмотрим основные определения и выводы, которые следуют из исследования вращения твердых тел.

Для тел с центральной симметрией все главные моменты инерции равны друг другу –  $I_1 = I_2 = I_3$ . Это, так называемые, *шаровые волчки*.

Для тел с осевой симметрией –  $I_1 = I_2 \neq I_3$  имеем дело с *симметричными волчками*.

В общем случае все главные моменты инерции различны:  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . Это *асимметричные волчки*.

Вращение вокруг осей, соответствующее максимальным и минимальным значениям момента инерции, является устойчивым, а вокруг других – неустойчивым.

Рассмотрим в качестве примера вращение коробка спичек (рис. 17.7). Можно «экспериментально» установить устойчивые оси вращения: одна ось проходит через центр грани с наибольшей поверхностью (на рис. 17.7 ось 1-1), другая ось – через центр грани с наименьшей поверхностью (ось 3-3).

При внешнем воздействии наиболее устойчивым является то вращение, которое соответствует максимальному значению главного момента инерции. Рассмотрим, как пример, вращение диска, закрепленного за его край с помощью нити (см рис. 17.8). Диск при установившемся вращении выстраивается так, чтобы ось вращения проходит через ось симметрии,

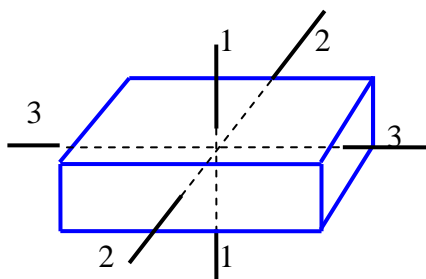


Рис. 17.7.



относительно которой имеется максимальный момент инерции как показано на рисунке 17.8.

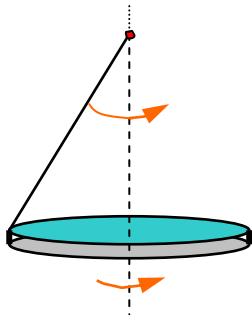


Рис. 17.8.

Итак, для вращения вокруг свободных (главных) осей имеем

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} L_x = I_1\omega_x \\ L_y = I_2\omega_y \\ L_z = I_3\omega_z \end{cases} \quad (1.17.9)$$

Последние равенства справедливы, если оси  $(x,y,z)$  совпадают с главными осями вращения.

Однако если вращение происходит вокруг произвольных осей и оси  $(x,y,z)$  ориентированы произвольно, то связь между компонентами становится более сложной:

$$\begin{cases} L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases} \quad (1.17.10)$$

Здесь  $I_{ik}$  – коэффициенты пропорциональности, имеющие размерность момента инерции. Недиагональные коэффициенты характеризуют вклад перпендикулярных компонент угловой скорости в выбранную компоненту момента импульса.

Приведем несколько частных случаев уравнений (1.17.10).

1) Пусть  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$  и  $I_{ij} = 0$  (при  $i \neq j$ ), тогда получаем более простое уравнение для связи момента импульса и угловой скоростью  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ .

2) Если ось вращения направлена вдоль оси  $z$ , то есть  $\omega_z \neq 0$ , а остальные проекции угловой скорости равны нулю –  $\omega_x = \omega_y = 0$ , то получаем  $L_x = I_{xz}\omega_z$ ,  $L_y = I_{yz}\omega_z$ ,  $L_z = I_{zz}\omega_z$ .

В общем случае совокупность всех этих 9 величин  $I_{ik}$  – тензор 2-го ранга – *тензор инерции*. Он представляется в виде таблицы:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.17.11)$$

Операция, определяемая (1.17.10), – это умножение вектора  $\vec{\omega}$  на тензор  $\hat{I}$ , в результате получаем новый вектор  $\vec{L}$ . Короткая запись уравнений (1.17.10) имеет вид:

$$L_i = \sum_{k=x,y,z} I_{ik}\omega_k, \quad i = x, y, z \quad (1.17.12)$$

Тензор инерции характеризует инертные свойства тела при вращении.

#### 1.17.4. Компоненты тензора инерции.

Найдем выражение для тензора инерции. Запишем момент импульса как сумму моментов импульса кусочков массы:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] \quad (1.17.13)$$

где вектор  $\vec{r}_i$  откладываем от центра масс. Двойное векторное произведение раскладываем по известному правилу векторной алгебры “БАЦ-«минус»-ЦАБ” (легко проверить это правило, расписывая векторные произведения):

$$[\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}) \quad (1.17.14)$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(\vec{r}_i, \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i, \vec{\omega}) \} = \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \vec{r}_i(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \}$$

Найдем проекцию момента импульса на ось  $x$ :

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \{ \omega_x(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \} = \\ &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i = \omega_x I_{xx} + \omega_y I_{xy} + \omega_z I_{xz} \end{aligned}$$

Рассматривая аналогично другие проекции, получаем тензор момента инерции в виде:

$$I \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (1.17.15)$$

Тензор симметричный:  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$  и  $I_{yz} = I_{zy}$ . Для протяженных тел (с непрерывным распределением массы) тензор и его компоненты вычисляются с помощью интегрирования, так, например:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm = \int \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dV \\ I_{xy} &= \int xy dm = \int xy \rho(x, y, z) dV \end{aligned} \quad (1.17.16)$$

Если в качестве **координатных осей**  $(x, y, z)$  взять **главные оси инерции**, то тензор становится диагональным:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (1.17.17)$$

---

**Примечание 1.** В математике доказывается, что любую матрицу можно привести к диагональному виду путем выбора осей (см напр. в литературе: Гантмахер, гл.10, §53).

---

## 1.18. Законы сохранения и симметрия пространства и времени.

### 1.18.1. Законы сохранения.

В предыдущих параграфах мы рассмотрели три закона сохранения для замкнутых систем: *закон сохранения энергии, импульса и момента импульса*.

Часто сохраняющиеся величины в механике (и в физике вообще) называют *интегралами движения*. Но всегда особенно выделяют эти три закона сохранения, поскольку их происхождение имеет глубокий смысл – они связаны со свойствами пространства и времени, их однородностью и изотропией. Для этих интегралов движения выполняется важнейшее свойство – *аддитивность*.

Такое утверждение, что законы сохранения есть следствие однородности и изотропии пространства и времени, встречается довольно часто. Однако было бы неверно подумать, что указанных свойств пространства и времени достаточно, чтобы вывести эти законы сохранения. Все перечисленные законы есть следствие законов движения (например, 2-го закона Ньютона). Поэтому необходимо понимать следующее: *законы сохранения можно получить из 2-го закона Ньютона, если к нему присоединить свойства симметрии пространства и времени*.

Что такое однородность времени, пространства и изотропия пространства? Необходимо дать точные характеристики и определения.

1). *Однородность времени* означает, что если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то, начиная с этих моментов, все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

2). *Однородность пространства* означает, что если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.

3). *Изотропия пространства* означает то же (что в п. 2) по отношению к повороту системы на заданный угол.

Эти свойства пространства и времени – *фундаментальное обобщение опытных фактов*.

### 1.18.2. Закон сохранения импульса и однородность пространства.

Итак, в силу однородности пространства механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Для замкнутой системы закон сохранения импульса формально следует из 2-го и 3-го законов Ньютона:

$$\vec{F}_{ext} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (1.18.1)$$

Однако справедливость 3-го закона Ньютона и закона сохранения импульса *обусловлены однородностью пространства*. Пусть мы имеем внутренние

силы  $\vec{F}_i$ , действующие в замкнутой системе. Однородность пространства означает следующее: перенесем все частицы системы в пространстве на расстояние  $d\vec{r}$  и, поскольку ничего не может измениться, заключаем, что работа всех внутренних сил (работа над  $i$ -ой частицей  $\vec{F}_i d\vec{r}$ ), которая всегда равна изменению потенциальной энергии, должна быть равна 0. Запишем это условие:

$$\vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) d\vec{r} = 0. \quad (1.18.2)$$

Или иначе, вспоминая, что полная сила на  $i$  частицу равна сумме сил со стороны каждой другой частицы, получим:

$$d\vec{r} \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = 0 \quad (1.18.3)$$

В силу произвольности  $d\vec{r}$  получаем закон сохранения импульса:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt}; \quad \vec{p} = const \quad (1.18.4)$$

Переписывая это иначе

$$\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = 0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}), \quad (1.18.5)$$

в силу независимости взаимодействия каждой из пар частиц друг с другом получаем 3-ий закон Ньютона:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (1.18.6)$$

**Примечание 1.** Если у нас носителями импульса являются не только материальные тела, но и поле, то 3-ий закон Ньютона в этой формулировке неприменим. Нужно учитывать поле, его импульс, и тогда снова для замкнутой системы получим  $\vec{p} = const$  из свойства однородности пространства.

### 1.18.3. Закон сохранения момента импульса и изотропия пространства.

Для замкнутой системы момент внешних сил равен нулю  $\vec{M}_{ext} = 0$ .

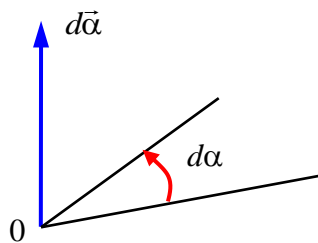


Рис. 18.1.

Изотропия означает, что если замкнутую систему повернуть на какой-нибудь угол в пространстве, то ничего не изменится (рис. 18.1). Пусть  $\vec{M}_i$  – моменты внутренних сил относительно неподвижной точки 0. Повернем всю систему на угол  $d\alpha$ . Из изотропии следует, что работа моментов сил должна быть равна нулю:

$$dA = \vec{M}_1 d\vec{\alpha} + \vec{M}_2 d\vec{\alpha} + \dots = 0 \quad (1.18.7)$$

В силу произвольности угла поворота  $d\alpha$  заключаем, что сумма моментов внутренних сил равна 0:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots = \sum_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (1.18.8)$$

И отсюда следует закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L} = \text{const} \quad (1.18.9)$$

Таким образом, закон сохранения момента импульса связан с изотропией пространства.

#### 1.18.4. Закон сохранения энергии и однородность времени.

Из динамики получаем следствие 2-го закона Ньютона - работа сил над механической системой равна приращению ее кинетической энергии  $K$ :

$$A_{12} = K_2 - K_1 \quad (1.18.10)$$

Пусть на  $i$ -ую частицу действует сила  $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ , компоненты которой определяются:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.18.11)$$

В самом общем случае потенциальная энергия  $U$  (например, для незамкнутой системы) зависит еще от времени  $t$ :  $U = U(x, y, z, t)$ . Поэтому полное приращение  $U$  включает также и производную по времени (т.е. полный дифференциал функции):

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (1.18.12)$$

При этом конечное приращение потенциальной энергии при переходе из состояния 1 в состояние 2 определяется интегралом:

$$\int_1^2 dU(x, y, z, t) = U_2 - U_1, \quad (1.18.13)$$

где 1 и 2 в принципе могут означать разные пространственные точки и разные времена. Запишем более подробно работу сил при пространственном перемещении из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\int_1^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \Rightarrow$$

Чтобы в скобках появился полный дифференциал, и можно было бы воспользоваться (1.18.13), добавим и вычтем частную производную по времени:

$$\Rightarrow -\int_1^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt \right) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = -(U_2 - U_1) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (1.18.14)$$

Складывая так для всех частиц, получаем из равенства работ:

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = K_2 - K_1 \quad (1.18.15)$$

Или переписывая (1.18.15), получаем:

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (1.18.16)$$

Теперь пусть система замкнута. Однородность времени заключается в том, что в любой момент времени может одинаковым образом происходить развитие событий, т.е. потенциальная энергия не может явно зависеть от времени:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1.18.17)$$

Тогда из (1.18.16) получаем закон сохранения энергии:

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \quad (1.18.18)$$

Вместо заключения. Между уравнениями динамики и законами сохранения имеется существенная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Законы сохранения обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени и поэтому они универсальны и всеобщы. Но они не дают указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены в природе. Законы сохранения выступают как запреты!

В процессе человеческой практики, опытов неоднократно возникали видимые нарушения закона сохранения энергии. Так, нет закона сохранения механической энергии в присутствии диссипативных сил – часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию тела (тепло). До обнаружения слабо взаимодействующей частицы – нейтрино – нарушался закон сохранения энергии при слабых распадах элементарных частиц. В космологии часто возникали видимые нарушения законов сохранения.