

Министерство науки и образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

В. К. Иванов

ФИЗИКА
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

*Рекомендовано федеральным учебно-методическим
объединением в системе высшего образования по УГСН
16.00.00. Физико-технические науки и технологии
в качестве учебного пособия для реализации
основных профессиональных образовательных программ
высшего образования подготовки бакалавров
16.03.01. Техническая физика*

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург

2022

ДК 530.1
ББК 22.3я73
И20

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой физики (0-4) Балтийского государственного технического
университета "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова *Д. Л. Федоров*
Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
Е. Г. Апушкинский

Иванов В. К. Физика. Электромагнетизм: учеб. пособие / В. К. Иванов –
СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. – 265 с.

Содержание предлагаемого пособия составляет третью часть лекционного курса по физике для студентов второго-третьего семестра обучения для физических направлений подготовки. Последовательность изложения электромагнетизма соответствует современным представлениям о логической структуре этого раздела физики. Отталкиваясь от основных экспериментальных фундаментальных законов, изучаемых в школьной программе, курс посвящен обобщению этих закономерностей в виде системы уравнений электромагнитного поля. Сохраняя традиционное последовательное изложение физических законов электромагнетизма, в курсе рассматривается ряд вопросов, посвященных современным достижениям в общей физике. Большое внимание уделяется примерам и приложениям экспериментальных и теоретических методов изучения и описания различных электрических и магнитных явлений. При создании учебного пособия использован многолетний опыт чтения общего курса физики на физических факультетах и институтах Санкт-Петербургского политехнического университета.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению бакалавриата 16.03.02 «Физика», 16.03.01 «Техническая физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» и 03.03.07 «Прикладная математика и физика». Пособие может быть также использовано в качестве дополнительного учебного пособия для общетехнических образовательных программ будущими бакалаврами, обучающимися по другим физическим направлениям, начинающими преподавателями, в системах повышения квалификации.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

© В.К.Иванов, 2022
© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2022

ISBN 978-5-7422-7563-3

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение.....	5
 <u>Глава 1. Электростатика в вакууме</u>	
1.1. Основные положения теории электромагнетизма.....	11
1.2. Основные законы электростатики в вакууме.....	13
1.3. Теорема Гаусса.....	21
1.4. Дифференциальная форма теоремы Гаусса.....	28
1.5. Работа сил электростатического поля.....	32
1.6. Потенциал электростатического поля.....	37
1.7. Потенциал и напряженность поля системы точечных зарядов.....	42
 <u>Глава 2. Электростатика в веществе</u>	
2.1. Макро и микрополя в веществе.....	50
2.2. Поляризация диэлектриков.....	52
2.3. Вектор электрической индукции.....	57
2.4. Граничные условия.....	61
2.5. Проводники в электрическом поле.....	69
2.6. Энергия электрического поля.....	77
2.7. Силы в электрических полях.....	86
2.8. Микроскопическая теория поляризации диэлектриков.....	90
2.9. Пьезо и сегнетоэлектричество.....	97
 <u>Глава 3. Электрический ток. Магнитное поле.</u>	
3.1. Уравнение непрерывности. Время релаксации.....	101
3.2. Классическая электронная теория проводимости.....	107
3.3. Магнитное взаимодействие и магнитное поле движущихся зарядов.....	118
3.4. Сила Лоренца и закон Ампера.....	124
3.5. Поле движущегося заряда. Закон Био-Савара.....	128
3.6. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции.....	136
3.7. Векторный потенциал магнитостатического поля. Магнитный момент.....	144
3.8. Контур с током в магнитном поле.....	156
3.9. Магнитное поле в веществе.....	161
3.10. Граничные условия для векторов магнитного поля.....	171

3.11. Гиромагнитные эффекты.....	174
3.12. Диамагнетизм.....	181
3.13. Парамагнетизм.....	186
3.14. Ферромагнетизм.....	193
3.15. Электропроводность в магнитном поле.....	202
3.16. Сверхпроводимость.....	210

Глава 4. Электромагнитная индукция и уравнения Максвелла.

4.1. Движущиеся проводники в магнитном поле.....	219
4.2. Закон электромагнитной индукции.....	224
4.3. Взаимная индукция и самоиндукция.....	228
4.4. Энергия магнитного поля.....	235
4.5. Ток смещения.....	240
4.6. Система уравнений Максвелла.....	244
4.7. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля.....	252
4.8. Волновое уравнение.....	257
Дополнения.....	261

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ВВЕДЕНИЕ

1. О курсе электромагнетизма

Настоящее учебное пособие по основам электромагнетизма представляет собой третью часть лекционного курса общей физики, читаемого студентам 1-2 годов обучения на физических и инженерно-физических направлениях подготовки политехнического университета. Предлагаемое пособие является продолжением двух предыдущих частей курса "Механика" и "Молекулярная физика", поэтому пособие опирается и содержит ссылки на пройденный ранее материал.

Раздел физики, посвященный электромагнитным явлениям, является одним из наиболее важных в курсе физики как с практической, так и с фундаментальной точек зрения. Пособие состоит из четырех разделов, содержащих изложение основ электростатики в вакууме и в веществе, электрического тока и магнитостатики и связанных с ними физических явлений. В последнем разделе рассматриваются зависящие от времени электрическое и магнитное поля, полная система уравнений Максвелла, являющаяся итогом классической теории электромагнетизма.

Пособие подготовлено с учетом методических разработок кафедры экспериментальной физики политехнического университета (СПбПУ). Основные идеи и содержание обновленного курса общей физики широко обсуждались на научно-методических семинарах под руководством профессоров кафедры экспериментальной физики. Результатом этих обсуждений являлось опубликование в 2003 году учебного пособия по курсу физики под авторством коллектива профессоров кафедры И.П. Ипатовой, В.Ф. Мастерова, Ю.И. Уханова. Основная идея, заложенная авторами при создании курса, состояла в том, что учащиеся уже освоили школьный курс элементарной физики и достаточно хорошо подготовлены к восприятию дедуктивного изложения материала. Поэтому стартуя с уравнений Максвелла, описывающих классическое электромагнитное поле, в последующем изложении авторы рассматривали физические явления и следствия, вытекающие из постулируемой системы уравнений. Опыт преподавания с подобным изложением материала показал, что его успешно усваивают и воспринимают те студенты начальных курсов, которые в школе успешно разобрались в индуктивном построении электромагнитной теории и на основе этих представлений могли увидеть красоту фундаментальных законов. Другая часть студентов, обучающаяся на тех же физических направлениях подготовки, легче воспринимала материал при его последовательном изложении, стартуя от основных экспериментальных

законов и затем переходя к их обобщению и дальнейшему представлению в виде системы уравнений электромагнитного поля.

Настоящее учебное пособие по электромагнетизму построено ближе к традиционному изложению этого раздела курса физики на лекциях и практических занятиях. Несмотря на то, что во Введении пособия приводятся классические уравнения электромагнитного поля, как итоговый результат курса электромагнетизма, однако получение этой системы уравнений и подробное ее обсуждение происходит в процессе последовательного введения и описания экспериментальных законов и фактов, начиная с первой главы пособия до последней. Такой индуктивный подход с учетом опыта многолетнего преподавания этого раздела на физических факультетах по мнению автора легче воспринимается и усваивается большинством студентов начальных курсов.

Настоящее пособие не является полновесным учебником по курсу электромагнетизма, какими являются широко известные книги в прилагаемой ниже литературе, поскольку его содержание ограничивается в основном темами и вопросами, которые обычно излагаются на поточных лекциях и входят в программу курса физики. При этом автор пособия при изложении основных тем курса пользовался методическими разработками и материалами, представленными в указанной ниже литературе.

Предлагаемая литература к разделу Электричества и магнетизма:

- 1). И.П. Ипатова, В.Ф. Мастеров, Ю.И. Уханов. Курс физики. Том 2. Электромагнитные явления. Санкт-Петербург. Издательство СПбГПУ. 2003 г.
- 2). Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Том 3. Электричество. Часть первая и часть вторая. Москва. Наука, Физматлит. 1996 г.
- 3). И.Е. Иродов. Основные законы электромагнетизма. Москва. Высшая школа. 1991 г.
- 4). А.Н. Матвеев. Электричество и магнетизм. Москва. Высшая школа. 1983 г.
- 5). И.В. Савельев, Курс общей физики. Том 2. Издательство Лань. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. 2005 г.
- 6). Э. Парселл. Электричество и магнетизм. Берклеевский курс физики. Издательство Лань. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. 2005 г.

Кроме того, в тексте лекций часто указываются ссылки на пройденный материал, опубликованный в предыдущих пособиях автора по курсам "Механика" и "Молекулярная физика" (В.К. Иванов "Физика. Механика" и "Физика. Молекулярная физика", СПб, Политех-Пресс, 2021).

В пособии используется Гауссова система единиц, как наиболее естественная система, принимаемая в общем курсе физике. Однако, автор считает, что будущие физики должны ориентироваться в системах единиц и успешно переходить из одной системы единиц в другую, поэтому в пособии все формулы дублируются в международной системе единиц СИ. Это также полезно с той точки зрения, что система единиц СИ используется в большинстве опубликованных задачников и основных учебников по физике.

Автор пособия признателен преподавателям и сотрудникам кафедры экспериментальной физики СПбПУ за обсуждение содержания и критику этого курса, которая способствовала его написанию.

2. Система уравнений Максвелла.

Классическая теория электромагнитных явлений основана на [уравнениях Максвелла](#), являющихся обобщением опытных фактов. Они образуют систему уравнений, которая связывает воедино основные электромагнитные величины и описывает все наблюдаемые классические электромагнитные явления. Ниже мы приводим эти уравнения, не объясняя подробно и не раскрывая пока полностью их физического содержания, что будет сделано в дальнейшем в курсе при постепенном их получении, исходя из экспериментальных фундаментальных законов.

Запишем эти уравнения в интегральной и дифференциальной формах в двух системах единиц, которые наиболее широко используются в теории: *CGS* (*CGS*) (или далее система единиц Гаусса) и международной *СИ* (*SI*) (системах единиц).

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

<i>CGS</i>	<i>SI</i>	
$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$	(1)
$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$	(2)
$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	(3)
$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q$	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	(4)

Здесь в уравнениях (1)–(4) введены следующие обозначения. Для **электрических величин**: q – электрический заряд; ρ – объемная плотность электрического заряда; \vec{E} и \vec{D} – векторы напряженности и индукции электрического поля, соответственно; \vec{j} – вектор плотности электрического тока. Для **магнитных величин**: \vec{B} и \vec{H} – векторы индукции и напряженности магнитного поля, соответственно. Кроме того, c – скорость света; а производные d/dt берутся по времени.

Интегралы в (1)–(2) от скалярного произведения векторной величины поля и вектора элемента контура $d\vec{l}$ берутся по замкнутому контуру L и носят название **циркуляции** этого вектора. В правой части этих уравнений интегралы от скалярного произведения векторов поля и вектора элемента поверхности $d\vec{S}$ берутся по поверхности S , опирающейся на контур L . Такие интегралы называются **поток вектора** через эту поверхность. Таким образом, циркуляция вектора напряженности \vec{H} магнитного поля (1) определяется двумя слагаемыми: потоком вектора \vec{j} через поверхность S (т.е. полным током) и скоростью изменения потока вектора индукции \vec{D} через ту же поверхность S . Циркуляция вектора напряженности электрического поля \vec{E} по замкнутому контуру (2) (работа электрического поля) определяется скоростью изменения потока вектора магнитной индукции \vec{B} через поверхность S .

Интегралы в (3)–(4) от скалярного произведения вектора \vec{B} и вектора \vec{D} и элемента поверхности $d\vec{S}$ берутся по замкнутой поверхности S , они определяют **поток векторов** через эту поверхность. Уравнение (3) свидетельствует о том, что источников магнитного поля в виде магнитных зарядов (монополей) не существует (в классической электродинамике). Источником же электрических полей (4) являются электрические заряды q .

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

<i>CGS</i>	<i>SI</i>	
$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	(5)
$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	(6)
$\text{div}\vec{B} = 0$	$\text{div}\vec{B} = 0$	(7)
$\text{div}\vec{D} = 4\pi\rho$	$\text{div}\vec{D} = \rho$	(8)

Интегральные уравнения электромагнитного поля описывают общие свойства электрических и магнитных величин. Однако для решения конкретных задач необходимы знания электромагнитных величин в каждой точке рассматриваемого пространства, иначе говоря, дифференциальные характеристики. Соответствующие интегральным уравнениям (1)–(4) дифференциальные уравнения (5)–(8) записываются с помощью дифференциальных операторов *rot* и *div*. Конкретный вид этих операторов и их физическое содержание подробно будут обсуждаться далее в этом курсе.

В дополнение к уравнениям Максвелла в интегральной (1)–(4) и дифференциальной (5)–(8) формах рассматриваются *материальные уравнения*. Эти уравнения характеризуют индивидуальные свойства среды и осуществляют связь между величинами, описывающими электрические и магнитные поля в вакууме и в веществе. В общем случае эти уравнения достаточно сложны и не обладают той общностью, которая присуща уравнениям Максвелла.

Наиболее простой вид материальные уравнения имеют для однородной, изотропной и недиспергирующей среды.

Материальные уравнения в простейшем случае:

<i>CGS</i>	<i>SI</i>	
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$	(9)
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$	(10)
$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	(11)

Здесь ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, σ – электрическая проводимость среды, ϵ_0 и μ_0 – размерные константы, вводимые в системе *СИ*. С помощью материальных уравнений из системы уравнений Максвелла можно исключить неизвестные величины и получить решение для конкретной среды.

Закон сохранения заряда является экспериментальным фактом и записывается в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (12)$$

Следует отметить, что уравнение (12) в принципе автоматически следует уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Смысл всех величин и параметров, входящих в эти уравнения (1)–(12), более подробно будет обсуждаться в последующих главах пособия. Можно рассматривать эти уравнения как постулат теории и далее из них получить и объяснить все наблюдаемые на опыте электромагнитные явления (это *метод дедукции*). А можно получить эти уравнения, последовательно обобщая экспериментальные данные и факты (*метод индукции*), а затем воспользоваться ими для дальнейшего рассмотрения новых явлений электромагнетизма. Задача нвстоящего курса состоит в том, чтобы придти к этим уравнениям, отталкиваясь от экспериментальных фактов.

В заключении вводной части пособия приведем диапазон применения уравнений Максвелла.

- 1) Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца, поэтому они справедливы и в области релятивистских скоростей.
- 2) Квантовый характер электромагнитных сил не сказывается на расстояниях вплоть до 10^{-10} см (примерно в 100 раз меньше размера атома). Для меньших расстояний необходимо использовать уравнения квантовой электродинамики.

Примечание. Основные эксперименты и положения теории в электромагнетизме были проделаны и внесены следующими физиками (ученые, внесшие наибольший вклад в развитие представлений о классических электромагнитных явлениях):

*Шарль О. Кулон (французский физик, 1736-1806),
 Пьер С. Лаплас (французский астроном, физик и математик, 1749-1827),
 Андре М. Ампер (французский физик и математик, 1775-1836),
 Ханс К. Эрстед (датский физик, 1777-1851),
 Жан Б. Био (французский физик, 1774 - 1862),
 Симеон Д. Пуассон (французский механик, математик и физик, 1781-1840),
 Карл Ф. Гаусс (немецкий математик, астроном и физик, 1777-1855),
 Феликс Савар (французский физик, 1791 – 1841),
 Михаил Васильевич Остроградский (русский математик и механик, 1801-1862),
 Джордж Грин (британский математик и физик, 1793-1841),
 Генрих Р. Герц (немецкий физик, 1857-1894)*

и другие.

Однако и на их фоне выделяются гиганты в физике:

*Майкл Фарадей (английский физик, 1791-1867) и
 Джеймс К. Максвелл (английский физик, 1831-1879).*

Глава1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА В ВАКУУМЕ.

1.1. Введение. Основные положения теории электромагнетизма.

Приведем основные *экспериментальные факты*, лежащие в основе представлений об электричестве и магнетизме.

- 1). Экспериментальный факт: *дуализм* или *двойственность* заряда. Если заряд В притягивает заряд С и если В притягивает заряд А, то А отталкивает С. Отсюда следует условное деление зарядов на «*положительные*» и «*отрицательные*» заряды – одноименные заряды отталкиваются, разноименные притягиваются. Имеющиеся 2 типа зарядов в природе есть проявление определенной симметрии электромагнитного взаимодействия. В частности, эти проявления связаны с инвариантностью законов относительно преобразования времени $t \rightarrow -t$.
- 2). Экспериментальный факт: закон *сохранения заряда* – полный заряд изолированной системы никогда не меняется. Наблюдаемый в экспериментах минимальный по величине заряд – это заряд электрона e^- , который равен по модулю заряду протона p^+ и заряду позитрона e^+ . Количественное равенство элементарных положительных и отрицательных зарядов проверяется на опыте, при этом установлено следующее:
 - а) измеренный суммарный заряд системы, состоящей из электрона и протона, т.е. атома водорода, имеет ограничение

$$|(e^- + p^+)| < 10^{-20} |e^-|,$$
 - б) из проверки нейтральности атома Cs получено, что возможный заряд атома составляет величину не больше, чем $10^{-16} |e^-|$ по модулю; установлено, что с этой точностью атом цезия нейтрален.

При этом исходя из многочисленных опытов и экспериментальных проверок, следует вывод, что нарушения закона сохранения заряда не наблюдается.
- 3). *Релятивистская инвариантность* полного заряда: алгебраическая сумма зарядов в изолированной системе не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой независимо от скорости их относительного движения.
- 4). *Квантование* или *дискретность* заряда. Минимально наблюдаемый заряд – заряд электрона, остальные все заряды кратны ему. Этот факт неоднократно проверялся на эксперименте, однако впервые кратность зарядов частиц заряду электрона была получена в фундаментальных опытах Роберта Милликена.

Кратко рассмотрим опыты Р. Милликена (1911 г.). В воздушный конденсатор помещались капельки масла с помощью распылителя (рис. 1.1). Капли могли быть заряжены в процессе распыления или при поглощении излучения ультрафиолетовой лампы за счет фотоэффекта.

Без включения электрического поля капли падают с постоянной скоростью вследствие равенства сил: с одной стороны силы тяжести и силы Архимеда, а с другой стороны силы сопротивления воздуха при установившейся скорости падения капли масла – силы Стокса:

$$mg - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{в}} g = 6\pi\eta r v_g \quad (1.1.1)$$

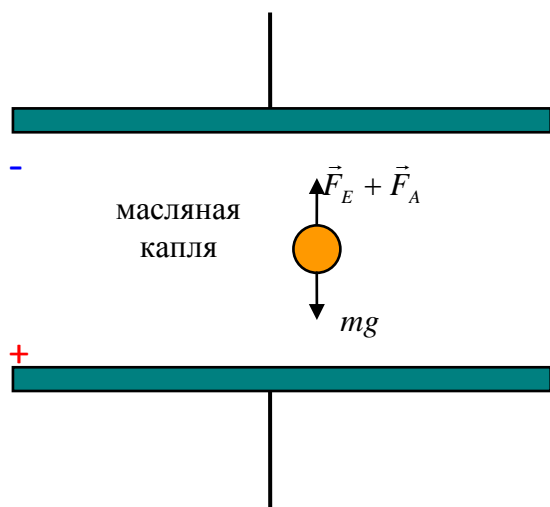


Рис. 1.1.

Здесь масса капли $m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_k$, r – ее радиус, ρ_k и $\rho_{\text{в}}$ – плотности масляной капли и воздуха; η – коэффициент вязкости воздуха, v_g – установившаяся скорость. Подставляя массу капли в (1.1.1), находим квадрат радиуса капли:

$$r^2 = \frac{9\eta v_g}{2(\rho_k - \rho_{\text{в}})g} \quad (1.1.2)$$

Наблюдая конденсатор под микроскопом и измеряя скорость падения капли, узнаем ее радиус.

Далее, включаем напряжение на конденсаторе, при этом так подбираем напряжение, чтобы скорость капли равнялась нулю $v_g = 0$. Тогда получаем следующее равенство сил:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_k - \rho_{\text{в}})g = qE \quad (1.1.3)$$

где q – заряд капли, E – напряженность электрического поля (подробнее о напряженности поля см в следующем параграфе 1.2). Из соотношения (1.1.3) можно найти заряд капли. При освещении конденсатора ультрафиолетовым светом заряд капли изменяется (явление фотоэффекта). Тогда снова подбираем напряжение, чтобы скорость капли равнялась нулю, и определяем ее новый заряд. Оказалось, что заряд капли всегда кратен ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) одной и той же величине – заряду электрона e^- :

$$\Delta q = ne \quad (1.1.4)$$

где **элементарный заряд** равен

$$|e^-| = 4.803 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}_q = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования показали, электронный заряд является наименьшим зарядом любых частиц, находящихся в свободном состоянии. Было также обнаружено, что существуют элементарные частицы – *кварки*, чьи заряды являются дробными числами от заряда электрона, а именно $\pm \frac{1}{3}e$, $\pm \frac{2}{3}e$. Кварки определяют состав сильно взаимодействующих элементарных частиц – адронов, в частности протонов и нейтронов (подробнее см Вводную лекцию в пособии по механике), входящих в ядра атомов. Однако кварки удерживаются внутри элементарных частиц и не появляются в свободном состоянии (явление "конфайнмента"). Поэтому в свободном состоянии заряды всех элементарных частиц кратны заряду электрона.

Примечание 1. Роберт Эндрюс Милликен, американский физик, 1868-1953, Нобелевская премия 1923 г. за работы в области элементарных зарядов и фотоэлектрического эффекта; Джордж Габриэль Стокс, английский физик и математик, 1819–1903.

1.2. Основные законы электростатики в вакууме.

1.2.1. Закон Кулона.

Электростатика изучает законы, определяющие поведение и взаимодействие неподвижных зарядов.

Шарль Кулон (1785 г.) экспериментально установил *фундаментальный закон*, определяющий силу взаимодействия неподвижных электрических зарядов (рис. 2.1). Он проводил опыты с крутильными весами, с помощью которых рассматривалось взаимодействие двух точечных зарядов. Под точечными зарядами понимались частицы, размеры которых значительно меньше расстояния между ними $r \ll r_{12}$.

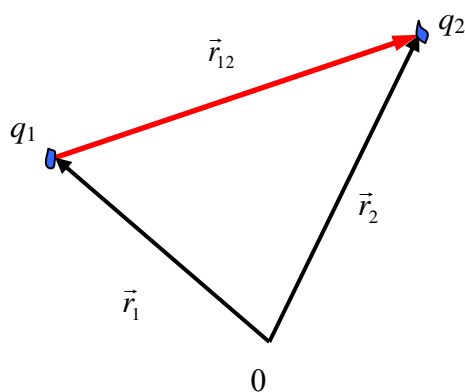


Рис. 2.1.

Формулировка закона Кулона: *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды.*

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1.2.1)$$

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

Выбор коэффициента k в (1.2.1) зависит от системы единиц. Рассмотрим основные единицы заряда.

Система СИ. Основные единицы этой системы:

длина L – метр (m),
 масса M – килограмм (kg),
 время T – секунда (s),
 температура – Кельвин (K) и
 сила тока – Ампер (A).

При этом величина заряда и сила определяются независимо друг от друга: сила из второго закона Ньютона, а заряд из величины электрического тока, определяемого из силы взаимодействия проводников с током (подробнее см далее §3.1):

$$1 \text{ заряда (Кулон)} = 1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$$

При этом коэффициент k в (1.2.1) является размерной величиной и равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.2.2)$$

где коэффициент равен $k = 9 \cdot 10^9 \frac{M}{\Phi}$, а величина ϵ_0 – *диэлектрическая постоянная*

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2 \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{m}$$

Здесь Φ – *Фарада*, единица емкости. Единица заряда – *Кулон* – относительно большая единица заряда. Так, например, сила взаимодействия 2-х точечных зарядов по 1 Кл на расстоянии в 1 км = 10^3 м равна:

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{10^6} = 9 \cdot 10^3 \text{ (Н)},$$

что есть довольно большая величина.

Система CGSE. Основные единицы в этой системе:

длина L – сантиметр (cm),
 масса M – грамм (g),
 время T – секунда (s),
 температура – Кельвин (K).

Сила как величина производная, определяемая по второму закону Ньютона, измеряется в Динах ($Дн$). В этой системе заряд является производной единицей и определяется через силу по закону Кулона (1.2.1), считая при этом, что коэффициент k равен единице: $k = 1$. Отсюда система единиц имеет название *CGSE*, т.е. добавляется к основным единицам единица электрического заряда:

$$[q] = 1 \text{ CGSE заряда} = 1 \text{ CGSE}_q = [M \cdot L^3 \cdot T^{-2}]^{1/2} = g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1} \quad (1.2.3)$$

Связь между единицами заряда в двух системах СИ (SI) и СГСЭ (CGSE):

$$1 \text{ Кл} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ CGSE}_q \quad (1.2.4)$$

Здесь коэффициент $3 \cdot 10^9$ фактически есть произведение 10 на величину скорости света ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$).

В нашем курсе мы в основном будем пользоваться системой CGSE (или, так называемой, системой единиц Гаусса, которую подробнее обсудим далее).

Примечание 1. Шарль О. Кулон, французский физик, 1736-1806.

1.2.2. Напряженность электрического поля.

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего пространства, создает в нем электрическое поле, которое проявляется в воздействии на помещенный в него пробный заряд q_0 . Силовая характеристика электрического поля – *напряженность электрического поля*, которая определяется как сила, действующая на единичный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.2.5)$$

Следовательно, напряженность электрического поля есть векторная величина. Напомним, что силовые характеристики поля сил уже были введены в курсе механики (см §1.9, пункт 1.9.4.).

Напряженность поля точечного заряда q получается из закона Кулона:

$$\vec{E} = \frac{q}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad E = \frac{q}{r_{12}^2} \quad (1.2.6)$$

где r_{12} – расстояние от точечного заряда до точки наблюдения. Важно отметить, что напряженность поля точечного заряда убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Электрическое поле, напряженность которого постоянна по величине и по направлению во всех точках пространства, называется *однородным полем*:

$$\vec{E} = \text{const} . \quad (1.2.7)$$

Из обобщения опытных фактов следует *принцип суперпозиции* электрических полей. Если имеется система зарядов, то сила на пробный заряд q_0 со стороны i -го заряда не изменится, если присутствуют другие заряды:

$$\vec{F}_i = \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^3} \vec{r}_{0i} \quad (1.2.8)$$

где r_{0i} – расстояние от точечного заряда q_i до пробного заряда. Полная сила на пробный заряд q_0 записывается как векторная сумма сил, действующих со стороны каждого из зарядов:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = q_0 \sum_i \frac{q_i \vec{r}_{0i}}{r_{0i}^3} = q_0 \sum_i \vec{E}_i = q_0 \vec{E} \quad (1.2.9)$$

Итак, принцип суперпозиции состоит в следующем: *напряженность электрического поля от всех зарядов определяется как векторная сумма напряженностей*, создаваемых отдельными зарядами в рассматриваемой точке пространства:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad (1.2.10)$$

О *единицах измерения напряженности*. Единица измерения напряженности электрического поля в системе CGSE не имеет специального названия, а в системе СИ напряженность измеряется в единицах *Вольт/метр* и обозначается как *B/м*. Напомним, что связь между единицами силы в системах СИ и CGSE определяется соотношением $1 \text{ Н} = 10^5 \text{ Дн}$. Тогда используя соотношение между единицами заряда (1.2.4), получаем связь между единицами напряженности электрического поля в системах CGSE и СИ:

$$[E] = 1 \text{ CGSE}_E = 3 \cdot 10^4 \text{ B/м} \quad (1.2.11)$$

Если имеем непрерывное распределение заряда в объеме V (см рис.2.2), то для определения напряженности поля в точке наблюдения P , определяемую радиус-вектором $\vec{r}(x, y, z)$, поступают следующим образом.

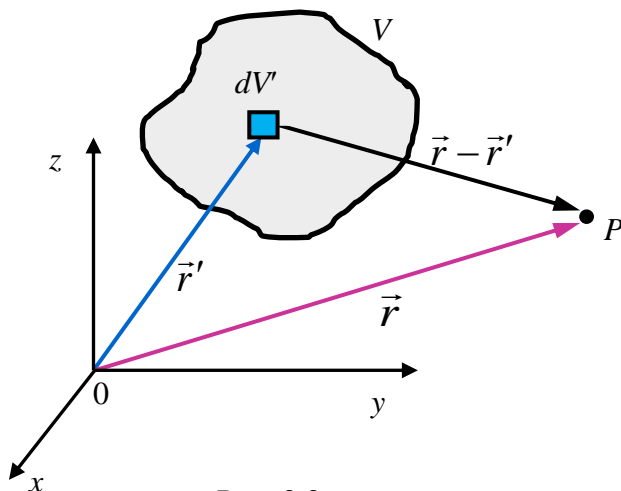


Рис. 2.2

Объем разбивают на маленькие кусочки – элементы объема, которые можно считать точечными зарядами

$$dq = \rho(x', y', z') dV',$$

где $\rho(x', y', z')$ – плотность распределенного заряда в точке с радиус-вектором $\vec{r}'(x', y', z')$. Тогда электрическое поле в точке \vec{r} на основании принципа суперпозиции находится из выражения:

$$\vec{E} = \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (1.2.12)$$

В Декартовой системе координат элемент объема записывается как обычно

$$dV' \equiv d\vec{r}' = dx'dy'dz'.$$

Интеграл (1.2.12) надо понимать, как условную запись. Реально при вычислении полной напряженности надо рассматривать проекции на оси координат и проводить интегрирование (суммирование) для каждой проекции отдельно. Например, для x -ой проекции напряженности поля имеем:

$$E_x = \int \rho(\vec{r}') \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (1.2.13)$$

Получив все проекции, легко затем получить вектор напряженности поля, складывая эти проекции как вектора со своими ортами.

Аналогично определяется электрическое поле от зарядов, распределенных по поверхности. В этом случае в качестве точечного заряда рассматривается заряд, находящийся на бесконечно маленьком элементе поверхности dS : $dq = \sigma dS$, где $\sigma = \sigma(\vec{r}')$ – поверхностная плотность заряда, а интегрирование проводится по всей поверхности. Так проекция вектора напряженности электрического поля на ось x , создаваемого заряженным элементом поверхности, определяется аналогично (1.2.13):

$$E_x = \int \sigma(\vec{r}') \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' \quad (1.2.14)$$

Силовые линии электрического поля: графически удобно представлять поле вектора в виде линий тока вектора или силовых линий. Силовые линии – кривые в пространстве, касательные к которым совпадают с направлением напряженности поля в данной точке. В присутствии зарядов они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Их направление совпадает с направлением силы, действующей на положительные заряды, помещенные в этих точках.

Простейшие примеры силовых линий напряженности поля представлены ниже на рисунках 2.3 -2.6. Поле точечного заряда (или поле равномерно заряженного шара или сферы) представляет собой прямые радиальные линии, исходящие из положительного заряда (рис. 2.3) и входящие в отрицательный заряд (рис. 2.4). Плотность этих линий падает с расстоянием от центра зарядов обратно пропорционально квадрату расстояния в соответствии с законом Кулона.

*Силовые линии поля
точечного положительного заряда*

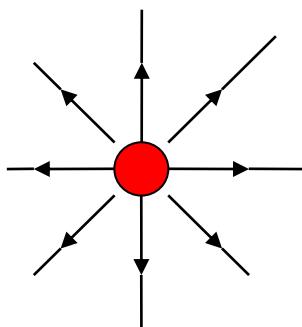


Рис. 2.3.

*Силовые линии поля
точечного отрицательного заряда*

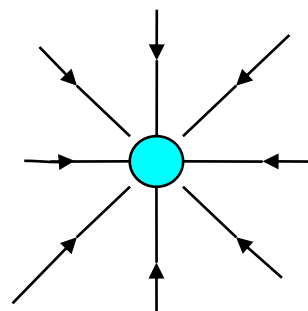


Рис. 2.4.

*Силовые линии однородного
электрического поля*

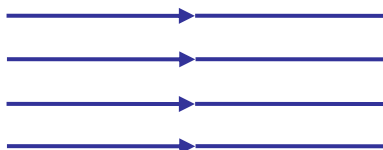


Рис. 2.5.

Силовые линии поля диполя

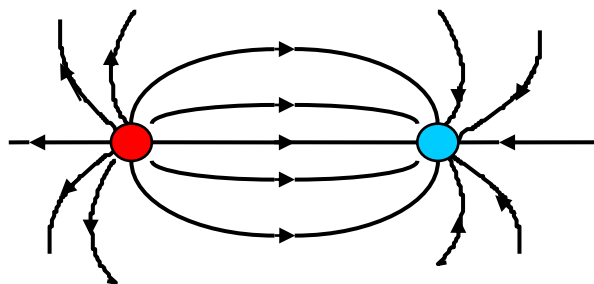


Рис. 2.6.

Силовые линии однородного поля параллельны друг другу и поэтому постоянны по плотности (рис. 2.5). Более сложно выглядит поле *электрического диполя*. Диполь – система, состоящая из положительного и отрицательного зарядов, одинаковых по модулю и расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Силовые линии поля выходят из положительного заряда (вблизи его как из точечного заряда) и затем заканчиваются на отрицательном заряде (рис. 2.6).

1.2.3. Примеры вычисления напряженностей полей.

1). Электрическое поле равномерно заряженной нити. Рассчитаем поле, создаваемое нитью длины l заряженной линейной плотностью заряда τ , в точке P , с координатами, показанными на рисунке 2.7. Электрическое поле, создаваемое элементом нити dx с зарядом $dq = \tau dx$ в точке P равно:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{r^3} \vec{r} = \frac{\tau dx}{r^3} \vec{r}$$

где r – расстояние от элемента dx до точки P . Видно, что результирующее поле обладает аксиальной симметрией относительно заряженной нити, поэтому достаточно рассмотреть только 2 проекции. Интегрирование необходимо также проводить по проекциям, поэтому запишем продольную и поперечную компоненты вектора напряженности

$$dE_x = \frac{\tau dx}{r^2} \cos \theta = \frac{\tau dx}{r^2} \frac{l+a-x}{r}$$

$$dE_y = \frac{\tau dx}{r^2} \sin \theta = \frac{\tau dx}{r^2} \frac{h}{r}$$

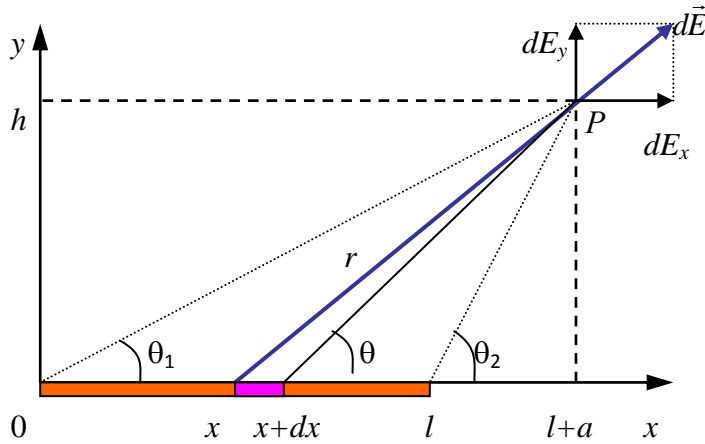


Рис. 2.7.

Здесь $r = \sqrt{(l+a-x)^2 + h^2}$.

Интегрирование удобнее проводить по углу θ . Поэтому выразим расстояние r и элемент dx через этот угол и его приращение $d\theta$

$$r = \frac{h}{\sin \theta},$$

$$dr = -\frac{h}{\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta,$$

$$dx = -\frac{dr}{\cos \theta} = \frac{h d\theta}{\sin^2 \theta}$$

Тогда проекции вектора $d\vec{E}$ на горизонтальное и вертикальное направления имеют вид

$$dE_x = \frac{\tau dx}{r^2} \cos \theta = \frac{\tau h d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{\sin^2 \theta}{h^2} \cos \theta = \frac{\tau}{h} \cos \theta d\theta$$

$$dE_y = \frac{\tau dx}{r^2} \sin \theta = \frac{\tau h d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{\sin^2 \theta}{h^2} \sin \theta = \frac{\tau}{h} \sin \theta d\theta$$

Проводя интегрирование в пределах углов θ_1 и θ_2 (см рис. 2.7), получаем компоненты напряженности электрического поля:

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tau}{h} \cos \theta d\theta = \frac{\tau}{h} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\tau}{h} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tau}{h} \sin \theta d\theta = \frac{\tau}{h} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\tau}{h} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Можно компоненты вектора напряженности записать через параметры l , h и a , выражая косинусы и синусы через них (см рис. 2.7):

$$\cos \theta_1 = \frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2 + h^2}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

$$\sin \theta_1 = \frac{h}{\sqrt{(l+a)^2 + h^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$E_x = \tau \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+a)^2 + h^2}} \right)$$

$$E_y = \frac{\tau}{h} \left(\frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2 + h^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right)$$

Рассмотрим частные предельные случаи.

- А) Рассмотрим поле бесконечной нити, при этом углы имеют следующие значения: $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$ (или $a = -l/2$ при $l \rightarrow \infty$), тогда получаем

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{2\tau}{h}$$

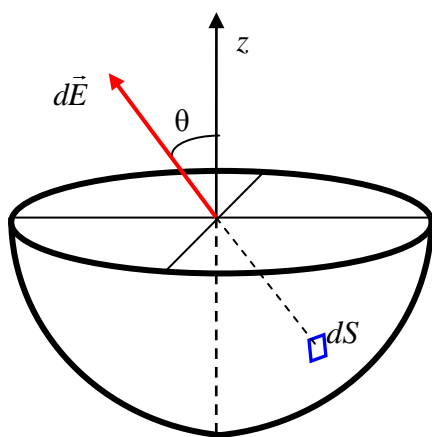
Продольная компонента электрического поля равна нулю, отлична от нуля только поперечная компонента (конфигурация поля имеет вид "ершика").

- Б) Рассмотрим поле на краю полубесконечной нити: $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi/2$ (или $a = 0$ и $l \rightarrow \infty$), получаем:

$$E_x = \frac{\tau}{h}, \quad E_y = \frac{\tau}{h}$$

Суммарное электрическое поле на краю полубесконечной нити направлено под углом $\pi/4$ к осям x и y на любых расстояниях h .

- 2). Электрическое поле в центре полусферы радиуса R , равномерно заряженной поверхностной плотностью заряда σ . На поверхности полусферы



выделим маленький кусочек поверхности $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Этот элемент поверхности имеет заряд

$$dq = \sigma dS = \sigma r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

В центре полусферы он создает поле, равное:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{r^3} d\vec{r}$$

В силу симметрии поле должно быть направлено по оси z . Поэтому достаточно

Рис. 2.8.

рассмотреть только z -вую составляющую электрического поля

$$dE_z = \frac{dq}{r^2} \cos\theta = \sigma \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi$$

Проинтегрировав по углам по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до $\pi/2$, получаем ответ, что электрическое поле в центре равномерно заряженной полусферы равно:

$$E_z = \pi\sigma.$$

Напряженность электрического поля пропорциональна поверхностной плотности заряда на полусфере.

1.3. Теорема Гаусса.

1.3.1. Поток вектора через поверхность.

Поток вектора через поверхность – одно из важнейших понятий любого векторного поля, в частности электрического – $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$.

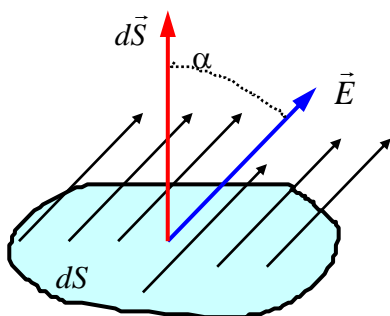


Рис. 3.1.

Рассмотрим маленькую площадку dS с единичным вектором нормали \vec{n} (рис. 3.1): $d\vec{S} = dS\vec{n}$. Поток вектора через эту площадку определяется как скалярное произведение вектора поля и вектора элементарной площадки:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos\alpha \quad (1.3.1)$$

Поток вектора – **скалярная величина**. Однако в зависимости от взаимного направления вектора поля и вектора площадки поток имеет положительный или отрицательный знак.

Примечание 1. Здесь можно провести аналогию с потоком жидкости: поток объема жидкости через площадку сечением dS равен

$$d\Phi = \Delta V / \Delta t = dS \cdot v \cos\alpha = (\vec{v}, d\vec{S})$$

Итак, поток вектора \vec{E} через элементарную площадку можно записать несколькими способами:

$$d\Phi = E dS \cos\alpha = E_n dS = E dS_E \quad (1.3.2)$$

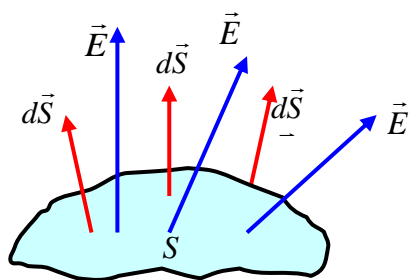


Рис. 3.2.

где E_n – проекция вектора напряженности электрического поля на направление нормали к поверхности, dS_E – проекция элементарной площадки на направление напряженности электрического поля. Поток через поверхность S конечного размера определяется суммой элементарных потоков:

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.3.3)$$

Здесь интеграл берется по поверхности S (см рис. 3.2), через которую определяется поток вектора.

1.3.2. Поток вектора \vec{E} через замкнутую поверхность.

а). Пусть имеем точечный заряд q . Рассмотрим для начала поток вектора \vec{E} через сферическую поверхность, окружающую заряд с центром в точке нахождения заряда. Так как в этом случае вектора напряженности поля и элемента поверхности с внешней нормалью параллельны $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ и сонаправлены, а модуль вектора E , постоянен на поверхности сферы, то в результате для потока вектора \vec{E} через всю поверхность получаем:

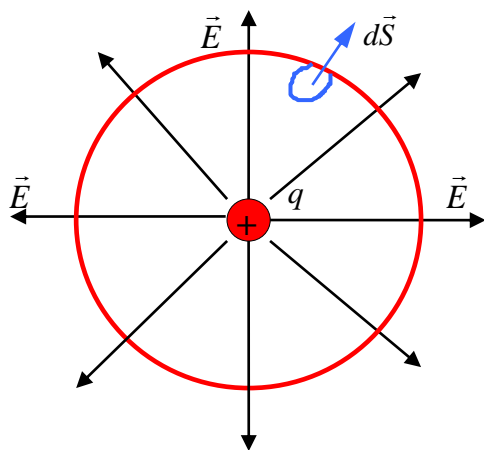


Рис. 3.3.

Итак, если имеем заряд q внутри сферы, то поток вектора напряженности электрического поля через эту поверхность равен:

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{S} = \int E dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q$$

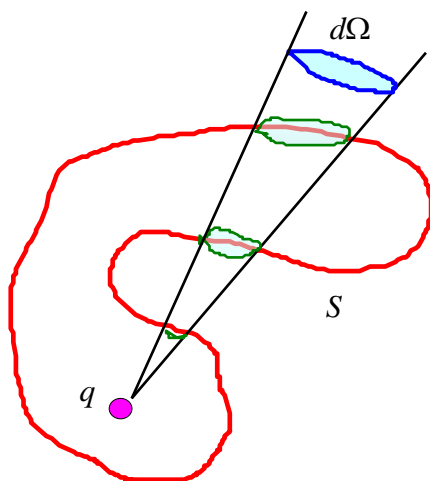


Рис. 3.4.

б). Рассмотрим теперь общий случай, когда заряд q находится внутри произвольной замкнутой поверхности S , например как изображено на рисунке 3.4. Через любой элемент этой поверхности $d\vec{S}$ (с внешней нормалью) считаем поток

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q \quad (1.3.4)$$

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS \cos\alpha = \frac{q}{r^2} dS \cos\alpha = q d\Omega, \quad (1.3.5)$$

где $d\Omega = dS \cos\alpha / r^2$ – элемент телесного угла. Видно из рисунка 3.4, что элемент телесного угла $d\Omega$ пересекает 3 элемента поверхности, т.е. получаем три равных друг другу потока вектора напряженности электрического поля через эти малые поверхности. При этом один поток вектора \vec{E} , входящий внутрь поверхности S (против нормали), сокращается с тем же потоком, выходящим из поверхности S (по нормали). Таким образом, в сумме остается только один выходящий поток через элемент телесного угла $d\Omega$. Тогда полный поток вектора \vec{E} через всю поверхность S равен опять произведению заряда на полный телесный угол, равный 4π :

$$\Phi = q \oint d\Omega = 4\pi q \quad (1.3.6)$$

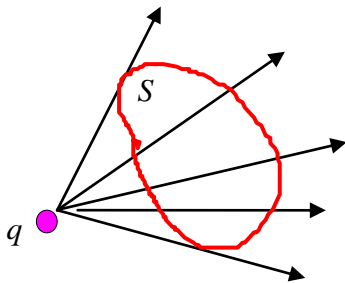


Рис. 3.5.

Отсюда также следует, что если заряд находится снаружи замкнутой поверхности S (рис. 3.5), то полный поток через эту поверхность равен нулю:

$$\Phi = 0.$$

Физически это понятно и очевидно: сколько силовых линий вошло внутрь поверхности, столько и вышло из нее.

в). Обобщим полученный результат на систему зарядов. Пусть поле создается любой системой зарядов (рис. 3.6), полный электрический заряд q которой можно разбить на точечные заряды $q = \sum_i q_i$. Для каждого из зарядов q_i в

отдельности можно повторить ту же процедуру для получения потока напряженности через выбранную поверхность. Пользуясь принципом суперпозиции $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$,

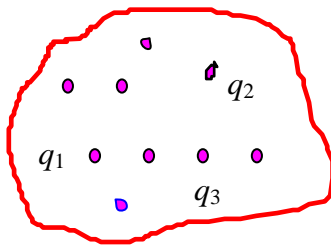


Рис. 3.6.

получаем, что уравнение

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q$$

остаётся справедливым для любой системы зарядов, расположенных произвольным образом. В самом деле, поток вектора \vec{E} равен сумме потоков каждого из векторов \vec{E}_i :

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i \oint \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_i 4\pi q_i = 4\pi q \quad (1.3.7)$$

Итак, получаем **электростатическую теорему Гаусса:**

поток вектора \vec{E} через замкнутую поверхность равен полному заряду внутри этой поверхности, умноженному на 4π .

Математически теорема Гаусса записывается в виде:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = 4\pi q \quad (1.3.8)$$

где q – суммарный заряд внутри произвольно выбранной замкнутой поверхности S , через которую рассматривается поток. Их расположение внутри поверхности не играет никакой роли. Заряды, расположенные вне замкнутой поверхности S не вносят вклада в поток Φ , ибо, сколько силовых линий входит в замкнутую поверхность, столько этих линий и выходит.

Физический смысл теоремы Гаусса состоит в том, что источниками электрического поля являются заряды, поэтому поток электрического вектора через замкнутую поверхность пропорционален заряду внутри ее.

Для непрерывного распределения заряда с объемной плотностью ρ имеем аналогично:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV \quad (1.3.9)$$

где интеграл от плотности заряда ρ в правой части уравнения берется по объему V , окруженному замкнутой поверхностью S . Это запись одного из уравнений системы уравнений Максвелла в интегральной форме (см уравнение (4) во Введении, в вакууме вместо вектора индукции электрического поля \vec{D} стоит напряженность поля \vec{E}).

Теорема Гаусса – следствие закона Кулона. Она справедлива для всех векторных полей, у которых точечные источники поля создают напряженность поля $\sim 1/r^2$. В частности, теорема Гаусса справедлива также в применении к закону тяготения.

Примечание 2. В системе СИ теорема Гаусса записывается как: $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0}$

1.3.3. Применение теоремы Гаусса для расчета полей.

Теорема Гаусса имеет фундаментальное значение для теории. Для практического применения ее удобно использовать только для расчета полей, обладающих той или иной симметрией. Рассмотрим некоторые важные примеры расчетов полей.

а). **Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.**

Пусть плоскость, изображенная на рис. 3.7, заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ (заряд, распределенный на единичной площади поверхности $\sigma = \frac{dq}{dS}$).

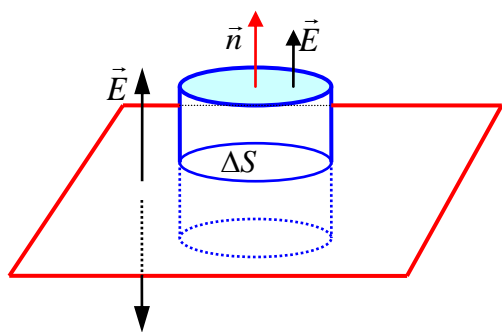


Рис. 3.7.

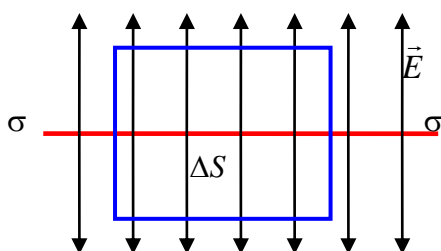


Рис. 3.8.

Из соображений симметрии можно увидеть (или можно сосчитать), что вектор электрического поля перпендикулярен плоскости, т.е. $\vec{E} \parallel \vec{n}$ (\vec{n} — единичный вектор нормали к плоскости) или $d\vec{S}$ (вектор элемента поверхности плоскости). В качестве поверхности, через которую считаем поток вектора напряженности электрического поля, выбираем цилиндрическую поверхность (см рис. 3.7). Поперечное сечение этой поверхности есть прямоугольник (см рис. 3.8). Поскольку напряженность электрического поля вверх или вниз от плоскости одинакова, а поток через боковую поверхность равен 0 (из-за того, что скалярное произведение \vec{E} и элемента боковой поверхности $d\vec{S}$ равно нулю), получаем:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 2E\Delta S = 4\pi\sigma\Delta S$$

Сокращая на элемент поверхности ΔS , получаем поле от равномерно заряженной плоскости:

$$E = 2\pi\sigma \quad (1.3.10)$$

Видно, что электрическое поле однородное и направлено перпендикулярно к плоскости. В векторном виде его можно записать следующим образом:

$$\vec{E} = 2\pi\sigma\vec{n} \quad (1.3.11)$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к плоскости.

б). Поле бесконечного равномерно заряженного цилиндра (нити).

Пусть имеем равномерно заряженную нить (или цилиндр) с линейной плотностью заряда τ (заряд на единицу длины $\tau = dq/dl$). В силу симметрии вектор напряженности электрического поля направлен радиально, т.е. перпендикулярно к оси нити (см рисунки 3.9). Следовательно, для определения величины электрического поля как функции расстояния от нити удобно выбрать цилиндрическую поверхность произвольного радиуса r с осью совпадающей с осью нити. Поток вектора напряженности \vec{E} через торцы цилиндрической поверхности равен нулю (см вид с торца на рис. 3.9б),

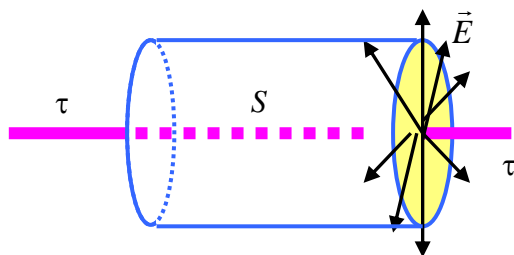


Рис. 3.9а.

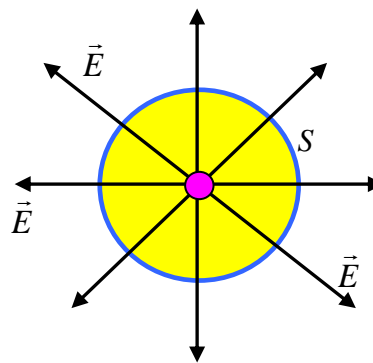


Рис.3.9б.

в силу перпендикулярности векторов \vec{E} и $d\vec{S}$. Таким образом в интеграле по полной поверхности остается поток вектора \vec{E} только через боковую поверхность цилиндра. Последний в силу параллельности \vec{E} и $d\vec{S}$ легко может быть сосчитан. Из рис. 3.9б видно, что поле имеет одинаковую величину на одном и том расстоянии от оси r . Итак, используя теорему Гаусса, имеем:

$$E \cdot 2\pi r h = 4\pi \tau h$$

где h – длина выбранной цилиндрической поверхности. Тогда получаем электрическое поле, создаваемое бесконечной, равномерно заряженной нитью на расстоянии r от оси нити:

$$E = \frac{2\tau}{r} \quad (1.3.12)$$

Из (1.3.11) видно, что поле убывает медленнее с увеличением расстояния от нити, чем в случае точечного заряда.

Если вместо нити имеем бесконечно длинный цилиндр радиуса R , поверхность которого заряжена с поверхностной плотностью заряда σ (а внутри его объемных зарядов нет), то для напряженности электрического поля получаем:

$$\begin{aligned} r > R & \quad E = \frac{4\pi\sigma R}{r} \\ r < R & \quad E = 0 \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Аналогично можно получить величину поля в случае заряженного цилиндра с постоянной плотностью объемного заряда как внутри, так и снаружи цилиндра.

в). Поле равномерно заряженного шара радиуса R .

Пусть имеем шар радиуса R , заряженный равномерно по всему объему с плотностью заряда ρ . Из соображений симметрии электрическое поле направлено радиально, как показано на рис. 3.10. Сначала находим поле вне шара. Для этого окружаем шар сферой радиуса $r > R$ и находим поток

вектора напряженности электрического поля, который по теореме Гаусса равен полному заряду внутри сферы:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 4\pi q \quad (1.3.14)$$

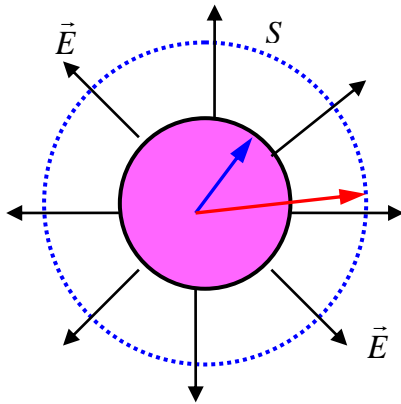


Рис. 3.10.

Откуда вне шара получаем поле, совпадающее с полем точечного заряда:

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi R^3 \rho}{r^2} \quad (1.3.15)$$

Для определения поля внутри шара выбираем соответствующую поверхность: сферу внутри шара $r < R$. Тогда по теореме Гаусса получаем соотношение аналогичное (1.3.14), но только в правой части стоит заряд, заключенный

внутри сферы меньшего радиуса $r < R$, величина которого зависит от радиуса выбранной поверхности:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 4\pi q_{int} = 4\pi \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Получаем поле внутри равномерно заряженного шара:

$$E = \frac{4}{3} \pi \rho r \quad (1.3.16)$$

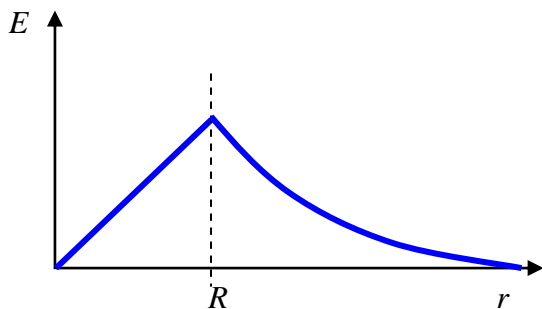


Рис. 3.11.

Видно, что электрическое поле пропорционально радиусу. Соотношение (1.3.16) легко записать в векторном виде, поскольку поле внутри шара направлено по радиусу:

$$\vec{E} = \frac{4}{3} \pi \rho \vec{r} \quad (1.3.17)$$

Полная зависимость напряженности электрического поля равномерно заряженного шара от расстояния до центра изображена на рисунке 3.11.

Примечание 3. В системе СИ напряженности электрического поля записываются:

равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

бесконечной равномерно заряженной нити:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r},$$

внутри равномерно заряженного шара:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.$$

1.4. Дифференциальная форма теоремы Гаусса.

1.4.1. Дивергенция вектора \vec{E} в декартовой системе координат.

Рассмотрим теорему Гаусса для бесконечно маленького объема в декартовой системе координат. Напомним, *физический смысл теоремы Гаусса* состоит в следующем: источниками электрического поля, «выходящего» из замкнутой области, являются заряды, находящиеся внутри замкнутой поверхности S :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q.$$

При этом поток вектора \vec{E} и заряд могут рассматриваться как суммарная алгебраическая мощность *источников* и *стоков* поля. Если мы разделим этот поток на объем ΔV , ограниченный поверхностью S , то получим *среднюю мощность* или *удельную мощность* источников поля:

$$\frac{\oint \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\Phi}{\Delta V} \quad (1.4.1)$$

Удельная мощность зависит от координат точки пространства, в которой считается эта величина. Определим удельную мощность источников произвольного векторного поля \vec{A} в точке P с координатами $\vec{r}(x, y, z)$ следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow (\cdot)P} \frac{\oint \vec{A} d\vec{S}}{\Delta V}, \quad (1.4.2)$$

где $\Delta V \rightarrow (\cdot)P$ означает, что объем стягивается к точке P , а некоторый дифференциальный оператор div , действующий на вектор \vec{A} , носит название *дивергенции*.

Сосчитаем дивергенцию для электрического поля в декартовой системе координат (рис. 4.1) и получим явный вид этого оператора. Около выбранной точки P с координатами (x, y, z) построим параллелепипед с ребрами dx, dy, dz . Электрическое поле в точке P запишем через проекции вектора:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z \quad (1.4.3)$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орты координатных осей. Найдем поток напряженности электрического поля через поверхность параллелепипеда, который представим в виде суммы потоков через его шесть граней:

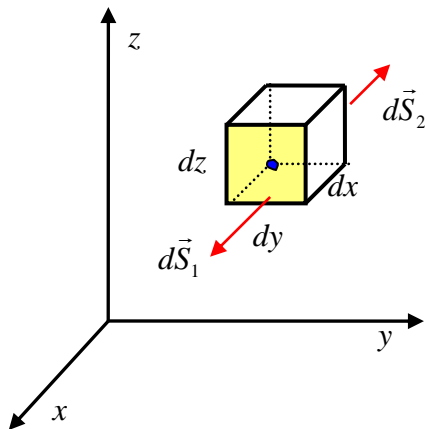


Рис. 4.1.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_6 = \sum_i \Phi_i . \quad (1.4.4)$$

Сосчитаем поток через грань 1 (выделена на рис. 4.1), где вектор площадки $d\vec{S}_1$ направлен вдоль оси x , а его величина по модулю равна $|d\vec{S}_1| = dy \cdot dz$. В силу малости площадки (или по теореме о среднем, если площадка больших размеров) имеем:

$$\Phi_1 = \int_1 \vec{E} d\vec{S} = \int_1 E_x dS_1 = \int_1 E_x dydz = E_x(x+dx, \langle y \rangle, \langle z \rangle) dydz, \quad (1.4.5)$$

где $(x+dx)$ – x -ая координата грани 1, а $\langle y \rangle, \langle z \rangle$ – координаты точки на грани 1, которые обеспечивают среднее значение интеграла по этой грани. Сосчитаем также поток через грань 2, которая расположена с противоположной стороны грани 1 “кубика”:

$$\Phi_2 = \int_2 \vec{E} d\vec{S} = - \int_2 E_x dS_2 = -E_x(x, \langle y \rangle, \langle z \rangle) dydz \quad (1.4.6)$$

В последнем выражении знак минус появился из-за противоположного направления вектора $d\vec{S}_2$ по отношению к оси x (рис. 4.1). Суммарный поток через обе грани 1-2 равен:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 &= [E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)] dydz = \\ &= \frac{[E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)]}{dx} dx dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

В последнем выражении мы опустили обозначения средних значений по координатам y и z , поскольку переходим к пределу бесконечно маленьких граней выделенного параллелепипеда.

Аналогично получаем поток через пары других граней, перпендикулярных осям y и z :

$$\Phi_3 + \Phi_4 = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV, \quad \Phi_5 + \Phi_6 = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV \quad (1.4.8)$$

Суммируя (1.4.7) и (1.4.8), получаем суммарный поток через поверхность маленького параллелепипеда:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV \quad (1.4.9)$$

Откуда удельная мощность источников электрического поля, или что то же – дивергенция вектора напряженности, равна:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\oint_S \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V_{S \rightarrow (\bullet)P}} \equiv \frac{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1.4.10)$$

Дивергенцией вектора \vec{E} в данной точке называется предел, к которому стремится отношение потока вектора через малую произвольную поверхность ΔS , окружающую эту точку, к величине ограниченного этой поверхностью объема ΔV при $\Delta V \rightarrow 0$.

Дивергенция вектора \vec{E} , т.е. $div\vec{E}$, скалярная величина, как и поток Φ . Удобно дивергенцию записывать через дифференциальный оператор градиента, который действует на векторную функцию \vec{E} , стоящую справа от него:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4.11)$$

Таким образом, дивергенцию векторной величины можно записать как скалярное произведение оператора градиента и вектора напряженности поля:

$$(\vec{\nabla}, \vec{E}) = div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1.4.12)$$

Такую операцию можно производить для произвольного векторного поля \vec{A} . Введем некоторые общие определения.

- 1). Те точки поля вектора \vec{A} , где $div\vec{A} > 0$, – называются *истоками поля*, при этом модуль дивергенции дает силу или мощность истока.
- 2). Те точки векторного поля, где $div\vec{A} < 0$, – называются *стоками поля*.
- 3). Векторное поле, у которого во всех точках $div\vec{A} = 0$, – поле свободное от источников, иначе, *соленоидальное поле*. Силовые линии такого поля замкнуты, т.е. не имеют начала и конца.

В применении к электрическому полю имеем теорему Гаусса в интегральной форме (1.3.8) или (1.3.9). Разделим эти уравнения на объем ΔV , затем устремляя $\Delta V \rightarrow 0$ и стягивая этот объем к точке, получаем дивергенцию в левой части, как показано в (1.4.10), и плотность заряда в правой части уравнения. Тогда получаем *теорему Гаусса в дифференциальной форме*, которая для электрического поля имеет вид:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \quad (1.4.13)$$

Это же есть *первое уравнение в системе уравнений Максвелла* (если не рассматривать поле в веществе).

Примечание 1. В системе СИ теорема Гаусса в дифференциальной форме записывается:

$$div\vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

1.4.2. Теорема Остроградского-Гаусса.

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S , которая ограничивает объем V . Разобьем этот объем на систему бесконечно маленьких кубиков (сечение такого объема условно показано на рис. 4.2). На основании определений (1.4.1) и (1.4.2) можно записать поток вектора \vec{E} через поверхность каждого i -го кубика

$$d\Phi_i = \oint_{\Delta S_i} \vec{E} d\vec{S} = \text{div} \vec{E} \cdot dV \quad (1.4.14)$$

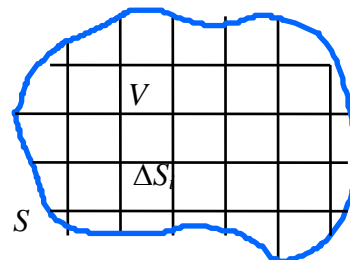


Рис. 4.2.

Сложим потоки через грани всех этих кубиков. Пусть полное число граней равно N . Отметим, что потоки вектора \vec{E} через внутренние грани объема в сумме равны нулю 0 , поэтому при определении суммарного потока остается интеграл только по внешней поверхности, а для дивергенции в правой части (1.4.14) – интеграл по всем кубикам:

$$\sum_{i=1}^N d\Phi_i = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \text{div} \vec{E}_i \cdot dV_i = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad (1.4.15)$$

Тогда получаем следующее соотношение, которое справедливо для любого векторного поля \vec{A} :

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV \quad (1.4.16)$$

Это выражение представляет собой теорему Остроградского-Гаусса.

Теорема Остроградского-Гаусса: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции вектора.

Примечание 2. Теорема Ирншоу утверждает, что совокупность неподвижных частиц, взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния (притягивающихся или отталкивающихся), не может образовывать устойчивой равновесной системы. Т.е. всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов неустойчива в отсутствие других сил, кроме кулоновских.

Она является следствием теоремы Гаусса. В самом деле, если на рассматриваемый заряд q действует сила со стороны других зарядов, но этот заряд находится в равновесии, то суммарная сила равна 0 и, следовательно, поток вектора E через поверхность окружающую заряд равен нулю 0 . При устойчивом равновесии при смещении заряда должна возникать возвращающая сила, т.е. должен возникнуть поток вектора напряженности электрического поля, отличный от 0 , что противоречит теореме Гаусса. Или иначе, необходимым условием устойчивого равновесия системы является наличие минимума потенциальной энергии. Но потенциальная энергия статической системы зарядов не может иметь минимума.

1.5. Работа сил электростатического поля. Циркуляция вектора.

1.5.1. Работа электрического поля. Циркуляция вектора.

По определению элементарная работа электрических сил по перемещению точечного заряда q_0 (рис.5.1) равна скалярному произведению силы \vec{F} на перемещение $\vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$, а конечная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 выражается интегралом по траектории:

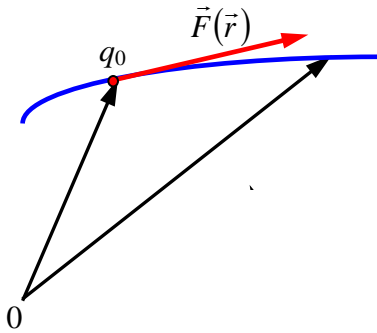


Рис. 5.1.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_1^2 q_0 \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} = q_0 \int_1^2 \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} \quad (1.5.1)$$

Если внешнее электрическое поле создается точечным зарядом q , т.е. напряженность поля $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$, то тогда работа по перемещению заряда q_0 в поле неподвижного точечного заряда равна:

$$\begin{aligned} A_{12} &= q_0 \int_1^2 \frac{q\vec{r}d\vec{r}}{r^3} = q_0 q \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = q_0 \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = E_{\text{пот1}} - E_{\text{пот2}} = \\ &= W_1 - W_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Здесь мы воспользовались тем, что скалярное произведение равно $\vec{r}d\vec{r} = r dr$ (см рис. 5.2), где dr – приращение длины вектора \vec{r} . Работа консервативных сил равна разности потенциальных энергий в начальном и конечном состояниях. Здесь в (1.5.2) мы ввели потенциальную энергию $E_{\text{пот}}$. Однако чтобы не путать с напряженностью поля, потенциальную энергию в теории электромагнитных полей будем обозначать через W .

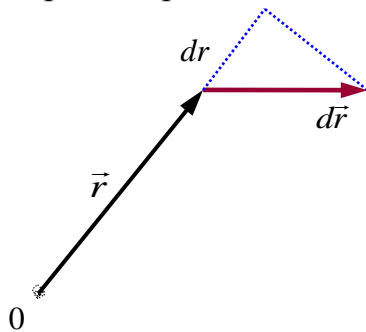


Рис. 5.2.

Здесь в (1.5.2) также ввели φ – *потенциал электростатического поля – энергетическая характеристика поля*

$$\varphi = \frac{W}{q_0}$$

Подробнее потенциал рассмотрим в следующем параграфе.

Итак, поскольку работа электростатических сил не зависит от пути, то электрическое поле потенциально. Из принципа суперпозиции следует, что свойство потенциальности справедливо для электрического поля любой системы неподвижных зарядов.

Вследствие потенциальности электрического поля работа его сил по замкнутому контуру равна нулю, т.е. можно записать:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{r} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (1.5.3)$$

где $d\vec{r} = d\vec{l}$ – элемент контура, по которому ведется интегрирование. Это одно из фундаментальных уравнений электростатики (часть более общего уравнения Максвелла). О соотношении (1.5.3) говорят, что *циркуляция вектора* электростатического поля по замкнутому контуру равна 0 – *теорема о циркуляции*.

Общее определение для произвольного вектора: *векторное поле называется потенциальным, если циркуляция этого вектора по любому замкнутому контуру равна 0*.

1.5.2. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора.

Рассмотрим произвольное векторное поле \vec{E} в декартовой системе координат:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\vec{e}_x + E_y(\vec{r})\vec{e}_y + E_z(\vec{r})\vec{e}_z.$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

где, как и ранее, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орты декартовых осей.

Далее рассмотрим циркуляцию вектора \vec{E} по некоторому замкнутому контуру L и введем обозначение циркуляции как $C(\vec{E})$

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l} = C(\vec{E}) \quad (1.5.4)$$

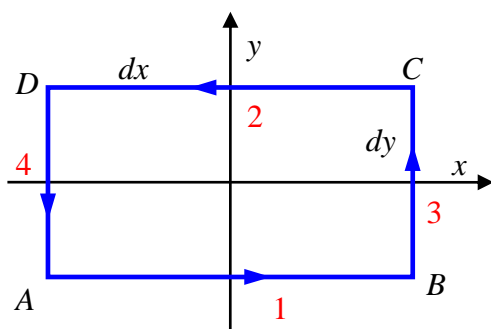


Рис. 5.3.

Чтобы получить запись теоремы о циркуляции в дифференциальной форме, рассмотрим бесконечно малый контур $ABCD$ на плоскости (x, y) , изображенный на рис. 5.3 со сторонами 1, 2, 3 и 4. При таком выборе осей x и y ось z направлена из плоскости на нас. Выберем направление обхода контура $ABCD$ таким образом, что вектор обойденной площадки также направлен

вдоль оси z . Иначе говоря, выбираем направлению обхода контура как показано на рис. 5.3 и тогда по правилу “буравчика” направление вектора площадки $\Delta\vec{S}$ смотрит на нас из плоскости рисунка. Значения и направление вектора поля \vec{E} можно считать постоянными на малых отрезках dx и dy (или иначе на этих отрезках берем средние величины этих векторов). Тогда циркуляция вектора \vec{E} по малому контуру $ABCD$ может быть представлена в виде суммы по всем сторонам 1, 2, 3 и 4:

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = \sum_{i=1,2,3,4} \vec{E}_i d\vec{l}_i = E_{1x} dx + E_{3y} dy + (-E_{2x} dx) + (-E_{4y} dy) \quad (1.5.5)$$

Минус в двух последних слагаемых появился из-за того, что приращения dx и dy отсчитываются в другую сторону по отношению к положительному направлению осей x и y .

Рассмотрим отдельно слагаемые на горизонтальных отрезках 1 и 2:

$$(E_{1x} - E_{2x}) dx = \frac{E_{1x} - E_{2x}}{dy} dy dx = -\frac{\partial E_x}{\partial y} dx dy = -\frac{\partial E_x}{\partial y} dS \quad (1.5.6)$$

Здесь dS – элемент площадки, ограниченной контуром $ABCD$. Аналогично на отрезках 3 и 4 получаем:

$$(E_{3y} - E_{4y}) dy = \frac{\partial E_y}{\partial x} dS \quad (1.5.7)$$

Итак, по полному выбранному бесконечно малому контуру $ABCD$ получаем бесконечно малую циркуляцию вектора \vec{E} :

$$dC_z(\vec{E}) = \oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dS \quad (1.5.8)$$

Напомним, что элемент площадки dS лежит в плоскости (x,y) и, учитывая направление обхода этой площадки, можно рассматривать, что в выражении (1.5.8) $dS = dS_z$ представляет собой *проекцию вектора элементарной площадки* на ось z , а выражение в скобках – тоже как проекцию на эту же ось. Это обстоятельство обозначим значком z в величине циркуляции – dC_z .

Можно выбрать маленькие площадки, перпендикулярные к осям Ox и Oy . Определяя циркуляцию вектора \vec{E} по контурам этих малым площадок, получаем совершенно аналогично проекции dC_x и dC_y на оси x и y :

$$dC_x(\vec{E}) = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dz dy \quad (1.5.9)$$

$$dC_y(\vec{E}) = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dx dz \quad (1.5.10)$$

Каждое из выражений (1.5.8) – (1.5.10) можно рассматривать как соответствующие слагаемые скалярного произведения 2-х векторов:

- 1) некоего дифференциального вектора, компоненты которого представлены частными производными в скобках, и
- 2) вектора малой площадки, который подробно записывается в виде

$$d\vec{S} = dS_x \vec{e}_x + dS_y \vec{e}_y + dS_z \vec{e}_z = \vec{e}_x dy dz + \vec{e}_y dz dx + \vec{e}_z dx dy .$$

Введем дифференциальный вектор, называемый *ротором вектора* \vec{E} , следующим образом

$$\text{rot}\vec{E} \equiv \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (1.5.11)$$

Тогда сумму выражений (1.5.8) – (1.5.10) можно представить в виде скалярного произведения двух векторов

$$\text{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dS_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dS_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dS_z \quad (1.5.12)$$

Иначе это скалярное произведение можно записать в следующем виде

$$\left(\text{rot}\vec{E}, d\vec{S} \right) = \text{rot}_n \vec{E} \cdot dS, \quad (1.5.13)$$

Выражение (1.5.13), исходя из общего определения потока вектора, есть не что иное, как поток вектора $\text{rot}\vec{E}$ через площадку dS . Тогда нормальную (по отношению к малой поверхности ΔS) составляющую вектора ротора определяем следующим образом:

$$\text{rot}_n \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0, L \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S} \quad (1.5.14)$$

Итак, рассматривая бесконечно маленький замкнутый контур вокруг выбранной точки векторного поля, можно определить нормальную составляющую вектора ротора. Эта составляющая в данной точке представляет собой отношение циркуляции этого вектора по этому малому контуру и бесконечно малой площади, охватываемой этим контуром.

Действие ротора как векторного дифференциального оператора (1.5.11) на произвольный вектор \vec{E} может быть записано через векторное произведение оператора градиента и вектора \vec{E} :

$$\text{rot}\vec{E} = \left[\hat{\nabla}, \vec{E} \right] = \left[\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \left(E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z \right) \right] \quad (1.5.15)$$

Напоминаем, что частные производные берутся от тех величин и функций, которые стоят справа от оператора. Векторное произведение или ротор вектора \vec{E} (1.5.15) можно также записать через детерминант:

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (1.5.16)$$

Вернемся к свойствам электростатического поля. Поскольку для электрического поля циркуляция (1.5.3) по любому контуру равна 0, то исходя из (1.5.14) ротор вектора электрической напряженности \vec{E} также равен 0. Итак, для **электрического (электростатического) поля** имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.5.17)$$

Это одно из уравнений системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме для электрического статического (не зависящего от времени) поля.

1.5.3. Теорема Стокса.

Рассмотрим циркуляцию произвольного вектора \vec{A} по контуру L , ограничивающему поверхность S . Разобьем поверхность на маленькие площадки и сосчитаем поток вектора ротора \vec{A} через малую i -ую площадку. Из полученных в предыдущем пункте формул (1.5.13) и (1.5.14) имеем для потока через i -ую площадку:

$$(\operatorname{rot} \vec{A}, \Delta \vec{S}_i) = \operatorname{rot}_n \vec{A} \cdot \Delta \vec{S}_i = \oint_{L_i} \vec{A} d\vec{l} \quad (1.5.18)$$

Просуммируем поток вектора $\operatorname{rot} \vec{A}$ (1.5.18) по всем площадкам, окруженным внешним контуром L . Учтем, что в интегралах по контурам L_i каждая внутренняя линия сетки проходится дважды (см рис. 5.4), но только в противоположных направлениях, и, следовательно, их вклад в сумме по всем площадкам сокращается. Это означает, что в результате суммирования по площадкам в правой стороне равенства остается интеграл только по внешнему контуру L , ограничивающему площадку S :

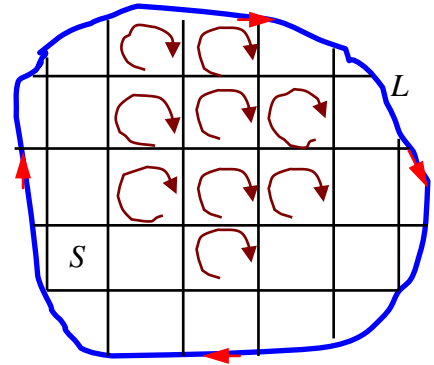


Рис. 5.4.

$$\sum_i (\operatorname{rot} \vec{A}, \Delta \vec{S}_i) = \sum_i \oint_{L_i} \vec{A} d\vec{l} = \oint_L \vec{A} d\vec{l} \quad (1.5.19)$$

Переходя к пределу $\Delta S_i \rightarrow 0$, получаем *теорему Стокса*:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.5.20)$$

Теорема Стокса звучит следующим образом: *циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через площадку, ограниченную этим контуром.*

Теорема Стокса применима к любым векторным полям, поэтому такое же выражение, записанное для вектора напряженности электрического поля, имеет вид:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} \quad (1.5.21)$$

Но важно отметить, что для *электростатического поля* имеем уравнения (1.5.3) и (1.5.17), следовательно, левая и правая части уравнения (1.5.21) равны нулю

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = 0 \quad (1.5.22)$$

Напомним, что циркуляция вектора равна нулю, когда поле потенциально. Итак, понятие потенциала можно вводить для таких векторных полей, для которых циркуляция вектора по замкнутому контуру или его ротор равны нулю.

1.6. Потенциал электростатического поля.

1.6.1. Потенциал.

В предыдущем параграфе получили выражение для работы по перенесению заряда q_0 из точки r_1 в точку r_2 в поле неподвижного точечного заряда q :

$$A_{12} = q_0 \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2) = W_1 - W_2. \quad (1.6.1)$$

Здесь потенциальная энергия W заряда q_0 в электрическом поле определяется через *потенциал* φ , создаваемый зарядом q :

$$W = q_0 \varphi \quad (1.6.2)$$

Разность потенциалов между двумя пространственными точками можно записать в виде интеграла, определяющего работу электрического поля по перенесению единичного заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \quad (1.6.3)$$

Потенциал – *энергетическая характеристика электрического поля*. Потенциал поля, как и потенциальная энергия, определяется с точностью до постоянной величины. Так, потенциал поля точечного заряда в точке, находящейся на расстоянии r от заряда, имеет вид:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \text{const} \quad (1.6.4)$$

Обычно константу выбирают так, чтобы на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) потенциал равнялся нулю, т.е.

$$\varphi = \frac{q}{r} \quad (1.6.5)$$

Напомним, что определение потенциала с точностью до постоянной величины никак не сказывается при описании взаимодействия между

зарядами, поскольку физическое значение имеет только разность потенциалов.

Примечание 1. В системе СИ потенциал поля точечного заряда записывается $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Из принципа суперпозиции следует, что свойство потенциальности справедливо для электрического поля любой системы или конфигурации неподвижных зарядов. Тогда потенциал поля системы зарядов в выбранной точке P (рис. 6.1) определяется суммой потенциалов, создаваемых каждым из зарядов:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1.6.6)$$

где r_i – расстояние от начала системы отсчета до выбранного i -го заряда, \vec{r} – координата точки наблюдения (рис. 6.1), $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ – расстояние от точки наблюдения до выбранного заряда.

В случае непрерывного распределения заряда потенциал в точке наблюдения определяется через интегралы по поверхности или объему, где

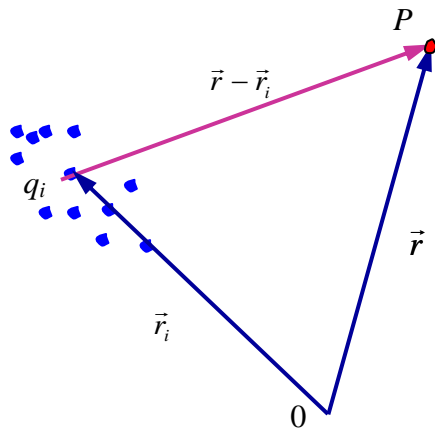


Рис. 6.1.

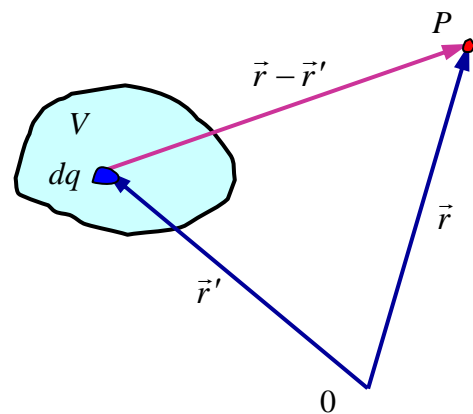


Рис. 6.2.

существует распределение зарядов. Тогда имеем 2 случая:

а) если имеется объемная плотность заряда $\rho = \rho(\vec{r}')$ (см рис. 6.2), то потенциал равен интегралу по объему, где имеются заряды

$$\varphi = \int_V \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.6.7)$$

б) если имеется поверхностная плотность заряда $\sigma = \sigma(\vec{r}')$, то потенциал выражается через интеграл по поверхности

$$\varphi = \int_s \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_s \frac{\sigma(\vec{r}')dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.6.8)$$

Напомним, что потенциал скалярная величина и в формулах (1.6.6) - (1.6.8) имеем алгебраическое сложение вклада от положительных и отрицательных зарядов.

Единицы потенциала электрического поля.

В системе *CGSE* единица потенциала выбирается исходя из формулы (1.6.5) – $1CGSE_\varphi$, при этом

$$1CGSE_\varphi = 1CGSE_q / \text{см}.$$

В системе *СИ* единица потенциала есть *Вольт*:

$$1B = 1 \text{ Дж} \cdot \text{Кл}^{-1}.$$

Связь между этими единицами потенциала имеет вид:

$$1CGSE_\varphi = 300B$$

Отметим, что единица потенциала в системе *CGSE* существенно больше единицы потенциала в Вольтах.

1.6.2. Связь напряженности поля и потенциала. Уравнение Пуассона.

Из курса механики мы знаем, что сила есть градиент от потенциальной энергии

$$\vec{F} = -gradW \quad (1.6.9)$$

Пользуясь определениями (1.6.1)-(1.6.2), получаем связь между потенциалом и напряженностью поля:

$$\vec{E} = -grad\varphi \equiv -\nabla\varphi \quad (1.6.10)$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (1.6.10) и воспользуемся представлением, что дивергенция от вектора есть ничто иное, как скалярное произведение оператора градиента на этот вектор:

$$div\vec{E} \equiv (\vec{\nabla}, \vec{E}) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\varphi \equiv -div(grad\varphi)$$

Далее воспользуемся теоремой Гаусса для вектора \vec{E} в дифференциальной форме (1.4.13), тогда получаем:

$$(\vec{\nabla}, \vec{E}) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\varphi = 4\pi\rho \quad (1.6.11)$$

Распишем подробнее скалярное произведение двух операторов градиента и введем *оператор Лапласа* Δ :

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta \quad (1.6.12)$$

В итоге получаем *уравнение Пуассона*, определяющее связь между распределением заряда и потенциалом:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho \quad (1.6.13)$$

Или в более подробной записи уравнение Пуассона имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad (1.6.14)$$

Это одно из основных уравнений электростатики, с помощью которого определяется потенциал электрического поля по заданному распределению (плотности ρ) заряда.

В физике часто строятся поверхности постоянного потенциала – так называемые, *эквипотенциальные поверхности*. Силовые линии электрического поля (вектора напряженности) направлены перпендикулярно к эквипотенциальным поверхностям.

Примечание 2. В системе СИ уравнение Пуассона записывается $\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0$

1.6.3. Примеры вычисления потенциала.

А. Вычислим потенциал, создаваемый шаром радиуса R , который равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ . Будем вычислять потенциал $\varphi(\vec{r})$ как работу по перенесению единичного заряда из бесконечности в точки, расположенные вне ($r > R$) и внутри ($r < R$) заряженного шара. В §1.3 получили, что напряженность электрического поля вне равномерно заряженного шара определяется

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3r^2},$$

а напряженность электрического поля внутри шара равна:

$$E = \frac{4}{3} \pi r \rho$$

Работу по перенесению единичного заряда из бесконечности (где поле равно 0) в точку вне шара $r > R$ мы уже определяли ранее и она равна:

$$A_{\infty r} = \varphi(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{r} = -\int_{\infty}^r E dr = -\int_{\infty}^r \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{r} = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho}{r} \quad \text{при } r > R \quad (1.6.15)$$

Таким образом, вне шара и на его поверхности получаем выражение для потенциала такое же как для потенциала точечного заряда, сосредоточенного в центре шара. В частности на поверхности шара при $r = R$ имеем

$$\varphi(r = R) = \frac{q}{R}.$$

Для определения потенциала внутри шара необходимо к работе по перенесению единичного заряда из бесконечности до поверхности шара добавить работу сил электрического поля по его перемещению от поверхности до точки внутри шара $r < R$. Сосчитаем эту работу, подставляя напряженность электрического поля внутри шара:

$$A_{Rr} = -\int_R^r \vec{E} d\vec{r} = -\frac{4}{3} \pi \rho \int_R^r r dr = -\frac{4}{3} \pi \rho \frac{r^2 - R^2}{2} = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \frac{R^2 - r^2}{2R^3} = \frac{q}{2R^3} (R^2 - r^2) \quad (1.6.16)$$

Итак, складывая работы по перемещению заряда до поверхности и внутри шара, находим потенциал поля заряженного шара внутри его:

$$\varphi(r) = \frac{q}{R} + \frac{q}{2R^3} (R^2 - r^2) = \frac{q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{при } r < R \quad (1.6.17)$$

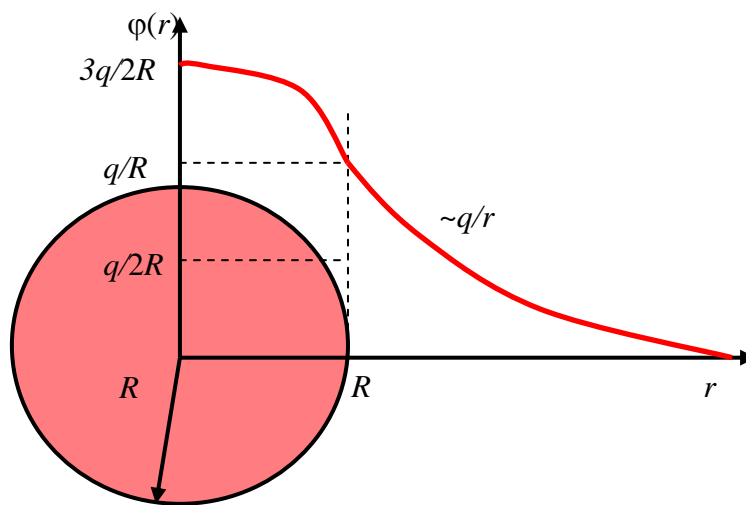


Рис. 6.3.

Примерная зависимость $\varphi(r)$ потенциала от расстояния до центра заряженного шара представлена на рис. 6.3.

Б. Сосчитаем потенциал в центре полусферы радиуса R , если ее поверхность заряжена с постоянной поверхностной плотностью электрического заряда $\sigma = const$. В этом случае сосчитаем потенциал как алгебраическую сумму потенциалов, создаваемых точечными зарядами. Таким образом мы находим потенциал с точностью до постоянной.

Выберем элемент поверхности dS , находящийся под углом θ к оси симметрии (см рис. 6.4) и под углом φ к произвольно направленной оси x и имеющий заряд

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

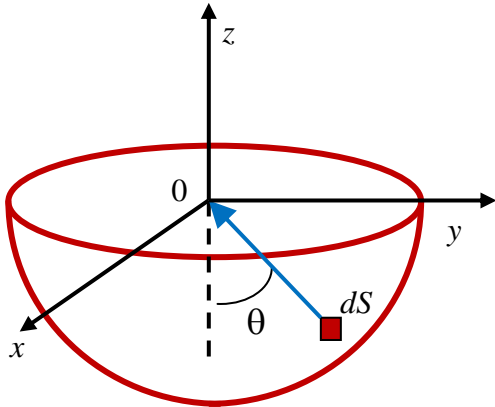


Рис. 6.4

Рассматривая этот заряд dq как точечный, запишем его вклад в потенциал в центре полусферы:

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{R} = \sigma R \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.6.18)$$

Интегрируя по всей поверхности полусферы, получаем полный потенциал, создаваемый заряженной поверхностью в центре полусферы:

$$\varphi = R\sigma \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\sigma R \quad (1.6.19)$$

Если известен полный (и равномерно распределенный) заряд на полусфере,

$$q = 2\pi R^2 \sigma$$

то можно получить простой и вполне очевидный результат для потенциала, создаваемый полусферой:

$$\varphi = \frac{q}{R} \quad (1.6.20)$$

Отметим, что мы суммировали потенциалы, создаваемые точечными зарядами, для которых потенциал на бесконечности равен нулю. Поэтому и окончательный результат (1.6.20) также определяет потенциал в точке 0 относительно потенциала на бесконечности, равного нулю.

Если имеется неравномерное распределение заряда по поверхности, то необходимо сосчитать соответствующие интегралы в (1.6.19). Определение потенциала в других точках производится численным интегрированием по всей поверхности полусферы.

1.7. Потенциал и напряженность поля системы точечных зарядов.

1.7.1. Потенциал и напряженность поля электрического диполя.

Точечный *электрический диполь* – система 2-х одинаковых по величине, но разных по знаку, точечных зарядов, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до точки, где определяется электрическое поле системы. Вектор \vec{l} проводится от отрицательного заряда к положительному заряду (рис. 7.1). Так же направлен

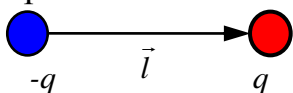


Рис. 7.1.

электрический дипольный момент, который определяется:

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad (1.7.1).$$

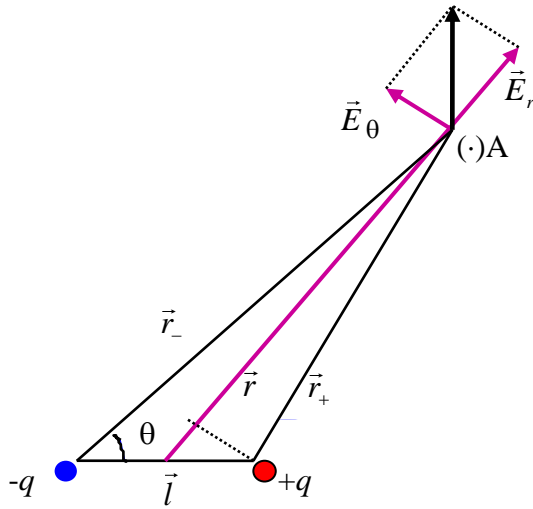


Рис. 7.2.

Найдем потенциал и электрическое поле, создаваемое диполем. В силу аксиальной (осевой) симметрии достаточно находить электрическое поле в плоскости, проходящей через вектор \vec{l} (например, в плоскости рисунка 7.2). Введем полярные координаты (r, θ) : r – расстояние от центра диполя до точки наблюдения А, где измеряется поле, θ – угол между вектором дипольного момента $\vec{p} = q\vec{l}$ и направлением на точку наблюдения $(\cdot)A$ – вектором \vec{r} (рис. 7.2).

Рассмотрим ситуацию, когда расстояние от диполя до точки измерения поля значительно больше расстояния между зарядами в самом диполе: $r \gg l$. Последнее неравенство определяет понятие *точечного диполя*. Тогда расстояния от положительного r_+ и отрицательного r_- зарядов до точки наблюдения А могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} r_+ &\approx r - \frac{l}{2} \cos \theta = r - \frac{\vec{l}}{2} \vec{e}_r, \\ r_- &\approx r + \frac{l}{2} \cos \theta = r + \frac{\vec{l}}{2} \vec{e}_r, \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

где \vec{e}_r – единичный вектор (орт) вдоль направления \vec{r} . Сосчитаем потенциал поля диполя в этой точке:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} = q \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \quad (1.7.3)$$

При $r \gg l$ можно приближенно записать $r_+ r_- \approx r^2$ и затем, подставляя (1.7.2), получаем:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2q \frac{\vec{l} \vec{e}_r}{2}}{r^2} = \frac{\vec{p} \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3} \quad (1.7.4)$$

или иначе

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3} = \frac{p \cdot \cos \theta}{r^2} \quad (1.7.5)$$

Из (1.7.5) видно, что потенциал диполя быстрее убывает с расстоянием, чем потенциал точечного заряда. Очевидно, что это связано с взаимной экранировкой разных по знаку зарядов диполя.

Теперь сосчитаем напряженность поля электрического диполя, воспользовавшись связью между потенциалом и напряженностью поля:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial\varphi}{\partial l_\theta}\vec{e}_\theta\right) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right) \quad (1.7.6)$$

где \vec{e}_θ – единичный вектор, перпендикулярный к направлению \vec{r} (для точечного диполя по касательной к окружности радиуса r). Вектор электрического поля можно разложить на составляющие: $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$ (см рис. 7.2), тогда компоненты вектора поля равны:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p \cdot \cos\theta}{r^3}, \quad E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{p \cdot \sin\theta}{r^3} \quad (1.7.7)$$

Задавая различные координаты точки r и θ , можно получить силовые линии поля диполя в плоскости, проходящей через ось диполя (см рис. 2.6 в §1.2). В частности, вдоль оси диполя отлична от нуля только радиальная компоненте E_r . В точках на прямой, проходящей через центр диполя перпендикулярно к его оси, отлична от нуля только касательная составляющая поля E_θ .

Модуль вектора напряженности равен:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{r^3} \sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$E = \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \quad (1.7.8)$$

Проекции вектора напряженности электрического поля и его величина зависят от расстояния до диполя и угла между направлением наблюдения и направлением дипольного момента. Можно представить вектор напряженности в следующей полезной форме:

$$\vec{E} = \frac{2p \cdot \cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p \cdot \sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \frac{3p \cdot \cos\theta}{r^3}\vec{e}_r - \frac{p \cdot \cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p \cdot \sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \quad (1.7.9)$$

При выводе (1.7.9) мы воспользовались тем, что разложение дипольного момента по ортам \vec{e}_r и \vec{e}_θ имеет вид

$$\vec{p} = p \cdot \cos\theta\vec{e}_r - p \cdot \sin\theta\vec{e}_\theta. \quad (1.7.10)$$

В выражении (1.7.9) напряженность электрического диполя никак не связана с выбором координатных осей, а определяется вектором дипольного момента и радиус-вектором.

1.7.2. Диполь во внешнем электрическом поле.

1) Однородное внешнее поле:

Поместим диполь во внешнее однородное электрическое поле. Полная

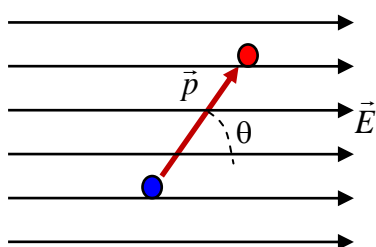


Рис. 7.3.

сила, действующая на диполь, очевидно, равна нулю (см рис. 7.3), из-за того, что силы, действующие на каждый из зарядов, различны по знаку, но одинаковы по модулю:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \quad (1.7.11)$$

Поэтому диполь в однородном поле не смещается. Однако на диполь действует пара сил на расстоянии $l \sin \theta$ (плечо пары сил), где

угол θ – угол между направлением вектора напряженности поля и дипольным моментом. Следовательно, **момент силы**, стремящийся повернуть дипольный момент вдоль направления поля, отличен от нуля:

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}] \quad (1.7.12)$$

Наиболее устойчивое положение диполя возникает тогда, когда вектор дипольного момента $\vec{p} = q\vec{l}$ направлен вдоль вектора напряженности электрического поля.

2) Неоднородное внешнее поле (см рис. 7.4):

В неоднородном внешнем электрическом поле силы в разных точках диполя различны и поэтому суммарная сила, действующая на диполь, не равна нулю:

$$|\vec{F}_1| \neq |\vec{F}_2| \quad \text{и} \quad \vec{F} \neq 0.$$

Силу можно определить, вычисляя градиент потенциальной энергии: $\vec{F} = -\nabla W$.

Энергия диполя в электрическом поле определяем по сумме энергий каждого из зарядов (здесь не учитывается внутренняя энергия диполя как целого, т.е. его энергия связи):

$$W = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q\Delta\varphi \quad (1.7.13)$$

Считая расстояние между зарядами диполя l достаточно малой величиной (как малое приращение, что есть дифференциал), можно записать:

$$q\Delta\varphi = -q(\vec{E}, \vec{l}) = -(\vec{p}, \vec{E})$$

Таким образом, потенциальная энергия взаимодействия диполя с электрическим полем записывается в виде:

$$W = -(\vec{p}, \vec{E}) \quad (1.7.14)$$

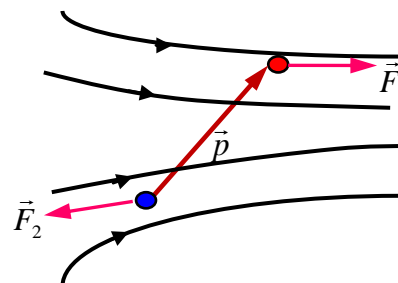


Рис. 7.4.

Выражение (1.7.14) определяет энергию точечного диполя в любом электрическом поле. Оно только не учитывает энергию взаимодействия зарядов между собой, т.е. собственную энергию диполя.

Сила, действующая на диполь в целом, определяется как градиент потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -\nabla W = \nabla(\vec{p}, \vec{E}) \quad (1.7.15)$$

Для вычисления градиента от скалярного произведения векторов воспользуемся известной формулой векторного анализа:

$$\nabla(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}, \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}, \vec{\nabla})\vec{A} + [\vec{A}, \text{rot}\vec{B}] + [\vec{B}, \text{rot}\vec{A}] \quad (1.7.16)$$

Подставляя вместо \vec{A} и \vec{B} вектора \vec{p} и \vec{E} , соответственно, видно, что все слагаемые кроме одного (первого) равны 0. В самом деле, $(\vec{E}, \vec{\nabla})\vec{p} = 0$ и $[\vec{E}, \text{rot}\vec{p}] = 0$ из-за того, что дипольный момент \vec{p} есть постоянная величина; а векторное произведение $[\vec{p}, \text{rot}\vec{E}] = 0$ равно нулю из-за того, что $\text{rot}\vec{E} = 0$. Таким образом, получаем выражение для силы, действующей на точечный диполь

$$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla})\vec{E} \quad (1.7.17)$$

Рассмотрим в качестве примера частный случай – пусть ось x направлена вдоль вектора дипольного момента \vec{p} ($p = p_x, p_y = p_z = 0$), тогда получаем для силы более простое выражение:

$$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \quad (1.7.18)$$

Как видно из (1.7.18), сила, действующая на диполь в неоднородном поле, направлена в сторону возрастания электрического поля. Таким образом, диполь «втягивается» в область более сильного электрического поля.

1.7.3. Система зарядов на больших расстояниях.

Рассмотрим систему из N зарядов q_i , находящихся внутри области с линейными размерами $\sim l$ (см рис. 7.5). Найдем электрическое поле, создаваемое системой этих зарядов, на больших расстояниях $r \gg l$.

Потенциал, создаваемый системой на расстоянии r , определяется алгебраической суммой потенциалов от каждого заряда:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1.7.19)$$

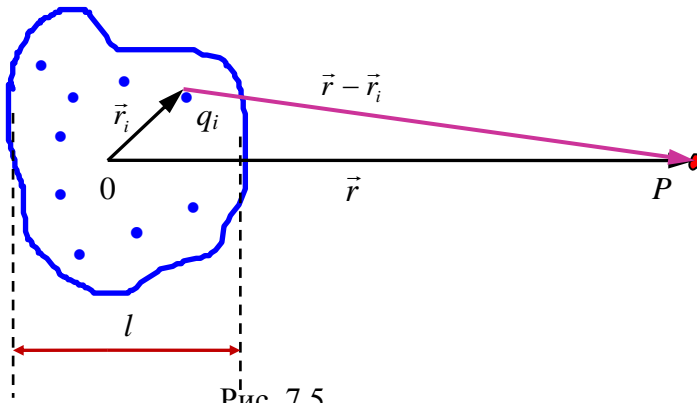


Рис. 7.5.

Здесь вектора \vec{r} и \vec{r}_i отсчитываются от начала координат, помещенного внутри области. Учтем, что ищем потенциал на больших расстояниях от системы зарядов $|\vec{r}_i| \leq l \ll |\vec{r}|$, тогда знаменатель в (1.7.19) приближенно запишем в виде:

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| \approx r - \vec{r}_i \vec{e}_r = r \left(1 - \frac{\vec{r}_i \vec{e}_r}{r} \right) \quad (1.7.20)$$

где \vec{e}_r – орт, направленный вдоль вектора \vec{r} . Тогда, учитывая также, что при $x \ll 1$ имеем известное разложение дроби

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots,$$

разложение потенциала будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \vec{e}_r}{r} + \left(\frac{\vec{r}_i \vec{e}_r}{r} \right)^2 + \dots \right) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{r} + \frac{\left(\sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i, \vec{e}_r \right)}{r^2} + \frac{\sum_{i=1}^N q_i (\vec{r}_i, \vec{e}_r)^2}{r^3} + \dots \quad (1.7.21)$$

Обсудим отдельные слагаемые в (1.7.21). Первое слагаемое описывает потенциал точечного заряда, величина которого определяется алгебраической суммой всех зарядов системы $\sum_i q_i$, или, иначе говоря,

описывает поле *монополя*:

$$\varphi_{mon}(\vec{r}) = \frac{\sum q_i}{r} \quad (1.7.22)$$

Если суммарный заряд системы отличен от нуля, то основной вклад в потенциал дает монопольное слагаемое. Во 2-ом слагаемом разложения (1.7.21) можно выделить дипольный электрический момент системы зарядов:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \quad (1.7.23)$$

Таким образом, 2-ое слагаемое описывает потенциал, создаваемый *дипольным моментом системы зарядов*:

$$\varphi_{dip} = \frac{\vec{p} \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3} \quad (1.7.24)$$

Если система электронейтральна, т.е. сумма всех зарядов равна нулю $\sum_i q_i = 0$, то электрическое поле создается только дипольным моментом системы. Интересно отметить, что дипольный момент не зависит от начала отсчета. В самом деле, пусть имеется 2 системы отсчета с началами координат $(\cdot)0$ и $(\cdot)0'$, отстоящие друг от друга на расстояние b . Тогда координаты точки в обеих системах связаны соотношением $\vec{r}'_i = \vec{b} + \vec{r}_i$ и поскольку $\sum_i q_i = 0$, то для дипольного момента имеем:

$$\vec{p}' = \sum_i q_i \vec{r}'_i = \sum_i q_i (\vec{r}_i + \vec{b}) = \vec{b} \sum_i q_i + \sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p} \quad (1.7.24)$$

Итак, если суммарный заряд системы не равен нулю $\sum_i q_i \neq 0$, то основной вклад при больших расстояниях дает поле заряда – *монополь*. Если система электронейтральна $\sum_i q_i = 0$, то основной вклад в электрическое поле системы зарядов происходит от дипольного момента системы.

Если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю:

$$\sum_i q_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_i q_i \vec{r}_i = 0,$$

то основной вклад дают другие *мультипольные моменты*: в первую очередь – *квадруполь* $\varphi \sim \frac{1}{r^3}$.

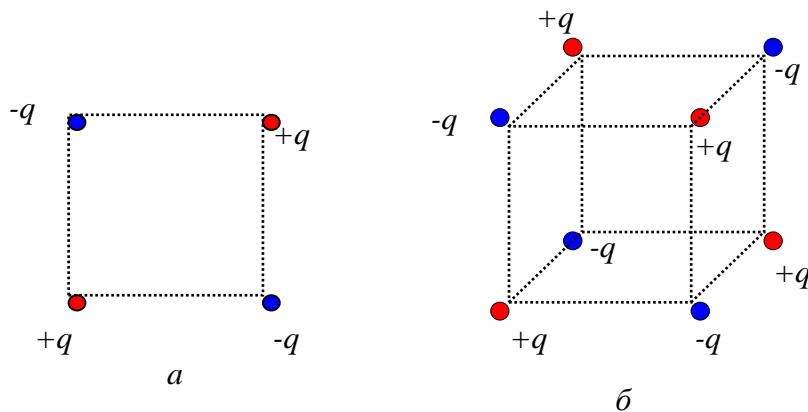


Рис. 7.6.

На рис. 7.6 а приведен пример системы 4-х зарядов, для которой полный заряд и дипольный момент равны 0, однако система имеет отличный от нуля квадрупольный момент. Поэтому такая система зарядов создает электрическое поле, определяемое третьим слагаемым в уравнении (1.7.21). Пример системы зарядов, для которой монополь, диполь и квадруполь равны нулю, а *октупольный момент* отличен от нуля, показан на рисунке 7.6 б. При этом потенциал, создаваемый такой системой зарядов, обратно пропорционален четвертой степени расстояния $\varphi \sim 1/r^4$.

Такое разложение поля системы зарядов называется разложением по *мультиполям*. Такое представление имеет большое значение при исследовании электрических полей в твердых телах, особенно кристаллах, и больших молекулах. Подобное разложение можно провести и для непрерывного распределения зарядов. Физики, занимающиеся исследованием структуры атомов, молекул, кластеров, а также элементарных частиц, исследуют их мультипольные моменты. Эти исследования дают информацию о структуре изучаемых объектов. В частности, проводятся экспериментальные исследования нейтральных элементарных частиц, например нейтрона, с целью возможного существования их дипольного момента.