

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-механический институт
Кафедра физики

В. К. Иванов

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

*Рекомендовано федеральным учебно-методическим
объединением в системе высшего образования по УГСН
16.00.00. Физико-технические науки и технологии
в качестве учебного пособия для реализации
основных профессиональных образовательных программ
высшего образования подготовки бакалавров
16.03.01. Техническая физика*

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2023

УДК 530.1
ББК 22.3я73
И20

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургского национального исследовательского
Академического университета имени Ж. И. Алфёрова Российской академии наук
А. Н. Ипатов
Доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
В. В. Козловский

Иванов В. К. **Физика. Электромагнитные волны:** учеб. пособие / В.К.Иванов – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 208 с.

Содержание предлагаемого пособия составляет четвертую часть лекционного курса по общей физике для студентов третьего семестра обучения на физических направлениях подготовки. В курсе рассматриваются как общие свойства электромагнитных волн и их распространения в различных средах, так и традиционные разделы, относящиеся к волновой оптике. Изложение в пособии построено как естественное продолжение современного курса электромагнетизма, рассмотренного в предыдущей третьей части курса общей физики. Последовательность изложения соответствует современным представлениям о логической структуре этого раздела физики. Стартуя с полученной ранее системы уравнений электромагнитного поля, в курсе рассматриваются общие свойства плоских волн и волновых пакетов, источники электромагнитных волн и правила преобразования векторов поля при переходе в различные инерциальные системы отсчета. Более традиционное изложение в пособии проводится при описании явлений интерференции и дифракции, а также при рассмотрении свойств распространения электромагнитных волн в различных средах.

При создании учебного пособия использован многолетний опыт чтения общего курса физики на физических факультетах и институтах Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению бакалавриата 16.03.02 «Физика», 16.03.01 «Техническая физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» и 03.03.07 «Прикладная математика и физика». Пособие может быть также использовано будущими бакалаврами, обучающимися по другим физическим направлениям, в качестве дополнительного учебного пособия по физике в рамках общетехнических образовательных программ, начинающимися преподавателями в системах повышения квалификации.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

© В.К.Иванов , 2023
© Санкт- Петербургский государственный
политехнический университет, 2023

ISBN 978-5-7422-8019-4

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение.....	6
1. О курсе волновая оптика	
2. Система уравнений Максвелла	
3. Волновое уравнение	
<u>Глава 1. Электромагнитные волны</u>	
1.1. Плоские электромагнитные волны.....	13
1.1.1. Введение	
1.1.2. Плоские и гармонические волны	
1.1.3. Различные формы записи уравнения плоской монохроматической волны	
1.1.4. Основные свойства плоских электромагнитных волн	
1.2. Энергия и поток энергии электромагнитного поля.....	21
1.2.1. Изменение энергии в объеме. Уравнение неразрывности	
1.2.2. Поток энергии в плоской электромагнитной волне	
1.2.3. Примеры вычисления потоков электромагнитной энергии	
1.3. Поток импульса в электромагнитной волне. Давление света.....	27
1.3.1. Импульс электромагнитного поля	
1.3.2. Давление электромагнитных волн (света)	
1.3.3. Опыты Лебедева П.Н.	
1.4. Суперпозиция электромагнитных волн.....	31
1.4.1. Простейший случай сложения плоских волн.	
1.4.2. Биения	
1.4.3. Стоячие волны	
1.4.4. Эксперименты со стоячими волнами	
1.5. Поляризация электромагнитных волн.....	38
1.5.1. О поляризации волн	
1.5.2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний	
1.6. Момент импульса в бегущей плоской электромагнитной волне.....	42
1.7. Модуляция.....	45
1.7.1. О модуляции. Модуляция амплитуды.	
1.7.2. Модуляция частоты и фазы	
1.8. Волновые пакеты. Групповая скорость.....	49
1.8.1. Волновые пакеты. Формула Рэлея	
1.8.2. Пример спектрального разложения	
1.9. Преобразования векторов электромагнитного поля.....	54
1.9.1. Преобразования компонент электромагнитного поля	
1.9.2. Электрическое поле движущегося точечного заряда	
1.9.3. Инварианты электромагнитного поля	

1.10. Испускание электромагнитных волн.....	64
1.10.1. Излучение точечного заряда	
1.10.2. Мощность излучения	
1.10.3. Излучение электрического диполя	

Глава 2. Интерференция и дифракция.

2.1. Интерференция когерентных волн.....	74
2.1.1. Условия проявления интерференции	
2.1.2. Оптическая разность хода	
2.1.3. Интерференция от двух источников	
2.2. Пространственная и временная когерентность.....	82
2.2.1. Когерентность	
2.2.2. Интерференция квазимонохроматического света. Временная когерентность	
2.2.3. Пространственная когерентность. Роль конечных размеров источников света	
2.3. Интерференция в тонких пленках.....	91
2.3.1. Плоскопараллельная пластинка	
2.3.2. Интерференция на клине	
2.3.3. Кольца Ньютона	
2.3.4. Двухлучевые и многолучевые интерферометры	
2.4. Дифракция Френеля.....	99
2.4.1. Понятие дифракции. Принцип Гюйгенса –Френеля	
2.4.2. Метод зон Френеля. Спираль Френеля	
2.4.3. Дифракция Френеля на прямолинейном крае экрана	
2.5. Дифракция Фраунгофера.....	112
2.5.1. Дифракция на прямоугольной щели	
2.5.2. Дифракция на отверстии	
2.6. Дифракционная решетка.....	120
2.6.1. Когерентный вклад N источников	
2.6.2. Дифракционная картина от дифракционной решетки	
2.6.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор	
2.7. Дифракция рентгеновских лучей.....	127
2.8. Голография.....	130

Глава 3. Прохождение и отражение электромагнитных волн.

3.1. Отражение и преломление электромагнитных волн.....	136
3.1.1. Электромагнитные волны на границе 2-х сред	
3.1.2. Законы отражения и преломления	
3.2. Поляризация при отражении и преломлении электромагнитных волн.....	140
3.2.1. Еще о поляризации света	
3.2.2. Формулы Френеля	
3.2.3. Поляризация при отражении	
3.2.4. Поляризация при преломлении	
3.2.5. Фазовые соотношения	

3.3. Полное внутреннее отражение.....	151
3.3.1. Прошедшая волна	
3.3.2. Эксперименты с пройденной волной	
3.3.3. Отраженная волна	
3.4. Элементы оптики проводящих сред.....	158
3.4.1. Телеграфные уравнения	
3.4.2. Основные особенности решений телеграфных уравнений	
3.4.3. Пройденная и отраженная волны	
3.5. Распространение света в кристаллах.....	164
3.5.1. Двойное лучепреломление	
3.5.2. Оптические свойства кристаллов	
3.5.3. Объяснение явления двойного лучепреломления	
3.5.4. Оптически одноосные кристаллы	
3.5.5. О построении лучей	
3.5.6. Поляризаторы и оптические пластинки	
3.6. Классическая теория дисперсии света.....	177
3.6.1. Дисперсия	
3.6.2. Классическая теория дисперсии	
3.6.3. Нормальная и аномальная дисперсии	
3.7. Вращение плоскости поляризации.....	185
3.7.1. Естественная оптическая активность	
3.7.2. Искусственная оптическая активность	
3.8. Искусственная анизотропия.....	189
3.8.1. Фотоупругость	
3.8.2. Эффект Керра	
3.8.3. Эффект Коттона – Мутона	
3.8.4. Линейный электрооптический эффект Погкельса	
3.9. Рассеяние света.....	191
3.9.1. Природа рассеяния	
3.9.2. Элементарный рассеиватель	
3.9.3. Рэлеевское рассеяние	
3.9.4. Угловое распределение рассеянного света	
3.9.5. Томсоновское поперечное сечение для электрона	
3.9.6. Рассеяние Ми	
Приложения.....	202
П 1. Энергия и поток энергии электромагнитного поля	
П 2. О временной когерентности	
П 3. О пространственной когерентности	

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

ВВЕДЕНИЕ

1. О курсе волновая оптика

Раздел физики, посвященный электромагнитным волнам, является одним из наиболее важных в курсе физики как с практической, так и с фундаментальной точек зрения. Предлагаемое учебное пособие посвящено краткому изложению основных свойств электромагнитных волн, а также основным процессам и физическим следствиям, возникающим при их взаимодействии с веществом.

Пособие представляет собой четвертую часть лекционного курса общей физики, читаемого студентам 1-2 годов обучения на физических и инженерно-физических направлениях подготовки политехнического университета. Настоящий курс является продолжением трех предыдущих частей курса физики, опубликованных ранее в 2021-22 годах, а именно: "Механика", "Молекулярная физика" и "Электромагнетизм". Физическое содержание и изложение в этом пособии по электромагнитным волнам опирается на пройденный ранее материал с указанием соответствующих ссылок на предыдущие части курса.

Цель настоящего пособия – применение уравнений электромагнитного поля (системы уравнений Максвелла, полученной ранее в курсе Электромагнетизма) для описания практических явлений, возникающих при распространении электромагнитных волн в пространстве и во времени.

Пособие состоит из трех разделов, В первой части содержится изложение общих свойств электромагнитных волн. Рассматриваются такие физические величины, характеризующие распространение волн, как энергия и поток энергии, поток импульса и момента импульса, поляризация, а также следствия, возникающие при суперпозиции электромагнитных волн.

В последующих главах, в основном на примере волн оптического диапазона, рассматриваются явления, связанные со сложением электромагнитных волн. Подробно обсуждаются условия наблюдения интерференции и дифракции, приводятся основные эксперименты, в которых эти явления применяются для прецизионных измерений в физике. Последняя глава пособия посвящена процессам прохождения и отражения электромагнитных волн в различных средах. Определенное внимание уделяется явлениям поляризации и дисперсии световых волн при их распространении в анизотропных средах.

Пособие подготовлено с учетом методических разработок кафедры экспериментальной физики политехнического университета (СПбПУ). Основные идеи и содержание обновленного курса общей физики широко

обсуждались на научно-методических семинарах под руководством профессоров кафедры экспериментальной физики. Результатом этих обсуждений являлось опубликование в 2003 году учебного пособия по курсу физики под авторством коллектива профессоров кафедры И.П. Ипатовой, В.Ф. Мастерова, Ю.И. Уханова. Основная идея авторов курса состояла в том, что школьники уже освоили в школе курс элементарной физики и достаточно хорошо подготовлены к восприятию дедуктивного изложения материала. Стартуя с системы уравнений, описывающих электромагнитное поле и являющихся обобщением опытных фактов, в последующем авторы рассматривали физические следствия, вытекающие из постулируемой системы уравнений. Однако как показывает опыт преподавания на тех же физических направлениях подготовки, большая часть студентов легче воспринимала материал при последовательном переходе от основных экспериментальных законов к их обобщению и дальнейшему представлению их в виде системы уравнений электромагнитного поля.

Настоящее учебное пособие по электромагнетизму построено ближе к традиционному изложению этого раздела курса физики на лекциях и практических занятиях. Ниже во Введении приводятся классические уравнения электромагнитного поля, как результат изучения предыдущей части курса электромагнетизма. В дальнейшем изложении эти уравнения применяются для описания распространения электромагнитных волн в различных средах.

Пособие отражает совокупность основных тем и вопросов, которые излагаются на лекциях и проходятся на практических занятиях. Оно построено в рамках утвержденной программы по общей физике для студентов Санкт-Петербургского политехнического университета. В пособии не рассматриваются многие практические приложения, связанные с применением электромагнитных волн. В этом смысле пособие не является полновесным учебником по курсу электромагнетизма в отличие от известных книг и учебников в прилагаемой ниже литературе. Следует также отметить, что многие рассуждения и стиль изложения ряда вопросов в данном пособии могут быть аналогичны их рассмотрению в указанной учебной литературе.

Предлагаемая литература к разделу Электромагнитные волны:

- 1). А.Н. Матвеев “Оптика”. Москва, Высшая школа. 1985 г.
- 2). Д.В. Сивухин Общий курс физики. Том 4. Оптика. Москва. Наука, Физматлит. 1980 г.
- 3). И.Е. Иродов. Основные законы электромагнетизма. Москва. Высшая школа. 1991 г.
- 4). Н.И. Калитеевский. Волновая оптика. Москва. Высшая школа, 1978 г.

- 5). И.П. Ипатова, В.Ф. Мастеров, Ю.И. Уханов. Курс физики. Том 2. Электромагнитные явления. Санкт-Петербург. Издательство СПбГПУ. 2003 г.
- 6). И.В. Савельев, Курс общей физики. Том 2. Издательство Лань. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. 2005 г.
- 7). Г.С. Ландсберг. Оптика. Наука, 1970 г.
- 8). М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Наука, 1970 г.

Кроме того, поскольку настоящий курс лекций является продолжением пройденного студентами ранее материала по физике, то в [тексте часто указываются ссылки на лекции, опубликованные в предыдущих пособиях автора по курсам "Механика" \[1\], "Молекулярная физика" \[2\] и "Электромагнетизм" \[3\]:](#)

1. "Физика. Механика" СПб, Политех-Пресс, 2021,
2. "Физика. Молекулярная физика" СПб, Политех-Пресс, 2021,
3. "Электромагнетизм" СПб, Политех-Пресс, 2022.

В пособии используется Гауссова система единиц, как наиболее естественная система, принимаемая в общем курсе физике. Однако, автор считает, что будущие физики должны ориентироваться в различных системах единиц и успешно переходить из одной системы единиц в другую, поэтому в пособии все формулы дублируются в международной системе единиц СИ. Это также полезно с той точки зрения, что система единиц СИ используется в большинстве задачников и основных учебников по физике.

Автор пособия признателен преподавателям и сотрудникам кафедры экспериментальной физики СПбПУ за обсуждение содержания и критику этого курса, что способствовало его формированию.

2. Система уравнений Максвелла.

Классическая теория электромагнитных явлений основана на [уравнениях Максвелла](#), являющихся обобщением опытных фактов. Они образуют систему уравнений, которая связывает воедино основные электромагнитные величины и описывает все наблюдаемые классические электромагнитные явления. Последовательное получение этих уравнений и их физическое содержание подробно раскрывалось в предыдущей части курса физики (см ["Электромагнетизм" \[3\]](#)), однако для удобства их применения в этой части курса полная система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме приводится в этом Введении ниже в Таблице 1. При изложении явлений, связанных с распространением электромагнитных волн в вакууме и в различных средах, мы будем ссылаться на приведенные уравнения.

Запишем уравнения электромагнитного поля в интегральной (Таблица 1) и дифференциальной (Таблица 2) формах в двух системах единиц, которые наиболее широко используются в физике электромагнитных явлений:

- 1) *СГС* (*CGS*) (или далее система единиц Гаусса) и
- 2) международная *СИ* (*SI*) система единиц.

Таблица 1. Уравнения Максвелла в интегральной форме:

<i>CGS</i>	<i>SI</i>	
$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$	(1)
$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$	(2)
$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	(3)
$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q$	$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	(4)

Напомним обозначения, используемые в уравнениях (1)–(4). Эти же обозначения применялись в предыдущей части курса электромагнетизма [3].

Для **электрических величин**:

q – электрический заряд;

ρ – объемная плотность электрического заряда;

\vec{E} и \vec{D} – векторы напряженности и индукции электрического поля, соответственно;

\vec{j} – вектор плотности электрического тока.

Для **магнитных величин**:

\vec{B} и \vec{H} – векторы индукции и напряженности магнитного поля, соответственно.

Кроме того, c – скорость света; а производные d/dt берутся по времени.

Интегралы в (1)–(2) от скалярного произведения векторной величины поля и вектора элемента контура $d\vec{l}$ берутся по замкнутому контуру L и носят название **циркуляции** этого вектора. В правой части этих уравнений интегралы от скалярного произведения векторов поля и вектора элемента поверхности

$d\vec{S}$ берутся по поверхности S , опирающейся на контур L . Такие интегралы называются *поток вектора* через эту поверхность. Таким образом, циркуляция вектора напряженности \vec{H} магнитного поля (1) определяется двумя слагаемыми: потоком вектора \vec{j} через поверхность S (т.е. полным током) и скоростью изменения потока вектора индукции \vec{D} через ту же поверхность S . Циркуляция вектора напряженности электрического поля \vec{E} по замкнутому контуру (2) (работа электрического поля) определяется скоростью изменения потока вектора магнитной индукции \vec{B} через поверхность S , опирающуюся на контур L .

Интегралы в (3)–(4) от скалярного произведения векторов \vec{B} и \vec{D} и элемента поверхности $d\vec{S}$ берутся по замкнутой поверхности S : они определяют *поток векторов* \vec{B} и \vec{D} через эту поверхность. Уравнение (3) свидетельствует о том, что источников магнитного поля в виде магнитных зарядов (монополей) не существует (в классической электродинамике). Источником же электрических полей (4) являются электрические заряды q .

Интегральные уравнения электромагнитного поля описывают общие свойства электрических и магнитных величин. Однако для решения конкретных задач необходимы знания электромагнитных величин в каждой точке рассматриваемого пространства, иначе говоря, дифференциальные характеристики поля. Соответствующие интегральным уравнениям (1)–(4) дифференциальные уравнения (5)–(8) записываются с помощью дифференциальных операторов rot и div .

Таблица 2. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

<i>CGS</i>	<i>SI</i>	
$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	(5)
$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	(6)
$div\vec{B} = 0$	$div\vec{B} = 0$	(7)
$div\vec{D} = 4\pi\rho$	$div\vec{D} = \rho$	(8)

Напомним также еще несколько основных фактов, касающихся области применения системы уравнений электромагнитного поля.

- 1) Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца, поэтому они справедливы и в области релятивистских скоростей.
- 2) Квантовый характер электромагнитных сил не сказывается на расстояниях вплоть до 10^{-10} см (примерно в 100 раз меньше размера атома). Для меньших расстояний необходимо использовать уравнения квантовой электродинамики.

3. Волновое уравнение.

Настоящий курс посвящен основным свойствам электромагнитных волн, поэтому кратко напомним, как получается уравнение, описывающее их распространение в вакууме и простейших средах.

Рассмотрим **непроводящую, изотропную и однородную среду**, характеризуемую диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Пусть в этой среде отсутствуют свободные заряды и токи проводимости, т.е. имеем $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$. Тогда, если в рассматриваемой области нет ферромагнетиков, можно записать стандартные уравнения для полей в среде:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (9)$$

Система уравнений Максвелла (5) - (8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Продифференцируем первое уравнение из (10) по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Применяя операцию rot ко второму уравнению системы (10) и подставляя результат (11), полученный из первого уравнения, находим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\mu}{c} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Из векторного анализа вспомним правило "БАЦ-ЦАБ", тогда имеем

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = [\vec{\nabla} [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E},$$

где оператор Лапласа равен как обычно сумме вторых частных производных.

И так как $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) = 0$ из-за условия $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, получаем:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\Delta\vec{E} \quad (12)$$

Таким образом, окончательно для вектора напряженности электрического поля имеем:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

Аналогично для \vec{H} или \vec{B} получаем:

$$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

Именно получением этих уравнений, называемых *волновыми уравнениями*, закончился предыдущий курс посвященный Электромагнетизму ([3] Глава 4, §4.8). Полученные уравнения описывают распространение электромагнитных колебаний в среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ .

Еще ранее в курсе классической механики мы также встречались с такими уравнениями при изучении распространения колебаний ([1] Глава 4, §4.7). В общем случае уравнение вида

$$\Delta\Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

называется *волновым уравнением*. Здесь в качестве функции $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$ могут быть функции векторных полей $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}$ и их проекций.

Глава 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.

1.1. Плоские электромагнитные волны.

1.1.1. Введение.

Существование электромагнитных волн было предсказано Дж. Максвеллом в 1862-1864 г.г., как прямое следствие уравнений электромагнитного поля. Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн было впервые получено Г. Герцем в 1888 г. После опытов, проведенных Г. Герцем, получает признание гипотеза об электромагнитной волновой природе света.

Представление о свете существенно изменялось со временем по мере накопления экспериментальных данных и возможности их описания, а также по мере развития других физических представлений. Какова природа света – волновая или корпускулярная? Этот вопрос занимал мыслителей и исследователей в течение нескольких столетий. И. Ньютон отдавал предпочтение корпускулярной теории, Р. Декарт, Х. Гюйгенс – волновой теории.

С начала XIX века представление о природе свет стало складываться в пользу волновой теории в связи с открытием явлений интерференции и дифракции. Наибольший вклад в исследовании волновых свойств света внесли Т. Юнг, Ж. Френель. Подтверждением волновой теории послужили также опыты по поляризации света, в частности, по вращению плоскости поляризации, а так же факт совпадения скорости света "с" с электродинамической постоянной.

Итак, световые колебания тождественны колебаниям электромагнитного поля, поэтому оптика рассматривается как раздел учения об электромагнитных явлениях, описываемых системой уравнений Максвелла.

Однако в начале XX века появилась необходимость выхода за рамки классических волновых представлений. Этому способствовали исследования излучения абсолютно черного тела, которые привели к введению понятия квантов энергии. Это понятие ввел в теорию излучения М. Планк при описании спектра излучения абсолютно черных тел. Затем эксперименты по фотоэффекту, опыты А. Комптона и другие исследования показали невозможность их объяснения с классической волновой точки зрения. Для объяснения новых экспериментов стало необходимым ввести и учитывать корпускулярные свойства электромагнитных волн. Было введено понятие частиц света – *фотонов*, обладающих энергией, импульсом, моментом импульса.

Современное представление о фотоне как о кванте электромагнитного поля основывается на том, что фотон в процессах взаимодействия с веществом

проявляет свойства и волны и частицы. Об этом свойстве фотона проявлять при одних условиях свойства электромагнитных волн, а при других - свойства классических частиц, физики говорят как о “*дуализме волны и частицы*”. Такое представление происходит из-за нашей попытки понять микрообъекты с помощью понятий макромира. Поэтому правильнее сказать, что внутренняя природа фотонов просто такова, что в зависимости от условий проведения эксперимента проявляются или волновые, или корпускулярные свойства электромагнитных волн.

Электромагнитные волны (фотоны) имеют различные длины волн, фактически простирающиеся от бесконечности до нуля. В физике вводится в рассмотрение шкала электромагнитных волн, в рамках которой волны классифицируются по длинам волн или по частоте. В зависимости от длины волны электромагнитные волны носят различные названия: радиоволны, инфракрасный и видимый свет, ультрафиолетовое и рентгеновское излучение, гамма - кванты. Всех их объединяют общие свойства, к описанию которых мы переходим в этом курсе.

Примечание 1.

Исаак Ньютон, великий английский физик, 1643–1727, создатель классической механики;

Рене Декарт, французский математик и естествоиспытатель, 1596–1650,

Христиан Гюйгенс, голландский физик, 1629–1695;

Томас Юнг, английский ученый, 1773–1829;

Огюстен Жан Френель, французский физик, 1788–1827

Джеймс Клерк Максвелл, великий английский физик, 1831–1879; создатель системы уравнений электромагнитного поля

Генрих Рудольф Герц, немецкий физик, 1857–1894;

Макс Карл Эрнст Людвиг Планк, немецкий физик-теоретик, 1858–1947, Нобелевская премия 1918г. за вывод теоретического закона излучения

Артур Холли Комптон, американский физик, 1892–1962, Нобелевская премия 1927г. за открытие явления изменения длины волны рентгеновского излучения вследствие его рассеяния электронами вещества

1.1.2. Плоские и гармонические волны.

Пусть имеем **неограниченную однородную** среду, характеризуемую диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ . Будем считать, что в рассматриваемой среде выполняются следующие условия:

- 1) поглощение равно 0, т.е. в среде нет проводимости $\sigma = 0$; следовательно, нет потери на Джоулево тепло, поскольку в этом случае ток проводимости отсутствует $\vec{j} = 0$,
- 2) объемная плотность сторонних зарядов равна нулю $\rho = 0$.

Тогда из системы уравнений Максвелла (см пункт 3 во Введении или §§ 4.7,4.8 курса “Электродинамика” [3]) получаем *волновые уравнения* для векторов напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.1)$$

Пусть вектора \vec{E} и \vec{H} для простоты зависят только от одной координаты x и времени t , тогда волновые уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.2)$$

Общим решением этих уравнений являются векторные функции, зависящие от аргумента $(x \pm vt)$: $\vec{E} = \vec{E}(x \pm vt)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x \pm vt)$, где v – скорость электромагнитной волны в среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (1.1.3)$$

Значение функции \vec{E} (и \vec{H}) для фиксированных значений координаты x и времени t является постоянным на плоскости, перпендикулярной к оси x . Поэтому такие волны, описываемые функциями $\vec{E} = \vec{E}(x \pm vt)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x \pm vt)$ называются *плоскими*.

Волна называется *монохроматической* (одноцветной), если поле волны в каждой точке пространства является *гармонической* (синусоидальной, косинусоидальной) функцией времени. Монохроматическая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x , описывается уравнениями

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]; \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad (1.1.4)$$

где \vec{E}_0 и \vec{H}_0 – амплитуды волны; ω – частота электромагнитных колебаний или круговая частота. Вводя обозначение

$$k = \frac{\omega}{v}, \quad (1.1.5)$$

где k – волновое число ($k = 2\pi/\lambda$, т.е. k равно числу длин волн, укладывающихся на отрезке 2π см – отсюда следует его название), *уравнение монохроматической волны* можем записать в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$$

или

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (1.1.6)$$

Аргумент косинуса

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$$

называется *фазой волны*, где φ_0 – начальная фаза.

Если зафиксировать момент времени t , то получаем синусоидальное распределение полей \vec{E} и \vec{H} в пространстве (вдоль оси x) в данный момент

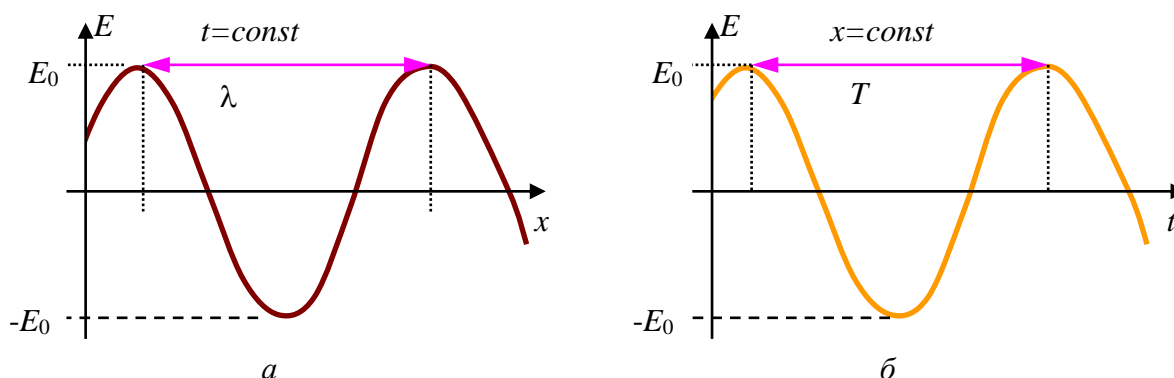


Рис. 1.1.

времени (см рис. 1.1а). Если зафиксируем значение координаты x , то получим синусоидальное распределение полей \vec{E} и \vec{H} в зависимости от времени (см рис. 1.1б) – гармонические колебания с частотой ω .

Период изменения напряженности поля в пространстве – это *длина волны* λ , величину которой можно записать в виде:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = v \frac{2\pi}{\omega} = vT, \quad (1.1.7)$$

т.е. длина волны λ – это расстояние, на которое перемещается плоскость постоянной фазы за время, равное одному *периоду колебаний*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}, \quad (1.1.8)$$

Здесь ν в отличие от круговой частоты ω – обычная частота $\nu = \omega/2\pi$, определяемая как количество колебаний в единицу времени (греческий символ "ню" - не путать со скоростью распространения фазы волны ν !!).

1.1.3. Различные формы записи уравнения плоской монохроматической волны.

Описать плоскую монохроматическую волну можно иначе, используя общий подход к определению направления ее распространения. Пусть распространяется волна в произвольном направлении, определяемом единичным вектором \vec{n} , перпендикулярным к плоскости волны, т.е. плоскости

постоянной фазы $\omega t - kx = const$. Тогда можно записать $kx = \vec{k}\vec{r}$, если $\vec{k} = k\vec{n}$. Вектор, направленный в сторону распространения волны,

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}, \quad (1.1.9)$$

называется *волновым вектором*. Теперь записывая $kx = \vec{k}\vec{r}$ и абстрагируясь от системы координат, получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}); \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (1.1.10)$$

Эти уравнения описывают плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора \vec{k} .

Часто зависимость векторов электромагнитного поля от координат и времени удобно записывать в комплексной форме. Используем для перехода к комплексной форме записи формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1.1.11)$$

Тогда общее решение волнового уравнения для плоской монохроматической волны можно представить в виде:

$$\vec{E} = \text{Re} \left[\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right] \quad \text{и} \quad \vec{H} = \text{Re} \left[\vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right]. \quad (1.1.12)$$

Знак реальной части “*Re*” мы, как это принято, в дальнейшем будем опускать, не забывая при этом, что физический смысл имеет лишь вещественная часть используемых комплексных выражений:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{и} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (1.1.13)$$

Амплитуды \vec{E}_0 и \vec{H}_0 в общем случае являются комплексными величинами и могут быть представлены как

$$E_0 = |\vec{E}_0| e^{i\varphi_0}, \quad (1.1.14)$$

где модуль $|\vec{E}_0|$ равен амплитуде колебаний, а аргумент φ_0 – начальной фазе колебаний в точке $\vec{r} = 0$. Аналогичным образом может быть записана комплексная амплитуда колебаний магнитного поля \vec{H}_0 .

Комплексная запись особенно удобна, как мы увидим далее, при применении к векторам \vec{E} и \vec{H} дифференциальных операторов.

Резюмируя сказанное, отметим, что *из уравнений Максвелла следует вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно, т.е. отдельно от электрических зарядов и токов. Изменение состояния электромагнитного поля носит волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами.*

Любая электромагнитная волна (гармоническая волна или электромагнитное возмущение произвольной формы) характеризуется общими свойствами, которые рассмотрим ниже.

1.1.4. Основные свойства плоских электромагнитных волн.

1) **Поперечность.** Запишем уравнения плоских монохроматических волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})], \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \quad (1.1.15)$$

и подставим их в уравнения системы уравнений Максвелла. Сначала подставим в первое уравнение системы уравнений (10):

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.1.16)$$

Для упрощения дальнейших вычислений заметим, что дифференцирование по времени векторов плоской волны сводится к умножению их на множитель " $-i\omega$ ", а дифференцирование по координате – к умножению на множители ik_x, ik_y, ik_z , соответственно. Тогда имеем:

$$\text{rot}\vec{H} = [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = i[\vec{k}, \vec{H}]; \quad (1.1.17)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -i\omega \vec{E}. \quad (1.1.18)$$

Таким образом, подставляя последние полученные выражения в уравнение системы Максвелла (1.1.16), получаем соотношение:

$$[\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{\varepsilon\omega}{c} \vec{E}. \quad (1.1.19)$$

Подставив (1.1.15) во второе уравнение системы (10)

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1.1.20)$$

таким же способом преобразуем его к следующему виду

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\mu\omega}{c} \vec{H}. \quad (1.1.21)$$

Или можно последние два уравнения (1.1.19) и (1.1.21) переписать следующим образом:

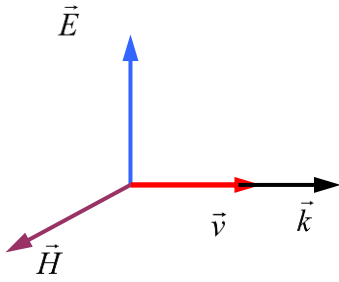


Рис. 1.2.

$$\begin{aligned} [\vec{k}, \vec{H}] &= -\frac{\omega}{c} \vec{D} \\ [\vec{k}, \vec{E}] &= \frac{\omega}{c} \vec{B} \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Полученные уравнения справедливы для любых плоских волн. Отсюда следует, что в плоской электромагнитной волне вектор напряженности электрического поля \vec{E} , вектор напряженности магнитного поля \vec{H} и волновой вектор \vec{k} *взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему* (см рис. 1.2). Из перпендикулярности векторов \vec{E} и \vec{H} к волновому вектору \vec{k} (к вектору скорости волны \vec{v}), т.е. направлению распространения волны, следует, что *электромагнитные волны — поперечные*.

Это свойство следует также из двух других уравнений системы (10) $\text{div} \vec{D} = 0$ и $\text{div} \vec{B} = 0$, которые подстановкой (1.1.15) преобразуются к виду, соответственно:

$$\begin{aligned} (\vec{k}, \vec{D}) &= 0 \\ (\vec{k}, \vec{B}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Т.е. вектор \vec{k} перпендикулярен векторам \vec{D} и \vec{B} . Свойство поперечности справедливо для любых плоских электромагнитных волн.

2). **Синфазность.** Перепишем уравнения (1.1.19) и (1.1.21), учитывая, что волновой вектор и скорость волны равны $k = \omega/v$ и $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, в следующем виде:

$$\vec{E} = -\frac{c}{\epsilon\omega} [\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{1}{k} \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\epsilon} [\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\vec{k}, \vec{H}] \quad (1.1.24)$$

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu\omega} [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\vec{k}, \vec{E}] \quad (1.1.25)$$

Поскольку векторы \vec{E}, \vec{H} и \vec{k} взаимно перпендикулярны, то можно взять соотношения (1.1.24) или (1.1.25) по модулю и тогда получаем следующее равенство модулей:

$$\sqrt{\mu} H = \sqrt{\epsilon} E. \quad (1.1.26)$$

Таким образом, отношение численных значений векторов \vec{E} и \vec{H} пропорционально корню из отношения проницаемостей и, следовательно, от времени не зависит, следовательно, эти *векторы имеют одинаковые фазы и изменяются синхронно*.

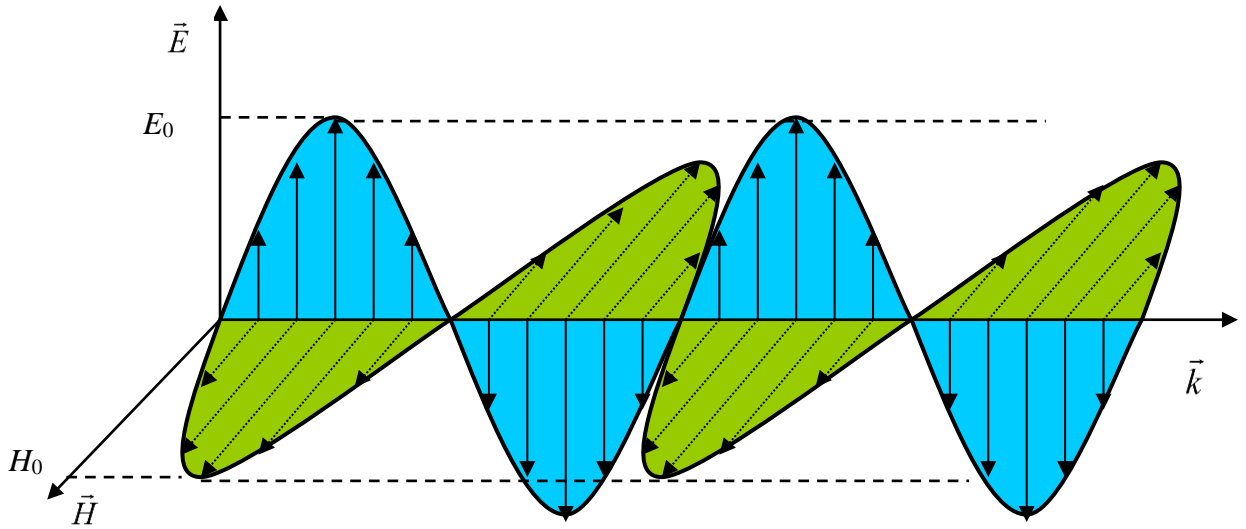


Рис. 1.3.

На рис. 1.3 показано это свойство синфазности векторов \vec{E} и \vec{H} , при этом между мгновенными значениями E и H в любой точке существует определенная связь

$$E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H = \frac{v}{c} B$$

3). **Фазовая скорость** – скорость распространения одинаковой фазы (см уравнение (1.1.3) или ранее (4.8.11) в [3]). Выразим из уравнения (1.1.21) $[\vec{k}, \vec{E}] = \mu\omega\vec{H}/c$ вектор \vec{H} и подставим в уравнение (1.1.19) $[\vec{k}, \vec{H}] = -\varepsilon\omega\vec{E}/c$. При этом получаем

$$[\vec{k}[\vec{k}, \vec{E}]] = -\varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}. \quad (1.1.27)$$

Расписывая двойное векторное произведение по правилу $[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$, имеем

$$[\vec{k}[\vec{k}, \vec{E}]] = \vec{k}(\vec{k}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{k}, \vec{k}) = -k^2\vec{E},$$

т.к. $(\vec{k}, \vec{E}) = 0$ из-за перпендикулярности векторов $\vec{k} \perp \vec{E}$. Получаем следующее соотношение

$$k^2\vec{E} = \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E},$$

и откуда получаем скорость распространения одинаковой фазы

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \quad \text{и} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (1.1.28)$$

Опять получаем фазовую скорость, т.е. скорость распространения колебаний одинаковой фазы, которая уже появлялась выше (см. (1.1.3)).

В вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) скорость распространения электромагнитного поля численно равняется *электродинамической постоянной*, определяющей силу взаимодействия токов и имеющей размерность скорости. Значение электродинамической постоянной, найденное опытным путем, в пределах ошибок эксперимента равно скорости света в вакууме. Численное совпадение этих величин является доказательством как электромагнитной природы света, так и справедливости уравнений Максвелла, по крайней мере, в применении их к вакууму.

Отметим, что в признании конечности скорости распространения электромагнитного поля заключается основное отличие фактического содержания теорий близкого действия и, прежде всего теории Максвелла, от теорий мгновенного дальнего действия начала прошлого столетия.

4). *Поляризация*. Если в электромагнитной волне поведение векторов \vec{E} и \vec{H} в пространстве и времени подчиняется определенному закону, то такую волну называют *поляризованной*. Если направить ось z системы координат вдоль волнового вектора \vec{k} , то вследствие поперечности электромагнитных волн векторы \vec{E} и \vec{H} будут иметь отличные от нуля проекции только на оси x и y .

Уравнения Максвелла допускают, в частности, такое решение, когда каждый из векторов \vec{E} и \vec{H} совершает колебания только вдоль одной из взаимно перпендикулярных осей. Тогда говорят, что волна имеет *линейную*, или *плоскую поляризацию*. Плоскость, в которой лежит вектор напряженности электрического поля волны \vec{E} и волновой вектор \vec{k} , называют *плоскостью поляризации* или *плоскостью колебаний*.

Линейной поляризацией не исчерпываются виды поляризации электромагнитных волн. О других видах поляризации разговор пойдет ниже.

1.2. Энергия и поток энергии электромагнитного поля.

1.2.1. Изменение энергии в объеме. Уравнение неразрывности.

Энергия электрического и магнитного полей нами уже определялась в разделе “Электромагнетизм” следующими соотношениями (§§ 2.6 и 4.4 [3])

$$\begin{aligned}
 W_{эл} &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \vec{D} dV & \text{или более общими} & & W_{эл} &= \frac{1}{4\pi} \iint \vec{E} d\vec{D} dV \\
 W_{магн} &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \vec{B} dV & & & W_{магн} &= \frac{1}{4\pi} \iint \vec{H} d\vec{B} dV
 \end{aligned}
 \tag{1.2.1}$$

Под воздействием электрических и магнитных сил может совершаться работа. Поэтому, записывая закон сохранения энергии для электромагнитного поля, необходимо включать и эту работу тоже.

Пусть среда, в которой возбуждается электромагнитное поле и токи, неподвижна. Тогда в единице объема возбуждается энергия за счет работы внешних сил – энергия электромагнитного поля и энергия тока:

$$\delta A = \frac{1}{4\pi} (\vec{H} d\vec{B} + \vec{E} d\vec{D}) + (\vec{j}, \vec{E}) dt \quad (1.2.2)$$

Последнее слагаемое в (1.2.2) описывает выделяющееся Джоулево тепло

$$\delta Q/dV = \sigma E^2 dt = \vec{j} \vec{E} dt.$$

Считаем для простоты, что других превращений энергии в этом объеме нет. Эта работа δA идет на приращение внутренней энергии за вычетом тепла, уходящего из единицы объема среды вследствие теплопроводности. Если теплопроводность равна 0, то весь запас внутренней энергии пополняется работой δA .

Пусть u – внутренняя энергия единицы объема. Тогда ее приращение равно работе внешних сил:

$$\delta A = du = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} d\vec{D} + \vec{H} d\vec{B}) + \vec{j} \vec{E} dt$$

Или, разделив на временной интервал dt , получаем приращение внутренней энергии в дифференциальной форме и интегральной (для конечного объема V) форме, соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \vec{j} \vec{E} \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV + \int_V \vec{j} \vec{E} dV \quad (1.2.4)$$

Под u понимается плотность всей внутренней энергии, а не только ее электромагнитная часть. Поэтому уравнение (1.2.3) справедливо для любых сред, в том числе ферромагнитных и сегнетоэлектрических. Оно учитывает не только Джоулево тепло (\vec{j}, \vec{E}) , но и тепло ферромагнитного и диэлектрического гистерезиса. Преобразуем (1.2.3), вспомнив уравнения Максвелла

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \text{rot} \vec{H} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} \vec{E}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(\vec{E}, \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}, \text{rot} \vec{H}) - \frac{c}{4\pi} (\vec{H}, \text{rot} \vec{E})$$

Далее, используя векторное тождество $\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} = -\text{div} [\vec{E}, \vec{H}]$, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] = 0 \quad (1.2.5)$$

Введем новый вектор

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}], \quad (1.2.6)$$

тогда уравнение (1.2.5) записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0 \quad (1.2.7)$$

В итоге получили уравнение (1.2.7) называемое *уравнением неразрывности*, которое описывает *закон сохранения энергии*. Ранее в курсе физики мы уже встречались с подобными уравнениями неразрывности, так например, закон сохранения плотности вероятности или закон сохранения заряда $\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ (см § 3.1 в [3]).

По аналогии с другими законами сохранения заключаем, что поскольку в уравнении (1.2.7) имеем изменение плотности энергии во времени $\partial u / \partial t$, то введенный вектор \vec{S} играет роль *плотности потока электромагнитной энергии*. Смысл уравнения (1.2.7) становится более понятным, если записать его в интегральной форме. Пользуясь (1.2.4) и (1.2.6), получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \int_V \operatorname{div} \vec{S} dV = \frac{\partial U}{\partial t} + \oint \vec{S} d\vec{s} = 0 \quad (1.2.8)$$

То есть приращение внутренней энергии в объеме V происходит за счет электромагнитной энергии, "втекающей" в этот объем из окружающего пространства через поверхность s , ограничивающую этот объем.

Вектор плотности потока электромагнитной энергии \vec{S} называется *вектором Пойнтинга*. Иногда его называют *вектором Умова – Пойнтинга*. Н.А. Умов ввел понятие плотности потока энергии для упругих сред и вязких жидкостей в 1874 г. Дж. Пойнтинг ввел вектор \vec{S} для электромагнитного поля в 1885 г. Размерность вектора Пойнтинга: $[\vec{S}] = \text{энергия/время} \cdot \text{площадь}$.

$$\text{В системе СИ его размерность: } [\vec{S}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{с}}$$

$$\text{В системе единиц Гаусса: } [\vec{S}] = \frac{\text{Эрг}}{\text{см}^2 \text{с}}.$$

Отметим, что выражение $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$ отличается большой общностью, так как вектор Пойнтинга выражается только через напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей и не содержит никаких величин, характеризующих индивидуальные свойства среды, в которой распространяется электромагнитная энергия.

Примечание 1. Различные выражения закона сохранения энергии.

1). Если теплопроводность отлична от 0, то к потоку электромагнитной энергии добавится плотность потока тепла.

2). Электромагнитная часть энергии определяется соотношением $dW = \int_V dw dV$, где приращение плотности электромагнитной энергии равно $dw = 1/4\pi(\vec{E}d\vec{D} + \vec{H}d\vec{B})$. Тогда, разделяя полную энергию U на электромагнитную энергию W и джоулево тепло $Pdt = \sigma E^2 dt = \vec{j}\vec{E}dt$, можно записать выражение для мощности P , выделяемой в объеме V из-за токов проводимости:

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint_S \vec{S} d\vec{s} \quad (1.2.9)$$

Эта мощность равна уменьшению энергии электромагнитного поля и потоку энергии через поверхность объема. Если энергия электромагнитного поля не изменяется во времени (стационарный случай), то мощность равна нулю $\partial W/\partial t = 0$ и вся производимая работа в замкнутом объеме совершается за счет энергии электромагнитного поля, проникающую через поверхность, ограничивающую объем.

3). Если рассматриваем вакуум или диэлектрик, то плотность тока проводимости $\vec{j} = 0$ и мощность выделяемого джоулево тепла $P = 0$ и в закон сохранения энергии входят только электромагнитные величины:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint_S \vec{S} d\vec{s} = 0 \quad (1.2.10)$$

4). Альтернативный вывод уравнения неразрывности (1.2.7) приведен в Приложении 1.

Примечание 2. *Джон Генри Пойнтинг, английский физик, 1852–1914;*
Николай Алексеевич Умов, русский физик, 1846–1915

1.2.2. Поток энергии в плоской электромагнитной волне.

Итак, плотность потока электромагнитной энергии задается вектором Пойнтинга \vec{S} (1.2.6). Ранее для вектора напряженности магнитного поля в плоской электромагнитной волне мы получили (см. §1.1. формула (1.1.21))

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu\omega} [\vec{k}, \vec{E}].$$

Подставим \vec{H} в выражение для вектора Пойнтинга, и, вспоминая свойство поперечности электромагнитной волны $(\vec{k}, \vec{E}) = 0$, а также связь между модулями векторов напряженности электрического и магнитного поля в этой волне $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ (1.1.26), получаем:

$$\vec{S} = \frac{c^2}{4\pi\mu\omega} [\vec{E}[\vec{k}, \vec{E}]] = \frac{c^2}{4\pi\mu\omega} (\vec{k}E^2 - \vec{E}(\vec{k}, \vec{E})) = \frac{c^2}{4\pi} \frac{E^2}{\mu} \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{H^2}{\epsilon} \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{EH}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\vec{k}}{\omega}.$$

Плотность энергии в электромагнитной волне, распространяющейся в однородной и изотропной среде, равна

$$w = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2). \quad (1.2.11)$$

И с учетом равенства (1.1.26) для модулей $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$, получаем для плотности энергии поля:

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}. \quad (1.2.12)$$

Тогда можно записать вектор Пойнтинга в следующем виде (учитывая, что фазовая скорость $\omega/|\vec{k}| = v$):

$$\vec{S} = \frac{c^2}{4\pi \mu \omega} \frac{E^2}{c^2} \vec{k} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu \omega} w \vec{k} = \frac{v^2}{\omega} w \vec{k} = w \vec{v}, \quad (1.2.13)$$

Плотность потока энергии равна объемной плотности энергии, умноженной на вектор скорости ее распространения:

$$\vec{S} = w \vec{v} \quad (1.2.14)$$

Интерпретация этого важного соотношения, таким образом, довольно проста *электромагнитная волна переносит энергию в направлении своего распространения.*

1.2.3. Примеры вычисления потоков электромагнитной энергии.

1. *Выделение джоулева тепла в проводнике.*

Пусть по цилиндрическому проводнику радиусом r течет постоянный ток: $I = \pi r^2 j$ (j – плотность тока). Из теоремы о циркуляции $H \cdot 2\pi r = 4\pi/c \cdot \pi r^2 j$ получаем, что магнитное поле тока на поверхности проводника равно:

$$H = \frac{2I}{cr} = \frac{2\pi jr}{c}, \quad (1.2.15)$$

а его силовые линии представляют собой концентрические окружности вокруг оси проводника. Электрическое поле \vec{E} параллельно оси провода (см рис. 2.2). Поэтому вектор Пойнтинга \vec{S} направлен внутрь проводника нормально к его боковой поверхности. Таким образом

электромагнитная энергия “втекает” из окружающего пространства через боковую поверхность внутрь проводника.

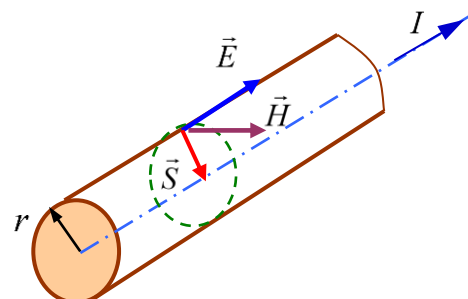


Рис. 2.2.

Сравним входящую энергию с количеством теплоты, выделяющейся в проводнике при протекании тока. Поток электромагнитной энергии сквозь боковую поверхность участка проводника длиной l равен:

$$S \cdot 2\pi r l = \frac{c}{4\pi} E H 2\pi r l = \pi r^2 l j E = V j E. \quad (1.2.16)$$

Здесь вместо напряженности магнитного поля H подставлено выражение (1.2.15), $V = \pi r^2 l$ – объем участка проводника. Таким образом, поток электромагнитной энергии, поступающей в проводник извне, целиком превращается в Джоулево тепло.

2. Зарядка конденсатора.

Пусть плоский конденсатор имеет круглые обкладки радиусом r , находящиеся на расстоянии h друг от друга. Пренебрегая краевыми эффектами, найдем поток электромагнитной энергии, “втекающей” в конденсатор через его боковую “поверхность”. В процессе зарядки конденсатора вектор Пойнтинга \vec{S} направлен внутрь конденсатора (рис. 2.3). На этой “поверхности” имеется меняющееся во времени электрическое поле \vec{E} и вызванное его изменением магнитное поле \vec{H} . По теореме о циркуляции вектора \vec{H} находим

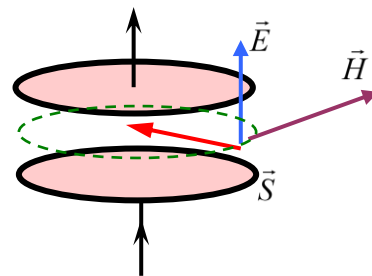


Рис. 2.3.

$$H \cdot 2\pi r = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} d\vec{s} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \pi r^2.$$

Тогда поток электромагнитной энергии внутрь конденсатора равен

$$S \cdot 2\pi r h = \frac{c}{4\pi} E H 2\pi r h = \frac{1}{4\pi} E \frac{\partial D}{\partial t} h \pi r^2 = \frac{V}{4\pi} E \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (1.2.17)$$

Таким образом, за время dt приращение энергии конденсатора составит (если $D = \epsilon E$):

$$dW = \frac{V}{4\pi} E dD = \frac{1}{8\pi} d(\epsilon E^2 V) = \frac{1}{8\pi} d(ED \cdot V). \quad (1.2.18)$$

Проинтегрировав это выражение, мы получаем формулу для энергии заряженного конденсатора.

$$W = \frac{1}{8\pi} ED \cdot V = w \cdot V \quad (1.2.19)$$

Вся энергия, вошедшая через боковую поверхность конденсатора за время зарядки, сосредоточилась внутри конденсатора в виде энергии электрического поля.

1.3. Поток импульса в электромагнитной волне. Давление света.

1.3.1. Импульс электромагнитного поля.

Из курса релятивистской физики (СТО) нам известно, что энергия замкнутой системы сохраняется, но не является инвариантом относительно преобразований Лоренца. Инвариантной величиной является 4^x-вектор энергии - импульса $(E/c, \vec{p})$, квадрат длины которого равен [1]:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 = inv. \quad (1.3.1)$$

где m_0 – масса покоя системы или одной частицы, E – полная энергия частицы или системы частиц (не путать с напряженностью электрического поля). Другими словами, энергия и импульс взаимосвязаны друг с другом и, в общем, неразделимы. Вспомним основные формулы для энергии и импульса в теории относительности (подробнее см [1]), в которых устанавливается, что энергии присущи определенная масса и скорость движения:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.3.2)$$

а импульс является мерой переноса массы – энергии:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.3.3)$$

Рассматривая энергию электромагнитного поля W и связь между энергией и импульсом, запишем импульс, соответствующий электромагнитному полю (теперь здесь и далее переобозначим $E \equiv W$):

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} = \frac{W\vec{v}}{c^2} \quad (1.3.4)$$

Здесь \vec{v} – скорость распространения электромагнитной волны в среде. В вакууме $v = c$ и импульс электромагнитной волны равен

$$|\vec{p}| = \frac{W}{c}. \quad (1.3.5)$$

Введем понятие *плотности импульса* электромагнитного поля \vec{p}_0 :

$$\vec{p}_0 = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{W}{V} \frac{\vec{v}}{c^2} = w \frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{H}], \quad (1.3.6)$$

где плотность энергии w определяется формулой (1.2.11) для изотропной и однородной среды, а вектор Пойнтинга – из соотношения (1.2.14). Таким образом, импульс бегущей электромагнитной волны направлен в сторону распространения волны.

Часто вводят *плотность потока импульса* электромагнитной волны как произведение плотности импульса на скорость распространения:

$$\vec{j}_p = \vec{p}_0 c = \frac{\vec{S}}{c} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (1.3.7)$$

Таким образом, вектор *плотности потока импульса электромагнитной волны* равен вектору *плотности потока энергии, деленному на скорость света*.

1.3.2. Давление электромагнитных волн (света).

При поглощении или отражении электромагнитных волн среде сообщается импульс, равный разности импульсов электромагнитной волны до и после поглощения или отражения. По аналогии с механикой эти процессы можно рассматривать как неупругое и абсолютно упругое взаимодействия, соответственно. Поэтому среда должна испытывать *давление электромагнитной волны!*

Если среда непрозрачная, то волна частично отражается и частично поглощается ею. Введем для характеристики среды коэффициент отражения ρ , при этом при полном отражении волны имеем $\rho = 1$, а при полном поглощении – $\rho = 0$.

Пусть электромагнитная волна падает из вакуума под углом ϑ на поверхность непрозрачной среды с коэффициентом отражения ρ (рис. 3.1). По определению давление \mathbf{P} равно:

$$\mathbf{P} = \frac{F_n}{\Delta s} = \frac{\Delta p}{\Delta t \Delta s}. \quad (1.3.8)$$

где F_n – нормальная к поверхности составляющая силы, Δp – импульс, переданный площадке Δs за время Δt .

Рассмотрим по отдельности изменение импульса волны Δp при её отражении и поглощении. Понятно, что при нахождении давления \mathbf{P} на поверхность среды нас будет интересовать лишь нормальная составляющая импульса волны p_0 , которая, не изменяясь по модулю, меняет знак на противоположный при отражении и становится равной нулю при поглощении.

Отражение: переданный поверхности импульс при отражении волны равен (рис. 3.1)

$$\Delta p_{omp} = 2p_0 \cos \vartheta \cdot \Delta s \cdot c \Delta t \cos \vartheta \cdot \rho;$$

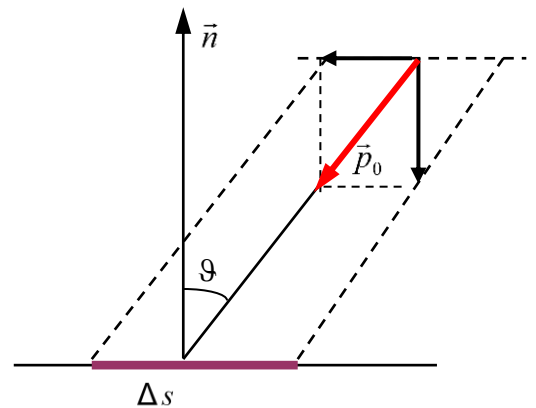


Рис. 3.1.

Коэффициент 2 учитывает, что перпендикулярная к поверхности проекция импульса падающей электромагнитной волны меняется на противоположную по направлению проекцию импульса отраженной волны. Далее учитывая, что плотность импульса электромагнитной волны из (1.3.6) в вакууме равна $p_0 = w/c$, получаем давление, оказываемое отраженной волной:

$$\mathbf{P}_{omp} = \frac{\Delta p_{omp}}{\Delta t \Delta s} = 2c\rho \cdot p_0 \cos^2 \vartheta = 2\rho \cdot w \cos^2 \vartheta. \quad (1.3.9)$$

Поглощение: переданный поверхности импульс равен

$$\Delta p_{ногл} = p_0 \cos \vartheta \cdot \Delta s \cdot c \Delta t \cos \vartheta \cdot (1 - \rho);$$

и соответствующее давление, оказываемое поглощенной части волны

$$\mathbf{P}_{ногл} = \frac{\Delta p_{ногл}}{\Delta t \Delta s} = c(1 - \rho) \cdot p_0 \cos^2 \vartheta = (1 - \rho) \cdot w \cos^2 \vartheta. \quad (1.3.10)$$

Таким образом, полное давление, оказываемое электромагнитной волной, падающей под углом ϑ на среду с коэффициентом отражения ρ , равно сумме давлений

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{omp} + \mathbf{P}_{ногл} = (1 + \rho) \cdot w \cos^2 \vartheta. \quad (1.3.11)$$

Примечание 1. Заметим, что если электромагнитная волна проходит сквозь среду, не поглощаясь и не отражаясь, то она не оказывает давления на среду.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть нормально падающая волна полностью отражается ($\vartheta = 0$, $\rho = 1$): тогда давление равно $\mathbf{P} = 2w$;
2. Нормально падающая волна полностью поглощается ($\vartheta = 0$, $\rho = 0$): тогда для давления имеем $\mathbf{P} = w$.

Давление, которое оказывают электромагнитные волны, отражаясь или поглощаясь в телах, можно рассматривать как результат воздействия магнитного поля волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем той же волны. В самом деле, пусть электромагнитная волна распространяется в однородной среде, поглощающей излучение. Наличие поглощения означает, что $\sigma \neq 0$, т.е. поглощающая среда обладает проводимостью. Электрическое поле волны в такой среде возбуждает электрический ток плотностью $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. На единицу объема среды с током действует сила Ампера, при этом *плотность действующей силы* равна

$$f = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] = \frac{\sigma}{c} [\vec{E}, \vec{B}]$$

Сила Ампера направлена в сторону распространения волны. Этой силой и обусловлено давление электромагнитной волны.

Отсутствие поглощения означает, что проводимость $\sigma = 0$ и $f = 0$, т.е. в этом случае электромагнитная волна не оказывает давления на среду. В рамках этой модели отражение можно рассматривать как поглощение с дальнейшим переизлучением электромагнитной волны в обратную сторону.

1.3.3. Опыты П.Н. Лебедева

П.Н. Лебедев экспериментально показал, что свет оказывает давление на поверхность тел. В вакууме помещалась кварцевая нить, на которую наклеивались лепестки из материалов, полностью отражающих (светлые кружки на рис. 3.2) и полностью поглощающих ($\sim 90\%$) свет (на рис. 3.2 темные кружки). На образец направлялся пучок света от электрической дуги. Величина передаваемого импульса, и соответственно оказываемое давление, определялась по углу α скручивания нити, который измерялся с помощью простой оптической системы. Если известна жесткость нити на закручивание k , то момент вращающей силы находится как $M = -k\alpha$, а сила, действующая на лепесток, определяется $F = M/l$, где l – плечо силы.

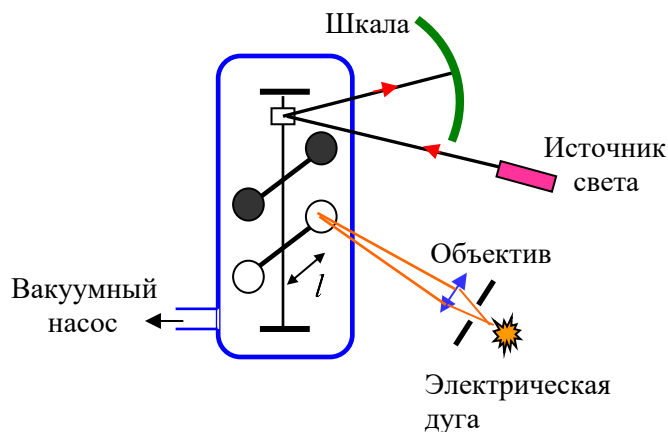


Рис. 3.2.

Результаты опытов П.Н. Лебедева оказались в согласии с выводами теории Максвелла. Давление электромагнитного излучения обычно бывает очень малым. Например, при потоке солнечной энергии на орбите Земли приблизительно $1,4 \text{ кВт/м}^2$ световое давление составляет 5 мкПа , что в 10^{10} раз меньше атмосферного давления. Точность опыта по измерению давления света удалось повысить, используя модулированное электромагнитное излучение. Частота модуляции выбирается равной частоте собственных колебаний механической системы. Чувствительность установки возрастает при этом в Q раз, где Q – добротность механической системы.

Давление и импульс излучения проявляются в двух противоположных по масштабам областях: астрономической и субатомной. Например, притяжение верхних слоев звезд к их центру в значительной степени уравнивается давлением излучения, идущего от центра звезды наружу. Световое давление приводит к некоторому предельному значению массы, при котором звезда еще остается устойчивой. Этот вывод согласуется с астрономическими данными,

согласно которым звезды с массой, превосходящей некоторый известный предел, не наблюдаются.

Из явлений микромира отметим эффект Комптона (который подробнее будет рассмотрен в части курса, посвященной Атомной физике), когда рентгеновское излучение передает часть своего импульса электронам, на которых оно рассеивается, и тем самым сообщает этим “электронам отдачи” большие скорости. Импульс излучения обнаруживает себя также в “отдаче”, которую испытывает атомное ядро при испускании гамма-лучей.

Примечание 2. Петр Николаевич Лебедев, русский физик, 1866–1912

1.4. Суперпозиция электромагнитных волн.

1.4.1. Простейший случай сложения плоских волн.

Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля равны соответственно сумме напряженностей и сумме магнитных индукций всех полей в данной точке независимо от их происхождения. Если эти поля принадлежат плоским электромагнитным волнам, распространяющимся в произвольных направлениях, то, вообще говоря, полученная в результате сложения совокупность электрического и магнитного полей не всегда дает плоскую электромагнитную волну. Более того, как правило, при сложении плоских монохроматических волн получаем сложную электромагнитную волну. Исключение составляет простейший частный случай суперпозиции двух волн, рассмотренный ниже.

Сложим две плоские монохроматические волны одинаковой частоты ω , распространяющихся вдоль одного направления, и векторы напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 электрических полей в этих волнах коллинеарны $\vec{E}_1 // \vec{E}_2$. Чтобы не загромождать изложение, мы будем, как правило, следить за поведением электрического вектора \vec{E} , поскольку поведение вектора \vec{B} в плоской волне может быть определено с помощью соотношений между векторами волны.

Удобнее записать уравнения волн в комплексной форме:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{и} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (1.4.1)$$

Поскольку волны распространяются в одном направлении, то можно складывать просто модули векторов напряженности:

$$E = E_1 + E_2 = E_{01} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + E_{02} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = (|E_{01}| e^{i\delta_1} + |E_{02}| e^{i\delta_2}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (1.4.2)$$

То есть в результате сложения получаем снова плоскую монохроматическую волну с комплексной амплитудой, равной сумме амплитуд:

$$|E_{01}|e^{i\delta_1} + |E_{02}|e^{i\delta_2} = |E_0|e^{i\delta} = E_0 .$$

Таким образом, *две плоские монохроматические волны одинаковой частоты, распространяющиеся в одном направлении, дают в результате сложения плоскую монохроматическую волну той же частоты и распространяющуюся в том же направлении.*

Однако если складываемые волны распространяются в разных направлениях или различаются по частоте, то результат их сложения может быть совершенно иным.

1.4.2. Биения.

Рассмотрим результат сложения двух плоских монохроматических волн **различной частоты** ω_1 и ω_2 , распространяющихся в одном направлении, например, вдоль оси x . Пусть $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ и для простоты $E_{01} = E_{02} = E_0$, то есть электрические векторы параллельны и амплитуды волн одинаковы.

$$E_1 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{и} \quad E_2 = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (1.4.3)$$

Как и в предыдущем случае будем складывать просто модули векторов напряженности:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)] = \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right), \end{aligned}$$

Так как $k_1 = \omega_1/c$ и $k_2 = \omega_2/c$, результирующую волну можем записать в виде:

$$E = 2E_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]. \quad (1.4.4)$$

Из этого выражения видно, что в результате сложения получаем плоскую **немонохроматическую** волну.

Наглядную интерпретацию этого выражения можно дать, если складываемые волны имеют близкие друг к другу частоты ω_1 и ω_2 : $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$. В этом случае первый сомножитель в (1.4.4) $\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$ представляет собой медленно меняющуюся по сравнению со вторым сомножителем функцию времени или координаты. Поэтому можно считать, что мы имеем дело с распространением гармонических колебаний, частота которых определяется полусуммой частот $(\omega_1 + \omega_2)/2$, а амплитуда которых равна:

$$A_0 = \left| 2E_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \right|, \quad (1.4.5)$$

То есть амплитуда медленно меняется со временем от 0 до значения $2E_0$. Зависимость суммарных колебаний напряженности поля (1.4.4) от времени или от координаты качественно представлена на рис. 4.1. Такие колебания называются *биениями*. (см биения в §4.3 Глава 4, "Механика" [1]).

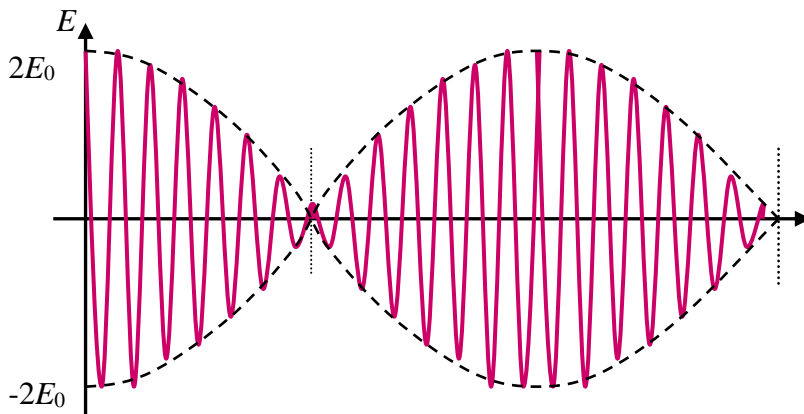


Рис. 4.1.

Частота биений равна

$$\Omega = |\omega_1 - \omega_2| = \Delta\omega$$

Частота Ω в 2 раза больше, чем следует из (1.4.5), так как те области, которые заполнены колебаниями более высокой частоты, появляются на каждый полупериод (рис. 4.1). Соответственно период биений в 2 раза меньше времени полного колебания из (1.4.5) и равен

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (1.4.6)$$

Если $E_{01} \neq E_{02}$, то амплитуда колебаний (оггибающая) изменяется в пределах от $|E_{01} - E_{02}|$ до $E_{01} + E_{02}$. Таким образом, в результате сложения двух сонаправленных плоских гармонических волн с близкими частотами мы получаем "гармоническую" волну с медленно изменяющейся амплитудой (термин "медленно" означает, что за много периодов колебаний с частотой $(\omega_1 + \omega_2)/2$ их амплитуда меняется незначительно).

1.4.3. Стоячие волны.

Важный результат получается при рассмотрении суперпозиции двух плоских монохроматических волн одинаковой частоты, распространяющихся навстречу друг другу по оси x (см рис. 4.2). Будем, по-прежнему, считать, что векторы напряженности электрического поля в этих волнах коллинеарны $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ и колеблются с одинаковой амплитудой $E_{01} = E_{02} = E_0$.

Итак, пусть направление распространения волн определяется

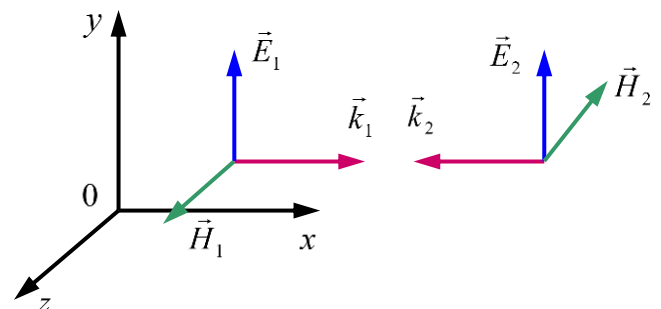


Рис. 4.2.

осью x , а ось y выберем вдоль направления колебаний вектора \vec{E} . Начало отсчета на оси x выберем в точке, где колебания напряженностей обеих волн происходят в одинаковой фазе. Тогда электрические вектора обеих волн можем записать через компоненты в виде:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= (0, E_0 e^{-i(\omega t - kx)}, 0) \\ \vec{E}_2 &= (0, E_0 e^{-i(\omega t + kx)}, 0)\end{aligned}\quad (1.4.7)$$

Аналогично для векторов \vec{H} имеем:

$$\vec{H}_1 = (0, 0, H_0 e^{-i(\omega t - kx)}), \quad \vec{H}_2 = (0, 0, -H_0 e^{-i(\omega t + kx)}). \quad (1.4.8)$$

Отметим, что если в обеих волнах проекции векторов \vec{E} имеют одинаковые знаки, то у проекций \vec{H} знак изменяется на противоположный знак. Складывая векторы $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, получаем результирующее электромагнитное поле:

$$\vec{E} = (0, 2E_0 e^{-i\omega t} \cos kx, 0) \quad \text{и} \quad \vec{H} = (0, 0, 2iH_0 e^{-i\omega t} \sin kx), \quad (1.4.9)$$

или в вещественном виде

$$\vec{E} = (0, 2E_0 \cos kx \cos \omega t, 0) \quad \text{и} \quad \vec{H} = (0, 0, 2H_0 \sin kx \sin \omega t). \quad (1.4.10)$$

Таким образом, в результате суперпозиции двух бегущих волн образуется электромагнитная волна, которую можно рассматривать как совокупность волн электрического и магнитного полей (рис. 4.3). Векторы напряженностей

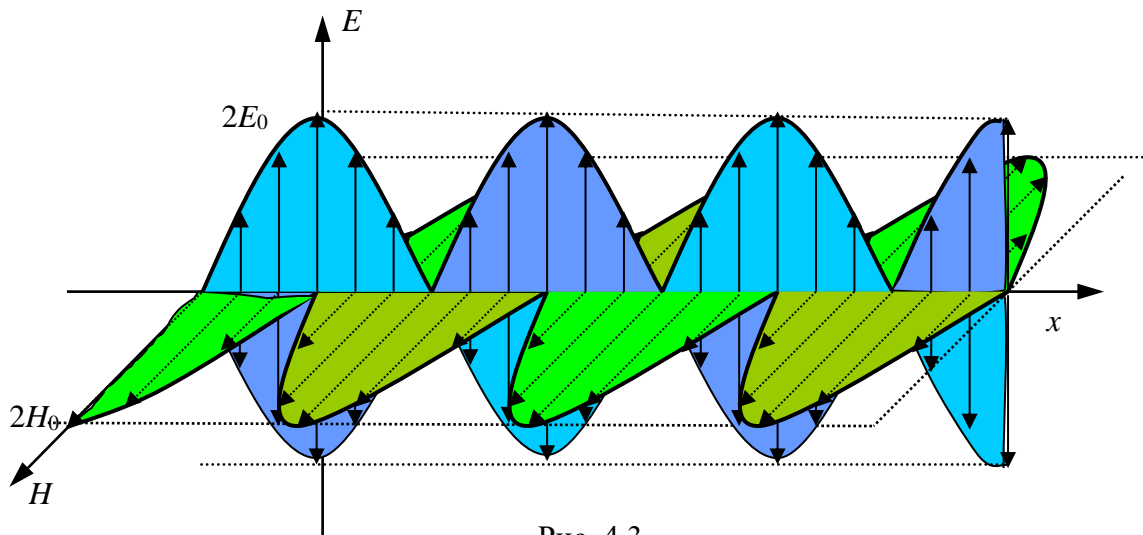


Рис. 4.3.

этой совокупности полей не содержат характерного для бегущей волны множителя $\cos(t \pm x/c)$ или $\sin(t \pm x/c)$. Имеется только множитель $\cos \omega t$ (или $\sin \omega t$), описывающий колебания векторов во времени с частотой ω . Сомножители $2E_0 \cos kx$ и $2H_0 \sin kx$ с точностью до знака представляют собой **амплитуды колебаний напряженности**, соответственно, электрического и магнитного полей, которые от точки к точке по оси x изменяются по

гармоническому закону. Колебания напряженностей полей во времени во всех точках изменяются с одной и той же частотой. Такая волна называется *стоячей*.

Амплитуда колебаний напряженности электрического поля волны изменяется от максимального значения $2E_0$ до нуля. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна в плоскостях:

$$(\cos kx = 1), \quad x = \frac{\pi}{k}n = \frac{\lambda}{2}n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.11)$$

называются *пучностями* электрического поля. Точки, в которых амплитуда падает до нуля в плоскостях:

$$(\cos kx = 0), \quad x = \frac{\pi}{k}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.12)$$

называются *узлами*.

Фаза колебаний вектора \vec{E} во всех точках между соседними узлами одинакова, а колебания по разные стороны от узла происходят в противофазе. Пучности и узлы стоячей волны магнитного поля сдвинуты вдоль оси x на четверть длины волны по отношению к пучностям и узлам электрического поля. Колебания магнитного поля отстают по времени на четверть периода от колебаний электрического поля. Таким образом, узлы вектора \vec{E} совпадают с пучностями вектора \vec{H} и наоборот. Это означает, например, что при достижении максимума напряженности электрического поля индукция магнитного поля обращается в нуль. И наоборот, при достижении максимума напряженности магнитного поля напряженность электрического поля равна нулю. Таким образом получаем, что если одна из величин находится в фазе роста, то другая – в фазе уменьшения.

В рассмотренных ранее *бегущих электромагнитных волнах* электрическое и магнитное поля в каждой пространственной точке изменяются во времени совершенно одинаково. Так, в монохроматической волне они совершают гармонические колебания в одинаковой фазе. Стоячие волны, как мы видим, обладают существенно иными свойствами. Для таких волн характерны *пространственное разнесение и сдвиг во времени колебаний электрического и магнитного полей*.

Рассмотрим энергию в стоячей электромагнитной волне. Вектор Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]$ в стоячей волне отличен от нуля для всех координат за исключением узловых точек обоих полей. Следовательно, поток энергии отсутствует через те точки, где либо \vec{E} , либо \vec{H} обращаются в нуль. Другими словами, отсутствует поток энергии в стоячей электромагнитной волне через узлы и пучности волны, поскольку пучности электрического поля совпадают с узлами магнитного поля и наоборот. Поэтому энергия стоячей волны

заклучена между соседними узлами и пучностями и при этом испытывает превращения из электрической энергии в магнитную энергию и обратно. Из выражения для объемной плотности энергии

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) \quad (1.4.13)$$

следует, что энергия стоячей волны, заключенная между соседними узлами и пучностями с течением времени сохраняет постоянное значение.

Таким образом, *стоячая волна, обладая энергией, не переносит и не излучает её*. В самом деле, если проинтегрировать поток электромагнитной энергии за период, то получим 0: $\int_0^T \vec{S} dt = 0$, где T – период колебаний.

1.4.4. Эксперименты со стоячими волнами.

На эксперименте стоячие волны создаются в результате сложения волн падающего и отраженного света (или других электромагнитных волн). Стоячие волны образуются, в частности, в резонаторах лазеров (в оптических квантовых генераторах). Для видимого света стоячие волны трудно непосредственно наблюдать из-за малой длины волны.

Рассмотрим кратко опыт О. Винера, выполненный в 1890 г.

Стеклянная пластинка, покрытая тонким фоточувствительным слоем, проводилась в соприкосновение с металлическим зеркалом, образуя малый угол α ($\sim 1^\circ$) (рис. 4.4). Падающий луч света и отраженный от зеркала свет

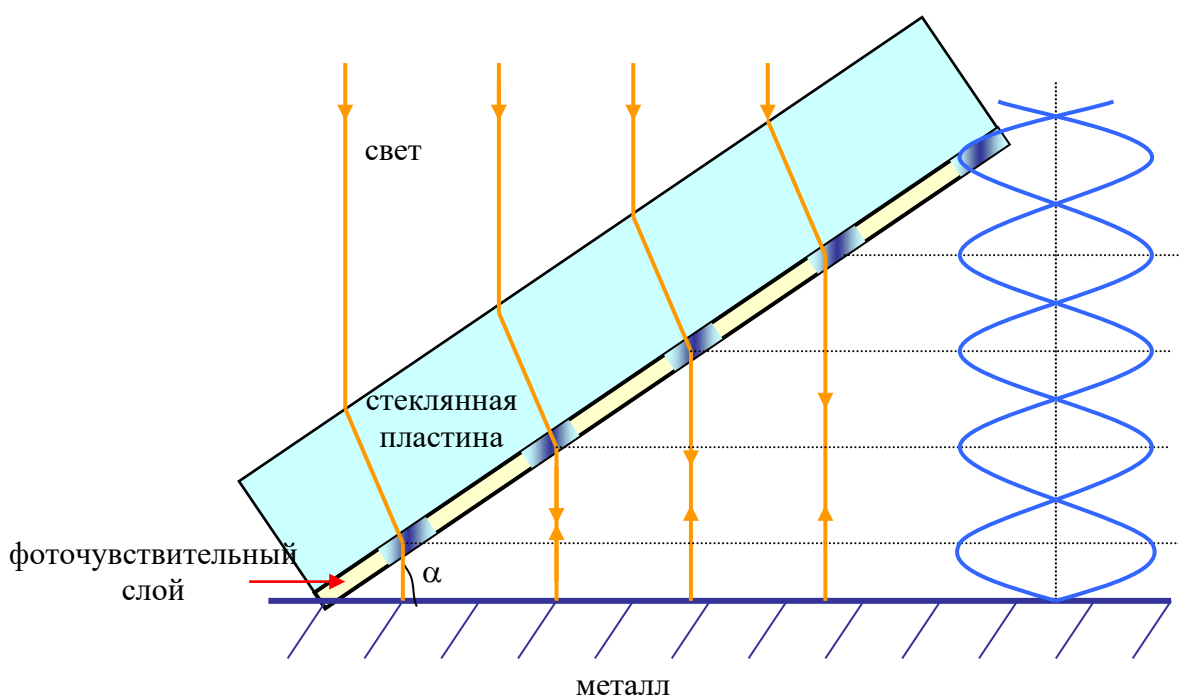


Рис. 4.4.

образуют стоячую волну для определенной длины волны. Пучности стоячих волн обнаруживались в фотослое после проявления фотопластинки в виде почерненных полос. Опыты Винера показали, что фотохимическое действие на фоточувствительный слой обусловлено напряженностью электрического поля \vec{E} , а не \vec{B} . Это удалось показать, поскольку граничные условия для этих векторов вблизи металлической пластины различны.

Метод стоячих волн использовался Г. Липпманом в 1891 году для получения цветной фотографии. Для получения высококачественных цветных фотографий Г. Липпман помещал достаточно толстую (несколько десятков микрон) фоточувствительную эмульсию на ртуть, поверхность которой использовалось как отражающее зеркало (см рис.4.5). Цветное изображение проецировалось на эту эмульсию, проходило сквозь нее и отражалось зеркалом. В результате интерференции падающей и отраженной световой волны в объеме эмульсии возникали светлые и темные области, примерно параллельные плоскости фоточувствительного слоя. Так как расстояние между интерференционными областями оказывалось порядка половины длины волны света, то в фоточувствительном слое помещалось десятки таких областей.

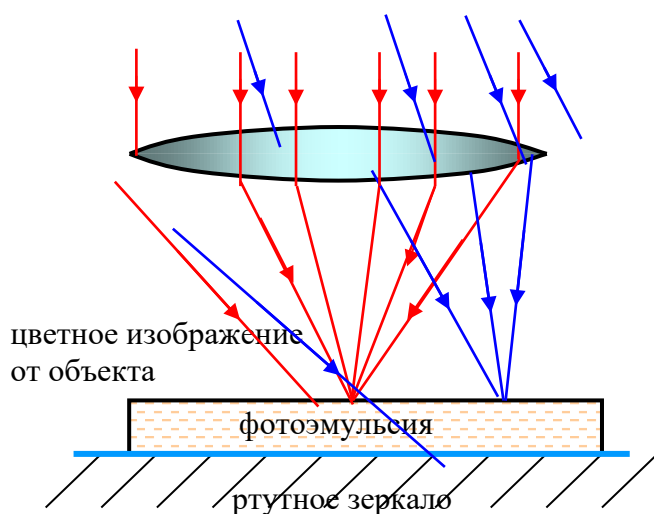


Рис. 4.5.

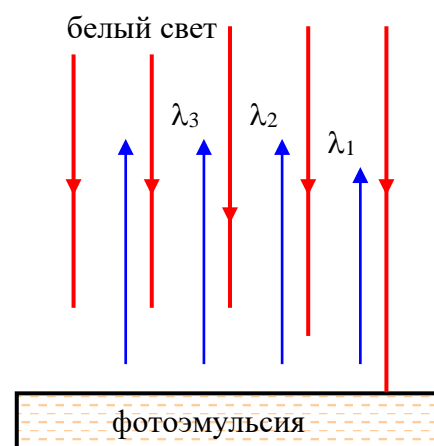


Рис. 4.6.

После фотографического проявления и фиксации в объеме фоточувствительного слоя оказывались зарегистрированными светлые области интерференционного поля в виде слабо отражающих поверхностей. Расстояние между этими поверхностями однозначно определялось локальным цветом регистрируемого изображения. Теперь если убрать зеркало и осветить этот слой белым светом (рис. 4.6), то отражаться от каждого участка слоя будет только свет того цвета (длины волны), для которого расстояние между отражающими поверхностями в этом месте равно половине длины волны. Таким образом, глаз наблюдателя видит цветное изображение в отраженном свете.

Примечание 1. *Отто Генрих Винер, немецкий физик, 1862–1927;*
Габриэль Липпман, французский физик, 1845–1921, Нобелевская премия
 1908 г. за цветную фотографию солнечного спектра.

1.5. Поляризация электромагнитных волн.

1.5.1. О поляризации волн.

Под поляризацией электромагнитных волн понимают физическую характеристику излучения, описывающую поперечную анизотропию электромагнитных волн, т.е. неэквивалентность различных направлений в плоскости, перпендикулярной волновому вектору \vec{k} .

Первые указания на поперечную анизотропию светового луча были получены голландским ученым Х. Гюйгенсом в 1690 г. при опытах с кристаллами исландского шпата. Понятие “*поляризация света*” было введено в оптику И. Ньютоном в 1704–1706 гг.

Поскольку векторы \vec{E} и \vec{H} в плоской электромагнитной волне перпендикулярны друг другу, для полного описания состояния поляризации волны требуется знание поведения лишь одного из них. Как правило, для этой цели выбирается вектор \vec{E} . Волна, испускаемая каким-либо отдельно взятым элементарным излучателем (атомом, молекулой), в каждом акте излучения всегда поляризована. Однако макроскопические источники состоят из огромного числа таких частиц-излучателей. Пространственные ориентации векторов \vec{E} в моменты актов испускания волн отдельными частицами в большинстве случаев распределены хаотически. Поэтому в общем излучении ансамбля частиц направление вектора \vec{E} в каждый момент времени непредсказуемо. Такое излучение называют *неполяризованным*, или *естественным светом*.

О *поляризованном* излучении говорят в том случае, когда изменение со временем пространственной ориентации вектора напряженности электрического поля волны \vec{E} подчиняется некоторому закону. Свет называют полностью поляризованным, если две взаимно перпендикулярные компоненты (проекции) вектора \vec{E} электромагнитной волны совершают колебания с постоянной во времени разностью фаз. *Плоскостью поляризации* или *плоскостью колебаний* называют плоскость, в которой лежат вектор напряженности электрического поля волны и волновой вектор \vec{k} (в некоторых книгах, особенно старых, плоскостью поляризации называют плоскость, содержащую магнитный вектор \vec{H}).

До сих пор мы рассматривали *линейно поляризованный* свет или *плоско поляризованный* свет. Это относится к волнам, в которых вектор \vec{E} колеблется

в одном и том же направлении. Так в §1.4 мы рассматривали суперпозицию двух волн с одинаковой линейной поляризацией.

1.5.2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний.

Рассмотрим теперь также суперпозицию двух монохроматических волн одинаковой частоты, распространяющихся в одном направлении, задаваемом осью z . Пусть векторы напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 электрических полей этих волн совершают колебания во взаимно перпендикулярных направлениях (см рис.5.1а) с относительным сдвигом фазы колебаний, равным δ . Итак имеем

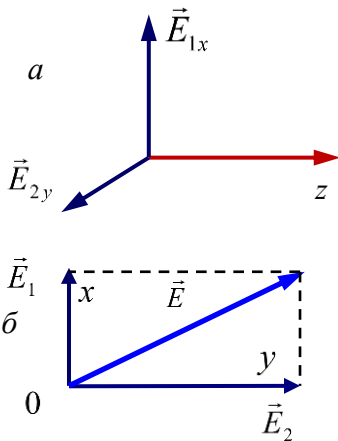


Рис. 5.1.

$$\begin{aligned} E_{1x} &= E_{01} \cos(\omega t - kz), & E_{1y} &= E_{1z} = 0, \\ E_{2y} &= E_{02} \cos(\omega t - kz + \delta), & E_{2x} &= E_{2z} = 0. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Найдем уравнение траектории, описываемой концом вектора \vec{E} волны, образовавшейся в результате суперпозиции двух таких волн, в плоскости xOy , перпендикулярной направлению её распространения (рис.5.1б). Перепишем компоненту второй волны в виде:

$$E_{2y} = E_{02} \cos(\omega t - kz) \cos \delta - E_{02} \sin(\omega t - kz) \sin \delta \quad (1.5.2)$$

и выразим из уравнения первой волны

$$\cos(\omega t - kz) = \frac{E_{1x}}{E_{01}} \quad \text{и} \quad \sin(\omega t - kz) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2}.$$

Тогда после подстановки получаем связь между текущими значениями напряженности поля обеих волн:

$$E_{2y} = \frac{E_{02}}{E_{01}} E_{1x} \cos \delta - E_{02} \sqrt{1 - \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2} \sin \delta. \quad (1.5.3)$$

Выделим слагаемое уравнения, содержащее радикал, и избавимся от иррациональности, возводя все выражение в квадрат:

$$\begin{aligned} \frac{E_{2y}}{E_{02}} - \frac{E_{1x}}{E_{01}} \cos \delta &= -\sqrt{1 - \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2} \sin \delta, \\ \left(\frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 - 2 \frac{E_{2y}}{E_{02}} \frac{E_{1x}}{E_{01}} \cos \delta + \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2 \cos^2 \delta &= \left[1 - \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2\right] \sin^2 \delta. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Окончательно получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 - 2 \frac{E_{1x}}{E_{01}} \frac{E_{2y}}{E_{02}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (1.5.5)$$

Получили уравнение кривой второго порядка – *эллипса*, ориентация которого в плоскости xOy определяется значением угла δ .

Таким образом, кривая, описывающая *траекторию* конца проекции вектора \vec{E} результирующей волны, в общем случае имеет вид эллипса с правым или левым направлением вращения вектора \vec{E} во времени. Такая электромагнитная волна называется *эллиптически поляризованной*.

Наблюдение за направлением движения вектора \vec{E} ведется со стороны, в которую распространяются колебания, иначе говоря, против направления вектора \vec{k} (в нашем случае – против оси z). Рассмотрим важные частные случаи.

(1). Пусть разность фаз $\delta = \pm\pi/2 + \pi n$; то есть $\cos\delta = 0$; $\sin\delta = \pm 1$, тогда из (1.5.5) имеем:

$$\left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 = 1. \quad (1.5.6)$$

При неравенстве $E_{01} \neq E_{02}$ получаем уравнение эллипса с центром в начале координат и осями, ориентированными вдоль осей системы координат (см рис. 5.2).

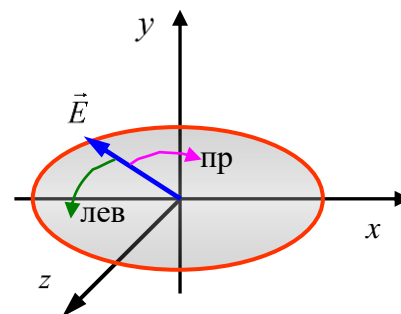


Рис. 5.2.

Если разность фаз равна $\delta = +\pi/2 + 2\pi n$, то колебания, совершаемые вдоль оси y (E_{2y}), на четверть периода опережают колебания вдоль оси x (E_{1x}), что следует из формул (1.5.1). При этом вектор \vec{E} вращается по часовой стрелке, это – *правая эллиптически поляризованная волна*.

Если $\delta = -\pi/2 + 2\pi n$, то опережающим колебанием является E_{1x} , поэтому вращение вектора напряженности \vec{E} результирующей волны происходит против часовой стрелки – *левая эллиптически поляризованная волна*.

Наибольший интерес представляют другие предельные случаи эллиптической поляризации.

(2). *Линейная поляризация*: появляется тогда, когда разность фаз равна $\delta = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; при этом $\cos\delta = \pm 1$ и $\sin\delta = 0$. Тогда из (1.5.5) имеем:

$$\left(\frac{E_{1x}}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 \pm 2\frac{E_{1x}}{E_{01}}\frac{E_{2y}}{E_{02}} = 0; \quad \left(\frac{E_{1x}}{E_{01}} \pm \frac{E_{2y}}{E_{02}}\right)^2 = 0; \quad \text{и отсюда далее}$$

$$E_{2y} = \pm \frac{E_{02}}{E_{01}} E_{1x} \quad (1.5.7)$$

Получаем уравнение прямой, то есть эллиптическая поляризация вырождается в колебания, происходящие вдоль этой прямой линии, наклон которой к оси x определяется соотношением амплитуд E_{01} и E_{02} .

(3). *Циркулярная поляризация*: появляется, когда амплитуды волн одинаковы $E_{01} = E_{02} = E_{00}$, а разность фаз равна $\delta = \pm\pi/2 + \pi n$, при $n = 0, 1, 2, \dots$; тогда $\cos\delta = 0$; $\sin\delta = \pm 1$. При этом имеем:

$$\left(\frac{E_{1x}}{E_{00}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{E_{00}}\right)^2 = 1 \quad (1.5.8)$$

Получаем уравнение окружности, которую описывает конец вектора \vec{E} в плоскости xOy . Направление вращения вектора \vec{E} определяется так же, как и для эллиптической поляризации, т.е. результирующая волна может быть *право-* или *лево - циркулярно поляризованной* в зависимости от направления вращения вектора \vec{E} .

Можно сделать важное утверждение: *монохроматическое векторное поле всегда поляризовано*, в общем случае эллиптически. Волну с произвольной (в общем случае эллиптической) поляризацией всегда можно разложить на две составляющие. Ее всегда можно представить в виде суммы двух линейно поляризованных волн с ортогональными направлениями поляризации. Верно и обратно, всякую линейно поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух поляризованных по кругу волн: с правой и левой поляризациями. Т.е. электромагнитные волны обладают *двумя независимыми состояниями поляризации*. Так при изучении распространения света в анизотропных средах (кристаллах) удобно разложить падающую волну на сумму двух линейно поляризованных волн, а при изучении естественного и магнитного вращения плоскости поляризации в веществе удобно использовать разложение на две волны с круговой поляризацией.

Итак, можно считать *независимыми состояниями* волны как с левой и правой циркулярными поляризациями, так и с линейными взаимно перпендикулярными поляризациями, поскольку их можно выразить друг через друга.

Рассмотрим пример. Задаем первую волну – левую циркулярно поляризованную волну ($\delta = -\pi/2$):

$$\begin{cases} E_{1x} = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_{1y} = E_0 \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

Задаем вторую волну – правую циркулярно поляризованную волну ($\delta = \pi/2$):

$$\begin{cases} E_{2x} = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_{2y} = -E_0 \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

Их суперпозиция дает:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 2E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

Таким образом, суперпозиция левой и правой циркулярно поляризованных волн дает линейно поляризованную волну.

Примечание 1. Христиан Гюйгенс, голландский физик, 1629–1695

1.6. Момент импульса в бегущей плоской электромагнитной волне.

Свет круговой поляризации наряду с энергией и импульсом обладает также *моментом импульса*. В 1898 г. А.И. Садовский впервые теоретически показал, что электромагнитное поле волны обладает *моментом количества движения* (эффект Садовского), теоретически доказав вращающее действие поляризованных электромагнитных волн. Для его определения рассмотрим движение точечного заряда в поле плоской монохроматической электромагнитной волны. Это движение происходит по замкнутой траектории (в общем случае – эллиптической).

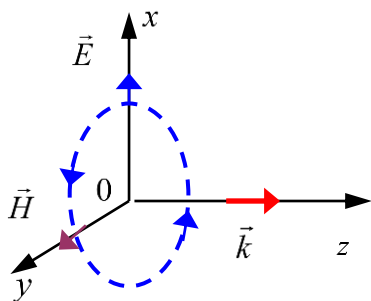


Рис. 6.1.

Для простоты и определенности рассмотрим левую циркулярно поляризованную волну (см рис. 6.1). Пусть вектор \vec{E} (\vec{H}) вращается с угловой скоростью Ω , равной круговой частоте электромагнитных колебаний. Если в пространстве, где распространяется волна, оказывается точечный заряд q , то на него будет действовать сила Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{H}]. \quad (1.6.1)$$

Под действием этой силы заряд начинает двигаться в плоскости xOy . В *установившемся* режиме заряд вращается со скоростью v вокруг оси z , при этом электрическая компонента $q\vec{E}$ сообщает ему центростремительное ускорение. Под действием магнитного поля волны $\frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$ заряд смещается вдоль оси z (достаточно медленно, если $v \ll c$, как аналог рассмотренного ранее в §1.3 механизма давления электромагнитных волн). Момент силы, действующей на заряд q , равен:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = q[\vec{r}, \vec{E}] + \frac{q}{c}[\vec{r}, [\vec{v}, \vec{H}]], \quad (1.6.2)$$

Смещение заряда из *положения равновесия*, характеризуемое радиус вектором \vec{r} , не совпадает с направлением действующей на него силы $q\vec{E}$. Модуль скорости заряда можно записать как $|\vec{v}| = |\omega\vec{r}|$, так как установившееся движение заряда под действием электрического поля циркулярно поляризованной волны будет происходить по окружности с угловой скоростью ω , равной частоте падающей волны. Для левой циркулярно поляризованной волны вектор $[\vec{v}, \vec{H}]$ направлен по оси z , т.е. вдоль вектора $\vec{n} = \vec{k}/k$ (см рис. 6.2А); тогда направление вектора $[\vec{r}, \vec{n}]$ противоположно направлению вектора скорости \vec{v} движения заряда q . Рассмотрим второе слагаемое в выражении для момента силы \vec{M} (1.6.2):

$$\frac{q}{c} [\vec{r} [\vec{v}, \vec{H}]] = \frac{q}{c} \vec{v} (\vec{r}, \vec{H}) - \frac{q}{c} \vec{H} (\vec{r}, \vec{v}) = \frac{q}{c} rH \cos\beta \cdot \vec{v}, \quad (1.6.3)$$

где $(\vec{r}, \vec{v}) = 0$, β – угол между векторами \vec{r} и \vec{H} . Далее, усредняя за период, находим, что среднее значение скорости за один оборот заряда (или векторов поля) $\langle \vec{v} \rangle = 0$, т.к. скорость через половину периода меняет свое направление

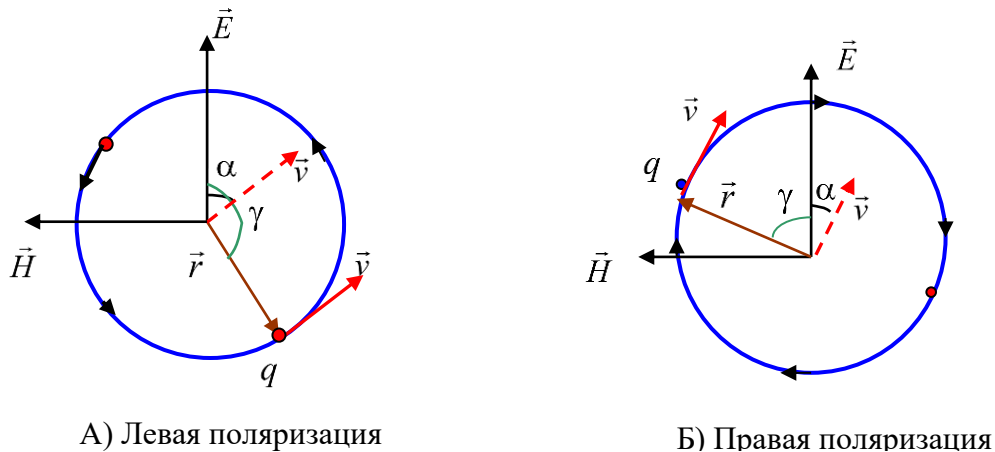


Рис. 6.2.

на противоположное. Таким образом, получаем, что вклад в среднее значение момента силы, действующей со стороны магнитного поля волны на заряд (от слагаемого, содержащего вектор \vec{H}) равен нулю. Другими словами, магнитная компонента волны не дает вклада в среднее значение момента силы. Из формулы (1.6.2) имеем тогда для момента силы:

$$\langle \vec{M} \rangle = q \langle [\vec{r}, \vec{E}] \rangle. \quad (1.6.4)$$

Вектор $[\vec{r}, \vec{E}]$ направлен вдоль волнового вектора \vec{k} (или $\vec{n} = \vec{k}/k$) при левой поляризации волны (рис. 6.2А) и в противоположную сторону, если волна право - поляризованная (рис. 6.2Б).

Модуль векторного произведения в (1.6.4) запишем через скалярное произведение скорости заряда и напряженности светового поля

$$\begin{aligned}
|[\vec{r}, \vec{E}]| &= rE \sin \gamma = rE \cos \alpha = \frac{\omega r E \cos \alpha}{\omega} = \frac{v E \cos \alpha}{\omega} = \frac{(\vec{v}, \vec{E})}{\omega}; \\
\langle [\vec{r}, \vec{E}] \rangle &= \frac{\langle (\vec{v}, \vec{E}) \rangle}{\omega} \vec{n}.
\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Тогда среднее значение момента сил, действующих на заряд q со стороны плоской электромагнитной волны левой круговой поляризации, равно

$$\langle \vec{M} \rangle = \vec{n} \frac{q}{\omega} \langle (\vec{v}, \vec{E}) \rangle. \tag{1.6.6}$$

В случае правой поляризации получаем среднее значение момента сил с другим знаком:

$$\langle \vec{M} \rangle = -\vec{n} \frac{q}{\omega} \langle (\vec{v}, \vec{E}) \rangle. \tag{1.6.7}$$

Мощность, передаваемая волной заряду q , равна:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{F}, \vec{v}) = \left(q\vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right) \cdot \vec{v} = q(\vec{E}, \vec{v}) + \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \cdot \vec{v} = q(\vec{E}, \vec{v}).$$

Здесь мы учли, что $[\vec{v}, \vec{H}] \cdot \vec{v} = 0$. Усредним полученную мощность за период обращения

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = q \langle (\vec{E}, \vec{v}) \rangle. \tag{1.6.8}$$

Вспомним уравнение моментов из курса механики $\vec{M} = d\vec{L}/dt$, связывающее момент силы и изменение во времени момента импульса \vec{L} . Тогда используя уравнения (1.6.8) и (1.6.6), (1.6.7), для усредненного вектора момента силы можем записать

$$\langle \vec{M} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = \frac{\pm \vec{n}}{\omega} q \langle (\vec{E}, \vec{v}) \rangle = \frac{\pm \vec{n}}{\omega} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle. \tag{1.6.9}$$

Отсюда с очевидностью получаем выражение для переданного заряду момента импульса:

$$\vec{L} = \pm \vec{n} \frac{W}{\omega} = W \frac{\vec{\omega}}{\omega^2}. \tag{1.6.10}$$

Таким образом, основываясь на универсальном законе сохранения момента импульса, можно заключить, что в единицу времени заряд q вместе с энергией dW/dt получил механический момент импульса \vec{L} от электромагнитного поля действующей на него световой волны круговой поляризации. Таким образом, электромагнитная волна левой круговой поляризации с энергией W переносит момент импульса W/ω , направленный вдоль волнового вектора \vec{k} . Правополяризованный свет обладает противоположно направленным моментом импульса.

Можно ввести *плотность момента импульса* в электромагнитной волне, которая определяется:

$$\vec{l} = \frac{\vec{L}}{V}, \quad (1.6.11)$$

или, подставляя (1.6.10), получаем

$$\vec{l} = \pm \vec{n} \frac{w}{\omega} = w \frac{\vec{\omega}}{\omega^2}, \quad (1.6.12)$$

где w , как и ранее, плотность энергии электромагнитной волны.

Понятно, что для линейно поляризованной электромагнитной волны, которую можно представить как суперпозицию двух поляризованных по кругу волн с противоположным по направлению вращением вектора \vec{E} , момент импульса \vec{L} равен нулю.

В области макроскопических явлений экспериментальное измерение момента импульса света представляет очень трудную задачу из-за ничтожной величины связанных с ним эффектов. Тем не менее, в исключительно тонких экспериментах, выполненных в 1936 г. Р. Бетом, удалось обнаружить момент импульса электромагнитной волны. Им измерялся момент импульса, передаваемый светом полуволновой кристаллической пластинке, при прохождении через которую правополяризованный свет становится левополяризованным, или наоборот. При этом пластинке передается удвоенный момент импульса.

В области атомных явлений обмен моментом импульса между светом и веществом имеет существенное значение. Например, при испускании света круговой поляризации возбужденным атомом момент импульса электронов в атоме изменяется на величину, сравнимую с моментом импульса всего атома.

Примечание 1. *Александр Иванович Садóвский, российский педагог-физик, 1859 - 1923; Ричард Бет (Richard A. Beth), американский физик .*

1.7. Модуляция.

1.7.1. Модуляция. Модуляция амплитуды

Гармонические колебания, описывающие волну, характеризуются *амплитудой, частотой и фазой*:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) \quad \text{или} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (1.7.1)$$

Изменение этих параметров в процессе колебания называется *модуляцией*, а волны, получающиеся в процессе модуляции, называются *модулированными*. Рассмотренные ранее биения (§1.4) – пример амплитудной модуляции.

Гармоническое колебание не может нести информацию. Для того чтобы передать определенную информацию, необходимо волну "промодулировать", т.е. изменить какой-либо параметр волны в соответствии с изменением смыслового сигнала.

Итак, различают *амплитудную*, *частотную* и *фазовую* модуляции.

Рассмотрим вначале амплитудную модуляцию на примере следующей бегущей волны:

$$E(t) = (E_0 + E_1(t)) \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (1.7.2)$$

где функция времени $E_1(t)$ дает модуляцию амплитуды и представляет собой огибающую колебаний вектора E ($|E_1(t)| < E_0$, рис. 7.1). Можно провести *спектральный анализ* модуляции.

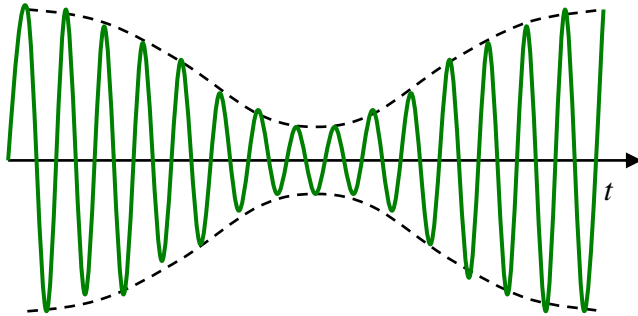


Рис. 7.1.

Если функция $E_1(t)$ является периодической функцией, то она может быть представлена в виде ряда Фурье по частотам кратным спектральной частоте Ω , где $\Omega = 2\pi/T$, а T – период функции. В математике доказывается теорема, по которой периодическую функцию можно разложить в ряд:

$$E_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\Omega t} \quad (1.7.3)$$

где a_n – амплитуда монохроматических колебаний с частотой " $n\Omega$ ". Или разложение в ряд Фурье альтернативно можно представить в виде:

$$E_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \quad (1.7.4)$$

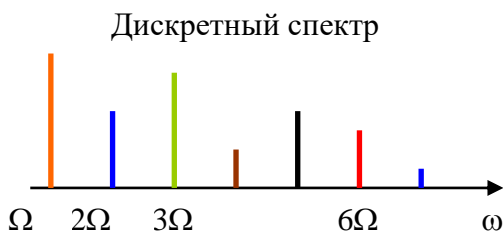


Рис. 7.2.

Выражения (1.7.3) и (1.7.4) представляют собой разложение (суперпозицию) периодической функции по бесконечному набору монохроматических колебаний (плоских монохроматических волн). Иначе говорят о разложении периодического колебания в спектр, в данном случае в *дискретный спектр*. На рисунке 7.2 показан пример дискретного спектра разложения, где высота отрезка показывает величину амплитуды колебания a_n (b_n) данной частоты.

Примечание 1. В выражении (1.7.3) присутствуют отрицательные частоты, что это такое? Проведем следующую выкладку, стартуя с (1.7.4):

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} (e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}) - \frac{ib_n}{2} (e^{in\Omega t} - e^{-in\Omega t}) \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{in\Omega t} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-in\Omega t} \right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^+ e^{in\Omega t} + C_n^- e^{-in\Omega t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\Omega t}$$

Таким образом, отрицательные частоты в (1.7.3) – это обычные частоты, но сдвинутые по фазе на $\pi/2$ по отношению к другим частотам, т.е. синусы и косинусы, получаемые в спектральном разложении. Если раскладываемая функция $E(t)$ вещественна, то из условия $E^*(t) = E(t)$, получаем, что $C_{-n}^* = C_n$.

Рассмотрим конкретный пример периодической функции $E_1(t) = E_{01} \cos \Omega t$, т.е. рассматриваем огибающую колебаний в виде гармонической функции. Тогда полное колебание (здесь для простоты рассматриваем волну в одной выбранной точке – $\vec{r} = 0$, например) имеет вид:

$$E(t) = (E_0 + E_{01} \cos \Omega t) \cos \omega t \quad (1.7.5)$$

Разложим эту функцию по гармоническим колебаниям:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t + \frac{E_{01}}{2} \cos(\omega - \Omega)t + \frac{E_{01}}{2} \cos(\omega + \Omega)t \quad (1.7.6)$$

Таким образом, в разложении получаем спектр колебания (1.7.5) (волны), состоящий из 3х компонент: колебаний с основной частотой ω и двух сателлитов с частотами $\omega \pm \Omega$ и с соответствующими амплитудами. Этот спектр схематично изображен на рис. 7.3.

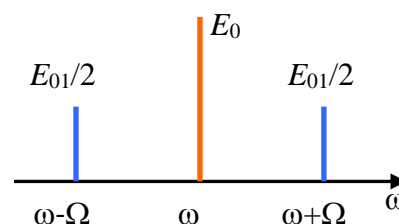


Рис. 7.3.

Если в (1.7.2) огибающая $E_1(t)$ является непериодической функцией времени, то ее можно разложить в интеграл Фурье:

$$E_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.7.7)$$

Напомним, что можно записать обратное разложение или, что то же, формулу для определения амплитуд $E(\omega)$ разложения:

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.7.8)$$

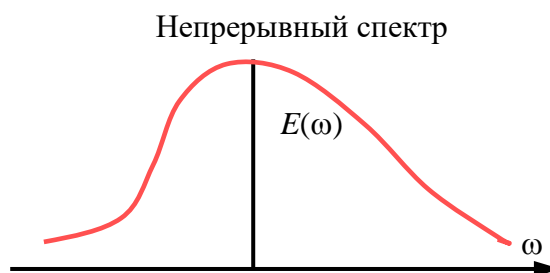


Рис. 7.4.

Здесь функция $E(\omega)$ определяет *непрерывный* или *сплошной спектр* колебаний (см рис. 7.4). Сложив все эти колебания частоты ω с соответствующими амплитудами $E(\omega)$ мы обратно получаем зависящий от времени модулирующий сигнал $E_1(t)$.

Примечание 2. Если $E_1(t)$ вещественная функция, то можно избавиться от отрицательных частот (т.е. от синусов). В самом деле, представим

$$E(t) = \int_0^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 E(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

Заменяя во втором интеграле “ ω ” на “ $-\omega$ ”, имеем:

$$= \int_0^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega - \int_{\infty}^0 E(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} (E(\omega) e^{i\omega t} + E(-\omega) e^{-i\omega t}) d\omega$$

Пользуясь вещественностью $E(t) = E^*(t)$, легко получить равенство: $E^*(-\omega) = E(\omega)$. Тогда

$$E(t) = \int_0^{\infty} [E(\omega) e^{i\omega t} + (E(\omega) e^{i\omega t})^*] d\omega = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Реальную часть интеграла очень часто можно опустить в процессе выкладок, подразумевая брать ее в конце решения.

1.7.2. Модуляция частоты и фазы.

Модуляция частоты и фазы определяется зависимостью этих параметров волны от времени $\omega = \omega(t)$ или $\varphi_0 = \varphi_0(t)$. Часто изменение этих параметров во времени удобно описывать одной общей зависимостью фазы $\Phi(t)$ от времени. Однако в общем случае временные изменения частоты и фазы приводят к различным спектральным следствиям.

Частотная и фазовая модуляции полностью эквивалентны, когда они изменяются по **гармоническому** закону. В самом деле, пусть $\Delta\omega$ – амплитуда колебаний частоты, а Ω – частота этих колебаний. Тогда имеем частотную модуляцию:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t \quad (1.7.9)$$

Колебания за время t (т.е. волна рассмотренная в точке $\vec{r} = 0$, например) наберут следующую фазу:

$$\Phi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t = \omega_0 t + \Delta\Phi \sin \Omega t = \omega_0 t + \varphi_0(t) \quad (1.7.10)$$

Получаем, таким образом, что при гармонических изменениях частоты фаза в (1.7.10) промодулирована по гармоническому закону.

То же можно сказать о спектральном составе промодулированных по частоте или фазе колебаний. Рассматривая тот же пример (1.7.10), запишем уравнение колебаний при условии $\Delta\omega/\Omega \ll 1$. Как и ранее, в (1.7.1) ограничимся одной точкой $\vec{r} = 0$, а вместо \cos удобнее волну записать через \sin (т.е.

положим $\varphi_0 = \pi/2$). Затем разложим в ряд $E(t)$ по малому параметру $\frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin\Omega t \ll \omega_0 t$ и ограничимся первыми членами разложения:

$$E(t) = E_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin\Omega t\right) \approx E_0 \sin\omega_0 t + E_0 \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin\Omega t \cos\omega_0 t + \dots \approx \\ \approx E_0 \left[\sin\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\Omega} \sin(\omega_0 + \Omega)t - \frac{\Delta\omega}{2\Omega} \sin(\omega_0 - \Omega)t \right]$$

В принципе получаем бесконечный ряд и, следовательно, бесконечный спектр. В первом приближении присутствуют частоты $\omega_0, \omega_0 \pm \Omega$. Эта ситуация похожа на амплитудную модуляцию (например, (1.7.6)), но эта “похожесть” только при малых глубинах модуляции.

В общем случае при негармонической модуляции структура сигналов, промодулированных по частоте и фазе, различна.

1.8. Волновые пакеты. Групповая скорость.

1.8.1. Волновые пакеты. Формула Рэлея.

Суперпозиция двух и большего числа волн с различными частотами составляет *группу волн* или *волновой пакет*. Часто под волновым пакетом понимают образование из волн, ограниченное в пространстве (рис. 8.1). К примеру, пакет волн, распространяющийся вдоль оси x , аналитически может быть записан в виде:

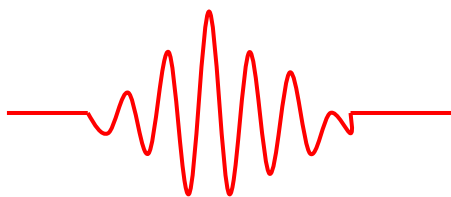


Рис. 8.1.

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} E(\omega) \cos(\omega t - k_\omega x + \varphi_\omega) d\omega \quad (1.8.1)$$

где $\Delta\omega$ – диапазон частот складываемых волн, $E(\omega)$ – амплитуды этих волн. Часто волновой пакет записывают, вводя волновое число k в качестве переменной, а частота рассматривается как функция волнового числа $\omega = \omega(k)$:

$$E(x, t) = \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} E_k e^{-i(\omega t - kx)} dk \quad (1.8.2)$$

Рассмотренные в §1.4 биения также можно рассматривать как пример простейшего волнового пакета. Напомним выражение (1.4.4), которое получили при сложении 2х волн с частотами ω_1 и ω_2 (1.4.3):

$$\begin{aligned}
 E &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right) = \\
 &= 2E_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]
 \end{aligned}
 \tag{1.8.3}$$

В §1.4 мы считали, что скорости распространения этих 2-х волн одинаковы, что и справедливо в вакууме

$$c = \omega_1/k_1 = \omega_2/k_2 .$$

Это фазовые скорости волн. Однако в среде скорость электромагнитных волн меньше скорости света $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ и в принципе зависит от частоты, поскольку реакция среды, т.е. проницаемости ϵ и μ могут зависеть от частоты электромагнитного поля. Зависимость фазовой скорости волны от частоты называется *дисперсией*. Поэтому в пакетах волн (1.8.1) скорости складываемых волн могут быть различными. В частности, в биениях фазовые скорости 2-х волн могут быть разными:

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}, \quad v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} . \tag{1.8.4}$$

Если дисперсии нет, то огибающая амплитуд движется вместе с волнами, т.е. со скоростью света. Если дисперсия есть, то огибающая движется с иной скоростью, чем скорости движения отдельных волн.

Определение: *скорость движения максимума огибающей амплитуды группы волн или волнового пакета называется групповой скоростью.*

Простейший случай нахождения групповой скорости – для биений – определяется условием постоянства фазы огибающей амплитуды (см из (1.8.3)):

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x = const \tag{1.8.5}$$

Дифференцируя последнее выражение, находим групповую скорость:

$$v_{gp} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \tag{1.8.6}$$

Если дисперсии нет, то $k_1 - k_2 = (\omega_1 - \omega_2)/c$ и тогда $v_{gp} = c$.

Итак, при наличии дисперсии групповая скорость отличается от фазовой скорости. В результате огибающая амплитуд и слагаемые волны движутся с различными скоростями, что приводит к изменению формы огибающей в процессе распространения волны, т.е. при наличии дисперсии волновой пакет распространяется с изменением своей формы.

Если частоты слагаемых волн ω_1 и ω_2 близки друг к другу, то групповая скорость равна:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}, \quad (1.8.7)$$

где $\omega = \omega(k)$. Эта формула справедлива не только для 2-х волн с бесконечно близкими частотами, но и для произвольного волнового пакета, образованного суперпозицией бесконечного числа волн с близкими частотами, поскольку является дифференциальной.

Найдем связь между групповой и фазовой скоростями. Воспользуемся определениями (1.8.4) и (1.8.7) и подставим частоту из фазовой скорости $\omega = kv$ в групповую скорость:

$$v_{gp} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} \quad (1.8.8)$$

Подставляя $k = 2\pi/\lambda$ и $dk = -2\pi d\lambda/\lambda^2$, получаем окончательно связь групповой скорости и фазовой:

$$v_{gp} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (1.8.9)$$

Это *формула Рэлея*. В зависимости от знака $dv/d\lambda$ групповая скорость может быть меньше, так и больше фазовой (но всегда меньше скорости света в вакууме).

Когда дисперсии нет: $dv/d\lambda = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой $v_{gp} = v$.

Максимум интенсивности (энергии) приходится на максимум огибающей в волновом пакете волн. Поэтому в тех случаях, когда понятие групповой скорости имеет смысл, скорость переноса энергии (и информации) волной равна групповой скорости.

Примечание 1.

- 1) Понятие групповой скорости неприменимо, когда поглощение среды очень велико (область аномальной дисперсии).
- 2) При распространении пакета волн в среде с дисперсией в первом приближении можно считать, что максимум и огибающая движутся с одной скоростью – групповой. Однако, в принципе, в пакете волн присутствуют разные частоты, тогда групповые скорости для соседних частот разные. Это приводит к изменению формы огибающей волнового пакета. В среде с дисперсией пакет может меняться по форме с уменьшением по амплитуде, расплываться и т.д.

Примечание 2. Джон Уильям Рэлей (лорд Рэлей), английский физик, 1842–1919, Нобелевская премия 1904 г. за открытие аргона

1.8.2. Пример спектрального разложения.

Рассмотрим один из важных примеров спектрального разложения: *цуг синусоидальных волн* или что, то же самое, “оборванная” синусоида (см рис. 8.2). Цуг волн – это модельное представление процесса излучения источника электромагнитных волн в виде волнового пакета длительностью τ . Например,

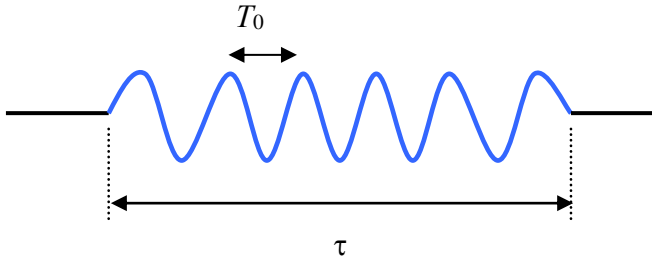


Рис. 8.2.

атом, находящийся в возбужденном состоянии, испытывает колебания в течение некоторого времени τ , при этом излучает электромагнитную энергию и, таким образом, участвует в создании переменного электромагнитного поля.

Для простоты пусть имеем синусоидальную волну

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t),$$

проходящую через фиксированную данную точку ($\vec{r} = 0$) пространства. Пусть также синусоидальные колебания длятся в течение конечного времени τ , при этом T_0 и $\omega_0 = 2\pi/T_0$ – период колебаний и частота колебаний, соответственно (рис. 8.2).

Запишем спектральное разложение цуга волн, следуя (1.7.7) и (1.7.8):

$$E(t) = 2 \int_0^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.8.10)$$

с амплитудами, определяющими спектр по формуле:

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.8.11)$$

Очевидно, что мы имеем дело со сплошным спектром частот. В нашем случае (1.8.11) запишется в пределах

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{4\pi i} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{E_0}{2\pi i} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\omega_0 - \omega} - \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau}{\omega_0 + \omega} \right) \end{aligned} \quad (1.8.12)$$

Подставляя $E(\omega)$ в (1.8.10) и умножая числитель и знаменатель на τ , получаем для реальной части сигнала $E(t)$:

$$E(t) = \frac{\tau E_0}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau} - \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau} \right) \sin \omega t d\omega$$

При условии $|\omega_0 - \omega| \ll |\omega_0 + \omega|$ (или иначе в области частот $\omega \sim \omega_0$) вторым слагаемым в (1.8.12) можно пренебречь. Тогда спектр в аналитической форме приобретает следующий вид:

$$E(\omega) \sim \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau} \equiv \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.8.13)$$

Спектр $E(\omega)$ графически изображен на рис. 8.3. В точках

$$\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau = \pi n$$

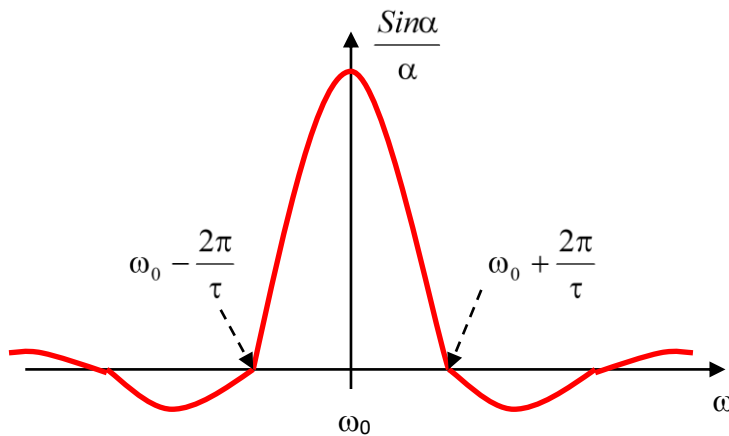


Рис. 8.3.

происходит обращение в нуль зависимости $E = E(\omega)$. Основная часть спектра находится в области около основной частоты ω_0 , причем разброс частот спектра $\Delta\omega$ подчиняется условию (иначе говоря, ширина максимума на его полувысоте):

$$\Delta\omega = |\omega_0 - \omega| \geq \frac{2\pi}{\tau} \quad (1.8.14)$$

Таким образом, получаем, что основная часть спектрального диапазона сигнала в виде оборванной синусоиды (цуга волн) определяется условием:

$$\begin{aligned} \Delta\omega \cdot \tau &\geq 2\pi \\ \text{или} \\ \Delta\nu \cdot \tau &\geq 1 \end{aligned} \quad (1.8.15)$$

Это важное соотношение между шириной спектра $\Delta\omega$ и длительностью цуга волн τ . Оно имеет самый общий характер (прообраз соотношения неопределенностей в квантовой физике). Чем больше длительность волны τ , т.е. чем ближе синусоида к монохроматической зависимости, тем уже спектр, сосредоточенный около основной частоты ω_0 . Наоборот, чем меньше длительность цуга, тем шире спектральный состав волнового пакета.

Аналогичная формула имеет место и для пространственного распределения волнового поля, когда рассматриваем его в определенный

зафиксированный момент времени t . В этом случае снова можно рассматривать оборванную синусоиду длительностью Δx , но в координатном пространстве x (рис. 8.4)

$$E(x, t) = E_0 \sin(\omega_0 t - k_0 x).$$

Тогда разлагая волновое поле $E(x, t)$ по векторам k – волновым числам, получаем соотношения, аналогичные приведенным выше, в которых можно просто поменять частоту ω на волновое число k ($\omega = kv$), а время t – на координату x . Также легко найти, что длина цуга Δx и интервал волновых чисел Δk связаны соотношением неопределенностей:

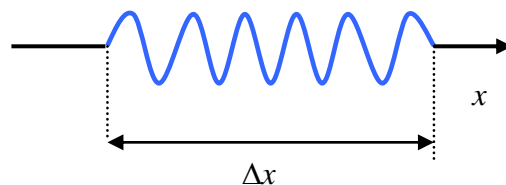


Рис. 8.4.

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 2\pi \quad (1.8.16)$$

Эти соотношения (1.8.15) и (1.8.16) выражают *принцип неопределенности*, который был также получен В. Гейзенбергом в квантовой механике.

Примечание 3. *Вернер Карл Гейзенберг (Werner Karl Heisenberg), немецкий физик-теоретик, 1901 - 1976, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике (1932) «за создание квантовой механики, приложения которой, в числе прочего, привели к открытию аллотропных форм водорода».*

1.9. Преобразования векторов электромагнитного поля.

1.9.1. Преобразования компонент электромагнитного поля.

Полученные и изученные нами законы электродинамики применимы для описания явлений, которые происходят в инерциальных системах отсчета (ИСО). Известно, что все инерциальные системы отсчета равноправны, поэтому законы всех физических, и том числе электромагнитных, явлений не изменяются при переходе от одной ИСО к другой. Однако легко заметить, что конкретные физические величины, характеризующие электромагнитное поле ($\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$, плотности зарядов ρ и токов \vec{j} и т.д.) будут изменяться при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Поэтому теория электромагнитных явлений должна,

во-первых, установить правила изменения электромагнитных величин при переходе из одной системы отсчета (ИСО) в другую;

во-вторых, показать, что установленные правила пересчета физических величин обеспечивают инвариантность законов электродинамики при изменении системы отсчета;

в-третьих, отыскать инварианты электромагнитного поля.

Пусть имеются две ИСО: система отсчета K и движущаяся относительно нее со скоростью \vec{v} система отсчета K' . При этом оси x и x' координатных систем совмещены и вектор \vec{v} направлен вдоль оси x . Предположим, что в некоторой пространственно-временной точке K системы известны значения векторов \vec{E} и \vec{B} . Определим, какими будут значения полей \vec{E}' и \vec{B}' в K' системе отсчета в одной и той же пространственно-временной точке. Напомним, что одной и той же пространственно-временной точкой называют такую точку, координаты и время которой в обеих системах отсчета связаны между собой преобразованиями Лоренца.

Электромагнитные потенциалы, скалярный $\varphi(\vec{r}, t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r}, t)$, образуют 4-х вектор, что следует из инвариантности уравнений для потенциалов относительно преобразований Лоренца. Итак, рассмотрим 4-х вектор (φ, \vec{A}) и его преобразования при переходе из системы K в систему K' :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi' + \frac{v}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(\varphi' + \frac{v}{c} A'_x \right), & A_y &= A'_y, \\ A_x &= \frac{A'_x + \frac{v}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(A'_x + \frac{v}{c} \varphi' \right), & A_z &= A'_z \end{aligned} \quad (1.9.1)$$

где $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. При переходе из системы K' в K -систему в преобразованиях (1.9.1) меняется направление скорости ($v \rightarrow -v$). Вектора электромагнитного поля определяются через потенциалы, как и раньше:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (1.9.2)$$

Поскольку в (1.9.2) входят частные производные, то, вспоминая преобразования Лоренца для координат и времени:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x' + vt'), & y &= y', \\ t &= \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(t' + \frac{x'v}{c^2} \right), & z &= z' \end{aligned}, \quad (1.9.3)$$

получим заготовку для частных производных:

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma, \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = v\gamma, \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma, \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{v}{c^2} \gamma \quad (1.9.4)$$

Этими соотношениями воспользуемся при рассмотрении компонент векторов \vec{E} и \vec{B} при переходе из одной ИСО в другую.

а). Рассмотрим x -ую компоненту магнитного поля \vec{B} , пользуясь (1.9.1) и (1.9.3):

$$B'_x = \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x$$

Таким образом, x -ая компонента магнитного поля при переходе из системы К в систему К' не меняется:

$$B'_x = B_x \quad (1.9.5)$$

б). Рассмотрим x -ую компоненту электрического поля \vec{E} (пользуясь (1.9.4)):

$$\begin{aligned} E'_x &= -\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} - \frac{1}{c} \frac{\partial A'_x}{\partial t'} = \\ &= -\gamma \left\{ \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi - \frac{v}{c} A_x \right) + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{v}{c} A_x \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x - \frac{v}{c} \varphi \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \left(A_x - \frac{v}{c} \varphi \right) \right\} = \\ &= -\gamma^2 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{v}{c} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{v^2}{c^3} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} = \\ &= -\gamma^2 \left\{ \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial A_x}{\partial t} \right\} = -\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = E_x, \end{aligned}$$

Таким образом, и x -ая компонента электрического поля при переходе из системы К в систему К' также не меняется:

$$E'_x = E_x. \quad (1.9.6)$$

в). y -ая компонента вектора \vec{B} :

$$\begin{aligned} B'_y &= \frac{\partial A'_z}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial z'}; \\ A'_x &= \gamma \left(A_x - \frac{v}{c} \varphi \right); \quad A'_z = A_z; \quad \partial z' = \partial z. \\ B'_y &= \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \gamma \left(A_x - \frac{v}{c} \varphi \right) \right\} - \left\{ \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \right\} A_z = \gamma \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{v}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) = \\ &= \gamma \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \gamma \frac{v}{c} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c} E_z \right); \\ B'_y &= \frac{B_y + \frac{v}{c} E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

г). y -ая компонента вектора \vec{E} :

$$E'_y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} - \frac{1}{c} \frac{\partial A'_y}{\partial t'}; \quad \varphi' = \gamma \left(\varphi - \frac{v}{c} A_x \right); \quad A'_y = A_y; \quad \partial y' = \partial y.$$

$$\begin{aligned}
E'_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \gamma \left(\varphi - \frac{v}{c} A_x \right) \right\} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_y = \gamma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{v}{c} \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{v}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) = \\
&= \gamma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) - \gamma \frac{v}{c} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c} B_z \right); \\
E'_y &= \frac{E_y - \frac{v}{c} B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}.
\end{aligned} \tag{1.9.8}$$

д). z -компоненты векторов \vec{E} и \vec{B} получаем аналогично:

$$E'_z = \frac{E_z + \frac{v}{c} B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c} E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{1.9.9}$$

Формулы преобразования векторов электромагнитного поля можно также представить через преобразования параллельных и перпендикулярных составляющих поля (относительно движения) в виде:

$$\begin{aligned}
E'_{\parallel} &= E_{\parallel}; & B'_{\parallel} &= B_{\parallel}; \\
\vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}]}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; & \vec{B}'_{\perp} &= \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{E}]}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.
\end{aligned} \tag{1.9.10}$$

Из уравнений, определяющих законы преобразования векторов электромагнитного поля, следует, что каждый из векторов \vec{E}' и \vec{B}' выражается через комбинацию векторов \vec{E} и \vec{B} . Это свидетельствует о *единой природе электрического и магнитного полей*. Каждая из компонент электромагнитного поля не имеет абсолютного смысла, поэтому разговор об электрическом и магнитном полях может идти лишь в том случае, когда для них указана система отсчета. *Раздельное рассмотрение этих полей возможно тогда и только тогда, когда оба поля являются статическими.*

1.9.2. Электрическое поле движущегося точечного заряда.

Рассмотрим задачу о нахождении поля равномерно движущегося точечного заряда, используя для ее решения, полученные в предыдущем пункте формулы.

Свяжем K' систему отсчета с точечным зарядом q , поместив его в начало координат. В этой системе отсчета напряженность электрического поля \vec{E}' заряда q описывается законом Кулона, а магнитное поле отсутствует:

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= \frac{q\vec{r}'}{r'^3}, \\
\vec{B}' &= 0,
\end{aligned} \tag{1.9.11}$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ – квадрат расстояния до точки наблюдения.

В К системе отсчета заряд q движется со скоростью v в положительном направлении оси x . Найдем поле заряда q в системе отсчета К, преобразуя чисто кулоновское сферическое поле \vec{E}' по полученным выше правилам. Пусть соответствующие оси координатных систем К и К' в момент $t' = t = 0$ совпадают. Тогда, согласно формулам преобразования (1.9.6) и (1.9.3), имеем:

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{q\gamma(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (1.9.12)$$

С другой стороны, $vt = x_q$ – координата заряда q в К системе, поэтому

$$E_x = q \frac{\gamma(x-x_q)}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (1.9.13)$$

Другие компоненты поля в К системе (при $\vec{B}'=0$ в (1.9.10)) равны, соответственно:

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{q\gamma y}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{q\gamma z}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (1.9.14)$$

Таким образом, в К системе отсчета поле заряда q , движущегося равномерно и прямолинейно, не меняет свою конфигурацию, а меняется лишь положение этой конфигурации относительно неподвижной К системы, т.е. поле неизменной конфигурации движется вместе с создающим его зарядом.

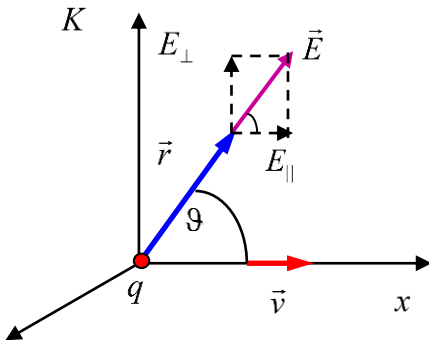


Рис. 9.1.

Определим конфигурацию поля для момента времени, когда заряд находится в начале координат К системы отсчета, т.е. при $x_q = 0$:

$$\vec{E} = q \frac{\gamma \vec{r}}{[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (1.9.15)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, направленный из местонахождения заряда q , в точку, в которой определяется поле \vec{E} . Напряженность поля \vec{E} направлена вдоль вектора \vec{r} , и ее значение зависит от направления вектора \vec{r} . Пусть ϑ – угол между направлениями скорости \vec{v} движения заряда q в К системе и радиус-вектора \vec{r} . Тогда

$$x = r \cos \vartheta; \quad y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \vartheta.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 &= \gamma^2 r^2 \left(\cos^2 \vartheta + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \vartheta \right) = \\ &= \gamma^2 r^2 [1 - (1 - 1 + \beta^2) \sin^2 \vartheta] = \gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta) \end{aligned}$$

Поэтому выражение для электрического поля свободно движущегося заряда принимает вид

$$\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}. \quad (1.9.16)$$

Отличие электрического поля свободно движущегося заряда q от сферически симметричного поля такого же неподвижного заряда сводится к появлению зависимости поля \vec{E} движущегося заряда от направления, задаваемого радиус-вектором \vec{r} .

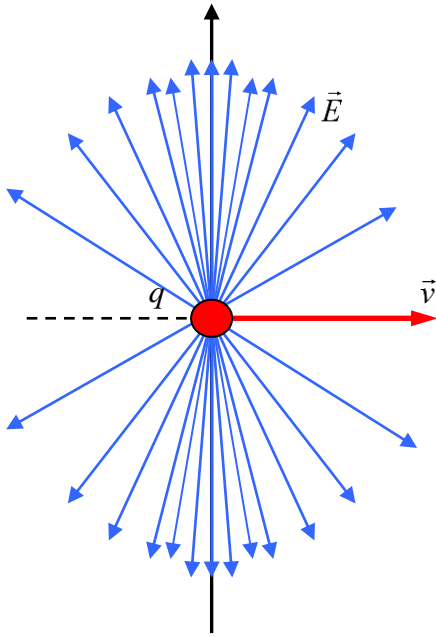


Рис. 9.2.

Поле в направлении движения заряда ($\vartheta = 0; \pi$) равно:

$$E_{\parallel} = \frac{q}{r^2} (1 - \beta^2). \quad (1.9.17)$$

В направлении, перпендикулярном вектору скорости \vec{v} ($\vartheta = \pm \pi/2$):

$$E_{\perp} = \frac{q}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.9.18)$$

Очевидно, что зависимость напряженности поля \vec{E} от направления тем сильнее, чем выше скорость движения заряда. При релятивистских скоростях ($\beta \approx 1$) поле концентрируется вблизи плоскости, проведенной через заряд q и перпендикулярной скорости его движения \vec{v} (рис. 9.2).

В K' системе отсчета индукция магнитного поля $\vec{B}' = 0$. В системе отсчета K магнитное поле \vec{B} определяется с помощью полученных выше формул преобразования. В нерелятивистском случае ($\gamma \approx 1$):

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{E}]. \quad (1.9.19)$$

При скоростях порядка скорости света поле вектора \vec{B} определяется выражением:

$$\vec{B} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \beta^2}} [\vec{v}, \vec{E}]. \quad (1.9.20)$$

Видно, что линии вектора магнитной индукции образуют концентрические окружности с центром на оси x , вдоль которой движется заряд.

1.9.3. Инварианты электромагнитного поля.

Итак, при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую векторы электромагнитного поля \vec{E} и \vec{B} изменяются. Как мы видели выше, мыслима такая ситуация, когда в некоторой системе отсчета отличны от нуля обе компоненты электромагнитного поля, а в другой имеется только электрическое поле.

В то же время плоская электромагнитная волна характеризуется вполне определенными свойствами: векторы \vec{E} и \vec{B} взаимно перпендикулярны, а их модули связаны соотношением $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ (в вакууме $E = H$). Можно задать вопрос – сохраняются ли свойства векторов электромагнитного поля при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую? Это принципиальный вопрос. Если сохраняются, то понятие плоской электромагнитной волны является релятивистски инвариантным, отражающим внутренние свойства электромагнитного поля волны. В противном же случае, это понятие не определяет объективно существующего физического объекта, а зависит от случайного выбора системы отсчета.

Полученные нами правила преобразований позволяют убедиться, что векторы напряженности электромагнитного поля \vec{E} и \vec{B} , удовлетворяющие условиям, вытекающим из свойств плоской волны, в одной системе отсчета, удовлетворяют этим условиям и в другой системе отсчета.

Таким образом, *плоская электромагнитная волна является релятивистски инвариантным понятием, определяющим объективно существующий физический объект.*

Мы не будем останавливаться на проверке этого частного утверждения, а проанализируем общий вопрос об инвариантах электромагнитного поля, ответ на который, наряду с обоснованием инвариантности плоской волны, позволит получить многие другие важные выводы. Другими словами, возникает вопрос об инвариантных, т.е. не зависящих от выбора системы отсчета, количественных характеристиках электромагнитного поля. Безусловно, первым в числе таких характеристик следует отметить *электрический заряд q* , величина которого не зависит от выбора системы отсчета.

Далее под инвариантами преобразований электромагнитного поля мы будем понимать величины, составленные из векторов поля и не изменяющие своих значений при переходах между инерциальными системами отсчета. Вообще говоря, есть способы нахождения инвариантов преобразований. Однако, мы поступим иначе и прямым вычислением покажем, что *инвариантами электромагнитного поля* являются приведенные ниже комбинации векторов поля.

$$I_1 = B^2 - E^2; \quad I'_1 = H^2 - D^2. \quad (1.9.21)$$

$$I_2 = \vec{B} \cdot \vec{E}; \quad I'_2 = \vec{H} \cdot \vec{D}. \quad (1.9.22)$$

$$I_3 = \vec{H} \cdot \vec{B} - \vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (1.9.23)$$

Убедимся в этом, используя правила преобразования полей. Например, рассмотрим (1.9.21), при этом воспользуемся преобразованиями (1.9.7) - (1.9.9):

$$\begin{aligned} B^2 - E^2 &= (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) = B_x'^2 + \frac{\left(B'_y - \frac{v}{c}E'_z\right)^2 + \left(B'_z + \frac{v}{c}E'_y\right)^2}{1 - v^2/c^2} - \\ &- E_x'^2 - \frac{\left(E'_y + \frac{v}{c}B'_z\right)^2 + \left(E'_z - \frac{v}{c}B'_y\right)^2}{1 - v^2/c^2} = B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2 + \frac{-2\frac{v}{c}B'_yE'_z + 2\frac{v}{c}B'_zE'_y}{1 - v^2/c^2} - \\ &- E_x'^2 - E_y'^2 - E_z'^2 - \frac{2\frac{v}{c}E'_yB'_z + 2\frac{v}{c}E'_zB'_y}{1 - v^2/c^2} = B'^2 - E'^2 = inv. \end{aligned}$$

Далее получим (1.9.22):

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{E} &= B_x E_x + B_y E_y + B_z E_z = B'_x E'_x + \frac{\left(B'_y - \frac{v}{c}E'_z\right)\left(E'_y + \frac{v}{c}B'_z\right)}{1 - v^2/c^2} + \\ &+ \frac{\left(B'_z + \frac{v}{c}E'_y\right)\left(E'_z - \frac{v}{c}B'_y\right)}{1 - v^2/c^2} = B'_x \cdot E'_x + \frac{B'_y E'_y - \frac{v^2}{c^2} B'_y E'_y}{1 - v^2/c^2} + \frac{B'_z E'_z - \frac{v^2}{c^2} B'_z E'_z}{1 - v^2/c^2} + \\ &+ \frac{\frac{v}{c}(B'_y B'_z - E'_y E'_z)}{1 - v^2/c^2} + \frac{-\frac{v}{c}(B'_y B'_z - E'_y E'_z)}{1 - v^2/c^2} = \vec{B}' \cdot \vec{E}' = inv. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается инвариантность комбинации векторов электромагнитного поля (1.9.23).

Анализ инвариантов электромагнитного поля позволяет сделать следующие выводы.

- 1) Если в некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) $B^2 > E^2$ и $\vec{E} \perp \vec{B}$, то можно выбрать такую систему отсчета, где электрическое поле отсутствует, а магнитное поле отлично от нуля. Если же условие $\vec{E} \perp \vec{B}$ не выполняется, то такой ИСО не существует.
- 2) Если в некоторой ИСО $B^2 < E^2$ и $\vec{E} \perp \vec{B}$, то можно выбрать такую систему отсчета, где магнитное поле отсутствует, а электрическое поле отлично от нуля. Если же условие $\vec{E} \perp \vec{B}$ не выполняется, то такой ИСО не существует.

- 3) Если в какой-либо ИСО имеется только электрическое (магнитное) поле, то при переходе в другую ИСО наблюдаются, вообще говоря, как электрическое, так и магнитное поля, которые перпендикулярны друг другу.
- 4) Плоская волна, для которой $E = B$ и $\vec{E} \perp \vec{B}$ ($I_1 = 0$ и $I_2 = 0$), остается плоской волной во всех ИСО.

Из последнего вывода – об инвариантности плоской волны – следует, что если поле в некоторой пространственно-временной точке равно нулю, то это утверждение объективно и не зависит от того, в какой ИСО рассматривается эта точка. Иначе говоря, векторы электромагнитного поля в данной пространственно-временной точке во всех системах отсчета равны нулю, т.е. *фаза волны во всех системах отсчета одинакова, что доказывает ее инвариантность.*

Инвариантность фазы также следует из формул преобразования векторов поля. Фаза волны может быть представлена в виде

$$\omega t - \vec{k}\vec{r} = \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k_0} \cdot \underbrace{ct}_{x_0} - k_x x - k_y y - k_z z = inv. \quad (1.9.24)$$

Выражение (1.9.24) для фазы представляет собой скалярное произведение двух четырех векторов: 4-х мерного волнового вектора $(\omega/c, \vec{k})$ и 4-х мерного радиус - вектора (ct, \vec{r}) . Скалярное произведение двух 4-х векторов, как и квадрат 4-х вектора, есть инвариантная величина, не меняющаяся при переходе из одной ИСО в другую.

Ранее мы уже вводили 4-х мерный волновой вектор $(\omega/c, \vec{k})$, когда рассматривали эффект Доплера в курсе "Механика" (§2.5 в [1]), а также когда вводили 4-х вектор фотона $(\hbar\omega/c, \vec{p} = \hbar\vec{k})$ (§2.8 в [1]). Компоненты этих векторов отличаются только постоянным множителем – постоянной Планка. Поэтому так же как для фотона квадрат 4-х вектора $(\omega/c, \vec{k})$ есть инвариантная величина, равная нулю:

$$\omega^2/c^2 - k^2 = inv = 0.$$

При переходе из одной системы отсчета в другую величины, образующие 4^х-вектор, будут изменяться в соответствии с преобразованиями Лоренца. Если система отсчета K' движется со скоростью v в направлении оси x неподвижной K системы, то получаем следующие преобразования компонент 4-х вектора

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} k_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad k'_x = \frac{k_x - \frac{v}{c} \frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad k'_y = k_y; \quad k'_z = k_z \quad (1.9.24)$$

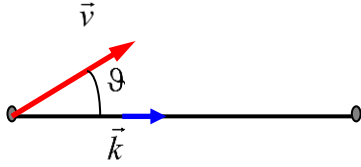


Рис. 9.3.

Пусть ϑ – угол между векторами \vec{v} и \vec{k} , т.е. между направлением движения системы-источника и направлением наблюдения волны (см рис. 9.3 и 9.4), тогда из (1.9.24) имеем:

$$\omega' = \frac{\omega - vk \cos \vartheta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.9.25)$$

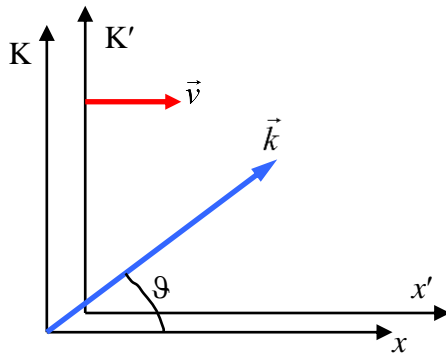


Рис. 9.4.

где $k = \omega/c$. Таким образом получаем, что, если ω – частота электромагнитных колебаний, излучаемых неподвижным в К системе отсчета источником, то ω' – частота колебаний, воспринимаемых приемником, движущимся вместе с системой К' со скоростью v . Излучаемая источником частота ω может быть найдена по измеренной приемником частоте ω' в системе К' по формуле:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta} \quad (1.9.26)$$

Получили снова эффект Доплера, который ранее нами рассматривался в релятивистской механике (§2.5 в [1]).

Напомним, например, продольный эффект Доплера. Пусть свет распространяется вдоль положительного направления оси x , тогда $\cos \vartheta = 1$. Тогда, если частота света в системе К равна ω , то воспринимаемая в системе К' частота равна:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (1.9.27)$$

т.е. меньше, чем излучаемая частота.

Пусть свет распространяется вдоль отрицательного направления оси x , тогда $\cos \vartheta = -1$, т.е. свет распространяется навстречу приемнику в системе К'. Тогда воспринимаемая частота в системе К' равна:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (1.9.28)$$

Воспринимаемая частота в K' системе больше излучаемой в системе K .

Поперечный эффект Доплера, когда направления движения системы K' перпендикулярно распространению света:

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.9.29)$$

Напомним, также, что если продольный эффект Доплера проявляется и в нерелятивистской механике, то поперечный эффект – чисто релятивистский эффект.

1.10. Испускание электромагнитных волн.

1.10.1. Излучение точечного заряда.

До сих пор, изучая свойства электромагнитных волн, мы не задавались вопросом, как возникают такие волны. Рассматривая поле свободно движущегося заряда, мы нашли, что такой заряд не излучает – всегда в любом направлении имеются только тангенциальные составляющие поля вектора \vec{E} (E_{\perp} отсутствует).

Испускание электромагнитных волн происходит при ускоренном движении электрических зарядов.

Это утверждение, строго говоря, относится к движению заряда в вакууме. В веществе излучение возможно и при равномерном движении заряда, когда скорость заряженной частицы больше фазовой скорости света в данной среде. Это, так называемый, *эффект Вавилова-Черенкова*.

Рассмотрим точечный заряд q , который до момента времени $t = 0$ ($-\infty < t < 0$) покоился в начале координат. При этом его электрическое поле изображалось радиальными силовыми линиями, выходящими из начала координат. Пусть в момент времени $t = 0$ этот заряд под действием какой-либо внешней силы начинает двигаться с постоянным ускорением a в направлении оси x . По истечении короткого промежутка времени τ действие этой силы прекращается, так что дальнейшее движение заряда происходит равномерно со скоростью $v = a\tau$, приобретенной к концу периода ускорения.

Представим картину силовых линий электрического поля, которое создается движущимся зарядом, спустя большой, по сравнению со временем ускорения τ , промежуток времени t ($t \gg \tau$). В точки, лежащие за пределами сферы радиусом ct (т.е. на расстояниях $r > ct$, центр сферы в начале координат), еще не дошла “информация” о том, что в момент времени $t = 0$

заряд начал движение. Поэтому за пределами этой сферы поле такое же, каким оно было при неподвижном заряде.

$$\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1.10.1)$$

Внутри сферы радиусом $c(t - \tau)$ электрическое поле является полем равномерно движущегося заряда, т.к., начиная с момента времени $t = \tau$, заряд движется уже с постоянной скоростью v и согласно (1.9.16) имеем:

$$E = \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}, \quad (1.10.2)$$

Здесь r' – расстояние, отсчитываемое от мгновенного положения заряда, движущегося со скоростью v . Рассмотрим для простоты случай малых скоростей заряда $v \ll c$, то есть пренебрежем релятивистскими поправками. Тогда поле внутри сферы можно положить равным $E = q/r'^2$. То есть при нерелятивистских скоростях движения заряда электрическое поле в момент

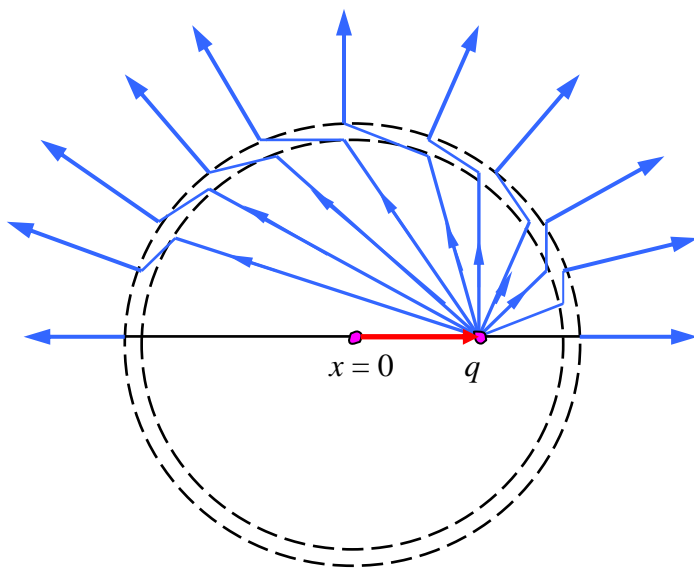


Рис. 10.1.

времени t может быть найдено как поле неподвижного точечного заряда q , находящегося в той точке, через которую в момент времени t проходит движущийся заряд. В моменты времени $t \gg \tau$ можно считать, что движущийся заряд находится на расстоянии vt от начала координат (пренебрегая величиной $v\tau/2$ – малым путем, пройденным за время ускорения).

Таким образом, все изменения электрического поля, связанные с ускоренным движением заряда в течение времени τ , заключены внутри тонкого шарового слоя толщиной $c\tau$ (см рис.10.1). В интересующий нас момент времени t наружный радиус слоя равен ct , а внутренний – $c(t - \tau)$.

Картину электрического поля во внутренней области шарового слоя можно найти, учитывая непрерывность силовых линий (т.к. теорема Гаусса остается справедливой, то число линий сохраняется). Для этого достаточно соединить соответствующие радиальные силовые линии. Вызванная ускоренным движением заряда сферическая область излома силовых линий поля “убегает” от заряда со скоростью c . Изломы на силовых линиях, расположенные между сферами $r = ct$ и $r = c(t - \tau)$, – это и есть поле излучения

заряда, т.е. испускаемая ускоренно движущимся зарядом волна, распространяющаяся со скоростью c от источника.

Рассмотрим одну из силовых линий, составляющую угол ϑ с направлением движения заряда (рис.10.2). Вектор напряженности электрического поля в области излома разложим на две составляющие: радиальную E_{\parallel} и поперечную E_{\perp} . Радиальная составляющая E_{\parallel} – это статическое поле, создаваемое неподвижным зарядом q , находящимся в начале координат. Напряженность этого поля на расстоянии $r = ct$ определяется выражением $E_{\parallel} = q/r^2$.

Поперечная составляющая напряженности E_{\perp} – это поле, излучаемое электрическим зарядом во время его ускоренного движения. Поскольку волна распространяется в радиальном направлении, то вектор \vec{E}_{\perp} перпендикулярен направлению распространения волны.

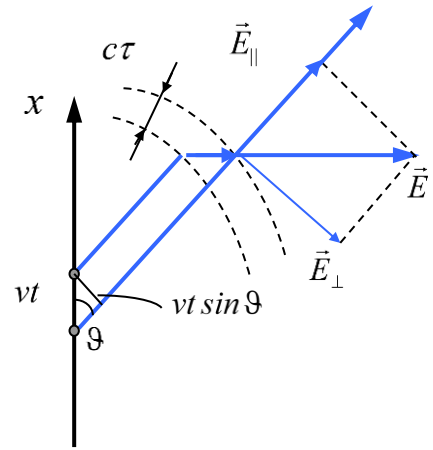


Рис. 10.2.

Из подобия треугольников, изображенных на рисунке 10.3 видно, что

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_{\perp} t}{ct} = \frac{vt \sin \vartheta}{ct}.$$

Учитывая, что $r = ct$, и подставляя E_{\parallel} , получаем

$$E_{\perp} = \frac{qv \sin \vartheta}{\tau \cdot c^2 r}.$$

Отношение $v/\tau = a$ представляет собой ускорение, с которым заряд двигался в течение времени от момента 0 до τ , а $a \sin \vartheta = a_{\perp}$, где a_{\perp} – поперечная компонента полного ускорения заряда. Тогда для поперечной составляющей поля получаем:

$$E_{\perp} = \frac{qa \sin \vartheta}{c^2 r} = \frac{qa_{\perp}}{c^2 r}. \quad (1.10.3)$$

Приведенный вывод основан на предположении, что в пустоте (вакууме) любое электромагнитное возмущение распространяется со скоростью c .

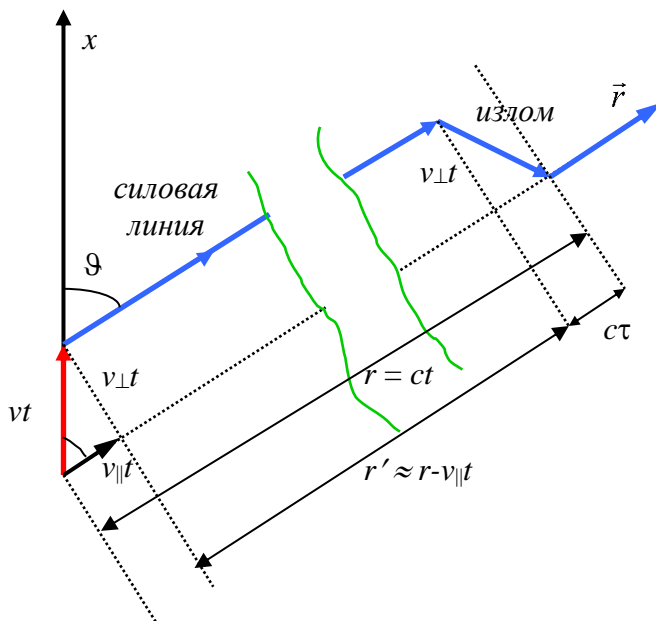


Рис. 10.3.

Во-первых, обратим внимание на то, что напряженность электрического поля волны E_{\perp} убывает обратно пропорционально первой степени расстояния r от центра в отличие от напряженности E_{\parallel} электростатического поля точечного заряда, убывающего как $1/r^2$.

Во-вторых, напряженность E_{\perp} поля волны в момент времени t в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от источника, зависит от ускорения a заряда q в более ранний $t=0$ момент времени. Другими словами, волна, излученная движущимся с ускорением зарядом в момент времени $t=0$, достигает точки наблюдения через промежуток времени, равный r/c .

Предположим, что заряд q все время движется вдоль оси x с некоторым переменным ускорением $a(t)$, оставаясь при этом вблизи начала координат (движение заряда в антенне или в атоме). Тогда электромагнитная волна будет излучаться непрерывно. Напряженность электрического поля волны в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от начала координат, по-прежнему, будет определяться полученным выше выражением, причем поле $E_{\text{изл}} = E_{\perp}$ в момент времени t зависит от ускорения a заряда в более ранний момент времени $t' = t - r/c$:

$$E_{\text{изл}}(r, t) = q \frac{a_{\perp}(t')}{c^2 r}. \quad (1.10.4)$$

Вектор \vec{E}_{\perp} в точке, задаваемой радиус-вектором \vec{r} в момент времени t , направлен противоположно направлению поперечной компоненты ускорения \vec{a}_{\perp} заряда q в момент времени t' . Учтем эти обстоятельства в формуле для излучения:

$$\vec{E}_{\text{изл}}(\vec{r}, t) = -q \frac{\vec{a}_{\perp}(t')}{c^2 r}. \quad (1.10.5)$$

$$t' = t - r/c$$

Так как “время запаздывания” r/c , равное времени прохождения волны от начала координат до точки наблюдения, остается *неизменным*, то для справедливости полученной формулы существенным является предположение, что совершающий ускоренное движение заряд все время остается вблизи начала координат.

Итак, радиальная составляющая поля $E_r = E_{\parallel}$ в перегибе такая же, как и радиальное поле перед перегибом и после перегиба, поэтому она не несет информации. Это поле не излучается и не является частью бегущей волны. Иначе говоря, если бы детектор был настроен на E_{\parallel} , то он бы не заметил движение заряда. Поэтому излучение заряда происходит только за счет перпендикулярной составляющей E_{\perp} .

Можно рассмотреть излучение заряда q , совершающего гармонические колебания с частотой ω . Тогда для координаты и ускорения заряда имеем:

$$\begin{aligned} x(t') &= x_0 \cos \omega t'; \\ a(t') = \ddot{x}(t') &= -\omega^2 x_0 \cos \omega t' = -\omega^2 x(t'). \end{aligned} \quad (1.10.6)$$

При таком движении заряд излучает монохроматическую волну частоты ω . Поверхности постоянной фазы

$$\omega \cdot t' = \omega \cdot (t - r/c) = \omega t - kr = \text{const},$$

где $k = \omega/c$, представляют собой сферы с центрами в начале координат, расширяющиеся со скоростью $c = \omega/k$. Расстояние, на которое перемещается поверхность постоянной фазы за время, равное периоду колебаний заряда $T = 2\pi/\omega$, является длиной волны $\lambda = cT = 2\pi/k$.

Выражение (1.10.5), определяющее поле излучение ускоренно движущегося заряда, применимо для описания излучения осциллирующего заряда, если амплитуда его осцилляций x_0 мала по сравнению с длиной волны: $x_0 \ll \lambda$. Только в этом случае время запаздывания можно считать неизменным и полагать равным r/c . Это же условие можно сформулировать как требование, чтобы скорость заряда была много меньше скорости света $v \ll c$. Такое требование позволяет избежать трудностей, связанных с наложением в точке наблюдения вкладов в поле излучения волн, испущенных в различные более ранние моменты времени t' .

Такой излучатель принято называть *электрическим дипольным осциллятором*, а испускаемые им волны – *дипольным излучением*.

1.10.2. Мощность излучения.

Рассмотрим ускоренно движущийся (нерелятивистский $v \ll c$) заряд в некоторой окрестности своего начального положения. Это может быть заряд в антенне или в атоме. В то же время считаем, что точка наблюдения находится далеко от этой области. Например, наблюдаем на расстоянии 10^5 см при размерах атома $\sim 10^8$ см.

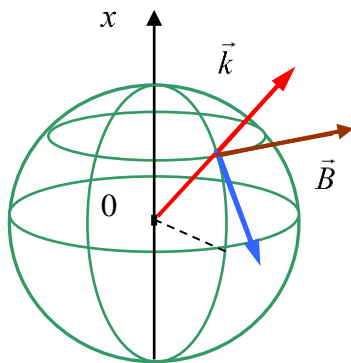


Рис. 10.4.

Как мы видели в предыдущем пункте, при таком движении заряда испускается сферически симметричная волна, которую можно записать в виде (рис. 10.4):

$$E(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{r} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (1.10.7)$$

Однако, на больших расстояниях от \vec{E} источника, т.е. в волновой зоне, где $r \gg \lambda$, можно отдельные небольшие участки сферической поверхности рассматривать как плоскости. Если размеры этих участков велики по сравнению с длиной волны, то к ним применимы результаты, полученные при рассмотрении плоских волн. В частности, это позволяет сразу же определить магнитное поле \vec{B} в интересующей нас области пространства. Если для каждой точки пространства ввести волновой вектор \vec{k} , направленный радиально из начала координат, то векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{k} образуют правую тройку векторов в соответствии с соотношением для плоской волны (1.1.24)

$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right]$. В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$ и $\vec{B} = \vec{H}$; поэтому можно записать

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \left[\frac{\vec{r}}{r}, \vec{E} \right],$$

где вектор \vec{r} задает направление распространения волны.

Таким образом, вектор \vec{E} направлен по касательной к меридиану, а вектор \vec{B} – по касательной к параллели. В сферической системе координат векторы \vec{E} и \vec{B} имеют следующие проекции (рис. 10.5):

$$E_r = 0; \quad E_\vartheta = \frac{q\ddot{x} \sin \vartheta}{c^2 r}; \quad E_\varphi = 0. \quad (1.10.8)$$

$$B_r = 0; \quad B_\vartheta = 0; \quad B_\varphi = \frac{q\ddot{x} \sin \vartheta}{c^2 r}. \quad (1.10.9)$$

Вектор плотности потока энергии, переносимой волной, определяется вектором Пойнтинга $\vec{S}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E}, \left[\frac{\vec{r}}{r}, \vec{E} \right] \right] = \frac{c}{4\pi} E^2 \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.10.10)$$

Вектор плотности потока энергии направлен, как и ожидалось, по радиус-вектору. Подставляя $E = E_{изл}$ из (1.10.5), получаем:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \left[-q \frac{a_\perp(t')}{c^2 r} \right]^2 \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q^2}{c^3} [a_\perp(t')]^2 \frac{\vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (1.10.11)$$

Таким образом, поток энергии в волновой зоне осциллятора имеет в каждой точке радиальное направление, (т.е. направление вектора Пойнтинга \vec{S} в каждой точке волновой зоны совпадает с направлением радиус-вектора \vec{r}) и убывает с расстоянием пропорционально обратному квадрату радиуса.

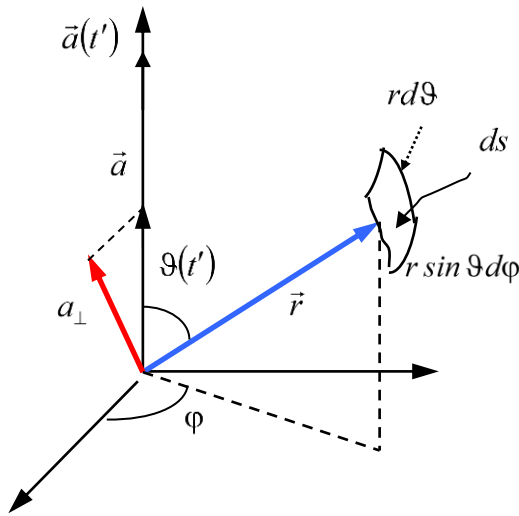


Рис. 10.5.

Если записать выражение (1.10.11) в виде (см рис. 10.5)

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \sin^2 \vartheta \frac{\vec{r}}{4\pi r^3}, \quad (1.10.12)$$

то становится очевидным, что зависимость интенсивности от направления определяется множителем $\sin^2 \vartheta$.

Максимальная интенсивность наблюдается при угле $\vartheta = \pi/2$ в экваториальной плоскости, т.е. *максимум интенсивности излучения соответствует направлению, перпендикулярному направлению ускорения (осцилляций) заряда, а вдоль этого направления ($\vartheta = 0$) энергия не излучается.*

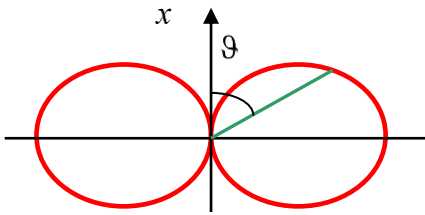


Рис. 10.6.

Угловое распределение энергии, излучаемой движущимся или осциллирующим зарядом, можно проиллюстрировать с помощью “*диаграммы направленности*” (рис. 10.6). Длина отрезка, проведенного из начала координат до пересечения с линией $r \cdot \sin^2 \vartheta$ (зеленый отрезок на рис.10.6), пропорциональна интенсивности распространяющейся в данном направлении волны. Распределение интенсивности по направлениям в пространстве. Характеризуется

поверхностью, которая получается вращением кривой $r \cdot \sin^2 \vartheta$ вокруг оси x .

Найдем значение мощности осциллятора, излучаемую в направлении, задаваемом углом ϑ . Рассмотрим площадку, расположенную на расстоянии r и под углом ϑ от начала координат. Поток энергии через выбранную площадку равен $\vec{S}d\vec{s} = dP$, где dP – мощность излучения, т.е. энергия, проходящая через элементарную площадку ds в единицу времени.

$$dP(\vec{r}, t) = |\vec{S}(\vec{r}, t)| ds = \frac{q^2}{c^3} [a_{\perp}(t')]^2 \frac{ds}{4\pi r^2}. \quad (1.10.13)$$

Пусть $\vartheta(t')$ – угол между мгновенным значением ускорения $a(t')$ в “ранний” момент времени t' и постоянным направлением \vec{r} , проведенным из окрестности заряда q в точку наблюдения (на площадку ds). Тогда $a_{\perp}^2(t') = a^2(t') \sin^2 \vartheta(t')$. Таким образом, мощность, излучаемая осциллятором в определенном направлении $\vartheta(t')$, и проходящая через площадку ds в момент времени t' равна

$$dP(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \sin^2 \vartheta(t') \frac{ds}{4\pi r^2}. \quad (1.10.14)$$

Сосчитаем полную (мгновенную) мощность, излучаемую осциллятором во всех направлениях (фиксируем t' и r и интегрируем по всем направлениям):

$$P(r,t) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta) d(-\cos \vartheta) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} a^2(t')$$

Итак, мы получаем знаменитую формулу, определяющую полную мощность излучения ускоренного заряда

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} a^2(t'); \quad (1.10.15)$$

$$t' = t - \frac{r}{c}.$$

Основные полученные результаты можно сформулировать:

- 1) Мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения заряда.
- 2) Мощность излучения не зависит от расстояния до заряда, т.е. через любую охватывающую осциллятор замкнутую поверхность за единицу времени протекает одинаковая энергия. Этот результат может быть объяснен тем, что площадь поверхности $\sim r^2$, а плотность потока $\sim 1/r^2$ (поперечная составляющая напряженности поля E_\perp убывает обратно пропорционально расстоянию r).
- 3) Мощность излучения в данном направлении зависит от угла между этим направлением и направлением ускорения заряда.

Примечание 1. На самом деле точное решение уравнений Максвелла дает излучение полей, которые спадают не только как $\sim 1/r$, но и как $\sim 1/r^2$ и $\sim 1/r^3$ и т.д., которые на больших расстояниях не вносят большого вклада. Однако, эти поля вносят свой вклад, и часто преобладающий, на малых расстояниях, в так называемой, ближней зоне.

1.10.3. Излучение электрического диполя.

Наряду с осциллирующим зарядом q в начале координат может быть находится покоящийся заряд $-q$, образующий вместе с зарядом q нейтральную систему – электрический диполь с осциллирующим дипольным моментом $p(t) = qx(t)$. Внесение неподвижного заряда $-q$ приведет к изменению радиальной составляющей поля E_\parallel , которая будет убывать с расстоянием быстрее, чем в уже рассмотренной нами картине поля, создаваемого одним зарядом q . Однако на больших расстояниях от источника,

где сравнительно медленно ($\sim 1/r$) убывающее поперечное поле излучения E_{\perp} значительно превосходит радиальное поле E_{\parallel} (в волновой зоне, т.е. при $r \gg \lambda$) формула (1.10.5) применима и к полю излучения диполя с дипольным моментом $p(t) = qx(t)$:

$$E_{\text{изл}}(r, t) = \frac{\ddot{p}(t')}{c^2 r} \sin \vartheta. \quad (1.10.16)$$

При этом безразлично, чем обусловлены осцилляции дипольного момента: изменением расстояния между зарядами q и $-q$ по закону

$$x(t') = x_0 \cos \omega t'$$

при неизменной их величине или изменением зарядов по закону

$$q(t') = q_0 \cos \omega t'$$

при неизменном расстоянии между ними.

Первый случай важен как классическая модель электромагнитного излучателя света в оптике. Оказывается, что электрический дипольный осциллятор как модель излучающей атомной системы в ряде случаев приводит к подтверждающимся на опыте результатам.

Второй случай соответствует простым антеннам, применяемым в радиотехнике. Поле излучения в волновой зоне можно находить, заменяя антенну эквивалентным дипольным осциллятором.

Важно отметить, что поле излучения дипольного осциллятора, представляя собой сферическую волну, в то же время сферической симметрией не обладает. В волновой зоне поверхности постоянной фазы действительно сферические, однако, модули векторов \vec{E} и \vec{B} в разных точках сферы различны, т.к. они зависят от полярного угла ϑ . Поэтому *поле поперечной сферической волны не может быть сферически симметричным*.

Осциллирующий диполь излучает в единицу времени в элементарный телесный угол $d\Omega$ энергию

$$dP = \frac{q^2}{c^3} \langle a^2(t') \rangle \sin^2 \vartheta \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{q^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle \sin^2 \vartheta \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (1.10.17)$$

Тогда полная излучаемая диполем мощность

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle = \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} \langle \ddot{p}^2(t') \rangle = \frac{2}{3} \frac{\dot{p}^2(t)}{c^3}. \quad (1.10.18)$$

Полученный результат заслуживает обсуждения. Излучаемая осциллятором мощность пропорциональна квадрату амплитуды его дипольного момента и четвертой степени частоты, или обратно пропорциональна четвертой степени длины волны. Этот закон позволяет объяснить многие явления, связанные с рассеянием электромагнитных волн в

веществе. Например, голубой цвет неба объясняется тем, что короткие волны рассеиваются сильнее, чем длинные. А красный цвет Солнца на закате появляется из-за того, что при прохождении прямого пучка света через толщу атмосферы голубые лучи рассеиваются значительно сильнее, чем красные.

Примечание 2. *Сергей Иванович Вавилов, русский физик, 1891–1951;*

Павел Алексеевич Черенков, русский физик, 1904–1990, Нобелевская премия за открытие эффекта свечения веществ под действием заряженных частиц сверхсветовой скорости в веществе 1958 года. Совместно с И.Е.Таммом и И.М.Франком.
