

## Глава 2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА В ВЕЩЕСТВЕ.

### 2.1. Макро и микрополя в веществе.

Вещество состоит из атомов и молекул. Размеры ядер и электронов по сравнению с размерами атомов малы: примерно в  $10^5$  раз меньше размеров атома. На долю заряженных частиц приходится очень маленький объем, равный примерно  $10^{-15}$  от занимаемого всем макротелом пространства. Весь остальной объем – вакуум. Под вакуумом здесь мы понимаем пространство, в котором отсутствует вещество, но в нем могут существовать различные поля. Электроны и ядра возбуждают в нем электрические и магнитные поля.

Электрическое поле в этом “пустом пространстве”, т.е. между электронами и протонами, меняется очень сложным образом и в *пространстве*, и во *времени*. Назовем это поле, меняющееся на расстояниях порядка размеров атома “микроскопическим полем” – *микрополе*  $E_{\text{микро}}$ . Источником этих полей является электроны и протоны, их распределение и плотность образуют, так называемую, *микроплотность* зарядов  $\rho_{\text{микро}}$ . Эти величины  $E_{\text{микро}}$  и  $\rho_{\text{микро}}$  нельзя измерить путем внесения пробного заряда, т.к. наименьший элементарный заряд – заряд электрона  $e^-$ , но при его помещении в точку измерения поля его влияние существенно исказит микрополе и микроскопическое распределение заряда.

Задание  $E_{\text{микро}}$  и  $\rho_{\text{микро}}$  во всех точках пространства и времени дает наиболее детальное описание, однако оно практически неосуществимо при описании макропроцессов в веществе. Для большинства физических задач является достаточным более грубое описание, отвлеченное от атомистического строения и мелкомасштабных изменений поля.

Лоренц показал, как, исходя из представлений о микрополях, можно прийти к уравнениям для описания макроскопических проявлений и процессов в телах. Переход к *макро полям* и *макроплотностям* происходит путем усреднения микрополей и микроплотности по пространству и времени. Классическая физика оперирует со сглаженными полями, которые плавно меняются в пространстве и времени.

Рассмотрим физически малый объем  $\Delta V$ , тогда электрическое поле и плотность электрического заряда в макроскопическом масштабе определяются как среднее от микроскопических значений соответственно:

$$\vec{E}_{\text{макро}} = \vec{E} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E}_{\text{микро}} dV = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle \quad (2.1.1)$$

$$\rho_{\text{макро}} = \rho = \langle \rho_{\text{микро}} \rangle \quad (2.1.2)$$

Чтобы усреднение не зависело от объема  $\Delta V$ , нужно его выбрать следующим образом:

- 1) чтобы внутри объема  $\Delta V$  содержалось много атомов и
- 2) объем  $\Delta V$  должен быть достаточно малым, чтобы считать его бесконечно малым с точки зрения макровеличин (т.е.  $\Delta V = dV$ ).

Тогда при таком выборе  $\Delta V$  можно, например, заменить средние от производных на производные от средних значений электрического поля:

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle \vec{E} \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E} \rangle \quad (2.1.3)$$

Аналогично можно проводить усреднение изменяющегося поля по промежутку времени  $\Delta t$ , который бесконечно мал с точки зрения «макро» часов, но существенно больше характерных времен в микромире, например, больше периода обращения электронов вокруг ядер.

Выполнение закона Кулона экспериментально проверено до расстояний  $10^{-15}$  см. Это позволяет считать, что для микрополей справедлива теорема Гаусса, которая рассматривает заряды как источники электрического поля:

$$\text{div} \vec{E}_{\text{микро}} = 4\pi \rho_{\text{микро}} \quad (2.1.4)$$

Усредняя по пространству или по времени, имеем:

$$\langle \text{div} \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \text{div} \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle \equiv \text{div} \vec{E} = 4\pi \langle \rho_{\text{микро}} \rangle = 4\pi \rho \quad (2.1.5)$$

Таким образом, получаем уравнение Максвелла об источниках электрического поля в среде:

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho \quad (2.1.6)$$

В нашем дальнейшем изложении будем иметь дело со сглаженными усредненными полями, для которых будут выполняться основные уравнения электромагнетизма в веществе.

При внесении вещества во внешнее электрическое поле появляются *индуцированные или связанные* заряды, которые рождают дополнительное, внутреннее, электрическое поле. Поэтому макрополе в веществе образуется в результате суперпозиции внешнего и внутреннего полей

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{внешн}} + \vec{E}_{\text{внутр}} \quad (2.1.7)$$

Будем также считать, что внешнее поле создается *сторонними*, или иначе называемыми *свободными*, зарядами. Причем нам придется учитывать, что как поляризация, так и внутреннее поле зависят от внешнего поля, и это усложняет задачу определения электрических полей в веществе.

## 2.2. Поляризация диэлектриков.

### 2.2.1. Типы диэлектриков.

Известно, что существуют различные вещества, которые характеризуются по степени проводимости электрического тока: *проводники*, *диэлектрики*, *полупроводники* и много разнообразных веществ с промежуточными свойствами. В этом параграфе речь пойдет о диэлектриках.

*Диэлектрики* – вещества, которые проводят ток в  $10^{15}$ - $10^{20}$  раз хуже проводников. Типичные диэлектрики состоят из атомов и молекул, которые не делятся своими электронами с соседями и чей полный электрический заряд равен нулю. Существуют также ионные диэлектрики, в которых полный заряд равен нулю для элементарной кристаллической ячейки. Важно, что у всех диэлектриков нет свободных зарядов (электронов), которые могли бы перемещаться внутри вещества.

Молекулу диэлектрика можно рассматривать как систему зарядов, которая в целом электронейтральна  $\sum_i q_i = 0$ , однако у которой может быть неоднородное пространственное распределение электрического заряда и в соответствии с этим у молекулы может возникнуть дипольный момент

$$\vec{p} = \sum_i q_i \langle \vec{r}_i \rangle.$$

Этот дипольный момент может быть связан с собственной структурой молекулы и его появление является энергетически более выгодным для этой системы зарядов, а, с другой стороны, он может быть наведенным под влиянием внешнего поля, действующего на молекулу.

Итак, в связи с последним имеются молекулы двух типов.

- а) *Неполярные молекулы*: они не имеют дипольного момента в отсутствие внешнего поля  $\vec{p} = 0$ . К ним относятся обычно симметричные молекулы, типа  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CH_4$  и другие.
- б) *Полярные молекулы*: они обладают собственным дипольным моментом, отличным от нуля  $\vec{p} \neq 0$ . Например, к таким молекулам относятся:  $CO$ ,  $NH$ ,  $HCl$ ,  $N_2O$ ,  $SO_2$  и другие молекулы. Дипольный момент молекул обычно составляет величину  $|\vec{p}| \sim 10^{-29} \div 10^{-30}$  Кл м.

Очевидно, что в диэлектриках с неполярными молекулами в отсутствие приложенного внешнего поля своего внутреннего макроскопического электрического поля нет. В диэлектриках из полярных молекул в отсутствие внешнего поля дипольные моменты располагаются хаотично, и внутреннего электрического поля (макрополя) в них также не возникает. Когда любой диэлектрик помещается во внешнее электрическое поле, то происходит *поляризация* вещества, механизм которой различен для разных диэлектриков.

А). **Неполярные молекулы.** Поляризация возникает при смещении отрицательных зарядов относительно положительных зарядов (рис.2.1),

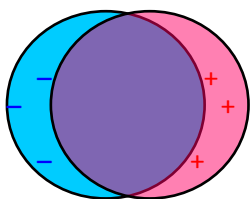


Рис. 2.1.

вследствие чего молекулы приобретают дипольные моменты. При этом возникающие дипольные моменты  $\vec{p}$  можно рассматривать как упругие диполи, когда величина наведенного диполя пропорциональна приложенному полю  $\vec{p} \sim \vec{E}$ . Последнее утверждение справедливо для не слишком сильных внешних полей. Молекулы и их дипольные моменты ориентированы так, что на

поверхности тел появляется наведенный заряд – поляризация. Эти индукционные заряды называют *поляризационными* или *связанными*. Их отличают от *сторонних* или *свободных* зарядов (заряды проводника, внешние и внесенные заряды и другие).

Б). **Полярные молекулы.** Без внешнего поля их дипольные моменты расположены хаотично. Под влиянием внешнего поля происходит пространственное выстраивание диполей

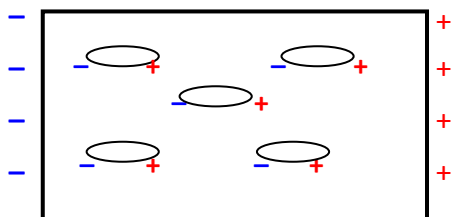


Рис. 2.2.

что также приводит к поляризации. Часто внешнее поле значительно слабее внутренних атомных полей и поэтому оно обычно не влияет на величину собственного дипольного момента (так называемые, “жесткие диполи”), а только поворачивает их. При этом также появляются индукционные

заряды на поверхности образца. При однородной поляризации заряды внутри образца компенсируются и остаются только поверхностные индукционные заряды. При неоднородной поляризации индукционные заряды могут появляться и во внутреннем объеме образца, а на поверхности заряды будут распределяться с различной плотностью для сохранения общей электронейтральности образца.

В). **Ионные кристаллы.** Рассматриваются диэлектрические (без свободных электронов) ионные кристаллы. Типичный пример изображен на рис. 2.3: на рисунке показана элементарная ячейка кристалла NaCl, состоящая из 4-х положительных ионов  $\text{Na}^+$  и 4-х отрицательных ионов  $\text{Cl}^-$ . Во внешнем поле происходит смещение положительных и отрицательных подрешеток целиком, что и приводит к поляризации.

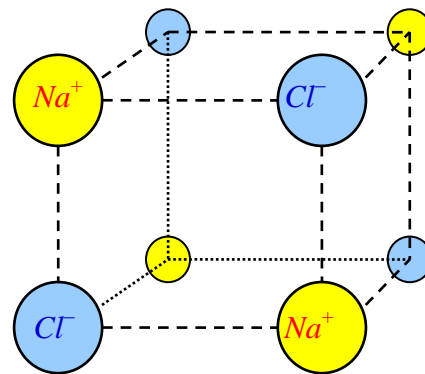


Рис. 2.3.

Смещения зарядов очень малы, т.к. внутриатомное электрическое поле очень велико по сравнению с приложенными внешними полями. Так, в атоме водорода на электрон (заряд  $e^- = 4.803 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}_q = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ) действует электрическое поле со стороны ядра, равное:

$$E = e/r^2 \sim 10^7 \text{ CGSE}_E \sim 10^9 \text{ В/м.}$$

Это поле значительно превышает обычные достижимые на макроскопическом масштабе внешние электрические поля. Поэтому внешние поля не оказывают существенного влияния на внутриатомные поля, однако под их воздействием происходят малые смещения зарядов, которые при усреднении по расстояниям, превышающим размеры атомов, создают наведенное внутреннее поле. Это наведенное внутреннее поле изменяет приложенное внешнее поле внутри вещества.

### 2.2.2. Вектор поляризации.

Количественное описание явления поляризации производится с помощью *вектора поляризации*. Когда внешнего поля нет, суммарный дипольный момент элемента объема вещества равен нулю (исключение составляют сегнетоэлектрики, электреты, см далее § 2.9). Под влиянием внешнего электрического поля возникает поляризация, которую характеризуем *дипольным моментом единицы объема – вектором поляризации*  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V} \quad (2.2.1)$$

Здесь  $\vec{p}$  – дипольный момент молекулы. Размерность вектора поляризации в системе CGSE равна  $[P] = [q]/[L^2]$ , которая совпадает с размерностью напряженности электрического поля.

Естественно, что вектор поляризации зависит от внешнего поля, как и наведенный поляризационный заряд (связанный). Поляризация приводит к появлению индукционного связанного заряда на поверхности, а иногда и в объеме. Вектор поляризации определяется величиной наведенного связанного заряда.

### 2.2.3. Связь вектора поляризации с поверхностной плотностью заряда.

Рассмотрим диэлектрик, имеющий форму косоугольного параллелепипеда, и поместим его в однородное электрическое поле  $\vec{E}$ . На рис. 2.4 показан срез параллелепипеда, параллельный его боковой грани. На боковых гранях появятся поляризационные заряды с плотностью  $\sigma'$ . Если  $S$  – площадь боковой грани, то диэлектрик приобретает дипольный момент, равный

$$\vec{p} = \sigma' S \vec{l},$$

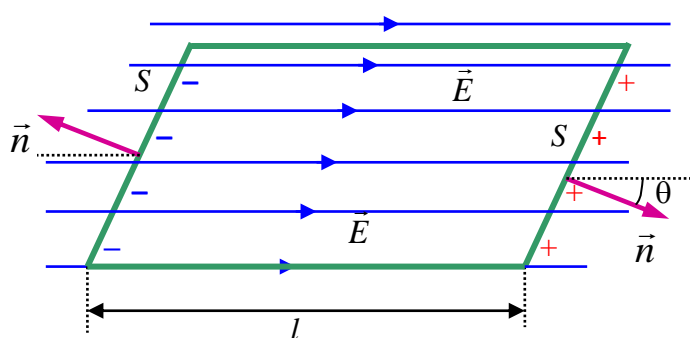


Рис. 2.4.

где  $\vec{l}$  – вектор длины параллелепипеда, направленный вдоль электрического поля, то есть от отрицательных зарядов к положительным. Тогда как следует из определения (2.2.1), **вектор поляризации** равен:

$$\vec{P} = \frac{\sigma' S}{\Delta V} \vec{l} \quad (2.2.2)$$

Здесь объем параллелепипеда определяется как  $\Delta V = Sl \cos \theta$ , который можно выразить через скалярное произведение вектора нормали к боковой грани и вектора  $\vec{l}$ :

$$\Delta V = S(\vec{l}, \vec{n}) \quad (2.2.3)$$

Умножим (2.2.2) скалярно на вектор нормали  $\vec{n}$  и, воспользовавшись (2.2.3), получим:

$$\vec{P}\vec{n} = \frac{\sigma' S}{\Delta V} (\vec{l}, \vec{n}) = \sigma' \quad (2.2.4)$$

Итак, получаем связь между поверхностной плотностью поляризационного заряда и нормальной составляющей вектора поляризации  $P_n$ :

$$\sigma' = \vec{P}\vec{n} = P_n \quad (2.2.5)$$

Это соотношение справедливо как для положительного, так и отрицательного зарядов.

Отметим, что уравнение (2.2.5) можно интерпретировать следующим образом: связанный заряд на поверхности появляется при включении внешнего поля как заряд, проходящий (смещаемый) из объема наружу через его поверхность.

#### 2.2.4. Теорема Гаусса для вектора поляризации.

В предыдущем пункте мы имели дело с однородной поляризацией, когда связанный (поляризационный) заряд появляется только на поверхности. При неоднородной поляризации, которая может возникнуть из-за неоднородности вещества, изменения электрического поля внутри объема и т.д., появляются объемные связанные заряды. Найдем плотность этих индукционных зарядов и свяжем ее с вектором поляризации  $\vec{P}$ .

Выделим в диэлектрике произвольный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$  (рис.2.5). При включении внешнего поля через малую площадку  $dS$  наружу выйдет связанный заряд  $dq'_{нар}$ , равный согласно (2.2.5):

$$dq'_{нар} = P_n dS = (\vec{P}, d\vec{S})$$

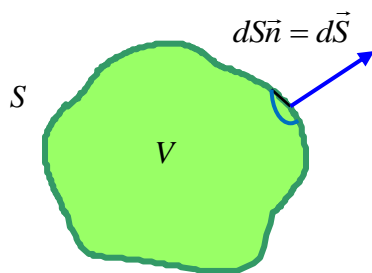


Рис. 2.5.

В результате в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ , за счет выхода из него заряда  $dq'_{нар}$  появится избыточный заряд противоположного знака  $dq' = -dq'_{нар}$ . Этот результат можно интерпретировать таким образом, что смещенный заряд  $dq'$  "прошел" через площадку  $dS$  внутрь объема, т.е. в направлении противоположном направлению нормали:

$$dq' = -P_n dS = -(\vec{P}, d\vec{S}) \quad (2.2.6)$$

Через всю замкнутую поверхность  $S$  при включении внешнего поля внутрь поступит заряд равный:

$$q' = -\oint_S P_n dS = -\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) \quad (2.2.7)$$

Сформулируем результат: **поток вектора поляризации  $\vec{P}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен связанному заряду, взятому с обратным знаком, внутри объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ .**

Итак, получаем теорему Гаусса для вектора поляризации:

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q' \quad (2.2.8)$$

В общем случае полный связанный внутри объема  $V$  заряд можно записать через плотность связанных зарядов  $\rho'$ :

$$q' = \int_V \rho' dV \quad (2.2.9)$$

В частности, если вектор поляризации постоянен  $\vec{P} = const$ , т.е. поляризация однородна, то из (2.2.8) получаем, что суммарный связанный заряд внутри объема равен нулю  $q' = 0$ . В самом деле, постоянный вектор поляризации выносим из под интеграла, а интеграл по замкнутой поверхности равен нулю:

$$\vec{P} \oint d\vec{S} = P \oint dS_p = 0.$$

Воспользуемся теоремой Остроградского - Гаусса для вектора поляризации  $\vec{P}$ , а именно, поток вектора  $\vec{P}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от источников (дивергенции) этого вектора :

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_V div \vec{P} dV \quad (2.2.10)$$

Тогда учитывая (2.2.8) и (2.2.9), получаем:

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV = - \int_V \rho'(\vec{r}) dV \quad (2.2.11)$$

Поскольку последнее соотношение справедливо для любого выбранного объема  $V$ , то подынтегральные выражения в интегралах по объему равны. Итак, дифференциальная связь между объемной плотностью связанного заряда и вектором поляризации имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho' \quad (2.2.12)$$

Физическая интерпретация соотношений (2.2.8) и (2.2.12), т.е. теоремы Гаусса в интегральном и дифференциальном виде для вектора поляризации  $\vec{P}$ , состоит в следующем:

*источником вектора поляризации  $\vec{P}$  (т.е. дипольного момента единицы объема) служат связанные (индуцированные) заряды.*

Как и вектор напряженности электрического поля вектор поляризации удобно характеризовать "силовыми" линиями. Причем в области, где начинаются линии вектора  $\vec{P}$  (и, следовательно,  $\operatorname{div} \vec{P} > 0$ ), образуется избыток отрицательных связанных зарядов. А в области, в которой оканчиваются линии вектора  $\vec{P}$  (и, следовательно,  $\operatorname{div} \vec{P} < 0$ ), образуется избыток положительных связанных зарядов.

## 2.3. Вектор электрической индукции.

### 2.3.1. Вектор электрической индукции.

Поляризационные заряды  $q'$  – это такие же обычные заряды, как и заряды  $q$ , и они также являются источником электрического поля. Поэтому теорема Гаусса для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  должна включать как сторонние, так и связанные заряды:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi(q + q'). \quad (2.3.1)$$

Аналогично записываем теорему Гаусса в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho'). \quad (2.3.2)$$

Здесь  $q$  – сторонний заряд,  $\rho$  – плотность сторонних зарядов,  $q'$  – связанный заряд и  $\rho'$  – плотность связанных зарядов. Эти формулы могут быть переписаны через вектор поляризации  $\vec{P}$ . Выразив плотность связанных зарядов  $\rho'$  через  $\operatorname{div} \vec{P}$  из формул (2.2.8) и (2.2.12) предыдущего параграфа, перепишем уравнение (2.3.2) в следующем виде:

$$\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi \operatorname{div} \vec{P} + 4\pi\rho \quad (2.3.3)$$



$$\operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho \quad (2.3.4)$$

Или в интегральной форме получаем аналогично:

$$\oint_S (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) d\vec{S} = 4\pi q \quad (2.3.5)$$

Введем новый вектор – *вектор электрической индукции*  $\vec{D}$ , или вектор *электрического смещения*, с помощью следующего соотношения:

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (2.3.6)$$

Тогда уравнения (2.3.4) и (2.3.5) записываются в более короткой форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D} &= 4\pi\rho \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= 4\pi q \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Таким образом, мы получили 1-ое уравнение системы уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной форме (см уравнения (4) и (8) во Введении). Фактически эти уравнения представляют следующее:

*Поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность равен полному заряду сторонних носителей, находящихся внутри этой поверхности.*

Таким образом, *вектор  $\vec{D}$  определяется только сторонними (свободными) зарядами*. Уравнение (2.3.7) представляет собой обобщение теоремы Гаусса для электрического поля в веществе. Свойства вещества сокрыты в векторе индукции электрического поля  $\vec{D}$ , точнее, в его связи с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$ .

Вектор  $\vec{D}$ , как и вектор поляризации  $\vec{P}$ , является искусственно введенным вектором поля, поскольку разделение зарядов на сторонние и связанные заряды условно (см ниже Примечание 2). Важно, что в вакууме вектор поляризации равен нулю  $\vec{P} = 0$  и тогда вектор электрической индукции совпадает с вектором напряженности электрического поля  $\vec{D} = \vec{E}$ .

**Примечание 1.** В системе СИ для вектора электрической индукции и теоремы Гаусса имеем следующие соотношения:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho'); \quad \operatorname{div}\vec{P} = -\rho'; \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}; \quad \operatorname{div}\vec{D} = \rho$$

**Примечание 2.** Вектор электрической индукции (смещения)  $\vec{D}$ , как и вектор поляризации  $\vec{P}$ , является искусственным вектором. Вектор  $\vec{D}$  введен для того, чтобы выделить вклад сторонних зарядов в полное электрическое поле в веществе. Вектор  $\vec{P}$  введен для того, чтобы выделить вклад связанных зарядов в полное электрическое поле. Реальное поле в веществе, которое действует на пробные заряды, – есть напряженность электрического

поля  $\vec{E}$ . Введение векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{P}$  облегчает решение электростатических задач, если известна их связь с “истинным” вектором электрического поля  $\vec{E}$ .

---

### 2.3.2. Диэлектрическая проницаемость.

В вакууме поле характеризуется только одним вектором  $\vec{E}$  – вектором напряженности электрического поля. В веществе, чтобы определять электрическое поле, действующее на пробные заряды, нужно еще знать либо  $\vec{P}$ , либо  $\vec{D}$ . Поэтому полученное основное уравнение электростатики надо дополнять еще одним уравнением, которое могло бы связать между собой эти величины.

Принципиально возможно, зная атомную структуру вещества, рассчитать смещение электронов и ядер при включении внешнего электрического поля. То есть исходя из знания атомно-молекулярного строения, можно в принципе вычислить вектор поляризации  $\vec{P}$  и получить еще одно уравнение, называемое *материальным*, которое связывает напряженность поля  $\vec{E}$  внутри вещества и поляризацию  $\vec{P}$ . Однако универсальной зависимости  $\vec{P}$  от вектора напряженности  $\vec{E}$  нет, для каждого вещества эта зависимость своя, поскольку атомы и молекулы обладают различными свойствами и по-разному реагируют на внешнее поле. Таким образом, на пути прямого определения связи между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  возникают следующие трудности:

- 1) связь между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  не выражается простыми аналитическими формулами, и она не универсальна.
- 2) связь этих векторов рассчитать нелегко; только в последние годы делаются попытки теоретического расчета, применяя квантовую механику, благодаря развитию методов современной вычислительной физики.

Поэтому существует другой более простой путь, разработанный ранее, когда еще не существовало квантовой механики и четких представлений об атомно-молекулярной структуре веществ. Этот путь состоял в том, чтобы найти связь между поляризацией и электрическим полем в веществе *эмпирическим* путем.

Опыт показывает, что связь между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  для большинства диэлектриков *линейна* и *однородна*, в широком диапазоне внешних полей, но по величине не приближающихся к внутриатомным полям. При этом необходимо отдельно рассматривать изотропные по пространственным свойствам диэлектрики и анизотропные.

1). Для **изотропных диэлектриков** и для не слишком больших внешних полей (меньших внутриатомных) вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$  пропорциональны и коллинеарны, и тогда материальное уравнение имеет вид:

$$\vec{P} = \alpha \vec{E} \quad (2.3.8)$$

Здесь коэффициент  $\alpha$  – **поляризуемость** диэлектрика или **диэлектрическая восприимчивость**. Диэлектрическая восприимчивость определяется свойствами атомов и молекул вещества и может зависеть от плотности и температуры диэлектрика. Тогда подставляя (2.3.8) в вектор индукции (2.3.6), получаем:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\alpha\vec{E} = (1 + 4\pi\alpha)\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \quad (2.3.9)$$

Здесь мы ввели **диэлектрическую проницаемость** среды

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha. \quad (2.3.10)$$

Этой величиной характеризуют индивидуальные свойства изотропных диэлектриков. В частности, если среда есть вакуум, то  $\alpha = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  и  $\vec{D} = \vec{E}$ .

**Примечание 3:** в системе СИ имеем

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}; \quad \vec{D} = (\varepsilon_0 + \chi\varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}; \quad \varepsilon = 1 + \chi.$$

2). **Анизотропные среды:** например, кристаллы. Для них направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$  не совпадают, и поэтому связь между компонентами этих векторов осуществляется через более общую линейную зависимость:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j \quad (2.3.11)$$

Подробнее (2.3.11) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} P_x = \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ P_y = \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ P_z = \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{cases} \quad (2.3.12)$$

Здесь  $\alpha_{ij}$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от выбора координатных осей. Совокупность этих 9 коэффициентов  $\{\alpha_{ij}\}$  составляет **тензор поляризуемости диэлектрика**.

Аналогичное выражение имеем для связи векторов электрической индукции и электрической напряженности

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j, \quad (2.3.13)$$

где  $\{\varepsilon_{ij}\}$  – *тензор диэлектрической проницаемости* вещества, компоненты которого связаны с компонентами тензора поляризуемости

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij} \quad (2.3.14)$$

Пользуясь законом сохранения энергии можно показать, что тензоры  $\{\alpha_{ij}\}$  и  $\{\varepsilon_{ij}\}$  симметричны, т.е.

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{ji} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Таким образом, в тензорах имеем 6 независимых величин – 6 компонент тензора диэлектрической проницаемости  $\{\varepsilon_{ij}\}$ . Основное физическое содержание соотношений (2.3.11)– (2.3.13) состоит в том, что при включении внешнего электрического поля смещение связанных зарядов и выстроенность внутренних диполей происходит в общем случае не в направлении приложенного поля, а под некоторым углом к нему. Вследствие этого суммарное электрическое поле внутри вещества по сравнению с внешним полем становится не только другим по величине, но и по направлению.

В дальнейшем для простоты будем в основном говорить об изотропных диэлектриках.

## 2.4. Граничные условия.

### 2.4.1. Граничные условия для нормальных составляющих.

Рассмотрим границу двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (см рис. 4.1), помещенных во внешнее электрическое поле. В общем случае на поверхности раздела двух диэлектриков могут находиться как связанные  $q'$ , так и сторонние  $q$  заряды.

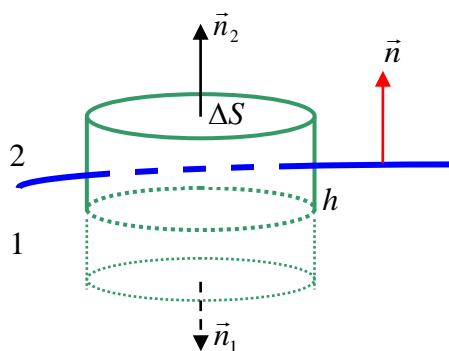


Рис. 4.1.

Рассмотрим, что происходит с электрическим полем при переходе из одной среды в другую. Выберем замкнутую цилиндрическую поверхность, высотой  $h$  и площадью основания  $\Delta S$ , охватывающую границу диэлектриков, и воспользуемся теоремой Гаусса – поток вектора напряженности через замкнутую поверхность равен полному заряду, сосредоточенному внутри нее:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi(q + q') \quad (2.4.1)$$

Пусть высота цилиндра маленькая, так что  $h^2 \ll \Delta S$ . Тогда интеграл в (2.4.1) – поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность – можно представить в виде суммы потоков через основания цилиндра и его боковую поверхность  $\Phi_{бок}$ :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_{2n_2} \Delta S + E_{1n_1} \Delta S + \Phi_{бок}$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_{2n} \Delta S - E_{1n} \Delta S + \Phi_{бок} = 4\pi(\sigma + \sigma') \Delta S \quad (2.4.2)$$

Здесь  $E_{1n}$  и  $E_{2n}$  – нормальные составляющие вектора напряженности электрического поля, а  $\sigma'$  и  $\sigma$  – поверхностные плотности связанных и сторонних зарядов на границе раздела. Разные знаки в потоке вектора  $E$  через верхнее и нижнее основания цилиндра в (2.4.2) объясняются тем, что мы ввели одну общую нормаль  $\vec{n}$ , направленную из первой среды 1 во вторую 2 (см рис. 4.1). Далее, если устремим  $h \rightarrow 0$ , то при этом  $\Phi_{бок} \rightarrow 0$ . Тогда в этом пределе получаем следующее условие на границе 2-х диэлектриков:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma') \quad (2.4.3)$$

Из (2.4.3) видно, что *нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  терпит разрыв* на границе двух диэлектриков из-за наличия поверхностных зарядов.

Аналогичным образом можно сосчитать поток векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{P}$  через такую же цилиндрическую поверхность, пользуясь соответствующими теоремами Гаусса (2.3.7) и (2.2.8), и получить следующие граничные условия для их нормальных составляющих:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \quad (2.4.4)$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \quad (2.4.5)$$

Если на границе 2-х диэлектриков нет сторонних зарядов, т.е.  $\sigma = 0$ , то нормальная составляющая вектора электрической индукции  $\vec{D}$  непрерывна:

$$D_{2n} = D_{1n}, \quad (2.4.6)$$

а нормальные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ , по-прежнему, терпят разрыв из-за наличия поляризованных связанных зарядов.

#### 2.4.2. Граничные условия для тангенциальных составляющих.

Для определения изменения тангенциальных составляющих векторов поля воспользуемся теоремой о циркуляции: интеграл по замкнутому контуру от скалярного произведения вектора напряженности  $\vec{E}$  и вектора элемента контура  $d\vec{l}$  равен нулю (см §1.5):

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (2.4.7)$$

Поместим замкнутый контур  $L$  вдоль границы раздела двух диэлектриков 1 и 2, как показано на рис. 4.2. Выберем такой малый контур, по длине которого  $a$  вдоль границ раздела поле можно будет считать постоянным, а поперечные размеры контура по отношению к длине вдоль границы диэлектриков еще меньше  $a \gg b$ . Тогда циркуляцию вектора напряженности электрического поля по такому контуру можно записать в виде следующей суммы:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = aE_{2t} - aE_{1t} + \langle E_n \rangle b - \langle E_n \rangle b = 0$$

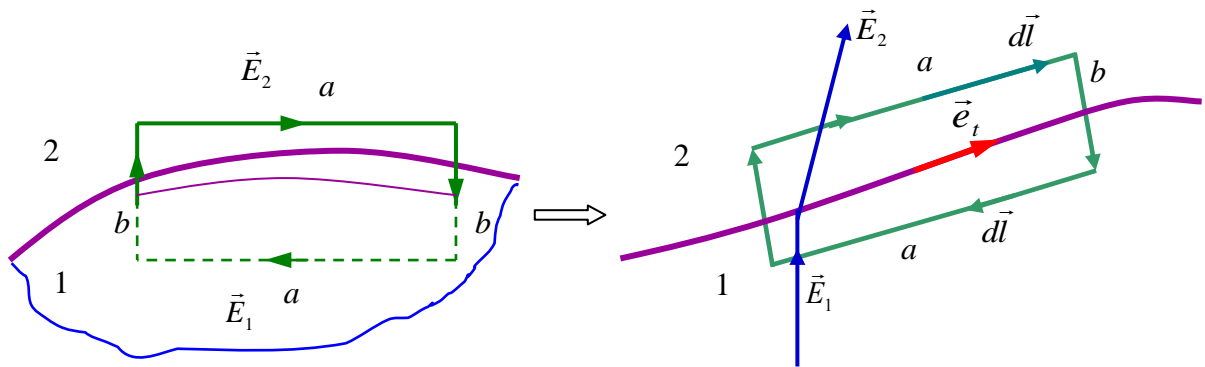


Рис. 4.2.

Далее устремляя поперечный размер контура к нулю  $b \rightarrow 0$  из последнего равенства получаем:

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (2.4.8)$$

Отсюда следует вывод: *тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля непрерывны*, т.е. не меняются при переходе через границу диэлектриков.

Для изотропных диэлектриков с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  получали следующую связь между векторами поля (см формулы в §2.3):

$$\epsilon \vec{E} = \vec{D} \quad \text{и} \quad \vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}. \quad (2.4.9)$$

Тогда из равенства тангенциальных составляющих вектора  $\vec{E}$  (2.4.8) следует:

$$\frac{D_{2t}}{\epsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1}. \quad (2.4.10)$$

Таким образом, тангенциальные составляющие вектора электрической индукции  $\vec{D}$  терпят разрыв на границе 2-х диэлектриков:

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (2.4.11)$$

Для тангенциальных составляющих вектора поляризации  $\vec{P}$  имеем также разрыв на границе двух сред:

$$\frac{P_{2t}}{\varepsilon_2 - 1} = \frac{P_{1t}}{\varepsilon_1 - 1}$$

$$\frac{P_{2t}}{P_{1t}} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_1 - 1} \quad (2.4.12)$$

### 2.4.3. Закон преломления линий индукции.

Пусть на границе 2-х изотропных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  нет сторонних зарядов –  $\sigma = 0$ . Тогда, пользуясь формулами (2.4.6), (2.4.8)-(2.4.11), имеем следующие условия на границе двух диэлектриков:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma'$$

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.4.13)$$

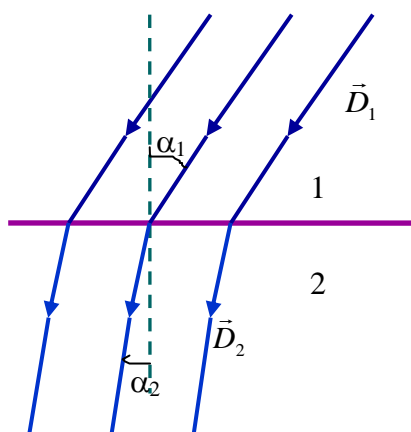


Рис. 4.3.

Исходя из (2.4.13), можно написать закон преломления линий индукции  $\vec{D}$  электрического поля (см рис. 4.3):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{D_{2t}/D_{2n}}{D_{1t}/D_{1n}} = \frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.4.14)$$

Аналогичные законы преломления можно записать для векторов напряженности и поляризации.

### 2.4.4. Примеры вычисления полей в диэлектриках.

1). Рассмотрим точечный заряд, находящийся в однородном и изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Выберем поверхность – сферу радиуса  $r$ , окружающую заряд  $q$ , и запишем теорему Гаусса для вектора электрической индукции (рис. 4.4):

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \quad (2.4.15)$$

Откуда получаем электрическую индукцию и напряженность поля электрического заряда в веществе:

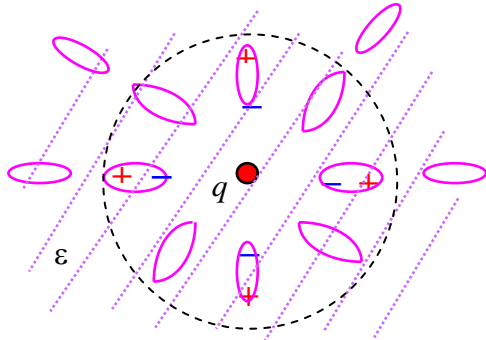


Рис. 4.4.

$$\begin{cases} D = \frac{q}{r^2} \\ E = \frac{q}{\epsilon r^2} \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Легко получить, что потенциал поля точечного заряда в диэлектрике равен:

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r} \quad (2.4.17)$$

Можно также записать вектор поляризации:

$$\vec{P} = -\frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (2.4.18)$$

Интересно при этом отметить, что, несмотря на то, что электрическое поле точечного заряда неоднородное, объемная плотность связанных зарядов в диэлектрике равна 0, т.к.

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (2.4.19)$$

2). Поместим диэлектрическую пластинку в однородное электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$ . Пусть вне пластинки вакуум, или воздух, диэлектрическая проницаемость которого равна 1. Для простоты положим, что силовые линии поля перпендикулярны к поверхности пластины. На поверхности пластинки появляются связанные заряды, которые создают “противополе” внутри пластины (см рис. 4.5). Из-за перпендикулярности направления поля к поверхности пластинки вектор индукции непрерывен во всех трех областях (рис. 4.6), а именно:

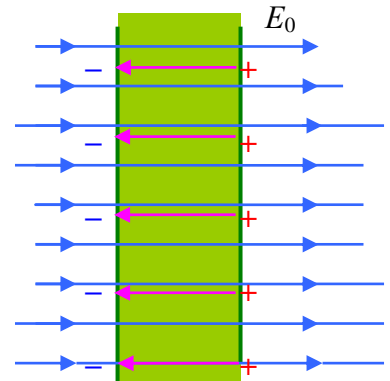


Рис. 4.5.

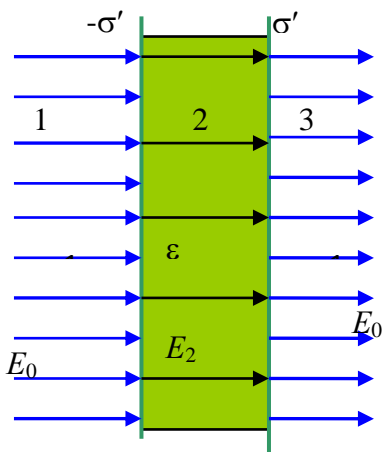


Рис. 4.6.

$$D_1 = D_2 = D_3$$

Поле вне пластинки, например, в области 1 на рис. 4.6, совпадает с вектором электрической индукции

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = E_1 = E_0 \quad (2.4.20)$$

То же поле получаем в области 3. Поле внутри пластинки меньше поля снаружи (в вакууме) в  $\epsilon$  раз:

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon} = \frac{D_1}{\epsilon} = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (2.4.21)$$



Вектор поляризации также перпендикулярен пластинам и, учитывая, что вне пластин поляризация равна  $P_1 = P_3 = 0$ , получаем из (2.4.5) и (2.4.9) поляризацию внутри диэлектрика:

$$P_2 = -\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_2 = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} E_0 \quad (2.4.22)$$

Вектор поляризации внутри пластины постоянен, поскольку электрическое поле в пластинке однородно и в изотропном диэлектрике не появляется объемной плотности связанных зарядов  $\rho' = 0$ .

**Примечание 1.** Если диэлектрическая пластинка окружена пластинами плоского конденсатора с плотностью стороннего заряда  $\sigma$ , то поле, создаваемое таким заряженным конденсатором и являющемся внешним для пластинки, равно:

$$E_0 = 4\pi\sigma. \quad (2.4.23)$$

Тогда получаем связь между плотностью сторонних зарядов и плотностью наведенных связанных зарядов:

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma \quad (2.4.24)$$

На самом деле соотношение (2.4.24) справедливо для любого вида поверхности, разделяющей сторонние (в металле) и связанные (в диэлектрике) заряды.

### 3). Диэлектрический шар в однородном электрическом поле.

Аналогичным образом можно рассматривать другие более сложные по форме диэлектрические тела, помещенные в электрическое поле (например, цилиндр, шар). При определении электрического поля внутри таких тел необходимо пользоваться **граничными условиями** и **условиями на бесконечности**.

Рассмотрим шар из диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$  в однородном электрическом поле  $E_0$ . Условия на границе и теорема о единственности решения приводят к тому, что вектор поляризации постоянен внутри шара, т.е. поле поляризации однородно. Поляризацию шара можно рассматривать как результат смещения положительно заряженного шара относительно отрицательно заряженного (рис. 4.7). Полное электрическое поле как внутри, так и вне шара равно сумме внешнего поля  $\vec{E}_0$  и поля  $\vec{E}_{int}$ , создаваемого поляризованным шаром.

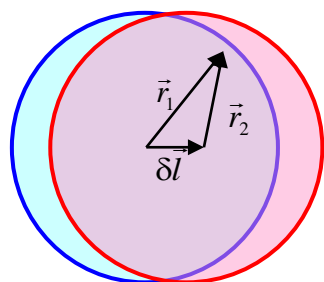


Рис. 4.7.

Рассмотрим сначала поле, создаваемое самим поляризованным шаром. Смещение положительно заряженного шара относительно отрицательно заряженного шара на малое расстояние  $\delta \vec{l}$  приводит к

появлению дипольного момента  $\vec{p} = q\delta\vec{l}$  (см определение диполя в § 1.7). Тогда вектор поляризации, рассматриваемый как дипольный момент единицы объема, равен:

$$\vec{P} = \frac{q\delta\vec{l}}{V} = \rho\delta\vec{l} \quad (2.4.25)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда одного знака,  $V$  – объем шара. Рассмотрим поле внутри шара как сумму полей от отрицательно заряженного шара  $\vec{E}_1$  (с плотностью заряда « $-\rho$ ») и положительно заряженного шара  $\vec{E}_2$  (с плотностью « $+\rho$ »), смещенных друг относительно друга на малое расстояние  $\delta\vec{l}$ , т.е. записываем:

$$\vec{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\rho\vec{r}_1; \quad \vec{E}_2 = \frac{4\pi}{3}\rho\vec{r}_2 \quad (2.4.26)$$

Напомним, что эти выражения (2.4.26) для поля равномерно заряженного шара были получены с помощью теоремы Гаусса в Главе 1 (см формулу (1.3.16)). Тогда для электрического поля внутри шара получаем:

$$\vec{E}_{\text{внутри}} = -\frac{4\pi}{3}\rho\delta\vec{l} = -\frac{4\pi}{3}\vec{P} \quad (2.4.27)$$

где  $\delta\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , а дипольный момент записан через вектор поляризации  $\vec{P}$  по определению (2.4.25).

Электрическое поле вне поляризованного шара – это поле точечного диполя, помещенного в центре шара, с дипольным моментом

$$\vec{p} = q\delta\vec{l} = \vec{P}V = \frac{4}{3}\pi R^3\vec{P}.$$

Таким образом, исходя из (1.7.9), имеем для напряженности поля вне шара следующее выражение:

$$\vec{E}_{\text{вне}} = V \left[ \frac{3(\vec{P}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right] \quad (2.4.28)$$

Теперь рассмотрим полное электрическое поле, создаваемое внешним полем  $\vec{E}_0$  и полем поляризованного шара. Итак, учитывая, что  $\vec{P} = \alpha\vec{E}$  и  $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha$ , полное электрическое поле внутри шара равно:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{внутри}} = \vec{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{P} = \vec{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\alpha\vec{E} \quad (2.4.29)$$

$$\vec{E} \left( 1 + \frac{4\pi\alpha}{3} \right) = \vec{E}_0$$

$$\vec{E} = \frac{3}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 \quad (2.4.30)$$

Видно из (2.4.30), что электрическое поле внутри диэлектрического шара является однородным полем, оно меньше внешнего поля, так как диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon > 1$ . При этом вектор поляризации равен:

$$\vec{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0 \quad (2.4.31)$$

Полное электрическое поле снаружи диэлектрического шара определяется суммой внешнего поля  $\vec{E}_0$  и поля поляризованного шара  $\vec{E}_{вне}$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + V \left[ \frac{3(\vec{P}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right] \quad (2.4.32)$$

Примерное поведение силовых линий напряженности электрического поля вблизи диэлектрического шара изображено на рис. 4.8.

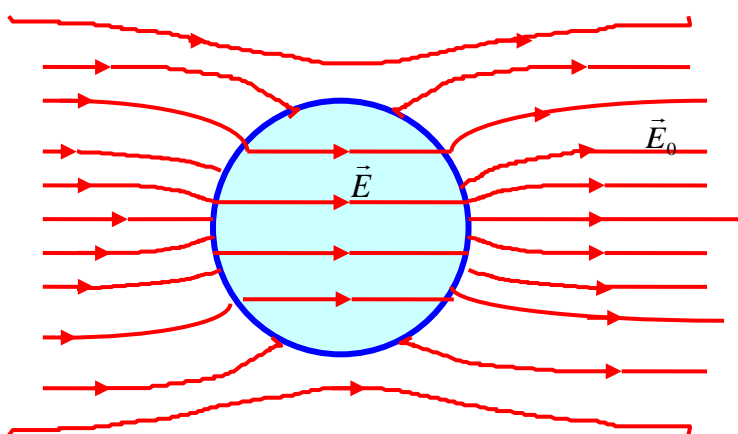


Рис. 4.8.

Важно отметить, что именно эти полученные электрические поля снаружи (2.4.32) и внутри шара (2.4.30) дают правильные граничные условия

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

Следовательно, в силу теоремы о единственности решения электростатических задач с определенными

граничными условиями наши рассуждения оказываются справедливыми.

**Примечание 2.** Однородно поляризованный диэлектрический шар можно также рассматривать как шар, заряженный с поверхностной плотностью заряда, изменяющейся по закону косинуса:

$$\sigma' = \sigma'_0 \cos \theta$$

где угол  $\theta$  отсчитывается от направления вектора смещения центров шаров  $\delta \vec{l}$ .

**Примечание 3.** Уравнение Пуассона для диэлектриков, определяющее связь между распределением заряда и потенциалом, имеет вид:

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \quad (2.4.33)$$

## 2.5. Проводники в электрическом поле.

### 2.5.1. Проводники.

Проводниками называются вещества, в которых при включении внешнего поля перемещаются заряды и возникает электрический ток. Наиболее хорошими проводниками электричества являются металлы. Рассмотрим основные особенности проводников.

- 1). В проводниках имеются свободные заряды, т.е. индукционные заряды разделяются. Для металлов свободными зарядами являются электроны.
- 2). В равновесии электрическое поле равно нулю  $E = 0$  внутри проводника. Если поле не равно нулю в какой-то момент времени, то происходит перераспределение зарядов до создания такой ситуации, когда электрическое поле равно нулю внутри проводника. Отсюда получаем, что  $\text{div}\vec{E} = 0$  и, следовательно, объемная плотность зарядов внутри однородного проводника равна тоже нулю.
- 3). Электрический заряд может располагаться только на поверхности проводника, поскольку из-за кулоновских сил отталкивания свободные заряды разбегаются на максимально возможные расстояния.
- 4). Так как поле внутри проводника  $\vec{E} = 0$ , то потенциал проводника постоянен  $\varphi = \text{const}$  – проводник *эквипотенциален*.
- 5). Напряженность поля на поверхности направлена перпендикулярно к ней  $\vec{E} = \vec{E}_n$ . Иначе возникают токи по поверхности до тех пор, пока не ликвидируется тангенциальная составляющая поля. Таким образом, тангенциальная составляющая  $E_\tau$  внутри и вне проводника равна 0. Доказательство можно провести, используя теорему о циркуляции для вектора  $\vec{E}$  вблизи поверхности проводника по выбранному малому контуру 1-2-3-4, как показано на рис. 5.1:

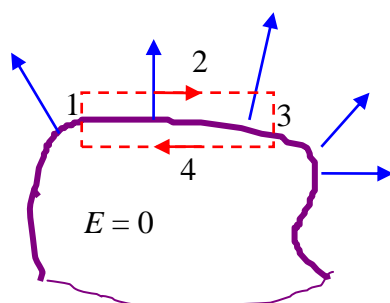


Рис. 5.1.

Иначе возникают токи по поверхности до тех пор, пока не ликвидируется тангенциальная составляющая поля. Таким образом, тангенциальная составляющая  $E_\tau$  внутри и вне проводника равна 0. Доказательство можно провести, используя теорему о циркуляции для вектора  $\vec{E}$  вблизи поверхности проводника по выбранному малому контуру 1-2-3-4, как показано на рис. 5.1:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 = \sum_{i=1}^4 \int_i \vec{E} d\vec{l} \quad (2.5.1)$$

Участки контура 1 и 3 можно выбрать произвольными, в том числе и бесконечно малыми по сравнению с участками 2 и 4. Следовательно, интегралы по этим участкам можно положить равными нулю. Нулю также равен интеграл по участку 4, где поле равно нулю, поскольку участок контура проходит внутри металла. И в силу произвольности длины малого кусочка контура 2 получаем, что  $E_\tau = 0$  – тангенциальная составляющая снаружи проводника также равна нулю.

- 6). Рассмотрим поле вблизи поверхности проводника. Выберем цилиндрическую поверхность, охватывающую поверхность проводника (рис. 5.2) и вырезающую на поверхности проводника площадку  $\Delta S$  с плотностью стороннего заряда  $\sigma$ . По теореме Гаусса имеем для потока вектора  $\vec{E}$  через выбранную поверхность:

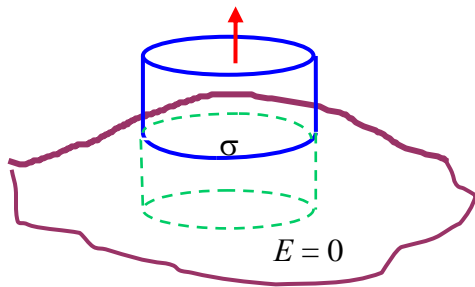


Рис. 5.2.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi\sigma\Delta S, \quad (2.5.2)$$

Поток вектора  $E$  через нижнее основание и боковую поверхность цилиндра равен нулю.

Тогда получаем для электрического поля вблизи поверхности проводника следующие выражения:

$$E\Delta S = 4\pi\sigma\Delta S$$

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n} \quad (2.5.3)$$

Поскольку поле внутри проводника равно нулю, то получаем скачок нормальной составляющей напряженности электрического поля при переходе через поверхность проводника.

Примечание 1. В системе СИ напряженность электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника равна:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Скачок нормальной составляющей вектора  $\vec{E}$  можно (и полезно) также объяснить другим путем – через суперпозицию 2-х полей как показано на рис. 5.3. Полное поле  $\vec{E}$  складывается из электрического поля  $\vec{E}_0$  маленькой площадки  $\Delta S$ , которую можно выделить на поверхности проводника, и поля

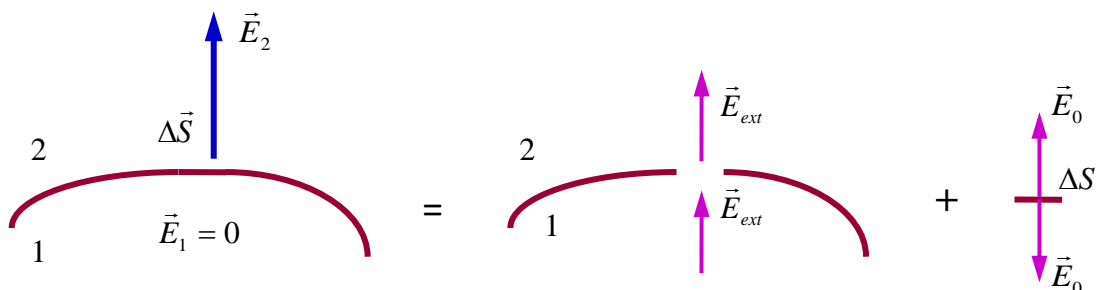


Рис. 5.3.

$\vec{E}_{ext}$ , возбуждаемого всеми остальными зарядами проводника (см рис. 5.3) на месте выделенной площадки. Поле заряженной площадки (вблизи ее

поверхности) равно  $E_0 = 2\pi\sigma$ , а внешнее поле  $\vec{E}_{ext}$  в “дырке” – непрерывно. Тогда в силу суперпозиции электрические поля  $\vec{E}_{ext}$  и  $\vec{E}_0$  складываются ниже и выше границы металл-вакуум и соответственно получаем суммарные поля:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{ext} + 2\pi\sigma\vec{n}_1, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{ext} + 2\pi\sigma\vec{n}_2 \quad (2.5.4)$$

Вводя общую нормаль  $\vec{n}_2 = \vec{n}$  и  $\vec{n}_1 = -\vec{n}$  и вычитая первое уравнение в (2.5.4) из второго, получаем разность напряженностей электрического поля по обе стороны от границы:

$$E_2 - E_1 = 4\pi\sigma \quad (2.5.5)$$

Это является общим соотношением для нормальных составляющих поля. Поскольку электрическое поле внутри проводника равно нулю  $E_1 = 0$ , то снова получаем поле (2.5.3) вблизи поверхности проводника.

### 2.5.2. Метод электрических изображений.

Рассмотрим точечный заряд вблизи плоской металлической поверхности (рис. 5.4). Электрическое поле заряда создает на поверхности наведенные заряды противоположного знака. Поверхностную плотность наведенного заряда  $\sigma$  и поле вблизи металлической поверхности можно вычислять двумя способами. Можно непосредственно считать поверхностную плотность заряда, пользуясь граничными условиями на проводящей поверхности. Другой способ состоит в том, чтобы ввести «зеркальное» изображение заряда под металлической поверхностью и находить электрическое поле над поверхностью как сумму полей точечных зарядов – истинного и его изображения (рис. 5.4).

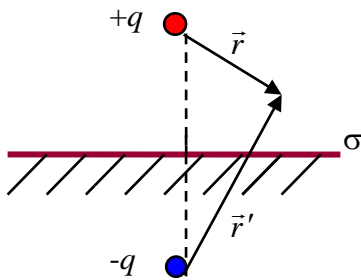


Рис. 5.4.

Рассмотрим последовательно оба способа. Введем основные параметры, определяющие положение заряда над плоскостью и точек на плоскости  $h$ ,  $\rho$ ,  $r$ , показанные на рис. 5.5. Сосчитаем поле вблизи поверхности – над плоскостью и под плоскостью – как сумму полей точечного заряда и заряда, наведенного на поверхности. Очевидно, что знак наведенного заряда противоположен знаку точечного заряда, причем его поверхностная плотность  $\sigma = -\sigma(\rho)$  меняется с расстоянием  $\rho$ , отсчитываемого от точки на плоскости, на которую проектируется электрический заряд (рис. 5.5).

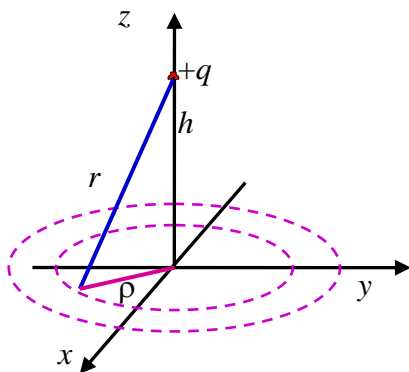


Рис. 5.5.

Суммарное электрическое поле есть сумма напряженности от точечного заряда и напряженности от поверхностной плотности заряда. Как было показано ранее (формула (2.5.1)), продольные (тангенциальные) составляющие равны 0. При этом нормальные составляющие над металлической поверхностью складываются, а под поверхностью – вычитаются, причем так, что поле под поверхностью равно 0.

Итак, используя (2.5.3) и (2.5.4), имеем над поверхностью для нормальной составляющей поля (рис. 5.5) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} -E_z = E_1 = 4\pi\sigma = \frac{q}{r^2} \text{Cos}\theta + 2\pi\sigma = \\ = \frac{qh}{r^3} + 2\pi\sigma = \frac{qh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} + 2\pi\sigma \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Соответственно под поверхностью получаем:

$$E_z = E_2 = 0 = \frac{q}{r^2} \text{Cos}\theta - 2\pi\sigma = \frac{qh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} - 2\pi\sigma \quad (2.5.7)$$

Откуда напряженность поля вблизи поверхности и поверхностная плотность заряда  $\sigma$  для проводника равны соответственно (с учетом знаков):

$$\begin{aligned} E = 4\pi\sigma(\rho) = -\frac{2qh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}}, \\ \sigma(\rho) = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Если просуммируем весь заряд, наведенный на поверхности, то получим заряд “-q”. В самом деле, интегрируя поверхностную плотность заряда по всей металлической поверхности, получаем:

$$q_{ind} = \int_0^\infty \sigma 2\pi\rho d\rho = -2\pi q \frac{h}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{d(\rho^2 + h^2)}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = qh \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \Big|_0^\infty = -q \quad (2.5.9)$$

Оказывается, что такое же поле (2.5.8) над поверхностью можно получить, используя “отраженный” заряд -q вместо рассмотрения поверхностной плотности заряда. Этот заряд имеет противоположный знак и расположен на том же расстоянии  $h$  за поверхностью (см рис. 5.6). В самом деле, получаем вблизи поверхности суммарное поле, определяемое формулой (2.5.8):

$$E = 2E_+ \text{Cos}\theta = \frac{2qh}{r^3} = -E_z \quad (2.5.10)$$

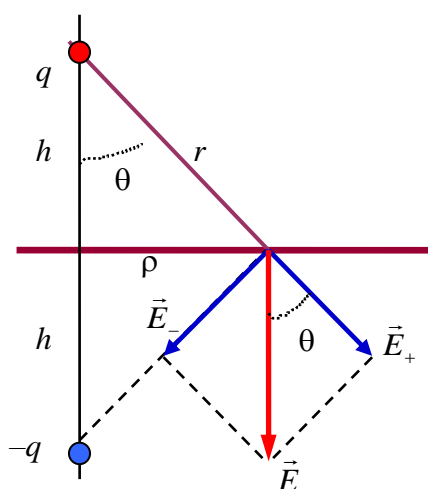


Рис. 5.6.

Этот метод – метод “**изображений**” – позволяет найти поле в любой точке выше металлической поверхности, которое определяется как векторная сумма полей от этих двух зарядов (рис. 5.4 - 5.6):

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r} - \frac{q}{r'^3} \vec{r}' \quad (2.5.11)$$

где  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  – радиус-векторы точки пространства от заряда над плоскостью и его изображением соответственно.

В самом общем случае – **метод электрических изображений** – это искусственный метод для расчета взаимодействия проводников с зарядами и другими полями, суть которого состоит в следующем. Пусть имеется система точечных зарядов и пусть  $S$  – эквипотенциальная поверхность, разделяющая пространство на два полупространства I и I' (см рис. 5.7). Задание величин зарядов  $q_1, q_2, q_3, \dots$  и потенциала на поверхности  $S$  однозначным образом определяет электрическое поле в полупространстве I. Аналогично можно получить электрическое поле в полупространстве I'.

В математике доказывается теорема о единственности решения уравнения

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

с определенными граничными условиями. Поэтому, если сделать поверхность  $S$  проводящей, то электрическое поле во всем пространстве не изменится, так как поля в областях I и I' независимы. Тогда поле в полупространстве I можно получать двумя эквивалентными способами:

- 1) либо как сумму полей, создаваемых зарядами  $q_i$  и поверхностью  $S$ ;
- 2) либо как сумму полей, создаваемых зарядами  $q_i$  и  $q'_i$ .

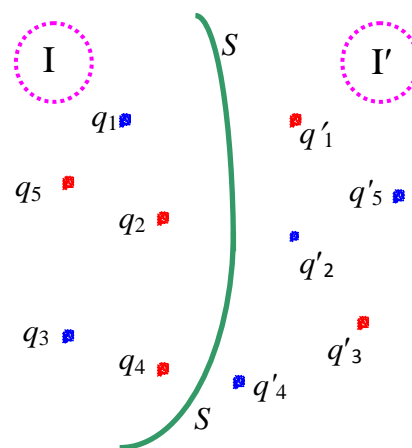


Рис. 5.7.

При этом совокупность зарядов  $q'_i$  является электрическим изображением зарядов  $q_i$  в поверхности  $S$ . Отсюда следует способ расчета взаимодействия зарядов с проводниками и полей вблизи проводников – метод электрических изображений: заменять взаимодействие зарядов с проводящей поверхностью взаимодействием зарядов  $q_i$  с зарядами изображения.



### 2.5.3. Емкость проводников.

Если проводнику сообщаем заряд  $q$ , то он распределяется единственным образом так, чтобы поле внутри проводника было равно нулю. Это справедливо, когда проводник уединенный и рассматривается его стационарное (не зависящее от времени) состояние.

Итак, рассматриваем уединенный проводник. Если на него добавим еще заряд  $\Delta q$ , то он распределится аналогичным образом, но только вырастет напряженность поля вблизи поверхности и потенциал проводника. То есть, получаем прямую пропорциональность между зарядом на проводнике и его потенциалом:

$$q \sim \varphi, \quad q = C\varphi, \quad (2.5.12)$$

где коэффициент пропорциональности носит название *емкости уединенного проводника*  $C$ .

В качестве примера рассмотрим металлический шар радиуса  $R$ . Пусть этот шар равномерно заряжен зарядом  $q$ , тогда его потенциал определяется:

$$\varphi = \int_R^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{R} \quad \text{или} \quad q = R\varphi. \quad (2.5.13)$$

По определению (2.5.12) емкость проводящего шара равна его радиусу (в системе единиц  $CGSE$ ):

$$C = R. \quad (2.5.14)$$

Единица емкости в системе  $CGSE_C$  (системе Гаусса):  $[C] = 1 \text{ см}$ .

Примечание 2. В системе  $СИ$  емкость шара  $C = 4\pi\epsilon_0 R$  и единица емкости 1 Фарада:

$$1\Phi = \frac{1\text{ Кл}}{1\text{ В}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ CGSE}}{1/300 \text{ CGSE}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$$

Фарада – очень большая величина, так 1  $\Phi$  – это емкость шара радиусом  $9 \cdot 10^9$  м. В практическом определении емкостей вводят обычно величины:  $m\Phi$ ,  $\mu\text{к}\Phi$ ,  $\text{пк}\Phi$ .

### 2.5.4. Конденсаторы.

*Конденсаторы* – 2 металлические обкладки, отделенные слоем диэлектрика – устройства, используемые в электрических цепях для накопления заряда и энергии электрического поля. Обычно в силу конструктивных особенностей считается, что внешние поля не влияют на электрическое поле между обкладками конденсатора, при этом заряды на обкладках равны по величине и противоположны по знаку. В реальном

конденсаторе это справедливо приближенно, но часто с достаточно хорошей точностью.

Заряд на одной из обкладок конденсатора связан с разностью потенциалов между обкладками прямо пропорционально. Введем коэффициент пропорциональности – *емкость конденсатора*:

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.5.15)$$

Емкость конденсатора  $C$  характеризует его свойство накапливать и удерживать электрические заряды и во многом зависит от конструкции конденсатора, а именно от формы и размеров его электродов, их взаимного расположения и свойств диэлектрика, разделяющего электроды. Наиболее распространенные конденсаторы: *плоский*, *цилиндрический* и *сферический*. Рассмотрим простейшие случаи.

1). **Плоский конденсатор**: имеем две параллельные пластинки, между которыми расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 5.8). Расстояние между пластинами равно  $d$ , площадь пластин равна  $S$ . Напряжение на конденсаторе  $U$  равно разности потенциалов на его пластинах:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Расстояние между пластинами  $d$  обычно берется малым, поэтому электрическое поле внутри плоского конденсатора рассматривается как однородное, поэтому, пользуясь (2.5.3) и пренебрегая изменениями поля на краю конденсатора, получаем:

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} = \frac{4\pi q}{\varepsilon S} \quad (2.5.16)$$

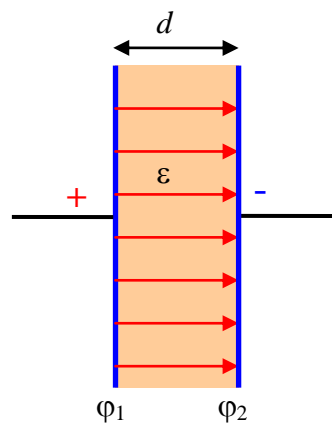


Рис. 5.8.

Тогда связь между разностью потенциалов и полем равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = 4\pi \frac{qd}{\varepsilon S}. \quad (2.5.17)$$

Откуда получаем емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \quad (2.5.18)$$

Видно, что емкость конденсатора увеличивается прямо пропорционально площади пластин  $S$  и обратно пропорционально расстоянию между ними  $d$ , а также растет с увеличением диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon$  между его обкладками.

2). **Сферический конденсатор**: обкладками являются 2 концентрические сферы, радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , между которыми расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (см рис. 5.9). Разность

потенциалов между обкладками определяется потенциалами двух сфер, т.е. из соотношения

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.5.19)$$

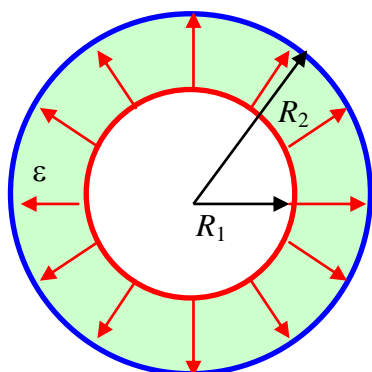


Рис. 5.9.

Отсюда пользуясь определением (2.5.15), получаем емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (2.5.20)$$

Задача может быть немного усложнена, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика есть переменная величина, например зависит от радиуса  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ . В этом случае удобнее по теореме Гаусса

найти зависимость индукции и напряженности электрического поля от радиуса внутри конденсатора, а затем сосчитать разность потенциалов между обкладками. Коэффициент пропорциональности между напряжением и зарядом на обкладках конденсатора определяет его емкость.

3). **Цилиндрический конденсатор:** обкладками являются 2 коаксиальные цилиндрические поверхности радиусами  $a$  и  $b$ . Длина цилиндров равна  $l$ , при этом считаем, что  $l$  достаточно велико по сравнению с расстоянием между обкладками, чтобы пренебречь краевыми искажениями электрического поля. Между обкладками расположен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Тогда поле внутри цилиндрического конденсатора (между цилиндрами) легко получить по теореме Гаусса (см Глава 1 §3, формула (1.3.11)):

$$E = \frac{2\lambda}{\varepsilon r}, \quad (2.5.21)$$

где  $r$  – расстояние, отсчитываемое от оси симметрии,  $\lambda$  – заряд, приходящийся на единицу длины одного из цилиндров. Тогда разность потенциалов равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b E dr = \frac{2\lambda}{\varepsilon} \ln \frac{b}{a} = \frac{2q}{\varepsilon l} \ln \frac{b}{a} \quad (2.5.22)$$

Следовательно, емкость цилиндрического конденсатора определяется:

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \left( \frac{b}{a} \right)} \quad (2.5.23)$$

В случае, когда диэлектрическая проницаемость является переменной с радиусом величиной  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ , необходимо учесть эту зависимость в интеграле (2.5.22) при определении связи между зарядом конденсатора и разностью потенциалов.

**Примечание 3.** В системе СИ емкости простейших конденсаторов равны:

емкость плоского конденсатора определяется соотношением

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S / d .$$

емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

емкость цилиндрического конденсатора записывается

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln(b/a)} .$$

## 2.6. Энергия электрического поля.

### 2.6.1. Энергия системы зарядов.

Энергию электрического поля мы уже фактически рассматривали ранее, когда вводили понятие потенциала и разности потенциалов. При сближении электрических зарядов одного знака совершается работа против сил кулоновского взаимодействия " $-dA$ ":

$$-dA = dW .$$

Эта работа приводит к тому, что система зарядов обладает потенциальной энергией. Энергию взаимодействия двух одинаковых точечных зарядов мы также получали ранее (см (1.6.1)-(1.6.2)):

$$W = q\varphi = \frac{q^2}{r} .$$

где  $r$  – расстояние между этими зарядами.

Для получения системы, состоящей из 2-х любых зарядов, можно поступать двумя способами (см рис. 6.1):

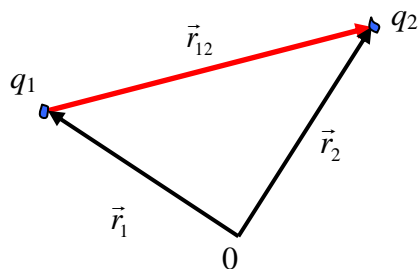


Рис. 6.1.

1) либо приносим заряд 2 из бесконечности (где как обычно полагаем потенциал равным 0) в точку, отстоящую на расстояние  $r_{12}$  от первого заряда,

2) либо, наоборот, из бесконечности приносим заряд 1 к заряду 2.

При этом совершенные работы, и, очевидно, потенциальные энергии, будут одинаковы:

$$A_{12} = -q_2\varphi_2 = -\frac{q_1q_2}{r_{12}} = -W_{21}$$

$$A_{21} = -q_1\varphi_1 = -\frac{q_1q_2}{r_{12}} = -W_{12}$$
(2.6.1)

Здесь  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ) – потенциал в точке, где находится заряд  $q_1$  ( $q_2$ ). Итак, получаем, что энергия системы, состоящей из двух точечных зарядов равна:

$$W_{12} = W_{21} = W = \frac{q_1q_2}{r_{12}}$$
(2.6.2)

Перепишем (2.6.2) в симметричной форме:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_2}{r_{12}}\right)$$
(2.6.3)

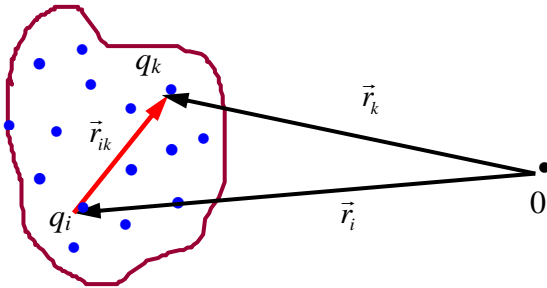


Рис. 6.2.

Для получения энергии системы зарядов поступаем таким же образом: переносим из бесконечности один за другим заряды. При этом совершаем работу против электрических сил отталкивания, которая идет на увеличение потенциальной энергии системы. В итоге получаем, что энергия системы  $N$  зарядов, изображенная на рис. 6.2, может быть записана в виде аналогичном (2.6.3):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,i \\ k \neq i}}^N \frac{q_i q_k}{r_{ik}},$$
(2.6.4)

где  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый всеми остальными зарядами в точке, где находится  $i$ -ый заряд, а расстояние  $r_{ik} = r_{ki} = |\vec{r}_k - \vec{r}_i|$  – относительное расстояние между двумя зарядами.

В случае непрерывного распределения зарядов эти формулы для определения потенциальной энергии нетрудно обобщить, имея в виду существование как объемных, так и поверхностных зарядов –  $dq = \rho dV$ ,  $dq = \sigma dS$ :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS.$$
(2.6.5)

Здесь  $\varphi$  – значение потенциала поля всех объемных и поверхностных зарядов в элементе объема  $dV$  или на элементе поверхности  $dS$ . Интегрирование может идти по нескольким областям. Хотя здесь речь шла только о сторонних (свободных) зарядах  $dq$ , формула (2.6.5) справедлива и в

присутствии вещества, т.е. при наличии связанных зарядов. Влияние связанных зарядов в веществе на потенциальную энергию проявляется в величине потенциала  $\varphi$  в той точке, где находятся сторонние заряды.

Приведем несколько примеров:

а). **Энергия уединенного проводника.** Считаем, что вначале потенциал равен нулю  $\varphi = 0$ , затем на проводник помещаем заряд  $q$ . Потенциал проводника, исходя из формулы (2.5.12), пропорционален его заряду и равен

$$\varphi = \frac{q}{C},$$

где  $C$  – емкость уединенного проводника. Теперь вносим малый заряд  $dq$  и считаем работу, потраченную на внесение дополнительного заряда, а затем с помощью интегрирования найдем работу на создание полного заряда на проводнике, т.е. найдем потенциальную энергию проводника:

$$dW = \varphi dq = \frac{q}{C} dq, \quad W = \frac{1}{C} \int_0^{q_0} q dq = \frac{q_0^2}{2C}$$

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} q_0 \varphi = \frac{1}{2} C \varphi^2 \quad (2.6.6)$$

Получили потенциальную энергию уединенного заряженного проводника, считая, что на бесконечности его потенциал равен нулю.

б). **Энергия конденсатора.** Конденсатор запасает электрическую энергию. Для него справедлива та же формула (2.6.6), только перенос заряда осуществляется, не из бесконечности, а от одной пластины к другой. Для плоского конденсатора (положим пока в формуле (2.5.15) диэлектрическую постоянную равной единице  $\varepsilon = 1$ ) емкость записывается в виде

$$C = \frac{S}{4\pi d},$$

и тогда энергия плоского конденсатора равна

$$W = \frac{S\varphi^2}{8\pi d} = E^2 \frac{Sd}{8\pi} = E^2 \frac{V}{8\pi} \quad (2.6.7)$$

Последнее соотношение очень важно – оно определяет энергию конденсатора не через заряды на нем, как записывается в формулах (2.6.4)-(2.6.6), а через электрическое поле внутри конденсатора. Можно ввести **плотность энергии**  $w$  электрического поля внутри конденсатора:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{E^2}{8\pi} \quad (2.6.8)$$

Таким образом, энергия конденсатора может быть выражена через заряды или потенциалы на пластинах, а может быть выражена через электрическое поле внутри конденсатора.

### 2.6.2. Энергия электрического поля.

Можно показать также в общем случае, что энергия любой системы зарядов может быть выражена через электрическое поле, создаваемое этой системой.

Заметим, что это очень важное обстоятельство! То, что энергия системы зарядов выражается через сами величины зарядов (формулы (2.6.4) и (2.6.5)), соответствует представлениям *теории дальнего действия*, в которой заряды взаимодействуют на расстоянии друг от друга и пренебрегается пространством между ними. Однако если энергия системы зарядов может быть записана через плотность энергии, сосредоточенной в пространстве, то такое описание соответствует представлениям *теории ближнего действия*, в которой заряды создают напряженное состояние в пространстве и это состояние пространства ощущают другие заряды в той точке, где они находятся. В электростатике оба эти описания эквивалентны. Однако, современные представления об электромагнитных явлениях, и в частности электромагнитных волнах, приводят к справедливости теории ближнего действия и описания электромагнитных явлений с помощью понятия электромагнитного поля.

Итак, в электростатике можно показать, что справедливо соотношение:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV, \quad (2.6.9)$$

Здесь интегрирование в правой части (2.6.9) ведется по всему объему, где электрическое поле отлично от нуля. В Приложении 1 доказывается одно важное соотношение для потока произвольного векторного поля  $\vec{A}$ , которым удобно воспользоваться в Электростатике для получения (2.6.9).

---

#### Приложение 1. Математическое отступление.

Если имеется векторное поле  $\vec{A}$ , то можно для него написать теорему Гаусса-Остроградского:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \oint_S A_n dS = \int_V \text{div} \vec{A} dV$$

Пусть  $\psi_1$  и  $\psi_2$  некоторые скалярные функции, а вектор  $\vec{A}$  определяется:  $\vec{A} = \psi_1 \nabla \psi_2$ . Сосчитаем дивергенцию:

$$\text{div} \vec{A} = \nabla(\psi_1 \nabla \psi_2) = \psi_1 \nabla^2 \psi_2 + \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_2 = \psi_1 \Delta \psi_2 + \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_2$$

Обозначим нормальную составляющую вектора

$$A_n = \Psi_1 \operatorname{grad}_n \Psi_2 = \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n},$$

где  $n$  нормаль к поверхности  $S$  (записываем таким образом, чтобы далее было проще разобраться с нормальями). Тогда теорема Гаусса для такого вектора может быть записана в следующей форме:

$$\int_V (\Psi_1 \nabla^2 \Psi_2 + \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Psi_2) dV = \oint_S \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} dS \quad (2.6.10)$$

Воспользуемся формулой (2.6.10) из математического приложения, положив скалярные функции  $\Psi_1 = \Psi_2 = \varphi$  равными потенциалу. Тогда имеем:

$$\int_V (\varphi \Delta \varphi + \nabla \varphi \nabla \varphi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (2.6.11)$$

Вспомним также уравнение Пуассона  $\Delta \varphi = -4\pi\rho$  (см §1.6 и формулу (1.6.13)) и то, что градиент потенциала дает напряженность электрического поля

$$\nabla \varphi = -\vec{E}, \quad \nabla \varphi \nabla \varphi = E^2.$$

Подставим их в наше уравнение (2.6.11):

$$-4\pi \int_V \rho \varphi dV + \int_V E^2 dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (2.6.12)$$

Выберем составную поверхность, выделяя на ней разрывы функции  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ . Это необходимо делать для того, чтобы интеграл в правой части (2.6.12) имел смысл и не расходился в местах разрыва производной от потенциала.

Пусть  $S$  – внешняя поверхность, а  $S'$  – поверхность (или поверхности), обходящая заряженные поверхностные слои  $S_1$  (см рис. 6.3). Эти поверхности (их может быть несколько) окружают и изолируют те области, где

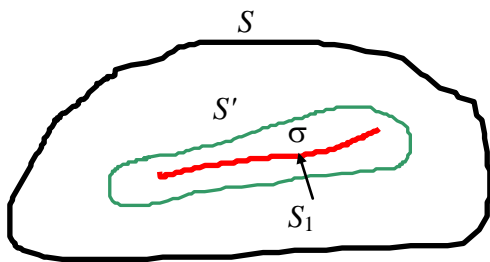


Рис. 6.3.

существует разрыв градиента  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  или, что то же самое, скачок напряженности электрического поля. Поскольку таких поверхностей может быть несколько, тогда надо ввести сумму интегралов по поверхностям, обходящим заряженные слои. Однако для простоты сейчас ограничимся одной заряженной поверхностью и будем стягивать  $S'$  к поверхности  $S_1$ , которая

заряжена зарядом с поверхностной плотностью  $\sigma$  (см рис. 6.4). Тогда для интеграла по этой дополнительной поверхности получаем:



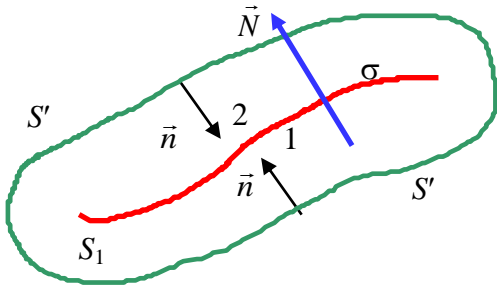


Рис. 6.4.

$$\lim_{S' \rightarrow S_1} \oint_{S'} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{S_1} \left[ \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 + \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 \right] dS \quad (2.6.13)$$

где индексы 1 и 2 означают “верхнюю” и “нижнюю” стороны поверхности  $S_1$ . Здесь у нас  $\vec{n}$  – общая нормаль для поверхности  $S$ , которая является “внешней” для области 1 с потенциалом  $\varphi_1$  и “внутренней” 2 с потенциалом  $\varphi_2$  (см рис. 6.4). Введем общую внешнюю нормаль  $\vec{N}$ , тогда градиент  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  в

первой области совпадает по знаку с  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1$ , а во второй имеет

противоположный знак с  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2$  из-за разного направления  $\vec{n}_2$  и  $\vec{N}$ .

Вспоминая связь градиента потенциала с напряженностью электрического поля  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_i = -E_{iN}$  и граничные условия для вектора напряженности электрического поля, имеем:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_2 = E_{2N} - E_{1N} = 4\pi\sigma$$

Итак, интеграл (2.6.13) по дополнительной поверхности записывается:

$$\lim_{S' \rightarrow S_1} \oint_{S'} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{S_1} 4\pi\sigma dS \quad (2.6.14)$$

Подставляя в (2.6.12), получаем:

$$-4\pi \int_V \rho \varphi dV + \int_V E^2 dV = 4\pi \int_{S_1} \sigma \varphi dS + \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (2.6.15)$$

где интегралы по  $V$  проводятся по объему, ограниченному внешней поверхностью  $S$ , а в правой части (2.6.15) – интеграл берется по внешней поверхности  $S$  и интеграл (или интегралы) по поверхности  $S_1$ , то есть по поверхностям, имеющим распределенный заряд плотности  $\sigma$ .

Интегралы по наружной поверхности  $S$  и объему  $V$  распространяем до поверхности, где поле равно нулю  $E = 0$ . Если поле распространяется до бесконечности, то и поверхность  $S \rightarrow \infty$ . Интегралы по бесконечной поверхности и бесконечному пространству можно брать только в том случае, если интегралы всех величин по поверхности стремятся к нулю ( $\rightarrow 0$ ). Так как поверхность растет с радиусом (расстоянием)  $\sim r^2$ , то, следовательно, подынтегральное выражение должно убывать быстрее, чем  $1/r^2$ . Рассмотрим

второе слагаемое в правой части (2.6.15) – на бесконечности зарядов нет, поэтому  $\varphi \sim 1/r$  и  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^2}$ , тогда  $\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^3}$ . Следовательно, либо в пределе на бесконечности имеем, что значение интеграла

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS \rightarrow 0,$$

либо этот интеграл равен 0 на некоторой поверхности, где поле заканчивается и его значение равно 0.

Далее, будем полагать, что (по определению понятия “полного поля”) интегралы по поверхности  $S$ , ограничивающей полное поле, обращаются в нуль. Получаем окончательно формулу (2.6.9):

$$W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \int \sigma\varphi dS = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV$$

Таким образом, получили эквивалентность двух определений энергии системы зарядов. Что и требовалось доказать.

### 2.6.3. Примеры. Собственная энергия.

Пример 1. Рассмотрим электрический заряд на маленьком шарике радиуса  $r_0$ : сосчитаем его электрическую энергию по двум формулам (2.6.4) и (2.6.9). Запись через работу по перенесению заряда (2.6.4) дает значение энергии, равное нулю

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i = 0 \quad (2.6.16)$$

так как потенциал в точках, где находится шарик, равен нулю (нет других зарядов). Запись через электрическое поле в пространстве дает отличное от нуля значение:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2r_0} \neq 0 \quad (2.6.17)$$

Итак, эти формулы дают различный результат. Вопрос: в чем разница? Дело в том, что выражения для энергии через электрическое поле (2.6.9) и (2.6.17) учитывают, так называемую, *собственную энергию заряда*. Если бы мы приписали заряду  $q$  в формуле (2.6.16) конечный объем, разбили бы его на элементарные заряды  $dq$  и сосчитали бы энергию по формулам (2.6.4)-(2.6.5), то получили бы собственную энергию больше 0 и ее значение в соответствии с формулой (2.6.17).

*Собственная энергия* – это работа сил взаимного отталкивания более элементарных зарядов, которую они произвели бы, если бы все части заряда разлетелись на бесконечное расстояние.

Пример 2. Рассмотрим полную энергию 2-х взаимодействующих зарядов –  $q_1$  и  $q_2$ . Поле, создаваемое зарядом  $q_1$ , обозначим через  $\vec{E}_1$ ; поле, создаваемое  $q_2$ , –  $\vec{E}_2$ , при этом полное поле равно  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Тогда энергия определяется:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 dV + \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 dV + \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV = W_{11} + W_{22} + W_{12} \quad (2.6.18)$$

Здесь  $W_{11}$  и  $W_{22}$  – собственные энергии зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно;  $W_{12}$  – энергия взаимодействия зарядов

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV = \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} \right) = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (2.6.19)$$

Из того, что  $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)^2 \geq 0$ , следует, что

$$\begin{aligned} E_1^2 + E_2^2 &\geq 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \\ W_{11} + W_{22} &\geq W_{12} \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Положительная собственная энергия зарядов всегда больше или равна взаимной энергии зарядов, которая может быть, как положительной, так и отрицательной.

Примечание 1. 1) при перемещениях зарядов, не меняющих размеров и формы зарядов, собственная энергия может рассматриваться как аддитивная добавка к энергии, т.е. при решении задач ее можно не учитывать;  
2) энергия электростатического поля не обладает свойством аддитивности: электрическое поле аддитивно –  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , но энергия не аддитивна –  $W \neq W_1 + W_2$ .

#### 2.6.4. Энергия электрического поля в диэлектриках.

Покажем, что энергия электрического поля в диэлектриках выражается через вектора напряженности и индукции:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}, \vec{D}) dV, \quad (2.6.21)$$

т.е. плотность энергии электрического поля в диэлектриках равна

$$w = \frac{\vec{E} \vec{D}}{8\pi} \quad (2.6.22)$$

Если нет поверхностных зарядов, тогда вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  непрерывны во всем пространстве и можно вычислять производные от них по пространственным координатам. В том случае, когда имеются поверхностные заряды (например, на поверхности  $S_1$ ), будем

дифференцировать вектора во всем пространстве за исключением части пространства вокруг этих поверхностных зарядов. Воспользуемся следующей формулой векторного анализа (аналогичной той, что была рассмотрена в Приложении 1 этого параграфа):

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{D}) = \varphi \operatorname{div} \vec{D} + \vec{D} \operatorname{grad} \varphi \quad (2.6.23)$$

и вспомним, что  $\operatorname{grad} \varphi = -\vec{E}$ , тогда имеем

$$(\vec{E}, \vec{D}) = \varphi \operatorname{div} \vec{D} - \operatorname{div}(\varphi \vec{D}), \quad (2.6.24)$$

что и подставим в выражение для энергии (2.6.21):

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \operatorname{div} \vec{D} dV = -\frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi(\vec{D}, d\vec{S}) - \frac{1}{8\pi} \oint_{S'_1} \varphi(\vec{D}, d\vec{S}) + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad (2.6.25)$$

В первом интеграле по объему воспользовались теоремой Гаусса. Интеграл по объему от дивергенции вектора равен сумме потоков этого вектора через наружную поверхность  $S$  и через внутреннюю поверхность  $S'_1$  (или сумму внутренних поверхностей), которая окружает слой с поверхностными зарядами. Во втором интеграле по объему воспользовались одним из уравнений системы уравнений Максвелла:  $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$ .

Проведем интегрирование по всему пространству, когда внешняя поверхность  $S \rightarrow \infty$ , а внутренние поверхности стремятся к слою поверхностных зарядов, т.е.  $S'_1 \rightarrow S_1$ . При конечной системе зарядов интеграл по внешней поверхности стремится к нулю  $\oint_S \rightarrow 0$  при  $S \rightarrow \infty$ . Интегралы по внутренним поверхностям в пределе  $S'_1 \rightarrow S_1$  равны

$$-\frac{1}{8\pi} \oint_{S'_1 \rightarrow S_1} \varphi(\vec{D}, d\vec{S}) = \frac{1}{8\pi} 4\pi \int_{S_1} \sigma \varphi dS = \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma \varphi dS. \quad (2.6.26)$$

Поверхностная плотность заряда внутренних слоев появилась, поскольку в пределе суммирование (интегрирование) производится по двум сторонам слоя, для которых векторы электрической индукции отличаются в силу граничных условий при пересечении заряженной поверхности

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$$

(аналогично тому, как было получено для вектора  $\vec{E}$  и показано на рис. 6.3 и 6.4). Минус в выражении (2.6.26) уходит из-за определения общей нормали к поверхностному слою  $S_1$ .

Окончательно получаем выражение для энергии электрического поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma \varphi dS = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{E}, \vec{D}) dV \quad (2.6.27)$$

Итак, в электростатике и для диэлектриков получаем эквивалентность выражений для энергии, записанных через вектора электрического поля и через распределения зарядов в пространстве.

Следует отметить, что выражение для энергии через распределение сторонних зарядов (левая часть уравнения (2.6.27)) в присутствии диэлектриков имеет тот же вид, что и в вакууме (см (2.6.9)). Однако, вклад связанных зарядов энергию поля в диэлектриках отражается в изменении потенциалов  $\varphi$  по сравнению с вакуумом.

Итак, общее выражение для плотности энергии электрического поля в диэлектриках имеет вид (2.6.22):

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi}$$

В частности, для однородных и изотропных диэлектриков  $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$  и плотность энергии электрического поля равна:

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \quad (2.6.28)$$

Возвращаясь к формулам (2.6.7)-(2.6.8), определяющим энергию конденсатора, видно, что запасаемая энергия может быть увеличена при помещении внутрь конденсатора диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ .

**Примечание 2.** В системе СИ имеем следующие выражения для плотности энергии поля в диэлектриках

$$w = \vec{E}\vec{D}/2,$$

для однородных диэлектриков  $w = \varepsilon_0\varepsilon E^2/2.$

**Примечание 3.** Более общее выражение для энергии электрического поля записывается в виде:

$$W = \int_V w dV,$$

$$\text{где } w = \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E}, d\vec{D}) \quad \text{и} \quad dw = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}, d\vec{D}). \quad (2.6.30)$$

Эти выражения учитывают историю появления электрического поля от момента его включения. Эти формулы справедливы не только для обычных диэлектриков, но и для сегнетоэлектриков и других электретов, у которых диэлектрическая постоянная резко зависит от величины приложенного поля.

## 2.7. Силы в электрических полях.

### 2.7.1. Пондеромоторные силы.

На диэлектрики и проводники, помещенные в электрические поля, действуют силы, так называемые, – *пондеромоторные силы*. Термин

*пондеромоторные силы* устарел, т.к. исторически он относился к силам, действующим на “весомые” объекты и тела.

Природа пондеромоторных сил вполне известна: это силы, действующие на сторонние и связанные заряды в электрическом поле. Приведем несколько примеров действия таких сил:

- 1) на поверхности заряженного металлического шара действуют Кулоновские силы, которые расталкивают распределенные заряды и пытаются растянуть поверхность;
- 2) на диэлектрик в конденсаторе действуют силы сжатия с одной стороны, а с другой происходит втягивание диэлектрика внутрь конденсатора;
- 3) к пондеромоторным силам относятся силы, действующие, например, на наведенные диполи в веществе. Ранее в §1.7 была получена формула (1.7.15), описывающая силу, действующую на диполь в электрическом поле. Для однородного поля эта сила равна нулю, однако, в веществе мы имеем дело с различными, в том числе неоднородными, полями и различными конфигурациями зарядов.

Сила, действующая на какой-либо заряд, определяется, очевидно, напряженностью того поля, в которое помещен этот заряд (а не того поля, которое возбуждается им самим):

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q \operatorname{grad}\varphi. \quad (2.7.1)$$

Сила, действующая на непрерывно распределенный заряд, записывается аналогично:

$$d\vec{F} = dq \cdot \vec{E} = \vec{E}\rho dV \quad (2.7.2)$$

и тогда *объемная плотность сил* равна:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\vec{E} = -\rho \operatorname{grad}\varphi. \quad (2.7.3)$$

Рассмотрим объемные силы, действующие на диэлектрик. Сила, приложенная к элементу объема  $dV$ , равна сумме сил, действующих на элементарные диполи внутри  $dV$  (согласно (1.7.17)):

$$d\vec{F} = \sum_{dV} (\vec{p}_i, \nabla) \vec{E}. \quad (2.7.4)$$

Здесь суммирование ведется по всем элементарным диполям в элементе объема  $dV$ . Так как элемент объема мал, то вектор напряженности электрического поля (медленно меняющаяся величина) можно считать неизменным на протяжении этого элемента объема. Тогда, вводя вектор поляризации, имеем:

$$\sum_{dV} (\vec{p}_i, \vec{\nabla}) \vec{E} = \left( \sum_{dV} \vec{p}_i, \vec{\nabla} \right) \vec{E} = (\vec{P} dV, \vec{\nabla}) \vec{E} = (\vec{P}, \vec{\nabla}) \vec{E} dV \quad (2.7.5)$$

Объемная плотность сил в диэлектрике определяется вектором поляризации:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = (\vec{P}, \nabla) \vec{E} \quad (2.7.6)$$

Для изотропного диэлектрика имеем простую связь между вектором поляризации и вектором напряженности электрического поля

$$\vec{P} = \alpha \vec{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E},$$

тогда объемная плотность сил равна:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (2.7.7)$$

Воспользуемся тождеством из векторной алгебры (1.7.16) из §1.7, переписанным для случая, когда  $\vec{A} = \vec{B} = \vec{E}$ :

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{E}, \vec{E}) = (\vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E} + [\vec{E}, \text{rot} \vec{E}] \quad (2.7.8)$$

Поскольку для электростатического поля  $\text{rot} \vec{E} = 0$ , получаем для объемной плотности сил:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla (E^2) \equiv \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \text{grad} (E^2) \quad (2.7.9)$$

Далее, поскольку имеем однородный и изотропный диэлектрик, то можно ввести плотность энергии электрического поля  $w = \varepsilon E^2 / 8\pi$  и вынести диэлектрическую проницаемость из-под оператора градиента:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \text{grad} w \quad (2.7.10)$$

Последние формулы для объемной плотности сил справедливы как для абсолютно жестких диэлектриков, так и для сжимаемых диэлектриков. Последнее справедливо лишь при условии, что их поляризованность (поляризация) линейно зависит от массы, т.е. дипольные моменты молекул и атомов при сжатии и растяжении элемента объема не изменяются.

В случае, когда диэлектрическая проницаемость не постоянна  $\varepsilon \neq \text{const}$  и/или когда имеем дело со сжимаемыми диэлектриками, тогда определение пондеромоторных сил представляет собой довольно сложную задачу. Общий метод вычисления пондеромоторных сил дает термодинамика диэлектриков. В зависимости от условий задачи используются термодинамические функции диэлектриков – свободная энергия, термодинамический потенциал, энтальпия – для определения внутренних сил и напряжений. В этом курсе мы не будем касаться этих вопросов.

### 2.7.2. Силы, действующие на поверхностные заряды.

Ранее мы уже обсуждали, например в § 2.5, силы, действующие на поверхностные заряды. Если имеется поверхность, заряженная плотностью заряда  $\sigma$ , то электрическое поле известно по обе стороны, причем

$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$ , а на самой поверхности электрическое поле не определено. Как искать силу, действующую на единицу поверхности?

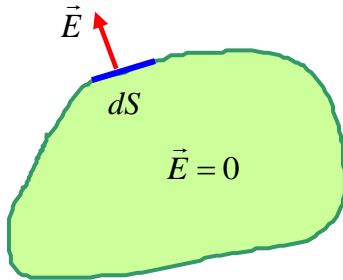


Рис. 7.1.

Рассмотрим уединенный проводник (см рис. 7.1) с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Одноименные заряды расталкиваются, поэтому взаимодействие между поверхностными зарядами растягивает поверхность проводника. Рассмотрим элемент поверхности  $dS$ :

- 1) электрическое поле с внешней стороны равно:  $\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали;
- 2) поле внутри проводника  $E = 0$ .

Поле внутри и снаружи складывается из поля, создаваемого самим рассматриваемым кусочком  $dS - E'$ , и из поля всех остальных зарядов –  $E''$ . Поле  $E'$  одинаково по величине по обе стороны от площадки  $dS$ , но противоположное по направлению (рис. 7.2, а также рис. 5.3 в § 2.5). Поле  $E''$

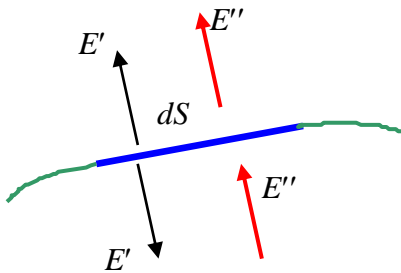


Рис. 7.2.

одинаково чуть выше и чуть ниже площадки  $dS$  в силу непрерывности вектора напряженности (когда нет зарядов). Тогда с внешней стороны  $dS$  имеем:

$$E = E' + E'' = 4\pi\sigma$$

С внутренней стороны проводника имеем:

$$E = 0 = E' - E''$$

Из этих соотношений получаем как поле, создаваемое элементом поверхности  $E'$ , так и поле  $E''$ , в котором находится элемент заряженной поверхности  $dS$ :

$$E' = E'' = 2\pi\sigma \quad (2.7.11)$$

Тогда сила, испытываемая зарядом  $\sigma dS$  на элементе поверхности, определяется полем  $E''$  и равна:

$$dF = E'' \sigma dS = 2\pi\sigma^2 dS = \frac{1}{2} E \sigma dS \quad (2.7.12)$$

Пондеромоторная сила, действующая на единицу поверхности, – *поверхностная плотность пондеромоторных сил*:



$$\frac{dF}{dS} \equiv f = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2}E\sigma = \frac{E^2}{8\pi} \quad (2.7.13)$$

Или в векторной форме имеем для поверхностной плотности сил:

$$\vec{f} = 2\pi\sigma^2\vec{n} \quad (2.7.14)$$

Фактически, если рассматривать модуль этого выражения, это есть давление, испытываемое поверхностью под влиянием кулоновских сил отталкивания.

### 2.7.3. Определение пондеромоторных сил из энергии.

Один из общих способов определения сил через производную (градиент) от энергии системы:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \equiv -grad\varphi, \quad \vec{F} = -\nabla W \quad (2.7.15)$$

В качестве примера рассмотрим силы, действующие на пластины плоского конденсатора. Энергия плоского конденсатора равна:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Sd}{8\pi}E^2 \quad (2.7.16)$$

В этом случае оператор градиента в (2.7.15) сводится к производной энергии по расстоянию между пластинами  $d$ . И тогда получаем силу, действующую на пластины конденсатора

$$F = -\nabla W = -\frac{S}{8\pi}E^2 = -\frac{S}{8\pi}(4\pi\sigma)^2 = -2\pi\sigma^2 S \quad (2.7.17)$$

Проявлением пондеромоторных сил объясняются механические напряжения в диэлектрических слоях, подъем или втягивание жидкого диэлектрика в конденсатор и т.д.

## 2.8. Микроскопическая теория поляризации диэлектриков.

Рассмотрим количественно вопрос о поляризации диэлектриков и опишем поляризацию как смещение электронов и атомных ядер под влиянием внешнего электрического поля. Для полярных и неполярных молекул и, соответственно, полярных и неполярных диэлектриков механизм поляризации различный. Рассмотрим подробнее эти механизмы.

### 2.8.1. Неполярные диэлектрики.

Дипольный момент неполярной молекулы в отсутствии внешнего электрического поля равен нулю:  $\vec{p}_0 = 0$ . Это справедливо для симметричных молекул, например, таких как:  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $CH_4$ ,  $CO_2$ ,  $CCl_4$ . Помещая такую молекулу во внешнее поле, происходит смещение орбит

электронов относительно ядер, которое приводит к *наведенному* (индуцированному) дипольному моменту. Поскольку внешние поля, как правило, значительно меньше внутренних полей в атоме, то наведенные дипольные моменты малы. Так, оценивая электрическое поле, создаваемое ядром на Боровском радиусе электрона в атоме водорода, получаем:

$$E \sim \frac{e}{r^2} \approx \frac{4.8 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}_q}{(5.3 \cdot 10^{-9} \text{ см})^2} \sim 1.7 \cdot 10^7 \text{ CGSE}_E \approx 5 \cdot 10^9 \text{ В/м}$$

А электрическое поле, при котором происходит пробой в сухом воздухе, порядка  $E_0 \sim 10^4 \text{ В/м}$ . При такой напряженности внешнего электрического поля  $E \leq E_0$  смещение зарядов в молекулах ничтожно, и можно считать, что индуцированный дипольный момент зависит от поля  $E$  линейно, что подтверждается экспериментально:

$$\vec{p} = \beta \vec{E} \quad (2.8.1)$$

Здесь  $\beta$  – *поляризуемость* молекулы. Для разных молекул поляризуемость  $\beta$  различна, но является константой для данной молекулы. Приведем некоторые примеры.

1) Проводящий шар радиуса  $a$  обладает поляризуемостью и дипольным моментом, равными соответственно:

$$\beta = a^3, \quad \vec{p} = a^3 \vec{E} \quad (2.8.2)$$

Поляризуемость в системе CGSE измеряется в кубических сантиметрах. Напомним, что в параграфе 2.4 рассматривали поляризацию шара радиуса  $R$ , при этом получали дипольный момент  $\vec{p}$  и поляризацию  $\vec{P}$ , а также их связь с полем внутри диэлектрика (формула (2.4.27)):

$$\vec{E}_{\text{внутри}} = -4\pi/3 \cdot \rho \delta \vec{l} = -4\pi/3 \cdot \vec{P}$$

$$\vec{p} = q \delta \vec{l} = \vec{P} V = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P} = -R^3 \vec{E}_{\text{внутри}}.$$

2) Поляризуемость атома водорода равна  $\beta = 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$ . Эта величина неплохо согласуется с поляризуемостью металлического шара, так как радиус атома водорода –  $R_H \approx 10^{-8} \text{ см}$ .

Поляризуемости молекул определяются на опыте и вычисляются теоретически в рамках квантовой механики. Однако расчеты для молекул достаточно сложны и громоздки, поэтому они проведены не для всех молекул.

---

**Примечание 1.** Если молекула не обладает сферической симметрией, то направления векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  могут не совпадать.

---

Пусть имеем макроскопическое тело, состоящее из неполярных сферически симметричных молекул. Вначале рассмотрим достаточно разреженный газ молекул, тогда поле  $\vec{E}'$ , действующее на каждую молекулу (т.е. поле, создаваемое всеми зарядами и диполями за исключением рассматриваемой молекулы), в силу разреженности системы примерно совпадает со средним полем внутри диэлектрика  $\vec{E}$ :

$$\vec{E}' \approx \vec{E} \quad (2.8.3)$$

Следует отметить, что для плотных сред и тел это не так:  $\vec{E}' \neq \vec{E}$ , и этот случай рассмотрим ниже.

Учитывая условие (2.8.3), вектор поляризации определяется

$$\vec{P} = n\vec{p} = \alpha\vec{E} = n\beta\vec{E} \quad (2.8.4)$$

где  $n$  – концентрация молекул,  $\alpha$  – поляризуемость единицы объема вещества. Соответственно для диэлектрической проницаемости разреженного газа получаем:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta \quad (2.8.5)$$

Поляризуемость неполярной молекулы  $\beta$  является молекулярной константой, зависящей только от внутреннего строения молекулы, поэтому в газах диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  не зависит от температуры  $T$ , а является только функцией плотности  $n$  газа.

Для плотных диэлектриков теоретическое описание встречает большие трудности. Простейший способ, предложенный Лоренцем, определения действующего поля  $\vec{E}'$  состоит в следующем. Будем считать линейные размеры молекул очень малыми, тогда можно пренебречь изменениями *действующего* поля в пределах молекулы, т.е. считать, что поле  $\vec{E}'$  относится к центру молекулы. Для нахождения дипольного момента молекулы необходимо поле  $\vec{E}$  заменить на действующее поле  $\vec{E}'$ , т.е.

$$\vec{p} = \beta\vec{E}' \quad (2.8.6)$$

Действующее поле для плотных газов и кубических кристаллов примерно равно полю внутри сферы бесконечно малого радиуса, вырезанной внутри диэлектрика. Найдем это поле из достаточно простых представлений: из среднего поля внутри диэлектрика вычтем поле, создаваемое поляризованным шариком или сферой малого радиуса. Так до удаления сферы поле в равномерно поляризованном диэлектрике однородно и равно средней напряженности макрополя  $\vec{E}$ . Напряженность поля внутри

равномерно поляризованного шара (или сферы) была получена ранее (см формулу (2.4.27)):

$$\vec{E}_{\text{внутри}} = -\frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Тогда после удаления сферы напряженность поля внутри ее  $\vec{E}'$  получается вычитанием поля равномерно поляризованной сферы  $\vec{E}_{\text{внутри}}$  из  $\vec{E}$ :

$$\vec{E}' \approx \vec{E} - \left(-\frac{4\pi}{3}\vec{P}\right) = \vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P} \quad (2.8.7)$$

Так как на диполь действует сила, связанная с  $\vec{E}'$ , то вектор поляризации из (2.8.6) равен:

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\beta\vec{E}', \quad (2.8.8)$$

и, подставляя (2.8.7), получаем:

$$\vec{P} = n\beta\left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}\right). \quad (2.8.9)$$

И далее, выражая из (2.8.9) вектор  $\vec{P}$ , запишем, что вектор поляризации пропорционален полю  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \frac{n\beta}{1 - \frac{4\pi}{3}n\beta} E = \alpha E \quad (2.8.10)$$

Отметим, что здесь поляризуемость  $\alpha$  определяется не по формуле (2.8.4), которая была справедлива только для случая (2.8.3). Поэтому при преобразовании (2.8.10) воспользуемся определением диэлектрической постоянной  $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$  и тогда можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}n\beta \quad (2.8.11)$$

Это *формула Клаузиуса – Моссотти*. Это соотношение лучше согласуется с опытом, чем (2.8.5), хотя тоже имеет ограниченное применение для жидких и газообразных диэлектриков с неполярными молекулами.

---

*Примечание 2. Рудольф Юлиус Эмануэль Клаузиус, немецкий физик-теоретик, 1822–1888; Оттавиано Фабрицио Моссотти, итальянский физик, 1791–1863.*

---

## 2.8.2. Полярные диэлектрики.

Полярные молекулы имеют собственные дипольные моменты, величина которых порядка  $|\vec{p}_0| \sim 10^{-18} \text{ CGSE}_p$ . Примеры полярных молекул:  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{HBr}$ ,  $\text{CO}$ , спирты, эфиры и т.д.

В настоящем рассмотрении в основном опять ограничимся случаем достаточно разреженных газов, когда действующее поле  $\vec{E}'$  можно отождествить со средним полем  $\vec{E}$ . В первом приближении можно пренебречь наведенными дипольными моментами, поскольку они на несколько порядков меньше  $|\vec{p}_{ind}| \sim 10^{-22} CGSE_p$  собственных дипольных моментов  $|\vec{p}_0| \sim 10^{-18}$ . Поэтому поляризация диэлектрика, главным образом, обусловлена поворотами осей дипольных молекул в электрическом поле.

Если внешнего поля нет, то дипольные моменты молекул направлены хаотично и их сумма равна нулю  $\sum_i \vec{p}_i = 0$  и поляризация также отсутствует  $\vec{P} = 0$ . Введем функцию распределения по направлениям диполей в пространстве  $f(\vec{l})$  (см рис. 8.1):

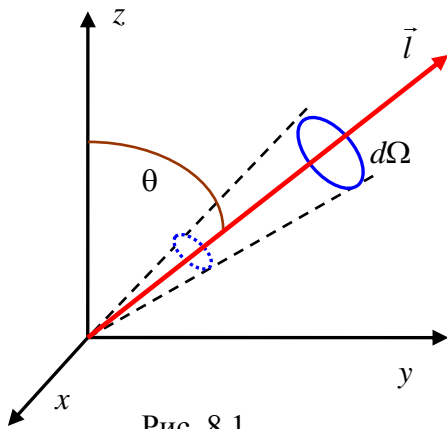


Рис. 8.1.

$$f(\vec{l}) = \frac{1}{n} \frac{dn}{d\Omega}, \quad (2.8.12)$$

где  $d\Omega$  – элемент телесного угла, а  $dn = nf(\vec{l})d\Omega$  – среднее число диполей в 1 объеме, оси которых лежат в пределах телесного угла  $d\Omega$ . Здесь вектор  $\vec{l}$  указывает направление оси элемента телесного угла как показано на рис. 8.1.

Включим поле  $\vec{E}$ , пусть оно направлено по оси  $z$ , тогда  $f(\vec{l})$  определяется функцией распределения Больцмана:

$$f(\vec{l}) = C \exp\left(-\frac{W}{kT}\right), \quad (2.8.13)$$

где  $W$  – потенциальная энергия диполя  $\vec{p}_0$  во внешнем поле:

$$W = -(\vec{p}_0, \vec{E}) \quad (2.8.14)$$

Рассмотрим случай слабых полей (так обычно и бывает на практике) и не слишком малых температур, при этом выполняется условие:

$$(\vec{p}_0, \vec{E}) = p_0 E \cos \theta \ll kT \quad (2.8.15)$$

где угол  $\theta$  – угол между направлениями внешнего поля и дипольного момента молекулы (рис. 8.1). Тогда разлагаем (2.8.13) в ряд по степеням  $W/kT$ :

$$C \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = C \left(1 - \frac{W}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{W}{kT}\right)^2 - \dots\right) \approx C \left(1 + \frac{\vec{p}_0 \vec{E}}{kT}\right) = C \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta\right) \quad (2.8.16)$$

Постоянную  $C$  находим из нормировки функции распределения:  $\int f(\vec{l})d\Omega = 1$  при интегрировании по всем углам, т.е. из соотношения:

$$C \cdot 4\pi + C \frac{p_0 E}{kT} \iint \text{Cos}\theta \text{Sin}\theta d\theta d\varphi = 1 \quad (2.8.17)$$

Интеграл по углу  $\theta$  равен нулю (физически это ясно, т.к. проекция  $l_z$  принимает одинаково часто положительные и отрицательные значения). Итак, нормировочная постоянная равна:

$$C = \frac{1}{4\pi} \quad (2.8.18)$$

Тогда для функции распределения (2.8.13) и (2.8.16) получаем:

$$f(\vec{l}) = \frac{dn}{nd\Omega} = \frac{1}{4\pi} \left( 1 + \frac{p_0 E}{kT} \text{Cos}\theta \right) \quad (2.8.19)$$

Очевидно, что вектор поляризации  $\vec{P}$  будет параллелен вектору  $\vec{E}$ . Тогда вклад в вектор поляризации от  $dn = nf(\vec{l})d\Omega$  диполей, ориентированных под углом  $\theta$  в телесном угле  $d\Omega$ , равен:

$$|d\vec{P}| = dn \cdot p_0 \text{Cos}\theta = \frac{np_0}{4\pi} \left( 1 + \frac{p_0 E}{kT} \text{Cos}\theta \right) \text{Cos}\theta d\Omega \quad (2.8.20)$$

Откуда полную поляризацию определяем интегрированием по всему телесному углу:

$$P = \int_{4\pi} dP = \frac{np_0}{4\pi} \int \text{Cos}\theta d\Omega + \frac{np_0^2 E}{4\pi kT} \int \text{Cos}^2\theta d\Omega \quad (2.8.21)$$

Так как интегралы равны:

$$\int \text{Cos}\theta d\Omega = 0 \quad \text{и} \quad \iint \text{Cos}^2\theta \text{Sin}\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3},$$

получаем для поляризации следующее выражение:

$$P = \frac{np_0^2}{3kT} E = \alpha E \quad (2.8.22)$$

Таким образом, поляризуемость полярных диэлектриков равна:

$$\alpha = \frac{np_0^2}{3kT} \quad (2.8.23)$$

Важно отметить, что поляризуемость полярных диэлектриков прямо пропорциональна концентрации и обратно пропорциональна температуре. Последнее объясняется тем, что чем выше температура, тем выше кинетическая энергия молекул и тем труднее внешним полем выстроить диполи в одном направлении.

Соответственно, диэлектрическая проницаемость определяется следующим соотношением:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT} \quad (2.8.24)$$

Полученные результаты справедливы и в квантовой механике, они в принципе справедливы до тех пор, пока справедлива статистика Больцмана.

**Примечание 3.** В разложении (2.8.16) следующая поправка к диэлектрической проницаемости появляется не во 2-ом порядке, а в 3-ем порядке по параметру  $(p_0 E/kT)$ , т.к. появляющиеся интегралы по  $d\Omega$  во втором порядке равны нулю.

Если еще, помимо собственного дипольного момента, учесть деформационную поправку к дипольному моменту за счет приложенного внешнего поля, то диэлектрическая проницаемость полярного диэлектрика может быть записана в виде:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta + 4\pi \frac{np_0^2}{3kT} \quad (2.8.25)$$

Деформационная часть не зависит от температуры  $T$ , а ориентационная часть – обратно пропорциональна температуре  $\sim 1/T$ . При экспериментальном исследовании обычно строят график зависимости величины  $(\varepsilon - 1)$  от

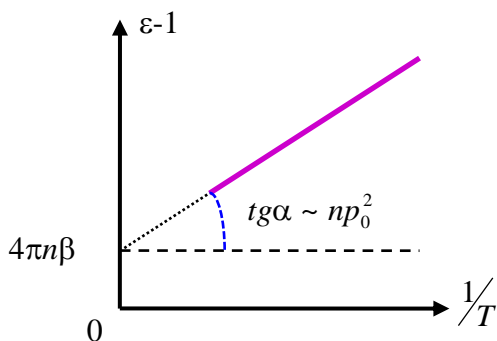


Рис. 8.2.

обратной температуры (см рис. 8.2). По длине отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, определяют поляризуемость молекулы  $\beta$ . По наклону графика определяют собственный дипольный момент  $p_0$  молекулы.

В заключение параграфа посмотрим, насколько хорошо при нормальных температурах выполняется условие  $(p_0 E/kT) \ll 1$ , которое мы использовали

для разложения вероятности в ряд. Для этого рассмотрим собственный дипольный момент  $p_0 = 10^{-18} \text{ CGSE}_p$  при  $T = 300 \text{ K}$ . Теория, представленная выше, применима при следующем условии:

$$E \ll \frac{kT}{p_0} \approx \frac{1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{10^{-18}} = 4 \cdot 10^4 \text{ CGSE}_E \approx 10^7 \text{ B/cm},$$

Отметим, что последнее значение значительно выше напряженности поля, при которой происходит электрический пробой воздуха. Поэтому при

нормальных условиях формулы (2.8.24) и (2.8.25) хорошо описывают электрические свойства полярных и неполярных диэлектриков.

## 2.9. Пьезо и сегнетоэлектричество.

### 2.9.1. Пьезоэлектрики.

При механическом растяжении и сжатии ряда кристаллов в определенных направлениях возникает поляризация: на поверхности образцов появляются заряды. Это явление имеет название *прямого пьезоэлектрического эффекта*. Его обнаружили братья Пьер и Жак Кюри в 1880г.

Пьезоэлектрическими свойствами могут обладать только *ионные кристаллы*. Примеры: кварц, турмалин, сегнетова соль, титанат бария, хлорат натрия и другие кристаллы. При воздействии внешних сил кристаллические решетки положительных и отрицательных ионов деформируются по-разному и в результате в противоположных местах на поверхности кристалла выступают электрические заряды разных знаков.

Поясним механизм проявления эффекта на примере кварца –  $\text{SiO}_2$ . На рисунке 9.1 представлена упрощенная модель кристаллической ячейки кварца, которая просматривается вдоль оптической оси кристалла. Ионы кремния  $\text{Si}^{+2}$  изображены розовыми большими шариками. Два иона кислорода  $\text{O}^-$  объединены и показаны одним голубым шариком (более сложная модель, когда ионы кремния расположены по спирали, в силу чего получается “левый” и “правый” кварц в зависимости от направления спирали). В целом ячейка электрически нейтральна и не имеет электрического дипольного момента.

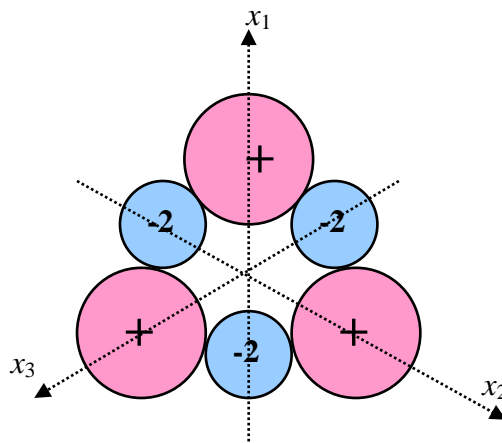


Рис. 9.1.

При сжатии вдоль оси  $x_1$  (перпендикулярно оптической оси, см рис. 9.1 и 9.2,) появляется дипольный момент, направленный в противоположную сторону направления полярной оси  $x_1$ . На верхней плоскости появляется отрицательный заряд, а на нижней плоскости – положительный. Получаем *продольный пьезоэлектрический эффект*.

При сжатии в поперечном направлении, перпендикулярном к оси  $x_1$  и оптической оси, происходит другое смещение ионов. Это приводит к появлению положительных зарядов на верхней плоскости, и отрицательных зарядов – на нижней (рис. 9.3). В этом случае получаем *поперечный*



*пьезоэлектрический эффект.* Замена сжатия растяжением приводит к

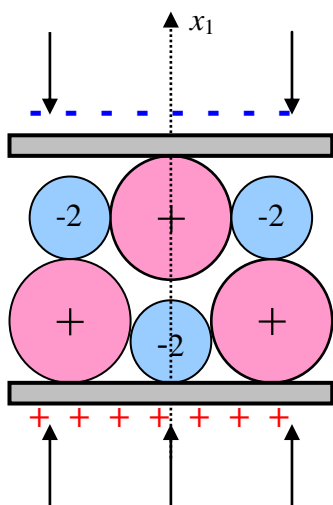


Рис. 9.2.

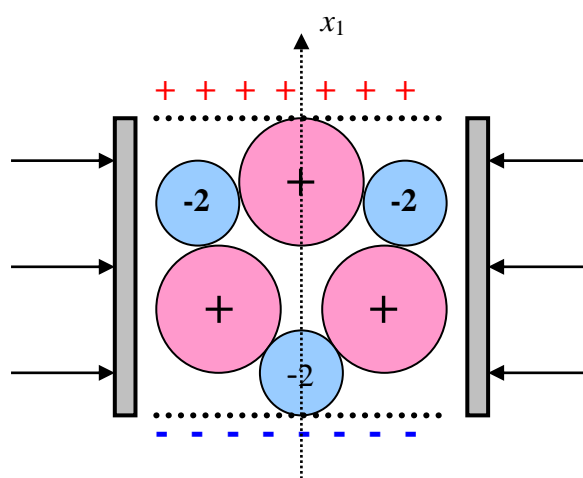


Рис. 9.3.

изменению знака электрических зарядов на плоскостях.

В 1881 году Г. Липпман предсказал существование, а братья Кюри экспериментально подтвердили, *обратного пьезоэлектрического эффекта*. При внесении кристалла в электрическое поле в кристалле возникают механические напряжения, и кристалл деформируется.

У части пьезоэлектриков решетка положительных ионов смещена относительно решетки отрицательных ионов в состоянии термодинамического равновесия. В результате эти кристаллы при определенных конечных температурах оказываются электрически поляризованными даже в отсутствие электрического поля и механических напряжений. В таких случаях говорят, возникает *спонтанная поляризация*. Это так называемые *пироэлектрические* кристаллы (“пир” – огонь). Обычно эффект спонтанной поляризации замаскирован свободными поверхностными зарядами, поэтому эффект смещения решеток выявляется при нагревании кристаллов. Иначе говоря, появление электрического поля наблюдается при нагревании кристалла, пока свободные заряды не успевают его компенсировать. Это явление называется *пироэлектрическим эффектом* или пироэлектричеством. Наиболее известный пример пироэлектрика – турмалин.

Помимо прямого существует и обратный пироэлектрический эффект, состоящий в том, что изменение электрического поля сопровождается изменением температуры пироэлектрика. Наблюдать этот эффект можно в адиабатическом процессе, когда нет отвода или подвода тепла.

Изменение спонтанной поляризации и появление электрического поля в пироэлектриках может происходить не только при изменении температуры, но и при деформировании. Таким образом, все пироэлектрики являются

пьезоэлектриками, однако не все пьезоэлектрики обладают пьезоэлектрическим эффектом. Ниже определенной температуры – **точки Кюри** – пьезоэлектрики являются *сегнетоэлектриками*.

### 2.9.2. Сегнетоэлектрики.

*Сегнетоэлектриками* называются некоторые диэлектрические кристаллы со *спонтанно поляризованными* областями, т.е. наличие поляризации в отсутствие внешнего электрического поля, в определенной области температур. Таким образом, они являются пьезоэлектриками в этой области температур, но при этом на границах температурной области они испытывают фазовые превращения, переходя в новые кристаллические модификации. Последние обычно не имеют спонтанной поляризации. Существуют и другие отличия сегнетоэлектриков от пьезоэлектриков. В частности, направление спонтанной поляризации сегнетоэлектрика может быть изменено на противоположное сравнительно слабым электрическим полем, что не наблюдается в пьезоэлектриках.

Итак, у сегнетоэлектриков существует как полярная фаза, т.е. кристаллическая модификация, в которой имеется спонтанная поляризация, так и неполярная фаза. Переход из полярной фазы в неполярную происходит при температуре Кюри  $T_K$ . Наиболее популярные сегнетоэлектрики: сегнетова соль:  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , титанат бария:  $\text{BaTiO}_3$ . Последний обладает достаточно высокой температурой Кюри ( $T_K = 393 \text{ K}$ ) высокой механической прочностью, большой химической устойчивостью, благодаря чему получил широкое применение.

Диэлектрические свойства сегнетоэлектриков во многих отношениях аналогичны магнитным свойствам ферромагнетиков, в связи с этим их часто называют ферроэлектриками. В сегнетоэлектриках имеются области спонтанной поляризации – *доменная* структура. Области спонтанной поляризации – домены – образуются исходя из минимума свободной энергии. Это также следует из общих принципов термодинамического равновесия.

Полная энергия кристалла сегнетоэлектрика складывается из трех частей:

- 1) суммы внутренних энергий всех доменов,
- 2) энергии внешнего электрического поля,
- 3) поверхностной энергии на границах раздела доменов.

Равновесное состояние при данной температуре достигается, когда полная энергия достигает минимума. В соседних доменах направление вектора спонтанной поляризации различно, а величина — одинакова. В

сегнетоэлектриках домены имеют размеры  $10^{-5} — 10^{-3}$  см, а переходная область между ними (доменная граница, или стенка) имеет ширину  $\sim 10^{-7}$  см.

В неполярной фазе сегнетоэлектрик ведет себя как обычный линейный диэлектрик, в котором поляризация пропорциональна электрическому полю.

При переходе в полярную фазу диэлектрическая проницаемость для сегнетоэлектриков аномально велика и достигает  $\epsilon \sim 6000-7000$  для титаната бария,  $\epsilon \sim 10000$  в максимуме для сегнетовой соли. При наложении внешнего поля диэлектрическая проницаемость и поляризуемость меняются, они также изменяются с температурой. Вблизи точки Кюри имеет место закон Кюри - Вейсса:

$$\alpha = \frac{C}{T - T_0} \quad (2.9.1)$$

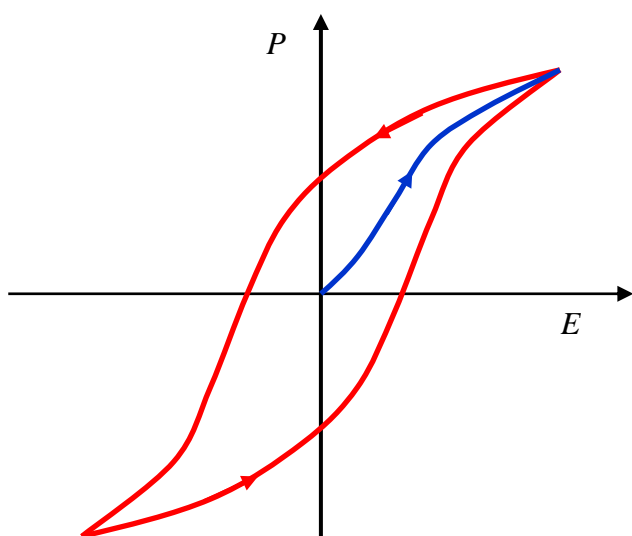


Рис. 9.4.

где  $C$  – постоянная,  $T_0$  – температура Кюри – Вейсса (мало отличается от температуры Кюри).

При наложении внешнего электрического поля происходит частичная переориентация доменов, а также рост одних доменов за счет других. Это приводит к появлению поляризации  $\vec{P}$  в кристалле. При изменении внешнего поля возникает явление *диэлектрического гистерезиса* (см рис. 9.4). Петля гистерезиса наблюдается в

зависимости поляризации  $P$  от внешнего поля  $E$ :  $P = P(E)$ . При снятии внешнего поля остается поляризация сегнетоэлектрика отличная от нуля.

Аналогичные петли гистерезиса получаются, если рассматривать зависимость вектора электрической индукции от напряженности электрического поля  $D = D(E)$ .

---

Примечание 1. *Пьер Кюри, французский физик, 1859-1906, Нобелевская премия 1903 г. за исследования радиоактивности и открытие радия;*  
*Жак Кюри, французский минералог;*  
*Габриэль Липпман, французский физик, 1845-1921, Нобелевская премия 1908 г. за цветную фотографию солнечного спектра;*  
*Пьер Эрнест Вейсс, французский физик, 1865-1940.*

---