

Глава 2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА.

2.1. Принципы специальной теории относительности.

Релятивистская механика – механика без ограничения скорости. Классическая механика, основанная на сформулированных Ньютоном принципах, рассматривает скорости объектов существенно меньшие скорости света $v \ll c$. При этом в классической механике были выдвинуты (в принципе, необоснованно) следующие предположения:

- 1) инвариантность времени: $t = t'$; время считалось абсолютным, инвариантным относительно выбора инерциальных систем отсчета (ИСО);
- 2) инвариантность отрезков длины в различных ИСО:

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ r'_{12} &= \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_{12} = r'_{12}$$

Эти два предположения приводят к преобразованиям Галилея при переходе от одной ИСО к другой:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t' = t \quad (2.1.1)$$

Однако, при движении тел с большой скоростью, близкой к скорости света c , преобразования Галилея приводят к неправильным результатам. Особенно ярко эти проблемы проявились при исследовании скорости света. Принципиальные трудности возникли при описании электромагнитных явлений. Так, уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления – электродинамику, не инвариантны относительно преобразований Галилея.

Принцип относительности Галилея гласит, что все явления механики в любых ИСО протекают одинаково. Иначе, законы, описывающие изменение состояния и движения механических систем, не зависят от того, в какой ИСО они рассматриваются. С другой стороны явления природы не всегда удается разделить на чисто механические и немеханические явления. Однако в результате всестороннего изучения законов природы справедливость принципа относительности была признана для всех явлений как механических, так и немеханических.

Принцип относительности Эйнштейна: *Законы природы, определяющие изменение состояний физических систем, не зависят от того, к какой из двух инерциальных систем отсчета, движущихся одна относительно другой прямолинейно и равномерно, они относятся.*

Иначе, все законы природы одинаковы во всех ИСО. В любой ИСО одинаковы как форма записи законов физики, так и численные значения констант, входящих в эти законы. Невозможно отличить одну ИСО от другой. Это – постулат, и только опыт может подтвердить справедливость этого утверждения (постулата).

На основе этого принципа А. Эйнштейн в 1905 году создал частную или специальную теорию относительности (СТО). СТО появилась также благодаря работам Д. Лармора, А. Пуанкаре и Х.А. Лоренца. Геометрическая интерпретация СТО была разработана Г. Минковским. Были получены новые преобразования – преобразования Лоренца, оставляющие инвариантными уравнения электродинамики Максвелла при переходе из одной ИСО к другой.

Для получения преобразований Лоренца нужно ввести скорость распространения сигнала – скорость света c . Постоянство скорости света – это второй принцип СТО, который вместе с принципом относительности позволяет получить новую релятивистскую теорию:

скорость света в пустоте одинакова во всех ИСО и не зависит от скорости движения источников и приемников света.

Этот постулат необходимо экспериментально проверять.

Итак, основные принципы СТО:

- 1) *принцип относительности Эйнштейна;*
- 2) *принцип постоянства скорости света.*

Справедливость этих принципов проверяется на опыте.

Примечание 1. *Исаак Ньютон, великий английский ученый, создатель классической физики, 1643–1727 гг.;*

Галилео Галилей, итальянский физик, 1564-1642 гг.;

Джеймс Клерк Максвелл, великий английский физик, 1831-1879 гг.;

Альберт Эйнштейн – немецкий физик-теоретик, 1879-1955 гг., Нобелевская премия 1921г. за объяснение законов фотоэффекта

Джозеф Лармор, английский физик-теоретик, 1857-1942 гг.;

Анри Пуанкаре, французский математик и физик, 1854-1912 гг.;

Хенрик Антон Лоренц, нидерландский физик-теоретик, 1853-1928 гг., Нобелевская премия 1902 г. за объяснение расщепления спектральных линий в магнитном поле;

Герман Минковский, немецкий математик и физик, 1864-1909

2.2. Эксперименты по определению скорости света.

2.2.1. О природе и скорости света.

О природе света размышляли с древних времен. Древние мыслители считали, что свет это истечение “атомов“ от предметов в глаза наблюдателя. Так в частности считал Пифагор. Тогда же определили прямолинейность распространения света, считалось, что он распространяется с очень большими скоростями, практически мгновенно. В XVI-XVII веках Р. Декарт, Х. Гюйгенс, Р. Гук исходили из того, что распространение света – это распространение волн в среде. Исаак Ньютон выдвигал корпускулярную

природу света, то есть считал, что свет – это излучение телами определенных частиц и их распространение в пространстве.

В 1801 году Т. Юнг наблюдал интерференцию света, что послужило развитию экспериментов со светом по интерференции и дифракции. И в 1818 году О.Ж. Френель возродил волновую теорию распространения света. Д.К. Максвелл после установления общих законов электромагнитного поля пришел к выводу, что свет – это электромагнитные волны. Далее была выдвинута гипотеза ”мирового эфира”, состоящая в том, что свет это распространение электромагнитных волн в среде – ”эфире”. Знаменитые эксперименты по проверке существования мирового эфира проводились А.А. Майкельсоном и Э.У. Морли (1837-1923 г.г.), а по увлечению света движущейся средой – А.И. Физо. В результате было показано, что мирового эфира (по крайней мере, в том понимании, как считали физики в то время, как некоторая абсолютная неподвижная среда) не существует.

С обнаружением на эксперименте корпускулярных свойств и проявлений света (фотоэффект, эффект Комптона и другие явления) была разработана квантовая природа света М. Планком и А. Эйнштейном, в рамках которой свет проявляет как волновые, так и корпускулярные свойства – так называемый, *корпускулярно – волновой дуализм*.

Скорость света также пытались измерить различными способами, как в естественных, так и в лабораторных условиях. Часть из этих методов рассмотрена ниже в этом параграфе.

Скорость света c – это одна из основных мировых физических постоянных. Перечислим ряд основных фактов, касающихся скорости распространения света и установленных в результате многочисленных экспериментов:

1) Скорость света c является *предельной скоростью движения материальных тел*, постоянна в вакууме и *не зависит от частоты света*. Этот факт проверен в диапазоне длин электромагнитных волн λ от многих километров до очень коротких по длине волны γ -лучей:

$$c = 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ см/с} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

2) Свет имеет электромагнитную природу, распространяется в виде электромагнитных волн, фотонов. Скорость света c входит в уравнения системы уравнений Максвелла, описывающей электромагнитные явления.

3) Скорость света c входит во многие атомные и ядерные постоянные. Например, в постоянную тонкой структуры, которая определяет величину электромагнитного взаимодействия:

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137.04},$$

в магнетон Бора, определяющий магнитный момент микрочастиц:

$$M_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 9 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}.$$

Поэтому экспериментальное определение скорости распространения световых сигналов всегда было важнейшей задачей фундаментальной физики.

Примечание 1. Философы и физики, упоминаемые в этой секции, в дополнение к отмеченным в параграфе 2.1., внесли огромный вклад в развитие представлений о природе света и физики высоких скоростей.

Пифагор – древнегреческий философ и математик, около 580 (570) – 500 (470) лет до нашей эры;

Рене Декарт, французский физик, 1596-1650;

Христиан Гюйгенс, голландский физик, 1629-1695;

Роберт Гук, английский физик, 1635- 1703;

Томас Юнг, английский физик, 1773-1829;

Огюстен Жан Френель, французский физик, 1788-1827;

Альберт Абрахам Майкельсон, американский физик, 1852-1931, Нобелевская премия 1907 г. за создание прецизионные инструменты и выполненные с их помощью спектроскопические и метрологические исследования;

Арман Ипполит Луи Физо, французский физик, 1819-1896;

Макс Карл Эрнст Людвиг Планк - немецкий физик- теоретик, 1858-1947, Нобелевская премия 1918 г. за открытие законов излучения;

Артур Холли Комpton, американский физик, 1892–1962, Нобелевская премия 1927г. за эффект, названный его именем

2.2.2. Астрономические способы определения скорости света.

1). О.К. Ремер наблюдал (1676 г.) затмение спутника Юпитера (J) – *Ио*, открытого еще Галилеем в 1610 году (он также открыл еще 3 спутника Юпитера). Радиус орбиты спутника Ио вокруг Юпитера равен 421600 км,

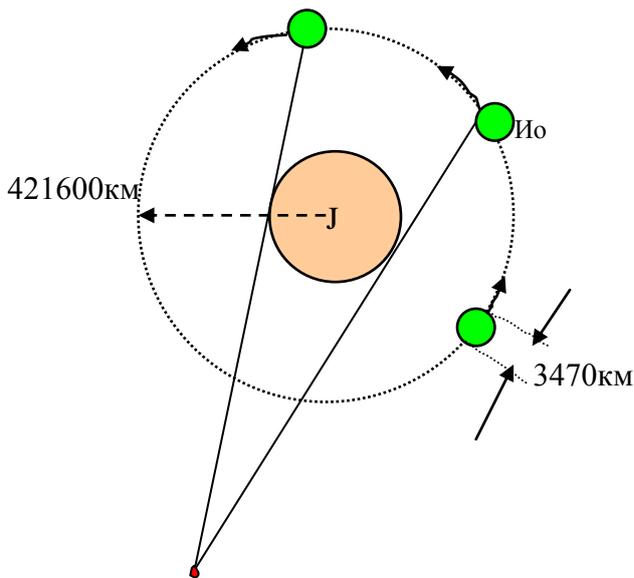


Рис. 2.1.

диаметр спутника – 3470 км (см рис.2.1 и 2.2). Время затмения составляло $\tau_0 = 1.77$ суток = 152928 с. О.К.

Ремер наблюдал нарушение периодичности затмений, и это явление Ремер связал с конечной скоростью распространения света. Радиус орбиты Юпитера вокруг Солнца R_J значительно больше радиуса орбиты Земли R_3 , а период обращения примерно равен 12 лет. То есть за время полуоборота Земли (полгода), Юпитер переместится по орбите на некоторое расстояние и,

если фиксировать время прихода светового сигнала с момента появления Ио из тени Юпитера, то свет должен пройти большее расстояние до Земли в случае 2, чем в случае 1 (см рис. 2.2). Пусть T_1 – момент времени, когда Ио

выходит из тени Юпитера по часам на Земле, а t_1 – реальный момент времени, когда это происходит. Тогда получаем:

$$T_1 = t_1 + \frac{S_1}{c} \quad (2.2.1)$$

где S_1 – расстояние, которое свет проходит до Земли. В следующий выход Ио получаем аналогично:

$$T_2 = t_2 + \frac{S_2}{c} \quad (2.2.2)$$

где S_2 – новое расстояние, которое свет проходит до Земли. Истинный период обращения Ио вокруг Юпитера определяется разностью времен:

$$T_0 = t_2 - t_1 \quad (2.2.3)$$

Конечно, за один промежуток времени, когда происходит одно затмение, трудно определять эти времена с большой

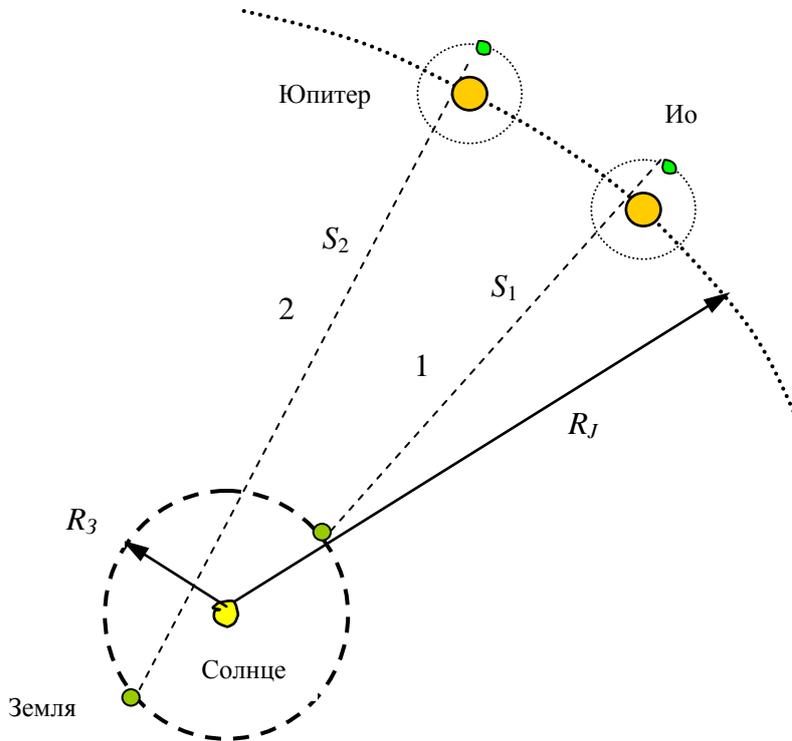


Рис. 2.2.

точностью. Поэтому удобнее вести наблюдения за полгода, когда расстояние до Земли меняется на максимальную величину. При этом истинный период затмения можно определить как среднюю величину за полгода или год. После этого можно определить скорость света после двух последовательных измерений времени выхода Ио из тени:

$$c = \frac{S_2 - S_1}{T_{набл} - T_0} \quad (2.2.4)$$

Величины S_1 и S_2 находятся из астрономических вычислений. Проводя измерения за полгода (когда Земля перейдет на другую сторону своей орбиты), можно получить суммарное время затмения:

$$t_1 = nT_0 + \frac{\Delta S}{c} = nT_0 + \frac{R_J + R_3}{c} - \frac{R_J - R_3}{c} \quad (2.2.5)$$

где n – число затмений за эти полгода. Все остальные промежуточные времена распространения света до Земли сократились, поскольку расстояние меняется слабо за одно затмение. Отсюда Ремер получил скорость света, равную $c = 214300$ км/с.

2). Дж. Брэдли (1725 г.) для измерения скорости света использовал явление абберации звезд, а именно отклонение видимого направления на звезду от истинного направления вследствие сложения скоростей. (Это

явление абберации напоминает падение капель дождя – если они падают вертикально, то на стекле движущейся машины они оставляют след под углом к вертикали). Отклонение направления падающего луча от истинного угла падения равно:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{\perp}}{c} \quad (2.2.6)$$

где v_{\perp} – перпендикулярная составляющая скорости Земли по направлению к звезде. Существует годовая абберация за счет скорости Земли вокруг Солнца и суточная абберация за счет вращения Земли вокруг оси. Зная скорости v_{\perp} и измеряя α , Брэдли получил значение скорости света, близкое к величине, полученной Ремером.

Примечание 2. Оле Кристенсен Ремер, голландский астроном, 1644-1710 гг.;

2.2.3. Лабораторные способы измерения скорости света.

1). Для измерения скорости света Арман Физо (1849г.) применил метод синхронного детектирования. Он использовал быстро вращающийся диск с N зубьями (рис. 2.3), представляющие собой непрозрачные сектора. Между этими секторами (зубьями) свет проходил от источника к отражающему зеркалу и обратно к наблюдателю. При этом угол между серединами секторов равен

$$\alpha = \frac{2\pi}{N} \quad (2.2.7)$$

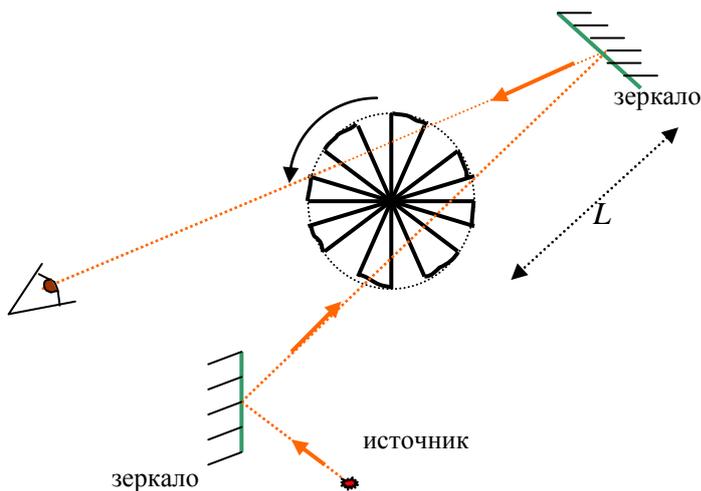


Рис. 2.3.

Угловая скорость вращения подбиралась так, чтобы свет после отражения от зеркала за диском попадал в глаза наблюдателю при прохождении через соседнее отверстие. За время движения света от диска до зеркала и обратно:

$$\tau = \frac{2L}{c} \quad (2.2.8)$$

поворот диска составляет угол

$$\Delta\varphi = \omega\tau = \frac{2L\omega}{c} \quad (2.2.9)$$

Зная расстояние L , угловую скорость диска ω и угол $\Delta\varphi$, при котором появляется свет, можно получить скорость света. Физо получил значение скорости, равное $c = (315300 \pm 500) \text{ км/с}$.

2). Примерно такими же методами экспериментаторы получали уточненное значение скорости света $c = (298000 \pm 500) \text{ км/с}$ (1862 г.), затем $c = (299796 \pm 4) \text{ км/с}$ (А. Майкельсон в 1927 и 1932 г.г.). Позже Бергстранд получил следующее значение для скорости – $c = (299793.1 \pm 0.3) \text{ км/с}$.

3). Отметим здесь один из наиболее точных способов измерения скорости света – метод объемного резонатора, основная идея которого состоит в образовании стоячей световой волны и вычислении числа полуволн на длине резонатора. Основные соотношения между скоростью света c , длиной волны λ , периодом T и частотой ν имеют вид:

$$c = \lambda \nu, \quad \lambda = Tc = \frac{2\pi}{\omega} c \quad \text{и} \quad c = \frac{\omega \lambda}{2\pi} \quad (2.2.10)$$

Здесь также введена круговая частота $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$, которая есть не что иное, как угловая скорость вращения ω амплитуды, если колебания представить как проекцию вращательного движения на ось. В случае образования световой стоячей волны на длине резонатора укладывается целое число полуволн. Находя это число и пользуясь соотношениями (2.2.10), можно определить скорость света.

Последние достижения (1978 г.) дали для скорости света следующее значение $c = 299792.458 \text{ км/с} = (299792458 \pm 1.2) \text{ м/с}$.

2.2.4. Опыты по распространению света в среде.

1). Опыт Армана Физо (1851 г.). Физо рассматривал распространение света в движущейся среде. Для этого пропускал луч света через стоячую и текущую воду и с помощью явления интерференции света сравнивал интерференционные картины, по анализу которых можно было судить об изменении скорости распространения света (см схематичный рисунок 2.4).

Два луча света, отразившись от полупрозрачного зеркала (луч 1) и пройдя его (луч 2) проходят дважды через трубу с водой и затем создают интерференционную картину на экране. Сначала измеряют в стоячей воде, а затем в текущей со скоростью V . При этом один луч (1) движется по течению, а второй (2) – против течения воды. Происходит смещение полос интерференции вследствие изменения разности хода двух лучей. Разность хода лучей измеряется и по ней находится изменение скоростей распространения света. Скорость света в неподвижной среде \tilde{c} зависит от показателя преломления среды n :

$$\tilde{c} = c/n \quad (2.2.11)$$

По принципу относительности Галилея для наблюдателя, относительно которого свет движется в среде, скорость должна быть равна:

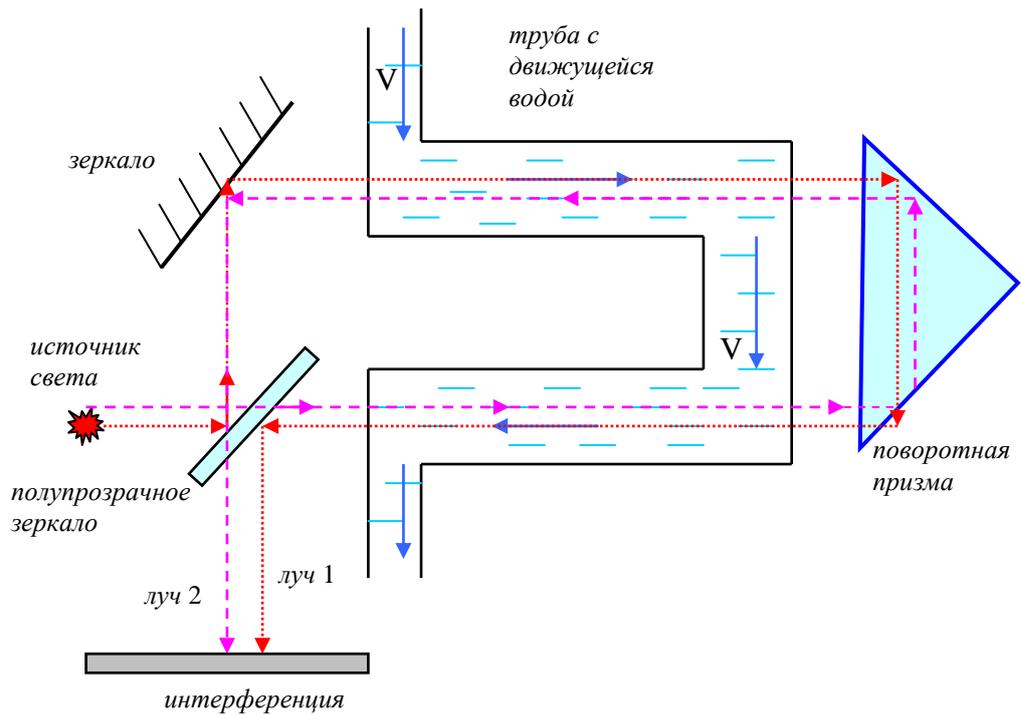


Рис.2.4.

$$v = \frac{c}{n} \pm V \quad (2.2.12)$$

Экспериментально Физо установил, что имеется коэффициент при скорости воды V и поэтому формула выглядит следующим образом:

$$v = \frac{c}{n} \pm \alpha V, \quad (2.2.13)$$

где α – коэффициент увлечения света движущейся средой:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (2.2.14)$$

Таким образом, эксперимент Физо показал, что классическое правило сложения скоростей неприменимо при распространении света в движущейся среде, т.е. свет только частично увлекается движущейся средой. Опыт Физо сыграл важную роль при построении электродинамики движущихся сред. Он послужил обоснованием СТО, где коэффициент α получается из закона сложения скоростей (если ограничиться первым порядком точности по малой величине v/c). *Вывод, который следует из этого опыта, состоит в том, что классические (Галилеевские) преобразования неприменимы при распространении света.*

2). Опыты А. Майкельсона (1881 г.) и Майкельсона - Морли (1885-87 гг.). Цель опытов состояла в измерении влияния скорости Земли на скорость света. В то время считалось, что свет – это колебания эфира, при этом опыт Физо показал, что свет частично увлекается средой. Вопрос, на который

предстояло ответить, состоял в том, чтобы определить есть ли “эфирный ветер”, есть ли преимущественная ИСО?

Майкельсоном был создан новый специальный интерферометр, способный разделять луч света на два луча (рис.2.5). Эти лучи могли распространяться во взаимно перпендикулярных направлениях и в различных средах, а затем собирались в трубе интерферометра, где наблюдались полосы интерференции. Прибор ориентировался так, что одно из плеч интерферометра совпадало с направлением движения Земли, а затем он поворачивался на угол 90° , так что, либо луч 1, либо луч 2 был направлен вдоль скорости Земли V_3 . Компенсатор вставлялся на пути одного из лучей,

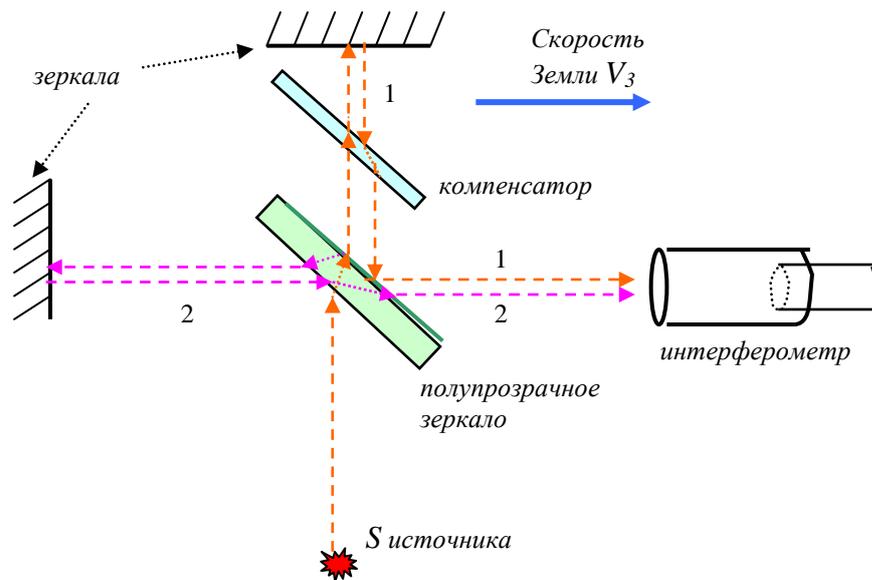


Рис. 2.5.

чтобы компенсировать набег фаз между лучами, получающийся при прохождении лучами полупрозрачного зеркала. При повороте должно было происходить смещение полос интерференции, поскольку менялась разность фаз между двумя лучами. Однако смещения полос обнаружено в эксперименте не было.

Время движения луча света (луч 2 на рисунке) вдоль направления скорости Земли равно:

$$t_2 = \frac{l}{c+V_3} + \frac{l}{c-V_3} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-V_3^2/c^2} \quad (2.2.15)$$

где l – длина плеча интерферометра. Время движения луча света поперек скорости Земли равно:

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - V_3^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V_3^2/c^2}} \quad (2.2.16)$$

поскольку скорость распространения света относительно эфира находится из прямоугольного треугольника (рис.2.6): $v^2 = c^2 - V_3^2$.

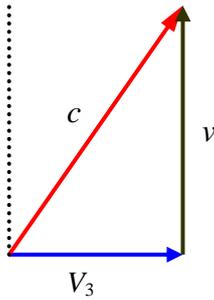


Рис. 2.6.

Результат эксперимента Майкельсона показал: *эфирного ветра нет, скорость света во всех направлениях одинакова.*

Майкельсон и Морли усовершенствовали опыт: цементная плита плавала в ртути, прибор медленно вращался, использовалось многократное отражение от 16 зеркал, за счет чего увеличивалось плечо интерферометра до 11 м. Точность эксперимента увеличилась, однако вывод остался прежним.

3). В настоящее время благодаря использованию лазеров точность экспериментов увеличилась во много раз. Так, в 1964 г. Джасей, А. Джаван, Муррей, Ч. Таунс увеличили точность в 50 раз. Идея эксперимента та же, что у Майкельсона. Пучки света от двух лазеров (см рис. 2.7) были взаимно перпендикулярны и с помощью полупрозрачного зеркала направлялись затем на фотоэлектронный умножитель (ФЭУ считает кванты света).

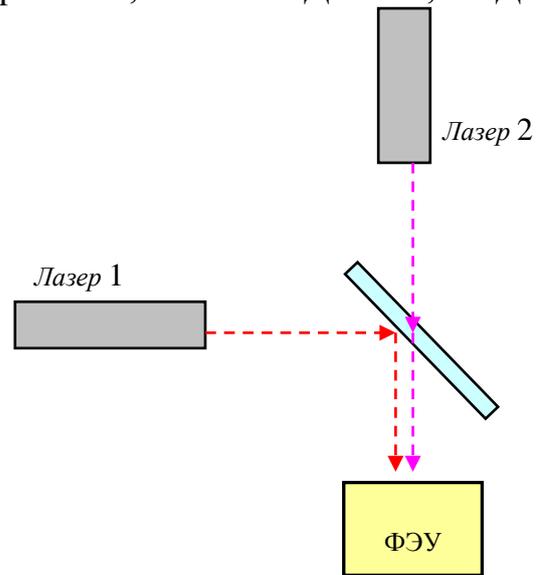


Рис. 2.7.

Рассуждения состоят в следующем: если скорость света зависит от распространения относительно Земли, то частота лазера, на которой он генерирует излучение, должна изменяться при повороте относительно направления движения Земли. Это изменение должно быть пропорционально $\sim V_3^2/c^2$. Если бы частота излучения лазеров слегка изменялась при повороте на 90 градусов, то в фотоэлектронном умножителе возникли бы биения. Экспериментаторы этих биений не наблюдали и дали ограничение на скорость эфирного ветра, что он не превышает 30 м/с.

Итак, на основании полученных результатов вывод состоит в следующем: *скорость света в вакууме изотропна и это справедливо во всех ИСО.*

Примечание 3. Али Джаван, американский физик азербайджанского происхождения, 1926 – 2016;

Чарльз Хард Таунс, американский физик, 1915 – 2015, Нобелевская премия 1964 г. за фундаментальные исследования в области радиофизики, приведшие к созданию лазеров и лазеров

2.2.4. Максимальность скорости света.

Оказывается, что и *численное значение скорости света в вакууме одинаково во всех ИСО*. Этот вывод также был сделан на основании различных экспериментов. Кратко рассмотрим некоторые из них.

1). Эксперименты Р.Дж. Кеннеди и Э.М. Торндайка (1932 г.) и позже Д. Саде (1963 г.). Д. Саде рассматривал распадающиеся электрон-позитронные пары, которые образовывались при столкновении движущихся позитронов со скоростями от 0 до $v \approx c/2$ с электронами мишени. В результате аннигиляции электрон-позитронной пары испускались γ кванты (см рис. 2.8). Саде измерял скорость прихода испущенных γ квантов в пространственно разделенные детекторы. Он получил, что с точностью до 10% скорость квантов была одинакова и равнялась c , независимо от того, с какой скоростью двигался позитрон и электрон-позитронная пара до распада.

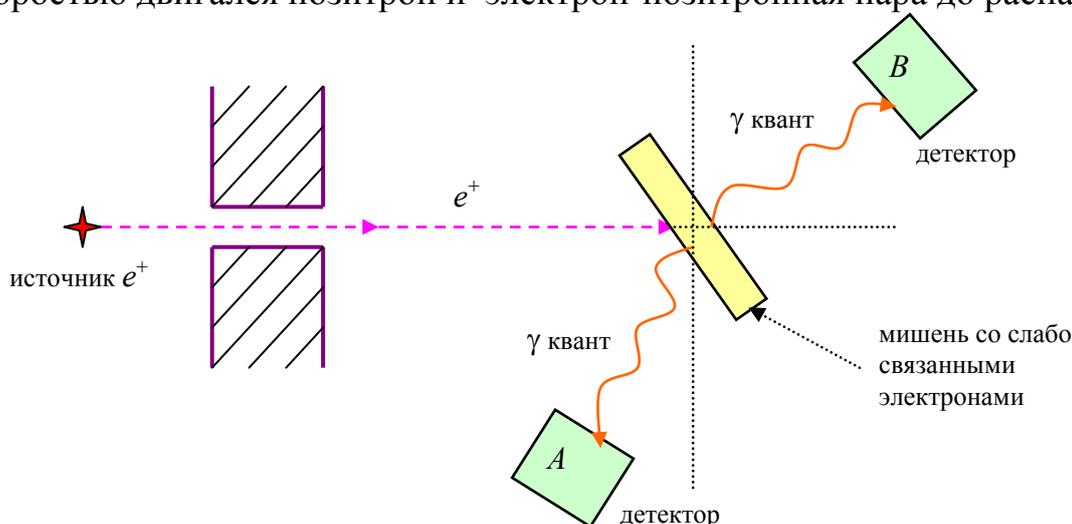


Рис. 2.8.

Выводы многочисленных экспериментов: *скорость света не зависит от взаимного движения источника или приемника*.

2). Опыт Бертоцци (1964г.) – экспериментальная проверка максимальности скорости света для материальных тел. Установка (см рис.2.9) состояла из вакуумной трубы, внутри которой находился источник электронов (испускание электронов происходило за счет явления термоэмиссии), сетки ускоряющих потенциалов и измерительная система. Электроны ускорялись, при этом полная разность потенциалов равна сумме ускоряющих потенциалов. Затем при прохождении рубежа 1, т. е. при прохождении электроном сетки, электрический сигнал подавался на осциллограф, а второй сигнал на него подавался при попадании электрона в коллектор 2. По разности времен прихода сигналов на осциллограф Δt измерялась скорость электронов как $v = L/\Delta t$, где L – расстояние между фиксирующими электродами. Коллектор, сделанный из алюминия, собирал пройденные электроны, при этом еще измерялась температура с помощью термопары, а по нагреву мишени определялась полная кинетическая энергия,

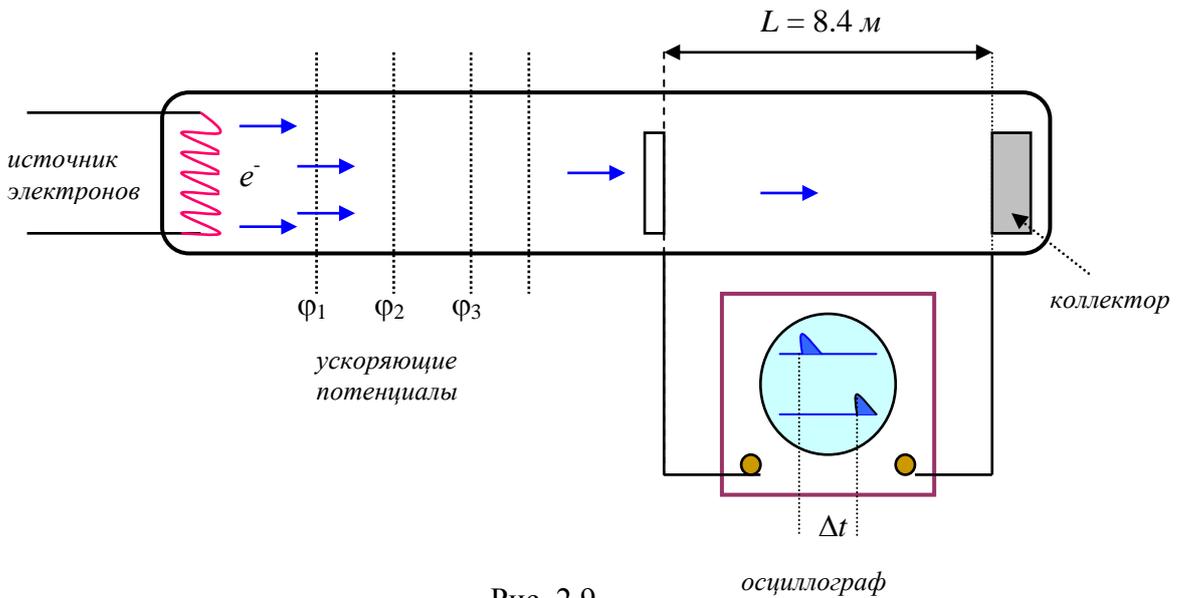


Рис. 2.9.

полученная при сборе электронов. Таким образом, полная энергия электронов равна:

$$E = N_e K = N_e e \varphi \quad (2.2.17)$$

где N_e – число электронов, K – кинетическая энергия каждого электрона, φ – полная разность потенциалов, пройденная электроном. На эксперименте измерялось число пройденных электронов, и отсюда находилась кинетическая энергия электрона. Строился график квадрата скорости от кинетической энергии электрона.

По классической механике должна быть прямая зависимость кинетической энергии от квадрата скорости: $K = \frac{1}{2} m v^2$ (см рис. 2.10).

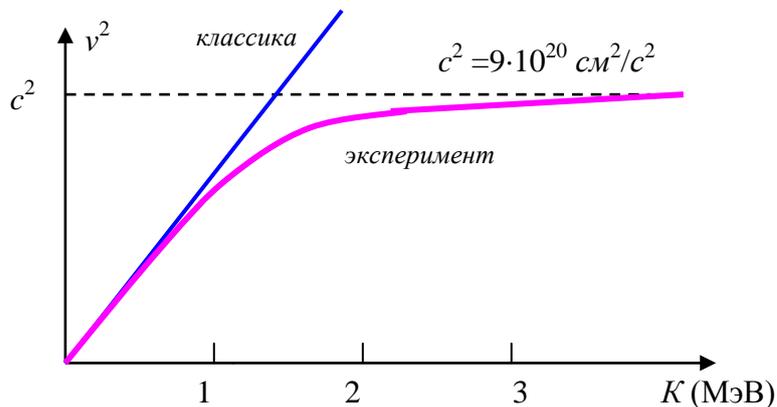


Рис. 2.10.

Эксперимент показал, что зависимость квадрата скорости от кинетической энергии имеет другой вид: кинетическая энергия растет, а скорость ограничена и приближается к своему максимальному значению, равному скорости света.

Итак, было показано, что скорость света – есть *максимально возможная скорость для материальных тел*.

2.3. Замедление времени и сокращение длины. Одновременность событий.

2.3.1. Замедление времени для движущегося наблюдателя.

Рассмотрим эксперимент по определению расстояния с помощью источника света, часов, зеркала и фотоприемника, пользуясь тем, что скорость света одинакова во всех системах отсчета. Рассмотрим сначала в неподвижной системе отсчета – неподвижная установка (рис. 3.1). Расстояние от источника до зеркала L определяется:

$$L = \frac{ct}{2} \quad (2.3.1)$$

где t – время распространения света от источника до приемника.

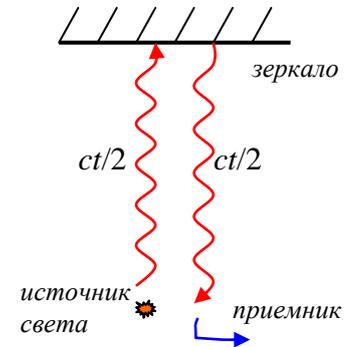


Рис. 3.1.

Теперь рассмотрим то же измерение в установке, движущейся со скоростью V_0 (см рис. 3.2 и 3.3). Пусть система K – лабораторная система отсчета, а система K' связана с движущейся установкой. В системе K' (рис. 3.2) по-прежнему имеем время движения света t' и расстояние $2L$ складывается из $ct'/2$ и $ct'/2$ как в (2.3.1).

В K системе (рис. 3.3) свет идет под углом к зеркалу и, отражаясь, попадает обратно на движущийся приемник также отраженный под углом к

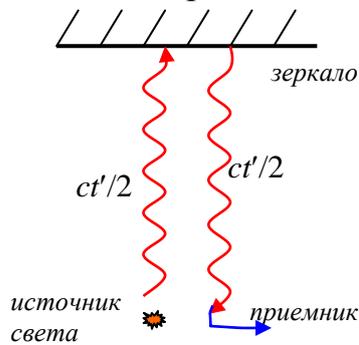
В K' системе

Рис. 3.2.

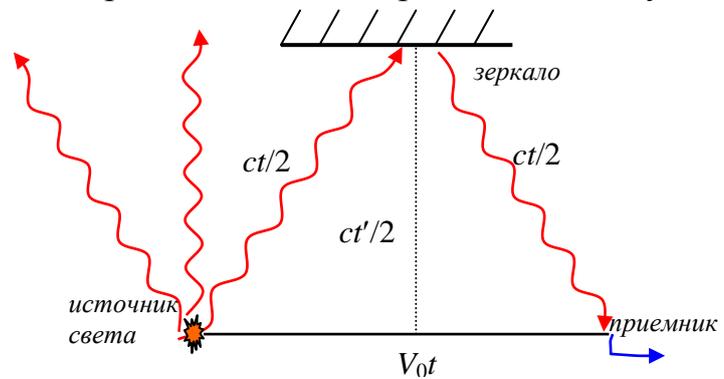
В K системе

Рис. 3.3.

направлению движения. Из теоремы Пифагора следует:

$$\left(\frac{ct}{2}\right)^2 = \left(\frac{ct'}{2}\right)^2 + \left(\frac{V_0 t}{2}\right)^2. \quad (2.3.2)$$

Откуда получаем:

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} < t \quad (2.3.3)$$

Итак, время по часам движущейся системы отсчета прошло меньше, ее часы движутся медленнее, чем часы в неподвижной системе отсчета. Вопрос

теперь состоит в следующем: реальный ли это физический эффект или кажущийся? Действительно ли время в движущейся K' системе идет медленнее, то есть часы отстают по сравнению с часами системы K ? Экспериментальные данные показывают, что этот эффект реальный.

Например, появление элементарных частиц – мюонов – около поверхности Земли как раз связано с замедлением времени для движущегося объекта. В самом деле, мюоны рождаются в верхних слоях атмосферы под действием космических лучей. Время жизни их в неподвижном состоянии $\tau = 2 \text{ мкс}$ (микросекунд). За это время они могли бы пройти путь $l \leq c\tau \sim 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0.6 \text{ км}$. Однако их обнаруживают у поверхности Земли, на расстояниях в нескольких километрах от места рождения. В самом деле, поскольку они летят со скоростью $v = 0.99c$, то по часам Земли время их жизни равно:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2}{0.14} = 14 \text{ мкс}$$

Путь, который они проходят за это время, примерно равен:

$$l \leq ct \sim 14 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 \sim 4.2 \text{ км},$$

что и подтверждается появлением мюонов в нижних слоях атмосферы.

Таким образом, замедление времени в движущемся объекте – *реальный эффект*. Имеется также большое множество других примеров и экспериментальных фактов, подтверждающих этот эффект.

2.3.2. Сокращение длины движущегося тела.

Определим длину движущегося стержня с помощью тех же “приборов”: источника и приемника света и зеркала. В сопутствующей системе отсчета K' (см рис. 3.4), пользуясь соотношением (2.3.3), имеем:

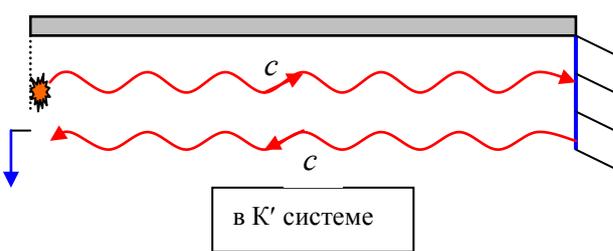


Рис. 3.4.

$$L' = \frac{ct'}{2} = \frac{ct}{2} \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}. \quad (2.3.4)$$

где L' – длина стержня в системе K' (в сопутствующей СО, относительно которой стержень покоится).

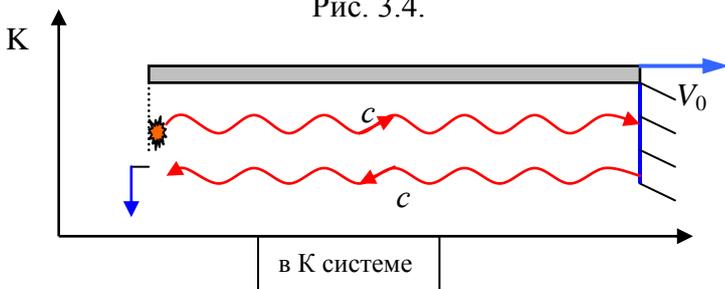


Рис. 3.5.

Рассмотрим процесс измерения длины стержня в лабораторной системе отсчета K (рис. 3.5). Так, время распространения света вдоль стержня в направлении, совпадающем с направлением скорости движения стержня, определяется из уравнения:

$$ct_1 = L + V_0 t_1$$

где L – длина стержня в K системе

отсчета, а $V_0 t_1$ – расстояние на которое зеркало “уедет” за время движения света. Откуда время движения света в одну сторону равно:

$$t_1 = \frac{L}{c - V_0} \quad (2.3.5)$$

Аналогично определяем время распространения света в обратную сторону – против движения стержня:

$$\begin{aligned} ct_2 &= L - V_0 t_2 \\ t_2 &= \frac{L}{c + V_0} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Откуда полное время движения света туда и обратно вдоль стержня для наблюдателя в К системе равно:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - V_0^2} \quad (2.3.7)$$

Выражая время из (2.3.4) и подставляя в последнее уравнение (2.3.7), находим длину движущегося стержня:

$$L' = \frac{c}{2} \frac{2Lc}{c^2 - V_0^2} \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}$$

Итак, получаем:

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} > L \quad (2.3.8)$$

С точки зрения системы, относительно которой тело (стержень) движется, его длина уменьшается по сравнению с длиной в СО, где он покоится.

2.3.3. Синхронизация часов и одновременность событий.

В движущейся ИСО время идет медленнее. Это означает, что если часы K' пролетают мимо часов K со скоростью V_0 и они синхронизируются в тот момент ($t_0 = t'_0 = 0$), когда они находились в одной точке, то спустя t' секунд (по часам системы K') часы системы K будут показывать большее время:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad (2.3.9)$$

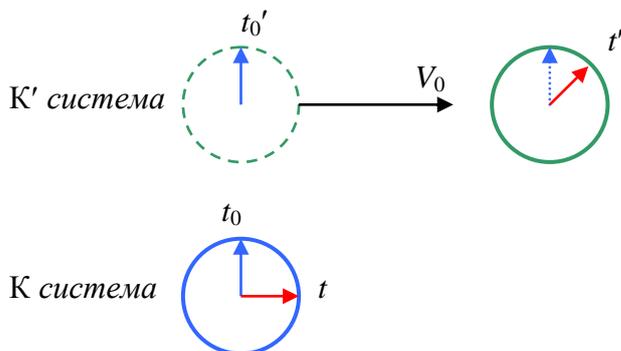


Рис. 3.6.

Если же двое часов находятся в одной ИСО (рис. 3.6), то скорость их хода не должна различаться, и мы можем отсчитывать время по любым часам, если только предварительно синхронизируем их.

Так, если часы находятся в системе K' на расстоянии x' друг от друга, то их можно синхронизировать обычным способом, передавая сигнал (радио, свет) точного времени. Это способ Эйнштейна синхронизации часов. В 0 часов ($t_0' = 0$) посылаем сигнал (световую вспышку) в выбранную точку P в системе K' . Сигнал идет в течение x'/c секунд, поэтому приняв его, наблюдатель в точке P ставит на своих часах сразу время $t' = x'/c$, учитывая запаздывание. Таким образом, часы в точке O' и точке P синхронизированы и можно отсчитывать время по любым из них.

Однако иначе этот процесс выглядит с точки зрения наблюдателя в системе K , относительно которого K' система движется со скоростью V_0 . С его точки зрения пока сигнал точного времени шел из точки O' в точку P , точка P убегала со скоростью V_0 , так что к моменту времени, когда сигнал будет принят в точке P , часы в точке O' покажут уже не x'/c , а большее время. Какое? С точки зрения K -наблюдателя точка P переместится на расстояние $V_0 t'$ за время движения светового сигнала, следовательно, свет потратит на этот путь дополнительное время

$$\Delta t = \frac{V_0 t'}{c} = \frac{V_0 x'}{c^2}$$

Эта разность времен представляет собой постоянное, не меняющееся во времени, смещение показаний часов точки O' относительно показаний часов точки P . Часы O' и P идут с одинаковой скоростью, но часы O' всегда спешат и показывают на Δt секунд больше. Однако это только с точки зрения наблюдателя и часов в системе K , а с точки зрения наблюдателей системы K' их часы показывают одно и то же время. Поэтому, если два события в точках O' и P происходят одновременно по часам K' , то по часам системы K они происходят не одновременно. И наоборот, одновременные события в K воспринимаются как неодновременные события в K' . Это явление и называется *относительной одновременностью*.

Итак, события в различных точках пространства считаются одновременными в данной системе отсчета, если синхронизированные часы, находящиеся в этих точках, показывают одно и то же время. *Понятие одновременности – понятие относительное.*

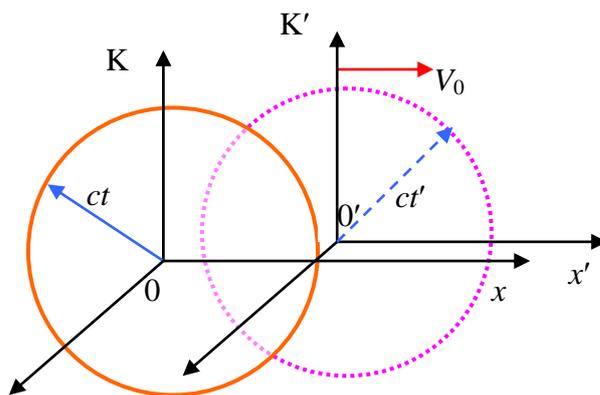


Рис. 3.7.

Рассмотрим пример, представленный на рисунке 3.7: распространение света в двух системах отсчета K и K' . Когда начала систем отсчета совпадали, одновременно испускался свет из этих точек – сферическая волна. В системе K свет за время t достигнет сферы радиуса ct . В системе K' свет за время t' достигнет сферы радиуса

ct' . Одновременно световому фронту невозможно находиться на сфере в системе K и на сфере в системе K' , т.к. центры сфер сместились. Это и означает, что в различных точках пространства и в разных ИСО время течет неодинаково.

Другой пример – распространение света из середины движущегося поезда к его левому и правому концам. С точки зрения пассажира поезда свет одновременно достигнет правый и левый конец поезда, с точки зрения стороннего наблюдателя – в различное время.

2.4. Преобразования Лоренца.

2.4.1. Преобразования из общих свойств пространства и времени.

Воспользуемся общими свойствами пространства и времени для определения преобразований координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Общий вид преобразований¹ координат и времени при переходе от K системы отсчета в K' систему отсчета могут быть записаны в самом общем виде:

$$\begin{aligned}x' &= \Phi_1(x, y, z, t), & y' &= \Phi_2(x, y, z, t), \\z' &= \Phi_3(x, y, z, t), & t' &= \Phi_4(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Из однородности пространства и времени следует *линейность этих преобразований*. В самом деле, если рассмотреть бесконечно малое смещение:

$$dx' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dt,\tag{2.4.2}$$

то из-за однородности пространства и времени это выражение должно оставаться одинаковым во всех точках пространства и времени. Следовательно, частные производные в (2.4.2) должны быть постоянными величинами. Отсюда следует линейность преобразований, то есть они имеют вид:

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A_1x + A_2y + A_3z + A_4t + A_5\tag{2.4.3}$$

То же самое имеем и для остальных функций в (2.4.1). Выберем обе системы отсчета так, что в начальный момент времени $t = 0$ начала координат K и K' систем отсчета совпадают. Тогда автоматически получаем, что коэффициент A_5 равен 0. Итак, преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x' &= \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z + \alpha_4t \\y' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t \\z' &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4t \\t' &= d_1x + d_2y + d_3z + d_4t\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

¹ Вывод аналогичен выводу, приведенному в учебнике А.Н. Матвеева.

Это общие преобразования, которые справедливы при любом направлении относительного движения 2-х систем отсчета.

2.4.2. Преобразования y и z координат.

Итак, рассматриваем 2 инерциальные системы отсчета K и K' (рис. 4.1), причем, как и ранее, оси x и x' совпадают по направлению и K' система движется относительно K системы вдоль оси x со скоростью V_0 . Поскольку оси y и z перпендикулярны относительному движению, рассмотрим сначала их преобразование.

Рассмотрим точку начала координат в обеих системах. Так как оси x и x' совпадают, то для точек $y = z = 0$ следует также, что $y' = z' = 0$ при любых x ,

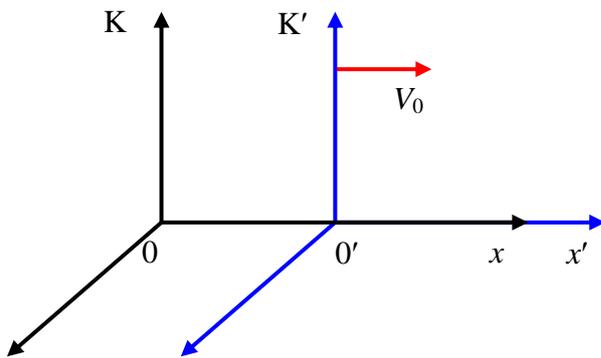


Рис. 4.1.

$y, z,$ и t . Заметим, что меняться могут отрезки – линейные масштабы, а точки всегда переходят в точки в другой системе отсчета. Тогда можно записать из уравнений (2.4.4) для $y' = 0$ и $z' = 0$, соответственно:

$$\begin{aligned} a_1 x + a_3 z + a_4 t &= 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_4 t &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

И так как последние равенства выполняются при любых x, y, z и t

(они все относятся к одной системе отсчета), из (2.4.5) следует, что

$$\begin{aligned} a_1 = a_3 = a_4 &= 0 \\ b_1 = b_2 = b_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Следовательно, из (2.4.4) остается зависимость координат y и z соответственно друг от друга, причем в силу равноправности этих осей по отношению к оси x коэффициенты одинаковы:

$$y' = ay, \quad z' = az \quad (2.4.7)$$

Можно записать из (2.4.7) обратное преобразование:

$$y = \frac{1}{a} y', \quad z = \frac{1}{a} z' \quad (2.4.8)$$

Из-за равноправия систем отсчета при переходе от одной ИСО к другой длина масштаба должна измениться точно также как при обратном переходе, то есть из (2.4.7) и (2.4.8) следует:

$$\frac{1}{a} = a \quad \text{и} \quad a^2 = 1 \quad (2.4.9)$$

Отсюда получаем 2 решения $a = \pm 1$. Выбираем решение $a = 1$, при этом выборе оси y и y' , также как и z и z' , сонаправлены. Отметим, что при коэффициенте $a = -1$ соответствующие оси направлены в противоположные стороны. Итак, окончательно получаем преобразования для y и z координат:

$$y = y', \quad z = z' \quad (2.4.10)$$

То есть при переходе от К системы отсчета к К' системе перпендикулярные к направлению движения масштабы не изменяются: *y и z координаты неизменны.*

2.4.3. Преобразования x и t координат.

Поскольку координаты y и z при переходе из одной ИСО в другую связаны отдельно (2.4.10) и не зависят от x и t , то последние могут быть связаны только друг с другом. Поэтому запишем:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \delta t \\ x &= \gamma' x' + \delta' t' \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Воспользуемся равноправностью ИСО и постулатом о постоянстве скорости света и рассмотрим эти преобразования поэтапно.

1). Рассмотрим точку начала координат системы К'. Точка начала координат К' системы относительно К системы движется с постоянной скоростью V_0 и имеет следующие координаты: $x = V_0 t$ и $x' = 0$. Поэтому, подставляя эти координаты в первое уравнение (2.4.11), имеем:

$$0 = \gamma V_0 t + \delta t \quad \text{и} \quad \delta = -\gamma V_0$$

Далее подставляя в (2.4.11), получаем:

$$x' = \gamma(x - V_0 t) \quad (2.4.12)$$

2). Аналогично рассмотрим движение начала координат системы отсчета К. С точки зрения наблюдателя в К системе имеем $x = 0$, а с точки зрения К' системы $-x' = -V_0 t'$. Тогда получаем из второго уравнения (2.4.11) следующее выражение:

$$x = \gamma'(x' + V_0 t') \quad (2.4.13)$$

3). Докажем, что $\gamma' = \gamma$. Для этого измеряем длину стержня в двух ситуациях.

Пусть стержень покоится в К' системе (рис. 4.2), тогда его длина в этой системе равна разности координат левого и правого концов стержня:

$$l = x_2' - x_1' \quad (2.4.14)$$

Длина стержня с точки зрения наблюдателя в К системе – разность координат концов стержня, взятых в одно и то же время, например t_0 , в К системе отсчета. Тогда пользуясь (2.4.12), имеем для этих координат следующие соотношения:

$$x_1' = \gamma(x_1 - V_0 t_0), \quad x_2' = \gamma(x_2 - V_0 t_0)$$

Следовательно длина движущегося стержня в К системе отсчета равна:

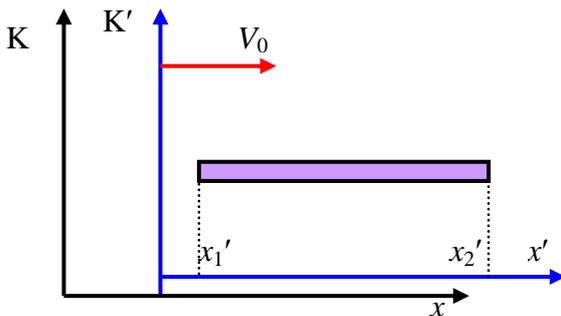


Рис. 4.2.

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\gamma} = \frac{l}{\gamma} \quad (2.4.15)$$

Пусть теперь стержень покоится в К системе (рис. 4.3), тогда его длина в этой системе равна:

$$l = x_2 - x_1 \quad (2.4.16)$$

Пользуясь (2.4.13), имеем для этих координат следующие соотношения, взятых также в один момент времени t_0' :

$$x_1 = \gamma'(x_1' + V_0 t_0'), \quad x_2 = \gamma'(x_2' + V_0 t_0')$$

Беря разность координат, имеем:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\gamma'} = \frac{l}{\gamma'} \quad (2.4.17)$$

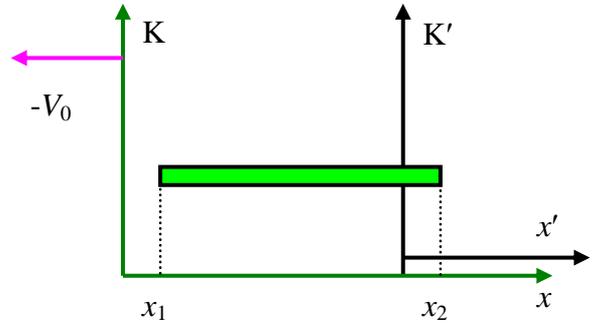


Рис. 4.3.

В силу равноправности систем отсчета измерение покоящегося стержня должно давать один и тот же результат, поэтому получаем:

$$\frac{l}{\gamma} = \frac{l}{\gamma'}$$

и отсюда имеем:

$$\gamma = \gamma'. \quad (2.4.18)$$

4). Получим коэффициент γ из постулата о постоянстве скорости света. Пусть световой сигнал испускается из начала координат систем K' и K в момент времени $t = t' = 0$. Тогда координаты светового сигнала в этих системах равны:

$$x' = ct', \quad x = ct \quad (2.4.19)$$

Подставим в (2.4.19) преобразования (2.4.12) и (2.4.13):

$$ct' = \gamma(x - V_0 t), \quad ct = \gamma(x' + V_0 t')$$

И далее снова используя (2.4.19) для подстановки x' и x , получаем:

$$ct' = \gamma t(c - V_0), \quad ct = \gamma t'(c + V_0) \quad (2.4.20)$$

Перемножая уравнения (2.4.20) и сокращая временные множители, получаем коэффициент γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad (2.4.21)$$

Тогда *преобразование координат* x' и x имеет вид:

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad (2.4.22)$$

Преобразование для времени получаем из формул (2.4.12) и (2.4.13), предполагая (2.4.18) и (2.4.21):

$$x' = \gamma(x - V_0 t), \quad x = \gamma(x' + V_0 t'). \quad (2.4.23)$$

Из второго уравнения выражаем $V_0 t'$ и подставляем x' из первого:

$$V_0 t' = \frac{x}{\gamma} - x' = \frac{x}{\gamma} - \gamma(x - V_0 t) = \gamma V_0 t - x \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) = \gamma V_0 t - x \frac{\frac{V_0^2}{c^2}}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}$$

Отсюда для *преобразования времени* получаем:

$$t' = \frac{t - \frac{V_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}. \quad (2.4.24)$$

Итак, получаем *преобразования Лоренца* при переходе из К системы отсчета в К':

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{V_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (2.4.25)$$

Обратное преобразование при переходе из К' в К систему записывается:

$$x = \frac{x' + V_0 t'}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{V_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.4.26)$$

Иногда удобнее писать преобразования Лоренца, вводя величину β :

$$\beta \equiv V_0/c \quad (2.4.27)$$

или величину γ из (2.4.21). То есть можно записать преобразования в виде:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - V_0 t), & y' &= y, \\ t' &= \frac{t - \frac{V_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(t - \frac{V_0}{c^2} x \right), & z' &= z \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Аналогично преобразования записываются в обратную сторону (2.4.26), при переходе от "штрихованных" координат к координатам К системы.

При скоростях значительно меньших скорости света $V_0 \ll c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея

$$x' \approx x - V_0 t, \quad t' = t, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (2.4.29)$$

Таким образом, выполняется принцип дополнительности: новая теория (новые преобразования координат) включает в себя предыдущую в предельном случае малых скоростей объектов.

2.5. Следствия из преобразований Лоренца.

2.5.1. Одновременность событий в различных ИСО.

Рассмотрим одновременность событий в различных системах отсчета. Исходим из преобразований Лоренца

$$x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{V_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{t - \frac{V_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.5.1)$$

где V_0 – скорость K' системы отсчета относительно K системы отсчета вдоль оси x . Из этих соотношений получаем следующие выводы.

- 1) Если в K системе отсчета два события происходят в одной точке $x_1 = x_2$ и одновременно $t_1 = t_2$, то в K' системе они происходят также в одной точке $x'_1 = x'_2$ и одновременно $t'_1 = t'_2$.
- 2) Если в K системе отсчета два события происходят одновременно $t_1 = t_2$ в разных точках $x_1 \neq x_2$, то в K' - системе они разобщены: эти события происходят в разные моменты времени $t'_1 \neq t'_2$ и в разных точках $x'_1 \neq x'_2$. Эти выводы следуют из (2.5.1), если рассмотреть координаты и времена для двух точек и взять их разность. Об этом говорят, как об *относительности одновременности событий*.

2.5.2. Сокращение отрезков длины.

Рассмотрим стержень, движущийся относительно K системы отсчета со скоростью V_0 (рис. 5.1). Удобно ввести K' систему отсчета, связанную со стержнем, то есть стержень покоится в K' системе отсчета. Измерим длину этого стержня в K системе. Из преобразований Лоренца (2.4.25) для координаты x получаем для левого и правого концов стержня:

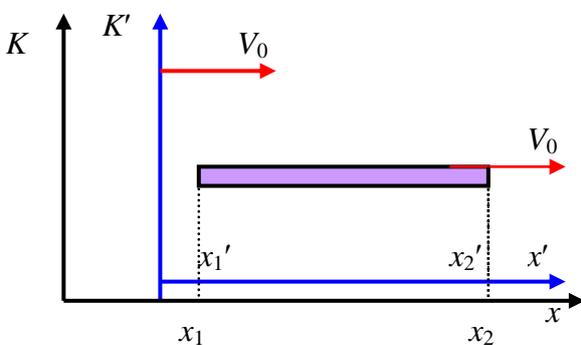


Рис. 5.1.

$$x'_1 = \frac{x_1 - V t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - V t_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.5.2)$$

Для измерения длины стержня в K системе необходимо фиксировать (измерять) координаты левого и правого концов стержня в один и тот же момент времени по часам K системы $t_1 = t_2$. Тогда разность координат $l = x_1 - x_2$ и определяет длину стержня в данной системе.

Вычитая первое уравнение (2.5.2) из второго и учитывая одинаковое время измерения $t_1 = t_2$, получаем:

$$x_2' - x_1' \equiv l_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.5.3)$$

Здесь мы ввели величину l_0 – *собственную длину* стержня, то есть длину стержня в системе отсчета, относительно которой стержень покоится. Таким образом, получаем, что длина стержня в системе К, относительно которой стержень движется, сокращается:

$$l = l_0 \sqrt{1 - V_0^2 / c^2} \quad (l < l_0) \quad (2.5.4)$$

Вывод: *сокращаются продольные размеры движущегося объекта.* Собственная длина l_0 всегда является наибольшей длиной.

2.5.3. Преобразование промежутков времени.

Рассмотрим два момента времени в одной и той же точке в движущейся К' системы отсчета, например, рождение движущейся частицы и ее распад через некоторое время. Из преобразований Лоренца (2.4.26) имеем для двух моментов времени в К системе отсчета:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V_0}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V_0}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.5.5)$$

Полагая равенство координат $x_1' = x_2'$ в К' системе отсчета, связанной с частицей, получаем для промежутков времени

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.5.6)$$

Здесь промежуток времени $\Delta t' = \Delta t_0$ – *собственное время*, т.е. время между двумя событиями в одной и той же точке координатного пространства. Иначе, собственное время – время жизни частицы в системе отсчета, где она покоится. Δt – это промежуток времени по часам системы К, относительно которой движется частица. Таким образом, получаем замедление течения времени в движущихся объектах:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2}} \quad (\Delta t > \Delta t_0) \quad (2.5.7)$$

Вывод: *течение времени замедляется в движущейся системе отсчета.* При этом собственное время является самым коротким временем.

2.5.4. Преобразование скорости, сложение скоростей.

Скорость материальной точки в каждой системе отсчета должна определяться по линейке и часам именно этой системы. Таким образом скорости в К и К' системах отсчета равны, соответственно:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \quad (2.5.8)$$

Рассмотрим компоненты вектора скорости (рис. 5.2). Для этого возьмем малые приращения (дифференциалы) в преобразованиях Лоренца, например, в (2.4.26):

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz' \quad (2.5.9)$$

Делим приращение координат dx на дифференциал времени dt :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V_0 dt'}{dt' + \frac{V_0}{c^2} dx'} = \frac{dx'/dt' + V_0}{1 + \frac{V_0}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{V_0}{c^2} dx'} = \frac{dy'}{dt'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{V_0}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \dots$$

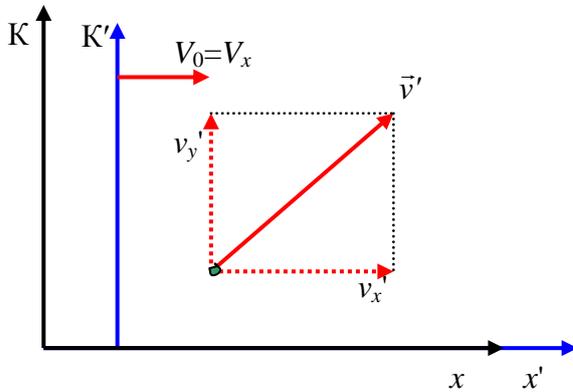


Рис. 5.2.

Учитывая определение скорости в K' системе отсчета (2.5.8), получаем формулы для преобразования компонент скорости при переходе от K' системы отсчета к K системе:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + V_0}{1 + \frac{v'_x V_0}{c^2}} \quad (2.5.10)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v'_x V_0}{c^2}} \quad (2.5.11a)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v'_x V_0}{c^2}} \quad (2.5.11б)$$

Обратные преобразования имеют вид:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V_0}{1 - \frac{v_x V_0}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_x V_0}{c^2}} \quad (2.5.12)$$

Эти же формулы (2.5.10) - (2.5.12) дают правила сложения скоростей. Рассмотрим некоторые свойства этих преобразований:

1) При малых скоростях: $V_0 \ll c$ получаем правила сложения скоростей Галилея

$$v_x \approx v'_x + V_0, \quad v_y \approx v'_y, \quad v_z \approx v'_z \quad (2.5.13)$$

2) Если объект движется со скоростью света в K' системе отсчета $v'_x = c$, то в системе K имеем:

$$v_x = \frac{c + V_0}{1 + \frac{V_0}{c^2}} = c \quad (2.5.14)$$

Получаем, что скорость света во всех ИСО одинакова и равна скорости света c . Получили результат, который был заложен при выводе преобразований Лоренца. Не существует материальных объектов, движущихся со скоростью большей скорости света.

Примечание 1. Со скоростью больше света могут двигаться не материальные объекты, а, говоря условно, “солнечные зайчики”. Например, парадокс “ножниц” (см рис. 5.3): прохождение стержня через границу (ось x). Геометрическая точка пересечения оси x и стержня – точка A – может перемещаться по оси x быстрее скорости света. В самом деле, имеем:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{V}{V_A},$$

где V – скорость стержня, а V_A – скорость передвижения точки A . Откуда при малых углах ϕ :

$$V_A = \frac{V}{\operatorname{tg} \phi} \approx \frac{V}{\phi} \quad (2.5.15)$$

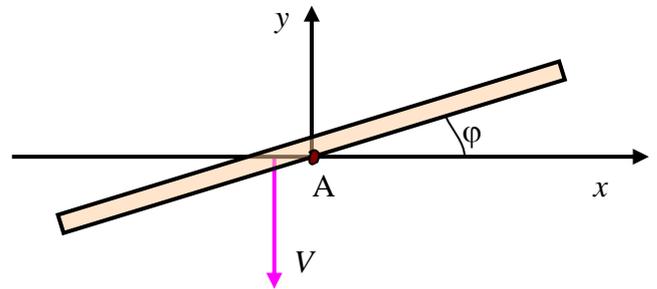


Рис. 5.3.

видно, что скорость точки A может быть сколь угодно большой, в частности больше скорости света. Аналогичный пример, падающая волна на берег: падающий фронт волны распространяется по берегу со скоростью, зависящей от угла падения волны. И в том и в другом случае мы имеем дело не с передвижением материального объекта, а со скоростью передвижения некоторой геометрической точки, которая не может переносить информацию. Информация может передаваться в том случае, если воздействовать на стержень, например ударить вдоль оси y и точка A сместится вправо. Однако в этом случае скорость перемещения точки A не превышает скорости распространения акустических волн (волн деформации).

К этому же явлению относится эффект “солнечного зайчика” (рис. 5.4), который распространяется по стенке со скоростью большей скорости света при достаточно быстром повороте отражающего зеркала.

Можно рассмотреть прожектор, вращающийся вокруг оси, при этом луч света вращается. В этой плоскости вращения на большом расстоянии друг от друга, но на равном расстоянии от прожектора, находятся две точки A и B . Если ω – угловая скорость вращения, то всегда можно найти такое расстояние между точками, что $\omega r = v_s > c$, где v_s – скорость зайчика. Однако эта скорость также не несет никакой информации. Еще аналогичный пример: скорость перемещения луча на экране ряда осциллографов может также превышать скорость света.

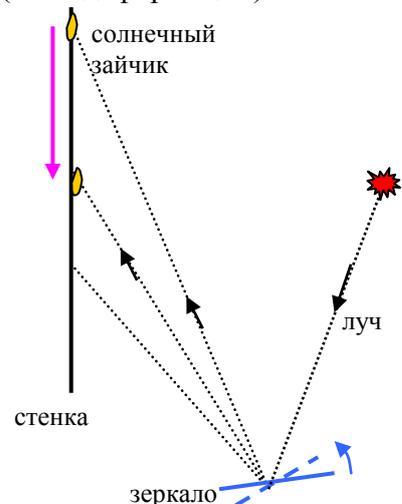


Рис. 5.4.

2.5.5. Примеры проявлений релятивистских эффектов.

1) Время жизни мезона.

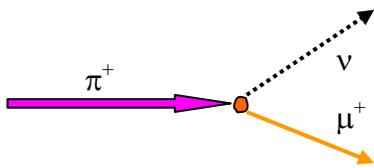


Рис. 5.5.

Собственное время жизни π^+ мезона, который осуществляет взаимодействие между нуклонами в ядре, составляет $\tau_0 = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$. π^+ мезон распадается на μ^+ мезон и нейтрино ν (масса π^+ мезона $m_{\pi^+} \sim 273 m_e$, масса μ^+ мезона $m_{\mu^+} \sim 215 m_e$). За это время максимальное расстояние,

которое он может пройти до распада составляет:

$$l \sim \tau_0 c = 2.5 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 7.5 \text{ м} \quad (2.5.16)$$

Тем не менее, от источника π^+ мезонов (например, Бэватрон в лаборатории Лоуренса, США) частицы долетают до водородной пузырьковой камеры, находящейся на расстоянии ~ 100 метров. Так проводились эксперименты по измерению времени жизни π^+ мезонов (Дарбин, Лоар, Хевенс 1952). Скорость π^+ мезонов была близка к скорости света так, что $\beta = v/c = (1 - 5 \cdot 10^{-5})$. Пользуясь преобразованием временных интервалов (2.5.7), находим время жизни мезонов в лабораторной системе отсчета:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2.5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1-(1-5 \cdot 10^{-5})^2}} \approx 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ с} \quad (2.5.17)$$

За это время π^+ мезон пролетает расстояние ~ 750 метров.

Аналогично получаем то же для других элементарных частиц (μ^+ мезонов, например). Вообще замедление времени проверялось непосредственно в 70-х годах, когда поместили точные атомные часы на самолете и на Земле (см А.Н. Матвеев, т.1, стр.97-99). Самолет находился около суток в воздухе, передвигаясь с крейсерской скоростью, затем при приземлении сравнивались показания часов. Часы на Земле показывали несколько большее время, чем часы на самолете.

2) Абберация неподвижных звезд.

Абберация – это отклонение видимого положения звезды на небе от истинного положения. Любая точка, неподвижная в системе К,

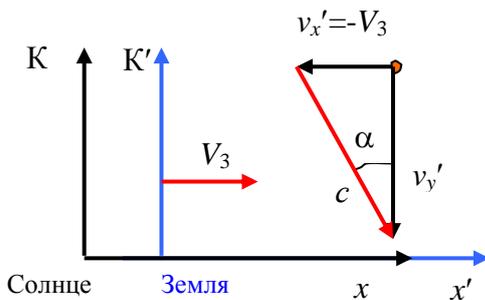


Рис. 5.6.

в системе К' (Земля) со скоростью $v_x' = -V_3$. Пусть звезда в системе Солнца находится непосредственно над наблюдателем, тогда свет от звезды в системе К' будет попадать в глаза под некоторым углом α к вертикали (рис.5.6), т.е. к истинному положению точки. Сосчитаем угол отклонения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|v_x'|}{v_y'} = \frac{V_3}{v_y'} \quad (2.5.18)$$

Вертикальную компоненту скорости получим из формул преобразования скорости (2.5.12), учитывая, что вертикальная скорость (а другой компоненты нет, т.к. $v_x = 0$) в системе Солнца равна скорости света $v_y = c$:

$$v_y' = v_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-V_3 v_x/c^2} = c\sqrt{1-\beta^2} = c\sqrt{1-V_3^2/c^2} \quad (2.5.19)$$

где скорость Земли $V_3 = 30 \text{ км/с}$. Откуда имеем выражение для угла абберации:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_3}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad \operatorname{Sin}\alpha = \frac{V_3}{c} \quad (2.5.20)$$

Когда производятся наблюдения в течение года, то положение звезды на небе “плавает” около истинного положения звезды из-за изменения направления скорости Земли относительно Солнца.

Если $V_3 \ll c$ (или $c \rightarrow \infty$), то получаем абберацию в рамках механики Ньютона: $\operatorname{tg}\alpha = V_3/c$.

3) Эффект Доплера

Эффект Доплера – изменение частоты волны при переходе от одной системы отсчета к другой. Сначала рассмотрим волну (подробнее о волнах см Глава 4), распространяющуюся вдоль оси x , в K и K' системах отсчета (рис. 5.7) со скоростью света c :

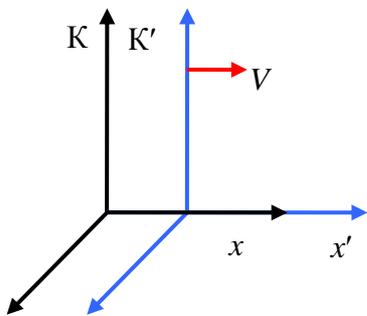


Рис. 5.7.

$$E(x,t) = E_0 \operatorname{Cos}\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right), \quad (2.5.21)$$

$$E'(x',t') = E_0' \operatorname{Cos}\left(\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \alpha'\right)$$

Здесь E_0 – амплитуда колебаний проекции вектора *напряженности электрического поля*, ω – *круговая частота* колебаний, выражение под косинусом определяют *фазу волны* в данной точке и данное время

$$\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha = \omega t - \frac{\omega}{c}x + \alpha = \omega t - kx + \alpha \quad (2.5.22)$$

$k = \omega/c$ – *волновое число*, α – нулевая фаза.

Заметим, что в общем случае фаза волны - инвариантна во всех ИСО, т.е. можно записать

$$\omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega' t' - \vec{k}'\vec{r}', \quad (2.5.23)$$

здесь $\vec{k} = \omega\vec{v}/v^2$ – волновой вектор, \vec{v} – скорость распространения волны (в нашем случае $v = c$). Здесь фазы волны записаны так, что начала отсчета K и K' систем совпадают в момент времени $t = t' = 0$. Инвариантность фазы доказывается по числу волн (например, максимумов), проходящих через

одного и другого наблюдателя, находящихся в различных ИСО (см Сивухин Д.М. том IV, стр.652).

Положим без ограничения общности нулевую фазу равной $\alpha = 0$. Подставим в фазу волны (2.5.22), распространяющейся в K' системе, x' и t' через x и t по формулам преобразования Лоренца (2.5.1):

$$\omega' \left(\frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x - Vt}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \omega' \left(\frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{V}{c} \right) - \frac{x}{c\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{V}{c} \right) \right) = \omega' \frac{1 + \frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

Поскольку фаза должна иметь тот же вид, что в K системе отсчета, получаем:

$$\omega = \omega' \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega' \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \quad (2.5.24)$$

Эта формула описывает так называемый *продольный эффект Доплера*. Пусть теперь ω ($= \omega'$) – частота, принимаемая приемником, ω_0 ($= \omega$) – частота источника, V – скорость источника. Тогда, если источник и приемник удаляются друг от друга, имеем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (2.5.25)$$

при этом происходит смещение частоты в длинноволновую область. Если приемник и источник сближаются, то принимаемая частота увеличивается:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.5.26)$$

Теперь рассмотрим эффект Доплера в общем случае. Пусть источник (И) расположен в K' системе, а приемник (Пр) в K системе (см рис. 5.8), причем направление распространения волны составляет угол φ с осью x . Плоская волна в K системе отсчета записывается:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = E_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = \\ &= E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x \cos \varphi}{c} - \frac{y \cos \alpha}{c} - \frac{z \cos \gamma}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

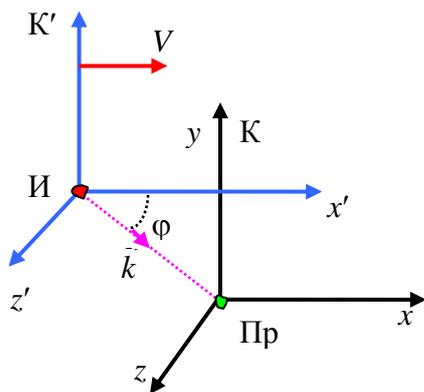


Рис. 5.8.

Здесь мы воспользовались соотношениями типа

$$k_x x = \frac{\omega x}{c_{ph}} = \frac{\omega x}{c / \cos \varphi} = \frac{\omega x \cos \varphi}{c}, \quad (2.5.28)$$

Отметим, что фазовая скорость волны вдоль оси x больше скорости света и определяется следующим выражением

$$c_{ph} = \frac{c}{\text{Cos}\varphi} > c. \quad (2.5.29)$$

Запишем общую фазу волны и подставим преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} \omega \left(t - \frac{x}{c} \text{Cos}\varphi - \frac{y}{c} \text{Cos}\alpha - \frac{z}{c} \text{Cos}\gamma \right) &= \omega \left(\frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x' + Vt'}{c\sqrt{1-\beta^2}} \text{Cos}\varphi - \frac{y'}{c} \text{Cos}\alpha - \frac{z'}{c} \text{Cos}\gamma \right) = \\ &= \omega t' \left(\frac{1-\beta \text{Cos}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) - \frac{\omega x' \beta - \text{Cos}\varphi}{c \sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\omega y'}{c} \text{Cos}\alpha - \frac{\omega z'}{c} \text{Cos}\gamma = \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z' \end{aligned}$$

Таким образом, из сравнения полных фаз получаем:

$$\omega' = \omega_H = \omega \frac{1-\beta \text{Cos}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_{Pr} \frac{1-\beta \text{Cos}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.5.30)$$

Окончательно получаем формулу описывающую изменение частоты – эффект Доплера в общем случае:

$$\omega_{Pr} = \omega_H \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \text{Cos}\varphi} \quad (2.5.31)$$

При углах $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, т.е. при сближении И и Пр, получаем “**синее**” смещение частоты (частота увеличивается).

При углах $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, т.е. при удалении И и Пр, получаем “**красное**” смещение частоты (частота уменьшается).

При угле $\varphi = \pi/2$, также получаем смещение частоты – *поперечный эффект Доплера*:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} \quad (2.5.32)$$

Это смещение частоты в красную сторону – чисто релятивистский эффект. Он мал: смещение частоты $\sim \beta^2$. Впервые его наблюдал на каналовых лучах Айве в 1932 году.

Примечание 2. Христиан Доплер, австрийский физик, математик, 1803-1853 гг.

2.6. Интервал. Четырехмерное пространство-время.

2.6.1. Интервал.

В классической механике Ньютона пространство и время считались независимыми друг от друга. Поэтому расстояние между двумя точками и промежутки времени являлись *инвариантами*, т.е. были одинаковыми во всех системах отсчета.

В релятивистской механике такая инвариантность утрачена: Δr и Δt изменяются при преобразованиях Лоренца (см §§ 2.3 - 2.5). В релятивистской теории имеется один пространственно-временной инвариант, связывающий координаты и время, – *пространственно-временной интервал* или просто *интервал*. Интервал между двумя событиями, определяемыми точками (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2) есть величина S , квадрат которой равен:

$$S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = Inv \quad (2.6.1)$$

Легко убедиться, что это инвариант, подставив в (2.6.1) преобразования Лоренца для разностей координат:

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 + V(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + \frac{V}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.6.2)$$

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1, \quad z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1$$

$$S^2 = \gamma^2 \left(c^2(t'_2 - t'_1)^2 + \frac{V^2}{c^2}(x'_2 - x'_1)^2 + c^2 \frac{2V}{c^2}(t'_2 - t'_1)(x'_2 - x'_1) \right) - \\ - \gamma^2 \left((x'_2 - x'_1)^2 + 2V(t'_2 - t'_1)(x'_2 - x'_1) + V^2(t'_2 - t'_1)^2 \right) - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = \\ = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = S'^2 = Inv \quad (2.6.3)$$

Здесь, как и ранее, ввели обозначение

$$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - V^2/c^2} = \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.6.4)$$

Итак, получаем инвариантную величину – интервал

$$S = S' = inv = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} \quad (2.6.5)$$

Для бесконечно малых интервалов имеем:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.6.6)$$

Наиболее ясный физический смысл интервал приобретает при введении 4-х мерного пространства – времени.

2.6.2. Пространство Минковского.

Г. Минковский для описания пространственно-временных событий ввел геометрическую интерпретацию: совокупность (x, y, z, t) представляет собой *мировую точку*, а многообразие мировых точек образует *четырёхмерное пространство*, называемое пространством Минковского. Линия в пространстве Минковского – *мировая линия*.

Геометрия пространства Минковского определяется инвариантным расстоянием между двумя мировыми точками, которое и есть интервал между этими событиями.

Введем понятие *4х-вектора пространства-времени*, определяя компоненты этого вектора следующим образом:

$$x^0 = ct \equiv \tau, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

$$(ct, x, y, z) \equiv (ct, \vec{r}) \quad (2.6.7)$$

Формулы преобразования «нулевой» и «первой» компонент 4х-вектора при переходе к другой системе отсчета можно записать:

$$x^0 = ct = c \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x'^0 + \beta x'^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (x'^0 + \beta x'^1) \quad (2.6.8)$$

$$x^1 = \frac{x'^1 + \beta x'^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (x'^1 + \beta x'^0) \quad (2.6.9)$$

Вторая и третья компоненты не меняются при переходах к другой системе отсчета. Формулы полного преобразования Лоренца могут быть представлены в виде системы:

$$\begin{cases} x^0 = \gamma x'^0 + \beta \gamma x'^1 + 0 \cdot x'^2 + 0 \cdot x'^3 \\ x^1 = \beta \gamma x'^0 + \gamma x'^1 + 0 \cdot x'^2 + 0 \cdot x'^3 \\ x^2 = 0 \cdot x'^0 + 0 \cdot x'^1 + 1 \cdot x'^2 + 0 \cdot x'^3 \\ x^3 = 0 \cdot x'^0 + 0 \cdot x'^1 + 0 \cdot x'^2 + 1 \cdot x'^3 \end{cases} \quad (2.6.10)$$

Обычно вводят *матрицу преобразования* α^{ik} :

$$x^i = \sum_k \alpha^{ik} x'^k \equiv \alpha^{ik} x'^k, \quad (2.6.11)$$

где значки i, k пробегает значения от нуля (нулевая или временная компонента) до 3 (пространственные компоненты), причем в короткой записи формул подразумевается суммирование по повторяющимся значкам. Сама матрица имеет вид:

$$\alpha = (\alpha^{ik}) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6.12)$$

Поэтому преобразования Лоренца представляются в виде:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \quad (2.6.13)$$

где новый 4-х радиус-вектор получается по обычным правилам перемножения матрицы на столбец. Обратное преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.6.14)$$

Квадрат “длины” 4х радиуса-вектора есть квадрат интервала, отсчитанный от начала системы отсчета:

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (2.6.15)$$

Смысл преобразований Лоренца – это поворот 4х мерной системы координат, при этом при любых поворотах “длина” 4-х-вектора не меняется, то есть интервал (расстояние между 2-мя мировыми точками) остается постоянным.

Примечание 1. Герман Минковский, немецкий математик и физик, 1864-1909 гг.

2.6.3. 4-х векторы

При построении релятивистской механики в 4х мерном пространстве-времени, помимо 4х радиуса-вектора, вводятся и другие 4х вектора для описания физических величин.

Общее определение: *4-х мерным вектором* A^i называется совокупность четырех величин (A^0, A^1, A^2, A^3) , которые при преобразовании 4-х мерной системы координат преобразуются как компоненты 4-х радиуса -вектора x^i :

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1); \quad A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0); \quad A'^2 = A^2; \quad A'^3 = A^3. \quad (2.6.16)$$

Инвариантная величина – “квадрат длины” 4-х вектора A :

$$A^0{}^2 - A^1{}^2 - A^2{}^2 - A^3{}^2 = inv \quad (2.6.17)$$

Обычное название для вектора с компонентами $\{A^i\}$ (с верхними индексами) – *контравариантный вектор*. Для симметрии вводят другие компоненты (с нижними индексами):

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3 \quad (2.6.18)$$

Вектор с компонентами $\{A_i\}$ называется *ковариантным вектором*. Тогда квадрат 4-х вектора или скалярное произведение двух 4-х векторов записывают таким образом:

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = inv \quad (2.6.19)$$

$$\sum_{i=0}^3 A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = inv$$

Примечание 2. Иногда в литературе для пространственного 4-х вектора вводят другие компоненты: $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ict$, тогда интервал записывается следующим образом: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$

2.6.4. Геометрическая иллюстрация 4х радиуса-вектора.

Часто о геометрии 4х-мерного пространства Минковского говорят как о псевдоевклидовой геометрии. Поскольку 4х-мерное пространство нам не изобразить, рассмотрим для простоты геометрическую иллюстрацию

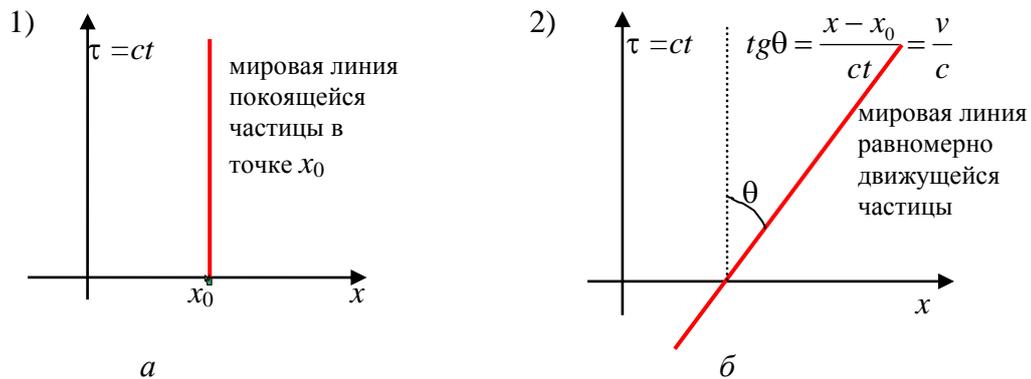


Рис. 6.1.

различных событий на плоскости (ct, x) .

1). Так на рис.6.1 приведены примеры нескольких мировых линий:

- мировая линия покоящейся частицы – линия параллельная оси времени;
- мировая линия равномерно движущейся частицы направлена под углом к оси времени, причем, чем больше угол θ (но не превышающий 45°), тем выше скорость частицы.

2) Пусть имеется 2 события в точках А и В (см рис. 6.2). “Расстояние” между двумя событиями есть интервал, равный

$$(AB)^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = (BC)^2 - (AC)^2 \quad (2.6.20)$$

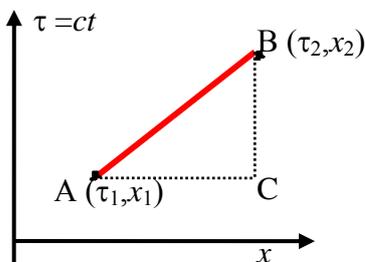


Рис. 6.2.

Из (2.6.20) видно, что гипотенуза (AB) , образованного треугольника на плоскости (ct, x) , меньше катета (BC) . В этом состоит суть **псевдоевклидовой** геометрии, где вместо обычной теоремы Пифагора справедлива псевдопифагорова теорема.

3) Отметим важное обстоятельство, что вообще все интервалы $S = \sqrt{\tau^2 - x^2}$ между событиями можно разделить на 2 типа:

вещественные и чисто **мнимые**. Это деление не зависит от выбора системы отсчета (CO) . Границей между 2 типами интервалов – **нулевой интервал**

$S = 0$, т.е. $ct = x$ и $ct = -x$. Нулевые интервалы образуют мировые линии световых лучей. Такой интервал существует между событиями, которые могут быть связаны сигналом, распространяющимся со скоростью света. Мировые линии световых лучей разбивают плоскость на 4 квадранта (см рис. 6.3). Пусть в точке 0 наступило событие 1 ($x = t = 0$). Тогда I и II квадранты определяют абсолютное будущее и абсолютное прошлое соответственно, а III и IV квадранты представляют абсолютно удаленные события относительно события 1. Рассмотрим подробнее интервалы в этих квадрантах.

Времени подобный интервал S (вещественный):

$$S^2 = \tau^2 - x^2 > 0. \quad (2.6.21)$$

Квадрант I: для всех событий $\tau > 0$, следовательно, все они произойдут позднее события 1 (точка в начале отсчета). Это область *абсолютного будущего* по отношению к началу отсчета. Квадрант II: здесь тоже времени подобный интервал, но для его мировых точек $\tau < 0$ – область *абсолютного прошлого* по отношению к началу отсчета.

Пространственно подобный интервал S (мнимый):

$$S^2 = \tau^2 - x^2 < 0. \quad (2.6.22)$$

Все события в III и IV квадрантах происходят в точках, никак не связанных с точкой, где произошло событие 1. Однако моменты времени, в которые произошли события в квадрантах III и IV, могут быть сделаны раньше или позже события 1 за счет выбора соответствующей системы координат.

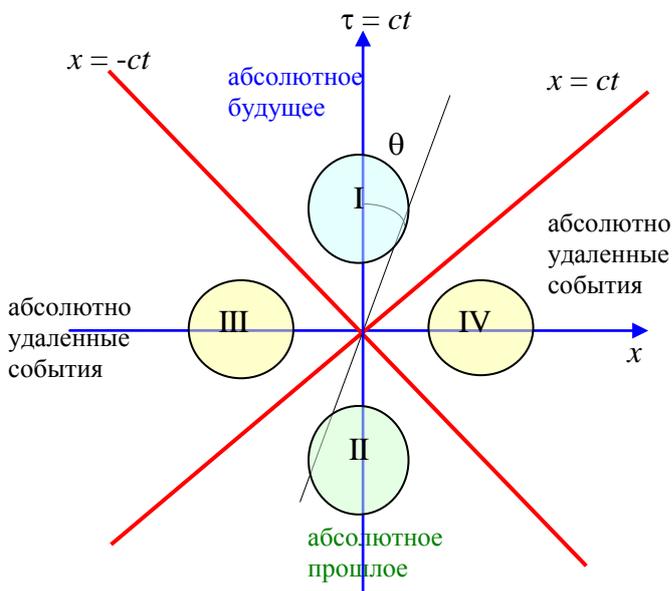


Рис. 6.3.

Итак, характер интервала между событиями зависит от наклона прямой, соединяющей эти точки на псевдоевклидовой плоскости. Если угол $\theta = 45^\circ$, то имеем *светоподобный* интервал $S^2 = 0$.

Времени подобный интервал – это интервал между двумя событиями, для которых существует система отсчета, где эти события произошли в одной точке пространства:

$$S^2 = c^2 t_1^2 - x_1^2 = c^2 t_2^2 > 0 \quad (2.6.23)$$

Тогда время между этими событиями определяется как отношение интервала и скорости:

$$t_2 = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_1^2 - x_1^2} = \frac{S}{c} \quad (2.6.24)$$

Если события происходят с одним и тем же телом, то интервал всегда времени подобный. Только в этом случае имеется “*причинная*” связь, так как есть понятие раньше и позже.

Пространственно подобный интервал – это интервал между 2-мя событиями, для которых существует система отсчета, когда эти события произошли в одно и то же время и тогда расстояние между ними:

$$x'_{12} = \sqrt{x_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = iS_{12} \quad (2.6.25)$$

Такое подразделение интервалов – *абсолютное*, т.е. не зависит от системы отсчета.

2.6.5. Геометрическое истолкование преобразований Лоренца.

Рассмотрим мировую линию равномерно движущейся точки (рис.6.4). В К системе – это линия, направленная под углом к оси τ . Если рассмотрим эту точку в системе K' , где эта точка покоится, то видно, что ось $\tau' = ct'$ должна быть направлена параллельно прямой $x' = x'_0$. Следовательно преобразование оси $\tau = ct$ при переходе от системы К к K' системе наклоняет эту ось по отношению к оси τ . Ось x' должна быть направлена так, чтобы располагаться симметрично относительно нулевого интервала (световой мировой линии) как τ' . Таким образом, преобразования Лоренца приводят к расположению осей τ' и x' как показано на рисунке 6.4.

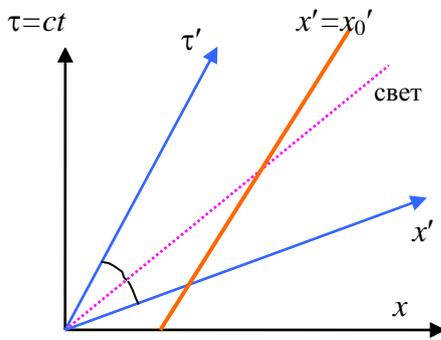


Рис. 6.4.

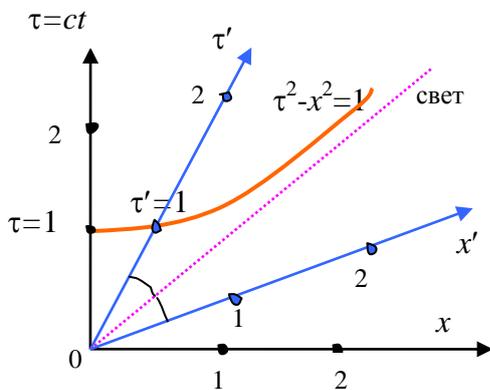


Рис. 6.5.

Для того чтобы проиллюстрировать преобразования Лоренца, интервал и следствия из преобразований, проградуируем оси координат с помощью длины, определяемой единичным квадратом интервала:

$$\tau^2 - x^2 = 1 = inv = \tau'^2 - x'^2 \quad (2.6.26)$$

Если построить (2.6.26), то получим кривую – гиперболу (красная кривая на рис.6.5). Если при $x = 0$ получаем $\tau = 1$ в лабораторной системе отсчета К. В системе отсчета K' при пересечении гиперболы с осью τ' , т.е. при $x' = 0$, получаем $\tau' = 1$, и таким образом, отрезок от $\tau' = 0$ до $\tau' = 1$ дает единичный масштаб (линейку) в движущейся системе отсчета. Аналогично получаем градуировку по осям x и x' , если положить квадрат интервала (2.6.26) равным -1 (мнимый интервал, см ниже рис. 6.7). Видно даже из рисунка 6.5, что масштаб линейки в

системе K' больше, чем в системе K , что и приводит к рассмотренным выше следствиям.

Разберем одновременность событий в каждой из систем и ход часов. Линии одновременности в системах K и K' определяются прямыми, параллельными осям x и x' , соответственно сплошная красная и синяя

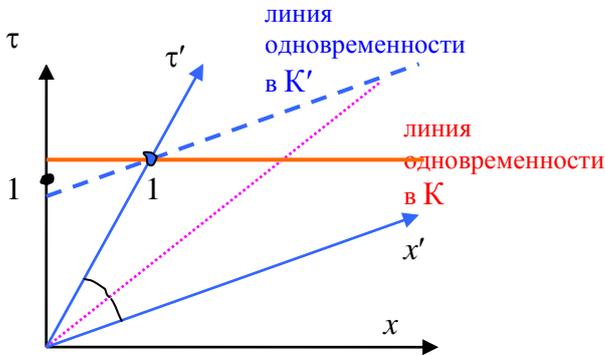


Рис. 6.6.

пунктирная линии на рисунке 6.6. Имеем две возможности: рассмотреть эти события в системах K и K' .

1). Смотрим с точки зрения наблюдателя в системе K' (относительно которого движутся часы K системы): пусть часы, помещенные в начале координат ($x' = 0$) показывают “время” $\tau' = 1$; тогда по линии одновременности (синяя прямая) видно, что на

часах лабораторной системы K еще нет 1 ($\tau' < 1$), т.е. они отстают.

2). Теперь смотрим с точки зрения наблюдателя в системе K (относительно которой движутся часы системы K'): часы, помещенные в начале координат лабораторной системы ($x = 0$), показывают время $\tau > 1$; в то же время по линии одновременности (красная прямая) в системе K часы в K' системе дают $\tau' = 1$ (при $x' = 0$), т.е. часы отстают в системе K' .

Это и есть геометрическая иллюстрация замедления хода времени в движущихся объектах.

Рассмотрим теперь Лоренцево сокращение длины (рис. 6.7). Пусть метровый стержень покоится в лабораторной системе отсчета K , причем

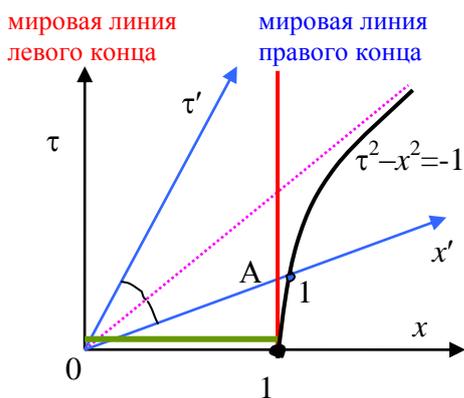


Рис. 6.7.

левый конец стержня находится при координате $x = 0$ ($\tau = 0$), а правый – при $x = 1$ и, соответственно, его длина равна 1 (зеленая линия на рис. 6.7). Мировая линия левого конца идет по оси τ при $x = 0$, а правого – параллельно оси τ при $x = 1$. По пересечению мировой линии и оси x' получаем размер стержня в системе K' . Видно, что его длина, равная OA , меньше единицы 1 в масштабе системы K' .

Рассмотрим теперь, когда стержень покоится в системе K' (зеленая линия на рис. 6.8), где его длина равна 1 (OA). Тогда используя мировую линию правого конца, которая параллельна оси τ' (голубая линия на рис. 6.8), получим длину стержня в системе K (OB), длина которого по линейным масштабам K системы меньше 1.

Таким образом, получаем, что стержень, движущийся относительно наблюдателя имеет всегда меньшую длину, чем в системе, связанной с ним.

Для системы отсчета K'' , движущейся в отрицательном направлении оси x , иллюстрация аналогична. Однако при этом надо иметь в виду, что если в K системе угол между осями τ и x - прямой, то в системе K'' угол между осями τ'' и x'' - больше $\pi/2$ (развернутый угол). При этом эффекты появляются те же и также могут быть проиллюстрированы геометрически.

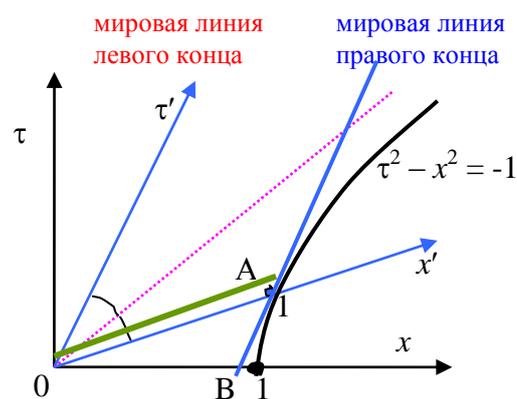


Рис. 6.8.

2.6.6. Парадокс близнецов и другие парадоксы.

Самый распространенный прием критиков и противников СТО – обнаружить парадоксы, к которым якобы приводит теория относительности. Одним из самых известных парадоксов – *парадокс близнецов*.

Рассуждения, приводящие к якобы парадоксу, выглядят следующим образом. Из точки $x = 0$ вылетела ракета (это Петр отправился в путешествие) со скоростью V вдоль оси x и затем возвращается обратно. С точки зрения наблюдателя на Земле (Павел, близнец Петра, остался на Земле) время в ракете течет медленнее и, следовательно, при возвращении Петр будет моложе Павла. Однако с точки зрения Петра это Земля с Павлом движется со скоростью “ $-V$ ”, затем движется обратно и, следовательно, при встрече должен быть моложе Павла. Возникает противоречие и в этом состоит парадокс. Кто прав, Петр или Павел?

Неправильность рассуждения, приведшего к парадоксу, состоит в том, что *системы отсчета, связанные с близнецами – не эквивалентны*. Одна из них – инерциальная, а вторая, связанная с ракетой, является неинерциальной. Поскольку, чтобы вернуться на Землю, ракета должна повернуть обратно, при этом она испытывает изменение скорости и, следовательно, ускорение, что и есть неинерциальность. Иначе говоря, для возвращения назад Петру необходимо пересечь в другую инерциальную систему отсчета, идущую в обратную сторону, в которой отсчет времени совершенно другой. С точки зрения неподвижного наблюдателя при пересадке из одной системы в другую проходит достаточно большое время (по земным часам). Это означает, что Петр будет моложе Павла и последний прав в этом споре.

Рассмотрим численный пример (приведенный в книге Э.Ф. Тейлора и Д.А. Уилера “Физика пространства- времени”). Петру и Павлу по 21 году. Петр отправился в ракете и летел по его часам в одну сторону 7 лет (7 лет \approx

$2.2 \cdot 10^8$ секунд) со скоростью $v = 24/25 \cdot c = 0.96c$, а затем вернулся обратно с той же скоростью. Найдем возраст Павла и Петра с обеих точек зрения.

С точки зрения Павла (Земля): Петр имеет возраст $21 + 7 + 7 = 35$ лет. Время у Павла течет быстрее, и за 7 лет Петра имеем добавку к возрасту Павла:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{7}{\sqrt{1 - 576/625}} = \frac{7 \cdot 25}{7} = 25 \text{ лет}$$

Следовательно, возраст Павла равен: $21 + 25 + 25 = 71$ год.

С точки зрения Петра (ракета): возраст Петра $21 + 7 + 7 = 35$ лет. Время у Павла течет медленнее, поскольку Земля движется относительно ракеты, и за 7 лет Павел постарел только на время:

$$\Delta t = \Delta t_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{7 \cdot 7}{25} = 1.96 \text{ лет}$$

То есть возраст Павла равен: $21 + 1.96 + 1.96 = 24.92 \approx 25$ лет.

Различие мнений о возрасте Павла составляет 46 лет. Поскольку при встрече ситуация должна быть однозначна со всех точек зрения, то это означает, что при переходе Петра для возвращения назад из одной ИСО в другую проходит время, равное 46.08 лет.

Поясним это утверждение графически на рис.6.9. Пусть К система

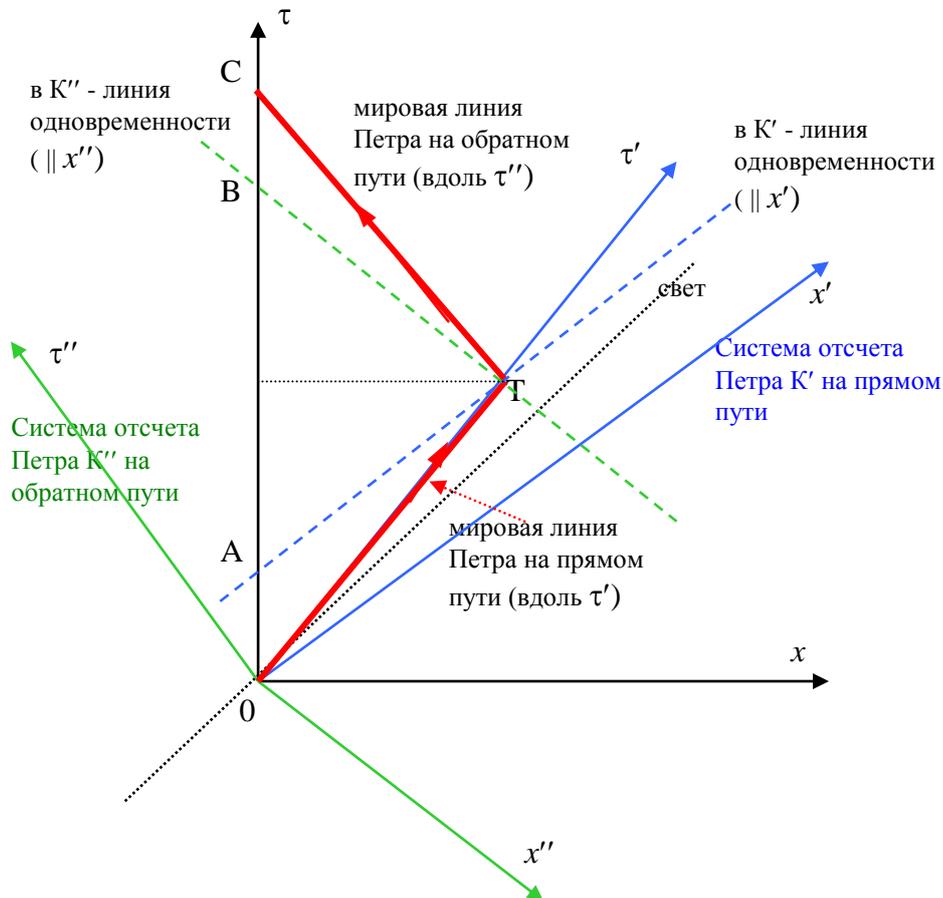


Рис. 6.9.

отсчета Павла (черный цвет осей на рисунке 6.9), тогда мировая линия Петра совпадает с временной координатой его системы отсчета K' (синий цвет осей). По часам Петра отрезок OT соответствует времени 7 лет, и с его точки зрения часы Павла за это время показали 1.96 года – это отрезок OA .

На обратном пути Петра от точки T до встречи с Павлом в точке C сопровождала другая цепочка часов – другая систем отсчета – K'' (зеленый цвет осей), скорость которой направлена против оси x . (поэтому оси раздвигаются в стороны относительно осей K системы и световой мировой линии). Часы Петра на отрезке TC снова показали 7 лет, а часы Павла с точки зрения Петра, снова 1.96 года (отрезок BC). Таким образом, даже с точки зрения Петра остался неучтенным отрезок AB , который и оказывается равным 46.08 года.

Вообще можно утверждать, что протяженность наклонных линий короче, чем вертикальных линий. Это есть следствие Псевдоевклидовой геометрии (псевдопифагоровой теоремы). Время в прямой линии, параллельной оси τ , равно: Δt , в то время как в наклонной прямой имеем из постоянства интервала:

$$c^2 \Delta t_0^2 = inv = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \quad \text{и} \quad \Delta t_0 = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2} < \Delta t$$

Рассмотрим некоторые другие эффекты и парадоксы.

1). Рассмотрим стержень, расположенный параллельно оси x' в K' системе отсчета и движущийся в ней вдоль оси y' равномерно (рис. 6.10), в K системе отсчета будет также двигаться относительно оси y равномерно, но располагаться под углом к оси x . Чем выше скорость системы K' (или стержня по оси x) относительно системы K , тем больше угол наклона стержня в системе K .

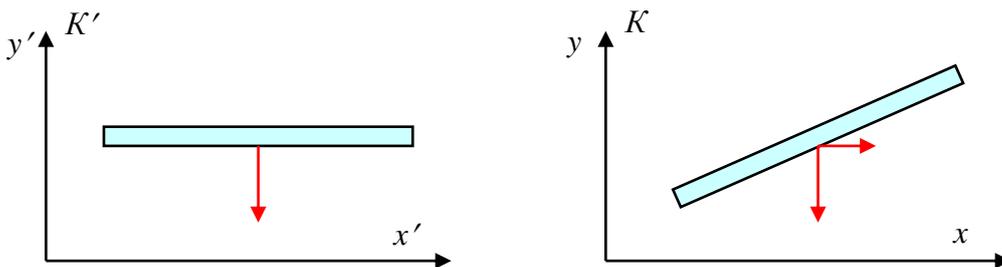


Рис. 6.10.

2). Парадокс шеста и сарая (пенала и карандаша). Шест длиннее сарая, однако, если он движется с большой скоростью, то его длина будет меньше сарая, и он может в принципе поместиться в сарае, то есть можно будет успеть захлопнуть ворота за шестом. Это с точки зрения наблюдателя, находящегося в сарае. Однако с точки зрения наблюдателя на шесте сарай надвигается с большой скоростью на стержень, и размеры сарая становятся еще меньше. Как же можно совместить тот факт, что в первом рассмотрении

шест на некоторое время может оказаться внутри сарая, а во втором не может?

3). Стержень и люк. На дырку люка падает стержень. В состоянии покоя стержень не проваливается сквозь люк, поскольку его линейные размеры больше линейных размеров люка. Другое дело, когда стержень движется с большими скоростями (рис. 6.11). Тогда в системе отсчета, связанной с люком, размеры стержня становятся малыми, и он спокойно проходит через люк. Однако в системе, связанной со стержнем, размеры люка становятся

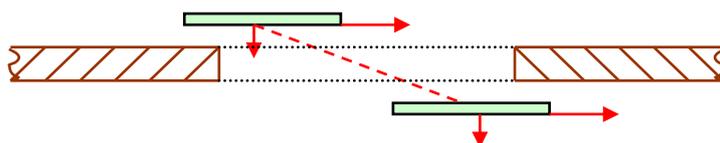


Рис. 6.11.

еще меньше и как же при этом можно объяснить факт прохода стержня через люк?

Рисунок 6.12, когда наклонный люк “наезжает” на стержень, проясняет, как это происходит.

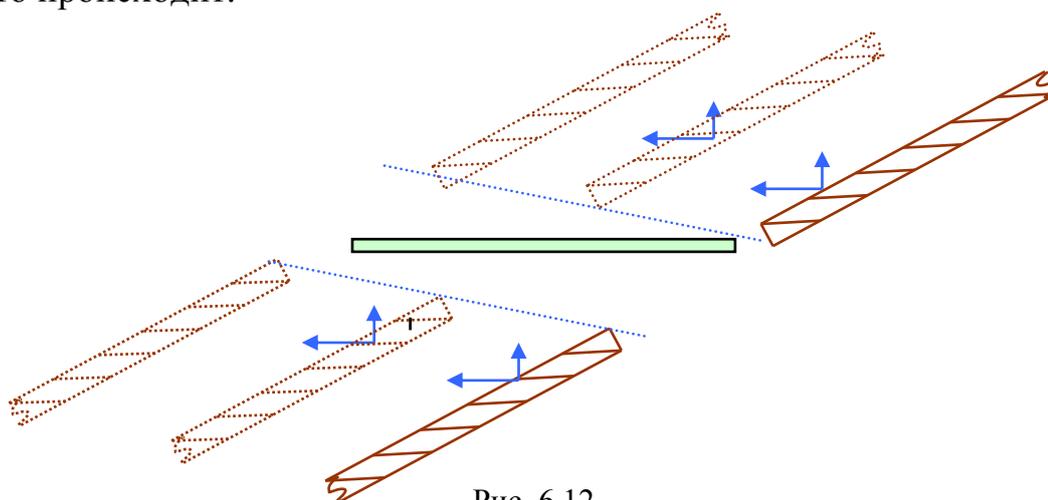


Рис. 6.12.

4). Человек на решетке или стержень на столе с дыркой. Рассмотрим случай, когда нет движения вдоль вертикальной оси.

Человек, стоящий на решетке, не проваливается сквозь нее. Однако при

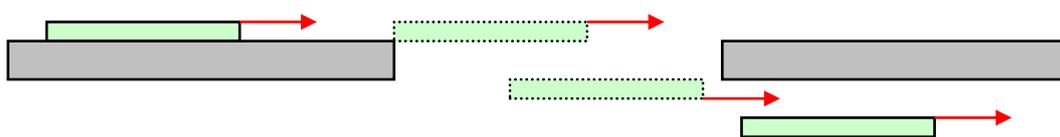


Рис. 6.13.

очень быстром перемещении по решетке его размеры вдоль движения уменьшаются и становятся меньше размеров ячейки решетки с точки зрения системы отсчета, связанной с решеткой. Значит, он может провалиться сквозь решетку (см рис. 6.13 со стержнем).

С точки зрения человека (стержня), размеры ячейки решетки становятся очень малыми по сравнению со стержнем, и, на первый взгляд, человек (стержень) не может провалиться через ячейку. Однако из преобразований



Рис. 6.14.

Лоренца следует тот факт, что тела не бывают абсолютно твердыми или абсолютно жесткими. То есть жесткость стержня – величина относительная. В системе стержня сам стержень теряет свою жесткость и может изгибаться и тем самым проникать в ячейку, изгибаясь, как резиновый предмет (см рис. 6.14).

2.7. Релятивистская механика.

2.7.1. Как строить релятивистскую механику?

Уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad (2.7.1)$$

Однако, эти уравнения не инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поэтому надо найти такую форму законов, чтобы новые уравнения удовлетворяли следующим условиям:

- 1) были бы инвариантны относительно преобразований Лоренца, так как эти преобразования подтверждаются экспериментами,
- 2) и переходили бы в старые уравнения Ньютона в пределе малых скоростей $\beta = V/c \rightarrow 0$.

Для того чтобы построить новые уравнения, будем строить 4-х вектора для скорости, импульса, силы и т.д. Строить будем по аналогии с их трехмерными величинами и таким образом, чтобы они преобразовывались при переходе к другим инерциальным системам отсчета (ИСО) по правилам 4-х векторов и переходили в старые трехмерные вектора при малых скоростях:

$$(A^0, A^1, A^2, A^3) \quad \text{или} \quad (A_0, A_x, A_y, A_z)$$

2.7.2. Собственное время и 4-х вектор скорости.

4-х вектор скорости определяется как производная 4-х радиуса по временному интервалу. Для нахождения 4-х вектора скорости нужен инвариант времени, в качестве которого может быть взято *собственное время*.

Собственное время – это время в *мгновенно-сопутствующей инерциальной системе отсчета* (ИСО). Мгновенно-сопутствующая ИСО –

это инерциальная система отсчета, у которой в данный момент времени (или за короткий промежуток времени dt) скорость V равна скорости частицы v . Если частица движется с ускорением, то для определения собственного времени необходимо рассматривать набор (в принципе бесконечный) инерциальных систем отсчета и, переходя из одной ИСО в другую за короткое время dt , суммировать время полного движения.

Итак, имеем следующее:

- 1) В мгновенно-сопутствующей ИСО K' за бесконечно малый промежуток времени dt' (в течение которого скорость частицы совпадает со скоростью системы отсчета $\vec{V}=\vec{v}$) координаты частицы не меняются: $dx'=dy'=dz'=0$.
- 2) В неподвижной (лабораторной) ИСО K за время dt произошло изменение координат: dx, dy, dz .

Поскольку интервал инвариантен:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2,$$

то можно ввести собственное время (самое быстрое время): $d\tau=dt'$.

$$d\tau = \frac{dS}{c} = \sqrt{\frac{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad (2.7.2)$$

где, как и ранее, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Итак, получаем для бесконечно

малого интервала:

$$dS = cd\tau. \quad (2.7.3)$$

Так как скорость частицы меняется, то мы меняем мгновенно-сопутствующие ИСО, то есть берем ИСО с различными скоростями ($V = V(t)$), тогда параметр также зависит от времени $\beta = \beta(t)$ и полное собственное время, отсчитанное многими ИСО за промежуток $t_1 \div t_2$, по лабораторным часам равно:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2(t)} dt \quad (2.7.4)$$

Компоненты 4-х вектора скорости вводятся следующим образом (под “вводится” понимаем запись, которая удовлетворяет правилам, отмеченным в пункте 2.7.1):

$$v^0 = \frac{dx^0}{d\tau}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (2.7.5)$$

где x^0 и \vec{r} – компоненты 4-х радиуса $\vec{R} = (ct, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$.
 Подробнее 4-вектор скорости можно записать следующим образом (используя (2.7.2)):

$$\left\{ \begin{array}{l} v^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c \\ v^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma v_x \\ v^2 = \gamma v_y, \quad v^3 = \gamma v_z \end{array} \right. \quad (2.7.6)$$

Или иначе, вводим 4х вектор скорости со следующими компонентами:

$$\vec{V}(c\gamma, v_x\gamma, v_y\gamma, v_z\gamma) = \vec{V}(c\gamma, \gamma\vec{v}) \quad (2.7.7)$$

Легко видеть, что *квадрат 4-вектора скорости – инвариант*:

$$\vec{V}^2 = c^2\gamma^2 - \gamma^2\vec{v}^2 = (c^2 - v^2)\gamma^2 = c^2 = Inv \quad (2.7.8)$$

“Длина” 4х вектора скорости равна постоянной величине – скорости света.

Примечание 1. При $v \ll c$ имеем $\gamma \approx 1$ и тогда 4-вектор имеет компоненты: (c, v_x, v_y, v_z) .
 Отсюда следует, что, если даже частица покоится, то нулевая компонента четырех вектора всегда не равна 0: $v_0 \neq 0$. Смысл этого состоит в том, что время всегда “течет” и покоя в 4-мерном пространстве Минковского нет.

2.7.3. 4-х вектор энергии-импульса.

Построим импульс по аналогии с классикой как произведение массы (массы покоя как инвариантной массы) на 4-х вектор скорости:

$$\vec{P} = m_0 \vec{V} \quad (2.7.9)$$

или, переписывая то же самое, имеем:

$$\vec{P} = m_0 \frac{d\vec{R}}{d\tau} \quad (2.7.10)$$

Итак, записываем следующие компоненты 4-х вектора:

$$\vec{P}(p^0, p^1, p^2, p^3) = \vec{P}(m_0\gamma c, m_0\gamma v_x, m_0\gamma v_y, m_0\gamma v_z) = \vec{P}(m_0\gamma c, m_0\gamma\vec{v}) \quad (2.7.11)$$

Трехмерный релятивистский импульс определяется:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\gamma\vec{v} \quad (2.7.12)$$

При $v \ll c$ получаем классический импульс $\vec{p} = m_0\vec{v}$.

Иногда в некоторых учебника можно увидеть следующую интерпретацию – импульс записывается как в механике Ньютона и при этом вводится понятие *релятивистской массы*:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \text{где} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.7.13)$$

На рисунке 7.1 представлен график зависимости релятивистской массы m от скорости. При стремлении скорости частицы к скорости света ее релятивистская масса растет до бесконечности.

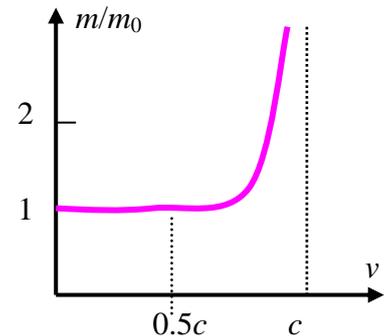


Рис. 7.1.

Однако, в физических рассуждениях удобнее и полезнее использовать величины одинаковые во всех системах отсчета, то есть такие как массу покоя m_0 и собственное время $d\tau$. В самом деле, все отличие релятивистского импульса $\vec{p} = m_0 d\vec{r}/d\tau$ от Ньютоновского импульса $\vec{p} = m_0 d\vec{r}/dt$ состоит

только в замещении времени dt на $d\tau$, т.е. в замене лабораторного времени на собственное время $d\tau = dt/\gamma = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$, а не в отличии m от m_0 . И это связано с преобразованием Лоренца для временной компоненты, а не с зависимостью массы от скорости, поэтому и нет смысла вводить эту зависимость.

Нулевая компонента 4-х вектора импульса – связана с энергией

$$\frac{E}{c} = m_0 \gamma c \quad (2.7.14)$$

Подробнее об этом рассмотрим ниже.

2.7.4. Релятивистское уравнение движения. Пространственная часть.

Рассмотрим уравнение движения – аналог уравнения Ньютона. Напомним, как мы поступали в классической механике, когда получали полную энергию. В классической механике имеем трехмерную силу и классический импульс:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Множим обе части уравнения скалярно на вектор перемещения $\vec{v}dt$:

$$mvdv = \vec{F}\vec{v}dt$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2} + const\right) = \vec{F}\vec{v}dt$$

В классике обычно постоянная составляющая равна 0, и при условии равенства нулю потенциальной энергии $U = 0$ ($\vec{F} = -\nabla U = 0$) полная энергия совпадает с кинетической энергии $E = K = const$. Если $U \neq 0$, то $\vec{F} = -\nabla U$ и

$$-dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot \vec{v}dt.$$

Тогда имеем выражение для полной энергии $E = K + U = const$ и закон сохранения при движении в потенциальном поле.

Поступим по аналогии с рассмотренным выше рассуждением и в релятивистской механике, учитывая, что имеем дело с 4-х векторами:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} \quad (2.7.15)$$

где мы ввели *4-х вектор силы* $\vec{F}(f^0, f^1, f^2, f^3)$. Его компоненты в принципе определяются из (2.7.15) дифференцированием компонент 4-х вектора импульса по инвариантному времени:

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{d}{d\tau}(m_0\gamma c) = \gamma \frac{d}{dt}(m_0\gamma c) \\ f^\alpha &= \frac{d}{d\tau}(m_0\gamma v_\alpha) = \gamma \frac{d}{dt}(m_0\gamma v_\alpha) \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

где α пробегает значения $\alpha = 1, 2, 3$ (или x, y, z) и v_α есть компоненты обычной трехмерной скорости (см формулы (2.7.6) и (2.7.7)).

Рассмотрим *пространственную часть уравнения* (2.7.16), где f^α компоненты 4-х вектора силы.

$$f^\alpha = \gamma \frac{d}{dt}(m_0\gamma v_\alpha) \quad (2.7.17)$$

Компоненты 4-х вектора силы должны быть пропорциональны соответствующим компонентам 3-х мерной силы, чтобы при $v \ll c$ уравнения перешли в уравнения Ньютона. Вводятся компоненты 3-х мерной силы F_α как производные по времени dt от импульса (более строго это обосновывается исходя из Лагранжиана), то есть имеем:

$$f^\alpha = \gamma F_\alpha \quad (2.7.18)$$

При этом получаем, что уравнение релятивистской механики инвариантно относительно преобразований Лоренца. Оно имеет примерно тот же вид, что уравнение Ньютона и при $v \ll c$ переходят в него. В самом деле, подставляя (2.7.18) в (2.7.17) и сокращая на γ , имеем:

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma v_\alpha) = F_\alpha$$

или иначе, записываем окончательно

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad (2.7.19)$$

Получили *пространственную часть* уравнения движения в релятивистской механике – *основное уравнение релятивистской динамики*.

2.7.5. Релятивистское уравнение движения. Временная часть.

Рассмотрим *временную часть уравнения движения* (2.7.16). Для того чтобы получить нулевую компоненту 4-х вектора силы, рассмотрим инвариант 4-х вектора скорости

$$c^2 = (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 = Inv$$

и продифференцируем его по собственному времени:

$$v^0 \frac{dv^0}{d\tau} - v^1 \frac{dv^1}{d\tau} - v^2 \frac{dv^2}{d\tau} - v^3 \frac{dv^3}{d\tau} = 0 \quad (2.7.20)$$

Учитывая, что компоненты 4-вектора скорости определяются (2.7.7), а компоненты 4-х силы (2.7.16) (выражаем из уравнений (2.7.16) производные $dv^i/d\tau$ и используем связь (2.7.18)), получаем:

$$\gamma c \frac{f^0}{m_0} - \gamma v_x \frac{\gamma F_x}{m_0} - \gamma v_y \frac{\gamma F_y}{m_0} - \gamma v_z \frac{\gamma F_z}{m_0} = 0 \quad (2.7.21)$$

Сокращая на фактор γ и массу покоя в уравнении (2.7.21), получаем, что нулевая компонента 4-х вектора силы равна:

$$f^0 = \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma c) = \frac{\gamma}{c} (\vec{F}, \vec{v}) \quad (2.7.22)$$

Итак, 4-х вектор силы Минковского имеет следующие компоненты:

$$\vec{F} \begin{pmatrix} f^0 & f^1 & f^2 & f^3 \\ \frac{\gamma}{c} (\vec{F}, \vec{v}) & \gamma F_x & \gamma F_y & \gamma F_z \end{pmatrix} \equiv \vec{F} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c} (\vec{F}, \vec{v}), \gamma \vec{F} \end{pmatrix} \quad (2.7.23)$$

Теперь из нулевой компоненты релятивистского уравнения движения (2.7.22) получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt} (m_0 \gamma c^2) = (\vec{F}, \vec{v}) \quad (2.7.24)$$

Справа в уравнении (2.7.24) стоит мощность обычной 3-х мерной силы, т.е. работа в единицу времени. Тогда левая часть по аналогии с классической механикой есть изменение энергии свободной частицы. Таким образом, проявляется *смысл нулевой компоненты 4-х вектора импульса как полной энергии свободной частицы, деленной на скорость*:

$$\vec{P} \left(m_0 \gamma c = \frac{m_0 \gamma c^2}{c} = \frac{E}{c}, m_0 \gamma \vec{v} \right) \quad (2.7.25)$$

Итак, полная энергия свободной частицы:

$$E = m_0 \gamma c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.7.26)$$

Подведем итоги рассуждений этого параграфа.

1). 4-вектор импульса, который часто называют 4-х вектором энергии – импульса, записывается

$$\vec{P} \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right), \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.7.27)$$

При переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую ИСО, движущуюся по оси x со скоростью $V (= \beta c)$, компоненты 4-х вектора преобразуются согласно общим преобразованиям Лоренца (2.6.16):

$$E'/c = \gamma(E/c - \beta p_x); \quad p'_x = \gamma(p_x - \beta E/c); \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z$$

2). Уравнения движения в релятивистской механике – *пространственная и временная части динамических уравнений* – имеют вид соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) &= \vec{F} \\ \frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2) &= \vec{F}\vec{v} \end{aligned} \quad (2.7.28)$$

Заметим, что в уравнения (2.7.28) входят только трехмерные вектора.

Примечание 2. Временную часть уравнения можно было просто получить, исходя из пространственной части (2.7.19), умножив ее скалярно на скорость \vec{v} и проведя математические преобразования:

$$d(m_0\gamma\vec{v})\vec{v} = \vec{F}\vec{v}dt = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

Примечание 3. Отметим довольно неожиданный вывод: в релятивистской динамике вектор ускорения \vec{a} не совпадает в общем случае с направлением вектора силы \vec{F} :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = m_0\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + m_0\vec{v} \frac{d\gamma}{dt} = m_0\gamma\vec{a} + m_0\vec{v} \frac{\frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

2.8. Энергия и способы ее выражения.

2.8.1. Инвариант 4-х вектора энергии-импульса и его нулевая компонента.

Еще раз запишем 4-х вектор энергии-импульса и его компоненты:

$$\vec{P} \left\{ \frac{E}{c}, \vec{p} \right\} \quad (2.8.1)$$

$$\frac{E}{c} = m_0 \frac{cdt}{d\tau} = \frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.8.2)$$

Инвариант 4-х вектора энергии-импульса:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = \text{inv} \quad \text{или} \quad E^2 - p^2c^2 = \text{inv} \quad (2.8.3)$$

Можно задать очевидный вопрос: почему мы уверены, что временная компонента 4-х вектора импульса есть энергия (деленная на скорость света)? Какие аргументы говорят в пользу этого? Приведем их.

- а). Величина E имеет размерность релятивистской энергии –
– $\text{Эрг} = \text{г} (\text{см}/\text{с})^2$ или $\text{Дж} = \text{кг} (\text{м}/\text{с})^2$.

б). Так как из §2.7 имеем $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, то $dE = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta A$. То

есть приращение E представляет собой элементарную работу. Следовательно, по теореме о кинетической энергии dE есть приращение кинетической энергии, а сама величина E может отличаться от нее не более, чем на константу.

в). Временная компонента сохраняется, если сила \vec{F} равна 0. В самом деле

$$\vec{F} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = const \quad (2.8.4)$$

Можно говорить иначе: закон сохранения импульса выполняется, что есть экспериментальный факт. Закон сохранения энергии – тоже. Если пространственные компоненты сохраняются ($\vec{p} = const$), то временная компонента сохраняется тоже, т.е. снова убеждаемся, что эта величина связана с энергией.

г). Как будет доказано ниже, при малых скоростях получим $E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$, то есть отличается от обычной нерелятивистской кинетической энергии всего лишь на константу.

Рассмотрим следующий пример. Пусть 2 частицы движутся в направлении оси x с импульсами p_1 и p_2 . Рассмотрим их абсолютно неупругое столкновение в системах K и K' , записывая компоненты 4-х вектора энергии – импульса до столкновения и после столкновения.

4-х вектор импульса в K системе: $\left(\frac{E_1 + E_2}{c}, p_1 + p_2, 0, 0 \right)$ до столкновения

4-х вектор импульса в K' системе: $\left(\frac{E'_1 + E'_2}{c}, p'_1 + p'_2, 0, 0 \right)$ до столкновения

Переход от K системы к системе отсчета K' для первой компоненты 4-х вектора до столкновения осуществляется обычным преобразованием Лоренца:

$$p'_1 + p'_2 = \frac{p_1 + p_2 - \beta(E_1 + E_2)/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.8.5)$$

В результате неупругого столкновения импульс составной частицы стал равен p_0 в системе K и p'_0 в системе K' , а 4-х вектора энергии – импульса равны соответственно: $(E_0, p_0, 0, 0)$ и $(E'_0, p'_0, 0, 0)$. Связь между импульсами в этих системах равна:

$$p'_0 = \frac{p_0 - \beta E_0/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.8.6)$$

По закону сохранения импульса имеем:

$$p_1 + p_2 = p_0, \quad p'_1 + p'_2 = p'_0$$

Тогда из равенств (2.8.5) и (2.8.6) получаем закон сохранения нулевой компоненты, т.е. энергии:

$$E_0 = E_1 + E_2 \quad (2.8.7)$$

Примечание 1. То же уравнение (2.8.7) можно получить из инварианта энергии-импульса, записывая его до и после реакции

$$\left(\frac{E_1 + E_2}{c} \right)^2 - (p_1 + p_2)^2 = \frac{E_0^2}{c^2} - p_0^2 \quad (2.8.8)$$

Это следствие законов сохранения.

Из рассмотренного примера следует интересный и важный факт, что при неупругом соударении энергия сохраняется! Таким образом, *релятивистская энергия учитывает и внутреннюю энергию частиц.*

Как результат получаем следующее:

- 1) каждой частице можно сопоставить релятивистскую энергию

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- 2) если несколько частиц, то их полная релятивистская энергия равна сумме энергий отдельных частиц
- 3) при взаимодействии между частицами системы энергии отдельных частиц изменяются, но их полная сумма сохраняется

2.8.2. Выражения для энергии одной частицы.

Приведем различные выражения для энергии частицы.

- 1) Свободная частица
$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.8.9)$$

- 2) Частица покоится – скорость равна $v = 0$, тогда получаем энергию покоя частицы или системы частиц

$$E = m_0 c^2 \quad (2.8.10)$$

Энергия покоя – это та постоянная, которая входит в полную энергию частиц.

- 3) Инвариант энергии-импульса для одной частицы в двух ИСО К и К' равен:

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{E'^2}{c^2} - \vec{p}'^2 = inv \quad (2.8.11)$$

Если рассматриваем процесс в такой К' системе, где частица покоится и, следовательно, ее импульс $p' = 0$, тогда $E' = m_0 c^2$. Таким образом, получаем из (2.8.11) другое выражение для полной энергии через импульс и массу:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (2.8.12)$$

4) Кинетическая энергия частицы определяется как разность полной энергии и энергии покоя:

$$T = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (2.8.13)$$

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right) \quad (2.8.14)$$

Связь импульса и кинетической энергии следует из (2.8.14):

$$T^2 + 2m_0 c^2 T = p^2 c^2 \quad (2.8.15)$$

5) Переход к классической механике при $v/c \ll 1$ или $p/m_0 c \ll 1$ осуществляется путем разложения функции в ряд при малых значениях аргумента $f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \dots$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)' \Big|_{\beta^2=0} \cdot \beta^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)'' \Big|_{\beta^2=0} \cdot \beta^4 + \dots = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots$$

Пренебрегая высшими степенями малых параметров, получаем:

$$T \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2}$$

$$T \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0^2 c^2} - 1 \right) = \frac{p^2}{2m_0} \quad (2.8.16)$$

6) Полезная формула для энергии и импульса получается из следующих формул:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем:

$$\vec{p} = \frac{E \vec{v}}{c^2} \quad (2.8.17)$$

7) Ультрарелятивистский предел – это когда скорости частиц близки к скорости света $v \rightarrow c$ и $p \gg m_0 c$. Тогда выражение для энергии имеет вид:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \approx pc \quad (2.8.18)$$

8) Безмассовые частицы, масса покоя которых равна $m_0 = 0$. К ним относятся: фотон, глюон, гравитон. Для таких частиц из (2.8.12) и (2.8.17) имеем:

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} = \frac{pc\vec{v}}{c^2} = \frac{v\vec{p}}{c}, \quad (2.8.19)$$

Отсюда следует, что $v = c$, т.е. *такие частицы могут двигаться только со скоростью света*.

Энергия фотона пропорциональна его частоте: $E = \hbar\omega = h\nu$, импульс: $p = \frac{\hbar\omega}{c}$. Запишем 4-х вектор фотона и его компоненты:

$$\vec{P} = \vec{P} \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar\vec{k} \right). \quad (2.8.20)$$

Легко убедиться, что инвариант энергии – импульса фотона равен 0.

Примечание 2. Инвариантность фазы, о которой говорилось в параграфе 2.5, можно рассматривать как скалярное произведение двух 4-х векторов: 4-х вектора энергии – импульса фотона и 4-х радиус-вектора $(\vec{P}, \vec{R}) = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot ct - \hbar\vec{k} \cdot \vec{r}$. Скалярное произведение двух 4-х векторов есть инвариант.

9) На рисунке 8.1 представлена диаграмма, объединяющая разные выражения для энергии релятивистских частиц или систем. Причем разные формулы, дающие энергию, удобны для анализа различных экспериментов.

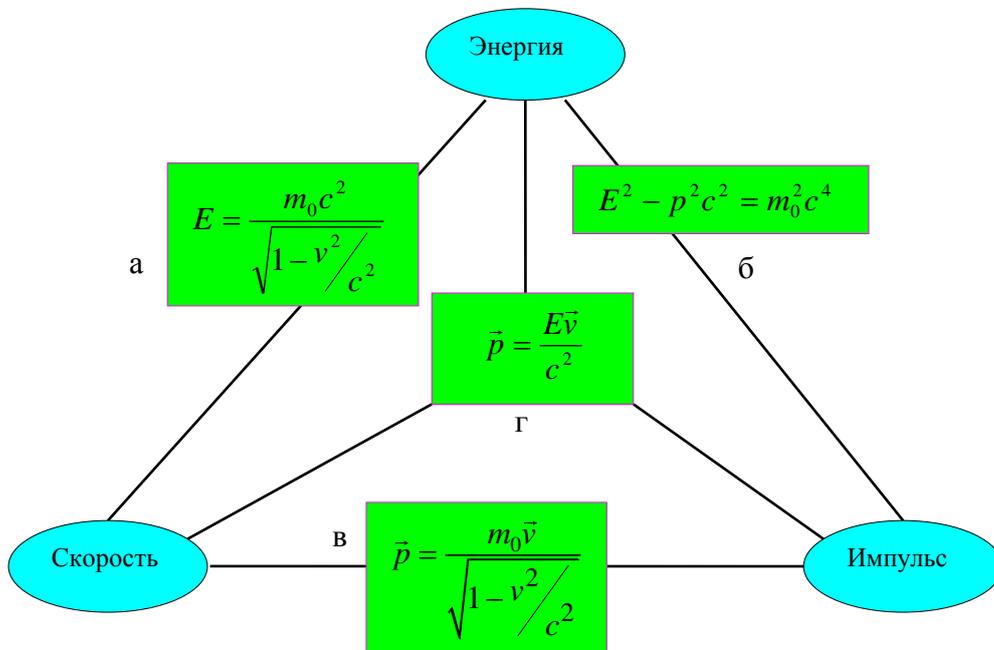


Рис. 8.1.

Разберем кратко формулы, входящие в рис. 8.1.

- (а) В эту формулу входит скорость, энергия и масса. В эксперименте скорость определяется по времени пролета, энергия E – из законов сохранения в процессах столкновения частиц между собой.
- (б) Формула удобна, когда нас не интересует скорость, а основное внимание направлено на проверку или применение законов сохранения.
- (в) По этой формуле скорость определяется по времени пролета частиц, импульс по ее траектории (например, по искривлению траектории частицы в магнитном поле).
- (г) Выражение для энергии удобно, когда нас не интересует масса.

10) Частица в потенциальном поле. Если частица движется в потенциальном поле, то сохраняется сумма энергий:

$$E + U = m_0 \gamma c^2 + U = const$$

Часто в физике вводится функция Гамильтона:

$$H = E + U = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} + U \quad (2.8.21)$$

Она играет большую роль в классической теоретической механике и в квантовой теории.

1.8.3. Взаимосвязь энергии и массы покоя.

В классической механике мы говорили о законе сохранения массы. Проводили оценки изменения массы по формуле $\Delta E = \Delta m c^2$, которое оказалось малым в случае неупругих столкновений (при небольших скоростях, где были справедливы преобразования Галилея) и химических реакциях.

В релятивистской теории связаны две важнейшие характеристики материи: энергия и инертность (масса) $E = mc^2$. Иногда говорят об эквивалентности энергии и массы, но это не общепринято.

Всякое изменение релятивистской массы сопровождается изменением энергии. Всякая энергия (полная, кинетическая, потенциальная) обладает инертными свойствами. В отличие от Ньютоновской механики закон сохранения энергии справедлив при упругих и неупругих ударах. При неупругих ударах масса составной частицы не равна сумме масс составных частиц.

Рассмотрим опять в качестве примера неупругое столкновение 2-х частиц с образованием одной частицы. В системе отсчета, где одна частица покоится, а другая налетает (рис. 8.2), инвариант энергии-импульса запишется:



Рис. 8.2.

запишется:

$$E^2 - p^2 c^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 = inv, \quad (2.8.22)$$

Здесь энергии и импульсы равны, соответственно

$$E_1 = m_{01}c^2 + T_1, \quad E_2 = m_{02}c^2,$$

$$p_1 = p_1, \quad p_2 = 0$$

Инвариант есть инвариант и для образовавшейся частицы массы m_3 и при этом в любой инерциальной системе отсчета. Выберем новую систему отсчета такой, что образовавшаяся частица в ней покоится, то есть $p' = 0$, $E' = m_{03}c^2$:

$$(E_1 + m_{02}c^2)^2 - p_1^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2 = m_{03}^2c^4 \quad (2.8.23)$$

Подставляя в последнее равенство E_1 , получим:

$$m_{03}^2 = (m_{01} + m_{02})^2 + \frac{2m_{02}T_1}{c^2} \quad (2.8.24)$$

т.е. $m_{03} > m_{01} + m_{02}$. Масса образовавшейся частицы оказалась больше суммы масс составных частиц. Это связано с тем, что часть кинетической энергии налетающей частицы T_1 перешла во внутреннюю энергию составной частицы, что привело к увеличению ее массы покоя.

Закон сохранения энергии – импульса и соотношение между массой и энергией не только нашли экспериментальное подтверждение, но и стали основными положениями современной физики, в основном ядерной физики и физики элементарных частиц.

Означает ли эйнштейновское утверждение об эквивалентности массы и энергии, что энергия – это то же самое, что масса? Нет! *Величина энергии зависит от того, в какой ИСО мы рассматриваем частицу. Величина же массы покоя не зависит от выбора ИСО.* Энергия всего лишь временная компонента 4-х вектора, тогда как масса определяется как полная абсолютная величина этого 4-х вектора.

Временная компонента 4-х вектора совпадает с его абсолютной величиной лишь в том случае, когда пространственные компоненты равны 0. Лишь тогда величина энергии совпадает с величиной массы покоя. (см доп. литературу Тейлор Э.Ф. и Уиллер Д.А. “Физика пространства-времени”).

2.9. Примеры применения релятивистской механики.

2.9.1. Дефект массы и энергия связи.

Рассмотрим проблему энергии связи системы связанных частиц. Будем ее рассматривать поэтапно.

1) Полная энергия системы взаимодействующих частиц равна:

$$E = \sum_i E_i + U, \quad (2.9.1)$$

где E_i – полная энергия одной частицы, U – энергия взаимодействия частиц, которая равна работе, необходимой для разделения системы на отдельные частицы и разнесения их на расстояние, где они уже не взаимодействуют.

2) Полная масса покоя системы взаимодействующих частиц:

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{\sum_i E_i + U}{c^2} = \sum_i m_{0i} + \frac{1}{c^2} \sum_i T_i + \frac{U}{c^2} \quad (2.9.2)$$

где m_{0i} – массы покоя отдельных составляющих частиц, T_i – кинетические энергии каждой из частиц.

3) Сделаем предположение, которое часто выполняется в атоме, ядре и подобных системах микрочастиц, что суммарная кинетическая энергия частиц мала, по сравнению с энергией связи, т.е. можно положить $M \approx \sum_i m_{0i} + U/c^2$. Таким образом, в системе частиц всегда отлична от нуля

следующая разность масс

$$\sum_i m_{0i} - M = \Delta M \approx -\frac{U}{c^2} \quad (2.9.3)$$

Это явление имеет название *дефекта массы*. Система частиц устойчива, если $U < 0$ и $\Delta M > 0$, т.е. когда сумма масс составляющих систему частиц больше массы всей системы. *Энергия связи* системы при этом определяется:

$$|U| = \Delta M \cdot c^2 \quad (2.9.4).$$

Примеров проявления дефекта массы достаточно много: 1) масса ядра меньше суммы масс, составляющих его нуклонов, 2) то же для элементарных частиц, в частности для адронов, состоящих из более массивных частиц – кварков.

2.9.2. Реакция распада частиц.

Пусть распадается частица массы M на две частицы. Запишем для распадающейся частицы инвариант 4-х вектора энергии-импульса до распада:

$$E^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4 = inv \quad (2.9.5)$$

Рассмотрим процесс в системе центра инерции (СЦИ), в которой полный импульс равен 0: $p = 0$. В результате распада получаем 2 частицы с импульсами \vec{p}_1 и \vec{p}_2 и массами m_{01} и m_{02} . Тот же инвариант энергии - импульса после распада имеет вид:

$$inv = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 = M^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 \quad (2.9.6)$$

поскольку в СЦИ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Тогда

$$E_1 + E_2 = Mc^2 = T_1 + m_{01}c^2 + T_2 + m_{02}c^2 = (m_{01} + m_{02})c^2 + T_1 + T_2 \quad (2.9.7)$$

Так как кинетические энергии T_1 и $T_2 > 0$, то реакция самопроизвольного распада частицы возможна лишь в случае

$$M > m_{01} + m_{02}.$$

Масса распадающегося тела должна превышать сумму масс покоя получившихся тел. Если это не так, то тогда, чтобы частица могла распасться, необходим подвод тепла (энергии).

Рассмотрим пример: распад нейтрона $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Массы измеряем в $MэВ$ ($1эВ$ энергии = заряд $e^- \times$ разность потенциалов в $1 В$):

$$m_{0n} = 939.6 MэВ$$

$$m_{0p} = 938.3 MэВ$$

$$m_{0e} = 0.511 MэВ$$

Оставшуюся энергию уносит антинейтрино $\bar{\nu}_e$. Ранее, пока не ввели и не обнаружили на эксперименте нейтрино и антинейтрино, в этих реакциях предполагалось нарушение закона сохранения энергии.

Примечание 1. Нейтрино имеют ненулевую массу, но эта масса крайне мала. Верхняя экспериментальная оценка суммы масс всех типов нейтрино составляет всего $0,28 эВ$.

2.9.3. Рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар.

Рождение электронно-позитронной пары. Фотоны рождают электрон-позитронные пары. Один γ -квант (фотон) *не может* создать электрон-позитронную пару ($e^- - e^+$) в вакууме. Это можно доказать из законов сохранения. Это также следует из инварианта, когда рассматриваем процесс в системе центра инерции:

$$\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 = 0 = 4m_0^2c^2 - p^2 = 4m_0^2c^2 \neq 0 \quad (2.9.8)$$

Инвариант энергии – импульса для фотона равен нулю, а инвариант энергии – импульса электрон-позитронной пары не равен нулю. Это и приводит к запрещению процесса превращения кванта в электрон-позитронную пару в отсутствие других тел.

Для того, чтобы процесс рождения пары состоялся, должно быть наличие третьего тела (например, ядро), которому можно передать импульс. Следовательно, этому телу передается и часть энергии E , то есть энергетический порог реакции должен быть больше суммы энергий покоя электрона и позитрона (т.е. $> 2m_0c^2$). Рассмотрим реакцию рождения электрон-позитронной пары и определим пороговую энергию фотона (рис. 9.1).

До реакции имеем

γ -квант:

$$E = E_{\text{порог}}$$

$$p_\gamma = \frac{E_{\text{порог}}}{c}$$

Ядро: M ,

$$E = Mc^2$$

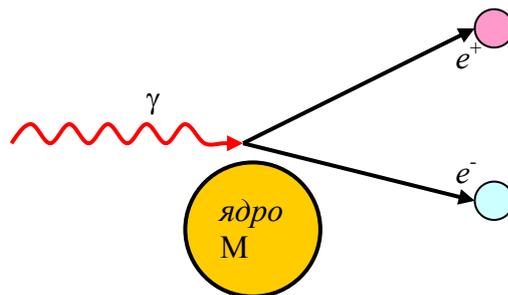


Рис. 9.1.

После реакции имеем

электрон e^- и m_0
 $E = m_0c^2$,

позитрон e^+ и m_0

$$E = m_0c^2$$

Ядро: M

Полный импульс системы

$$p = p_\gamma$$

Полный импульс системы в СЦИ

$$p = 0$$

Запишем инвариант энергии-импульса до и после реакции (после реакции запишем его в СЦИ):

$$(E_{\text{порог}} + Mc^2)^2 - p_\gamma^2 c^2 = (E_{\text{порог}} + Mc^2)^2 - \left(\frac{E_{\text{порог}}}{c}\right)^2 c^2 = (Mc^2 + 2m_0c^2)^2 \quad (2.9.9)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем пороговую энергию

$$E_{\text{порог}} = 2m_0c^2 \left(1 + \frac{m_0}{M}\right) \quad (2.9.10)$$

Порог реакции оказывается несколько больше, чем энергия $2m_0c^2$, т.е. больше, чем энергия покоя электрона и позитрона.

Аннигиляция электрон-позитронных пар. Аналогично процессу рождения электрон – позитронной пары одним фотоном получаем, что один фотон не может появиться в результате обратного процесса - аннигиляции электрона и позитрона. Как и ранее в СЦИ импульс пары ($e^- - e^+$) равен 0, а импульс кванта всегда не равен нулю $p_\gamma \neq 0$. В вакууме (без присутствия

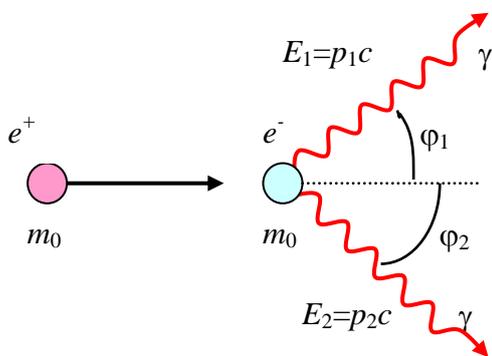


Рис. 9.2.

третьего тела) электрон и позитрон аннигилируют, по крайней мере, на два γ -кванта из-за законов сохранения энергии-импульса. Энергия, выделяемая в каждом акте, равна, по крайней мере:

$$\Delta E = 2m_0c^2 = 1.02 \text{ MeV} \quad (2.9.11)$$

Пусть одна частица – пусть позитрон – налетает на электрон с

энергией E и импульсом p (см рис. 9.2). Энергия позитрона – E , энергия электрона – m_0c^2 , энергии фотонов – $E_1 = p_1c$, $E_2 = p_2c$. Закон сохранения энергии:

$$E + m_0c^2 = E_1 + E_2 \quad (2.9.12)$$

Закон сохранения импульса:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (2.9.13)$$

Запишем (2.9.13) через угол вылета 1-го кванта ϕ_1 по отношению к импульсу позитрона, подставив (2.9.12):

$$(\vec{p} - \vec{p}_1)^2 = p^2 - 2pp_1 \cos\phi_1 + p_1^2 = p_2^2 = \frac{E_2^2}{c^2} = \frac{(E + m_0c^2 - E_1)^2}{c^2} \quad (2.9.14)$$

Раскрывая квадрат и учитывая $E_1 = p_1 c$ и $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$, получаем:

$$E_1 = \frac{m_0 c^2 (m_0 c^2 + E)}{m_0 c^2 + E - p c \cdot \cos \varphi_1} = \frac{m_0 c^2 (2m_0 c^2 + T)}{2m_0 c^2 + T - \cos \varphi_1 \sqrt{T^2 + 2m_0 c^2 T}} =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{1 - \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{1 + 2m_0 c^2 / T}}} \quad (2.9.15)$$

Здесь ввели кинетическую энергию позитрона и использовали, что $pc = \sqrt{T^2 + 2m_0 c^2 T}$.

Максимальная энергия кванта получается при $\cos \varphi_1 = 1$:

$$(E_1)_{\max} = \frac{m_0 c^2}{1 - (1 + 2m_0 c^2 / T)^{-1/2}} \quad (2.9.16)$$

Рассмотрим предельные случаи для уравнения (2.9.16):

- 1) при $T \gg 2m_0 c^2$ получаем $(E_1)_{\max} \approx \frac{m_0 c^2}{1 - 1 + m_0 c^2 / T} = T$;
- 2) при $T = 0$ $(E_1)_{\max} = m_0 c^2$

Минимальная энергия кванта получается при $\cos \varphi_1 = -1$:

$$(E_1)_{\min} = \frac{m_0 c^2}{1 + (1 + 2m_0 c^2 / T)^{-1/2}} \quad (2.9.17)$$

Рассмотрим предельные случаи в уравнении (2.9.17):

- 1) при $T = 0$ $(E_1)_{\min} = m_0 c^2$;
- 2) при $T \gg 2m_0 c^2$ получаем $(E_1)_{\min} \approx \frac{m_0 c^2}{1 + 1 - m_0 c^2 / T} = \frac{m_0 c^2}{2}$

Существует огромное количество реакций рождения и уничтожения частиц, неупругих и упругих столкновений. Их кинематический анализ проводится на основе законов сохранения и релятивистского инварианта. В том числе тот факт, что свет, или что тоже фотон, обладает импульсом проявляется во многих процессах, связанных с упругим рассеянием фотонов: эффект Комптона, давление света и других.