

## Глава 3. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА.

### 3.1. Силы инерции

#### 3.1.1. Неинерциальные системы отсчета

До сих пор мы рассматривали физические явления и законы в инерциальных системах отсчета (ИСО). Однако, ИСО – это идеализация и в реальности наши системы отсчета являются неинерциальными.

**Определение:** *Неинерциальной системой отсчета (НСО) называется система, движущаяся ускоренно относительно инерциальной (ИСО).*

Простейшие НСО – это системы, движущиеся ускоренно прямолинейно, и системы вращающиеся. Задача механики состоит в том, чтобы найти уравнения движения в НСО, эта задача сводится к установлению законов преобразования сил и ускорений при переходе от ИСО к НСО. Поскольку анализ этого перехода в релятивистской механике сложен, ограничимся в этом разделе малыми скоростями (по сравнению со скоростью света), то есть классической механикой.

Введем некоторые определения:

- 1) Условимся считать произвольно выбранную ИСО неподвижной, а движение относительно нее *абсолютным*. Это условно!
- 2) Если тело неподвижно в системе отсчета, которая движется относительно выбранной (абсолютной) ИСО, то такое движение тела назовем *переносным*.
- 3) Движение тела относительно движущейся системы отсчета назовем *относительным*.

Итак, абсолютное движение тела складывается из его относительного и переносного движения. Наша цель – изучить относительное движение. Если движущаяся система отсчета (СО) инерциальная, то уравнения динамики – это обычные уравнения Ньютона, которые были рассмотрены в предыдущих главах. Здесь рассмотрим СО, движущиеся ускоренно относительно неподвижной ИСО.

#### 3.1.2. Поступательно движущиеся НСО.

Имеем две системы отсчета: абсолютную СО  $K_1$ , неподвижную с центром  $O_1$ , и систему  $K$  с началом  $O$ , движущуюся поступательно относительно  $K_1$  системы. Пусть  $\vec{R}_0$  – радиус-вектор между центрами систем отсчета  $O_1$  и  $O$  (рис.1.1).

Рассматриваем материальную точку  $M$ , координаты которой будем определять векторами в каждой системе отсчета так, как нарисовано на рисунке 1.1: вектор  $\vec{R}$  определяет координаты точки в неподвижной системе отсчета  $K_1$ , вектор  $\vec{r}$  определяет положение точки относительно движущейся системы  $K$ . Таким образом, можно записать:

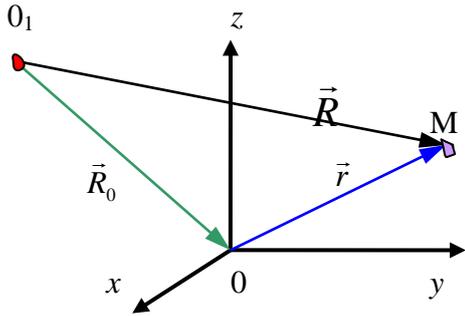


Рис. 1.1.

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r} \quad (3.1.1)$$

Продифференцируем (3.1.1) по времени и введем обозначения для всех первых производных по времени, т.е. скоростей,  $\frac{d\vec{R}}{dt} \equiv \dot{\vec{R}}$ . Тогда получаем:

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}} \quad (3.1.2)$$

Дифференцируем по времени второй раз и введем соответствующие

обозначения для ускорений:

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}} \quad (3.1.3)$$

Следует отметить, что такая запись для сложения скоростей и ускорений справедлива только в частном случае, когда система с центром 0 движется поступательно относительно системы отсчета с центром 0<sub>1</sub>. Тогда в соответствии с определениями в пункте 3.1.1 получаем:

$$\vec{v}_{абс} = \dot{\vec{R}} - \text{абсолютная скорость точки M};$$

$$\dot{\vec{R}}_0 = \vec{v}_{пер} - \text{переносная скорость, т.е. скорость точки 0 относительно 0}_1 \text{ и при поступательном движении есть скорость всех точек системы 0};$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_{отн} - \text{относительная скорость точки M, т.е. ее значение в системе с центром 0}.$$

Соответственно, то же получаем для ускорений:

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{a}_{абс}, \quad \ddot{\vec{R}}_0 = \vec{a}_{пер}, \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_{отн} \quad (3.1.4)$$

Таким образом, уравнения (3.1.2) и (3.1.3) записываются:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{абс} &= \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн} \\ \vec{a}_{абс} &= \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

В системе K<sub>1</sub> с центром 0<sub>1</sub> можно записать 2-ой закон Ньютона:

$$m\vec{a}_{абс} = \vec{F} \quad (3.1.6)$$

И тогда подставляя абсолютное ускорение из (3.1.5), имеем:

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} - m\vec{a}_{пер} \quad (3.1.7)$$

Это и есть *уравнение относительного движения* материальной точки, описывающее ее движение в K системе. Формально можно считать, что справа в (3.1.7) стоит просто некая сила, действующая на точку M в движущейся системе отсчета. Сила состоит из двух слагаемых:

- 1)  $\vec{F}$  – “настоящая” (Ньютонова) сила, то есть результат взаимодействия тел, которая зависит от разностей координат и разностей скоростей взаимодействующих точек. В нерелятивистской механике эти разности

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  и  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$  не меняются при переходе от одной СО к другой, поэтому  $\vec{F}$  не меняется. То есть сила инвариантна относительно преобразований Галилея и при переходе в другие, даже неинерциальные, системы отсчета.

- 2) другая сила “ $-m\vec{a}_{\text{нер}} \equiv -m\vec{a}_0$ ” – возникает не из-за взаимодействия тел, а из-за ускоренного движения К системы отсчета. Она носит название *силы инерции*. В данном случае  $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0$  – поступательная сила инерции.

Итак, уравнение относительного движения записывается:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} \quad (3.1.8)$$

Каковы особенности сил инерции?

- 1) Силы инерции не инвариантны относительно перехода из одной СО в другую.
- 2) Силы инерции не подчиняются закону равенства действия и противодействия (3-ий закон Ньютона): если на какое тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к другому телу. Просто нет другого тела, создающего эти силы. То есть движение тел под действием сил инерции аналогично движению тел во внешних полях. Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любой движущейся системе материальных тел.

Реальны или фиктивны силы инерции? Это зависит от того, какой смысл в них вкладывать.

- 1) Если считать, что все силы должны быть результатом взаимодействия тел (Ньютоновская механика), то силы *инерции фиктивны*, они исчезают в ИСО.
- 2) Однако есть и другая точка зрения. Все взаимодействия осуществляются посредством силовых полей и передаются с конечными скоростями. И на силы инерции можно смотреть как на воздействие на рассматриваемое тело со стороны каких-то реальных полей. Правда, эти поля определенным образом преобразуются при переходе от рассматриваемой системы отсчета к другой, движущейся ускоренно. Но это не дает оснований считать их фиктивными. Так электрические и магнитные силы также преобразуются при переходе от одной СО к другой (даже инерциальной).

Многие явления интерпретируются как проявление сил инерции. Рассмотрим некоторые примеры их проявлений.

- 1) Движение поезда с ускорением (ракеты). Груз, подвешенный на нити в вагоне поезда, отклоняется при ускоренном движении поезда (рис. 1.2). Это движение груза можно

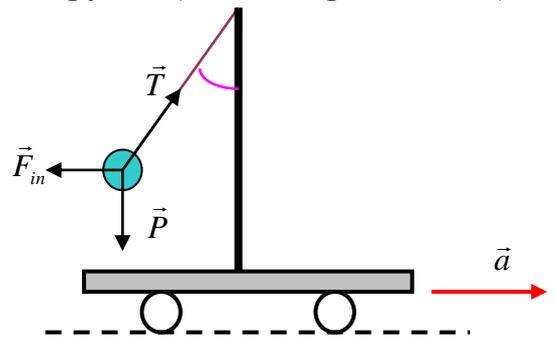


Рис. 1.2.

рассматривать в ИСО, где нет сил инерции, и тогда уравнение движения запишется:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (3.1.9)$$

Из этого уравнения, в частности, можно найти угол отклонения нити. Рассматривая в системе отсчета, связанной с вагоном, имеем: груз покоится относительно вагона, и тогда, учитывая, что  $\vec{a}_{\text{отн}} = 0$ , уравнение (3.1.8) запишется:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = 0, \quad (3.1.10)$$

где  $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$ . Во многих случаях бывает проще рассматривать явление непосредственно в движущейся СО, не переходя к инерциальной СО. Кроме того, иногда трудно разделить полную силу, действующую в неинерциальной СО на "реальную" и "фиктивную".

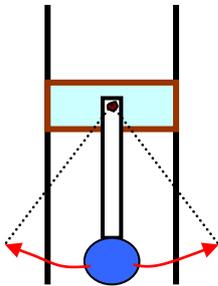


Рис. 1.3.

2) Свободно падающий маятник. Этот пример является эффективной демонстрацией движения тел в неинерциальных системах отсчета. Маятник находится на подвесе, который практически без трения может двигаться по направляющим и падать вниз (рис. 1.3). Когда подвес закреплен, маятник испытывает обычные колебания около положения равновесия, которые описываются уравнением:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}, \quad (3.1.11)$$

где  $\vec{T}$  сила натяжения подвеса (см рис. 1.4, подробнее о колебаниях в главе 4 курса Механики). Движение маятника при свободном падении подвеса зависит от фазы колебания в момент, когда началось падение.

Если скорость маятника в момент начала свободного падения не равна нулю  $\vec{v} \neq 0$ , то в неинерциальной системе отсчета имеем уравнение, описывающее движения маятника (рис. 1.5):

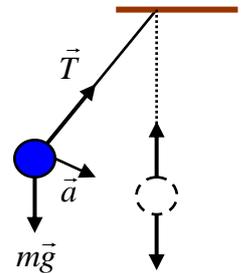


Рис. 1.4.

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.1.12)$$

Поскольку сила инерции равна  $\vec{F}_{in} = -m\vec{g}$ , то уравнение приобретает вид (рис. 1.5):

$$\vec{T} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.1.13)$$

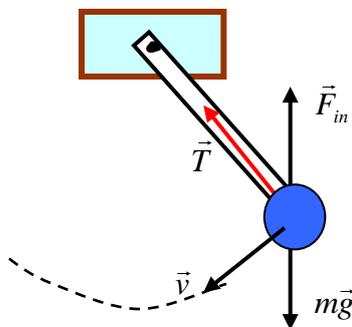


Рис. 1.5.

Однако, скорость движения подвеса всегда перпендикулярна к силе натяжения  $\vec{T}$ , и, следовательно, сила натяжения не может изменить эту скорость по модулю, а меняет только ее направление. Таким образом, маятник будет двигаться с постоянной

скоростью по окружности вокруг точки подвеса. Естественно, что этот же результат можно получить в ИСО, записывая соответствующее уравнение Ньютона без сил инерции:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_{abc} = m\vec{a}_{отн} + m\vec{a}_{неп} \quad (3.1.14)$$

Поскольку переносное ускорение равно ускорению силы тяжести  $m\vec{a}_{неп} = m\vec{g}$ , то мы снова получаем уравнение (3.1.13).

Если в момент начала падения скорость маятника равнялась нулю, т.е. он был в крайнем левом или правом положении, то в дальнейшем при падении он так и останется в этом положении без движения в НСО, поскольку сила натяжения также равна нулю (см уравнение (3.1.13)).

3). Вода в движущемся контейнере. При ускоренном движении контейнера уровень воды установится под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту. Причем этот угол наклона определяется силой инерции  $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$ , т.е. зависит от величины ускорения  $a$  контейнера:

$$tg\alpha = \frac{a}{g} \quad (3.1.15)$$

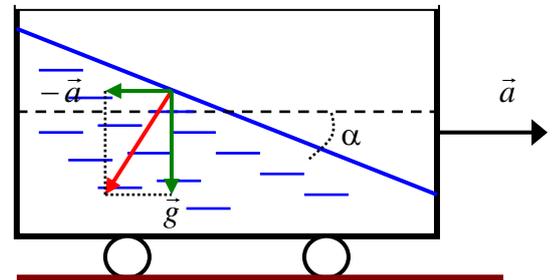


Рис. 1.6.

Естественно, что угол наклона уровня воды устанавливается так, чтобы поверхность была перпендикулярна направлению равнодействующей силы  $\vec{F} = m\vec{g} - m\vec{a}$ .

### 3.2. Движение в произвольной системе отсчета.

#### 3.2.1. Системы с поступательным и вращательным движением.

Пусть система отсчета К движется относительно неподвижной системы  $K_1$  произвольно (рис. 2.1). Задача состоит в том, чтобы записать уравнение движения материальной точки М (или тела) в системе отсчета К. В самом

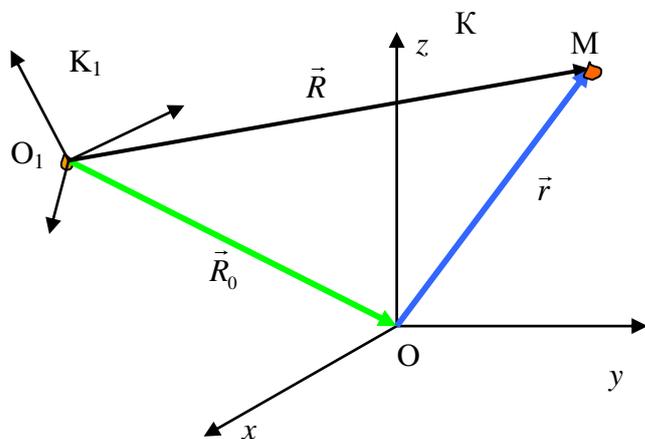


Рис. 2.1.

общем случае это движение можно разбить на 2 движения: на поступательное движение со скоростью  $\vec{V}_0$ , равной скорости  $(\cdot)O$  К системы, и на вращательное движение вокруг мгновенной оси, проходящей через это начало координат  $(\cdot)O$ , с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .

Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  меняется по величине и направлению. Следовательно, хотя

орты  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  в системе отсчета К имеют постоянные длины, равные 1, однако направление этих единичных векторов-ортов меняется вследствие вращения. Поэтому орты в системе отсчета К зависят от времени  $\vec{e}_x(t), \vec{e}_y(t), \vec{e}_z(t)$ . Дальнейший ход рассуждений такой же, как в § 3.1, и формулы для векторов смещения, скорости и ускорения фактически остаются теми же:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{R}_0 + \vec{r} \\ \dot{\vec{R}} &= \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{R}} &= \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

При этом остается неизменной интерпретация векторов  $\dot{\vec{R}}_0$  и  $\ddot{\vec{R}}_0$  как *абсолютной скорости*  $\vec{v}_0$  ( $\vec{v}_0 \equiv \dot{\vec{R}}_0$ ) и *абсолютного ускорения*  $\vec{a}_0$  ( $\vec{a}_0 \equiv \ddot{\vec{R}}_0$ ) *начала координат*  $(\cdot)O$ , соответственно. Однако при этом меняются слагаемые  $\dot{\vec{r}}$  и  $\ddot{\vec{r}}$ , а также их интерпретация.

Напомним о связи линейной и угловой скорости, когда вектор  $\vec{r}$  вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг некоторой оси (см рис. 2.2, а также рассуждения и формулы (1.11.1) и (1.11.2) в § 1.11), причем начало его неподвижно и длина не меняется:

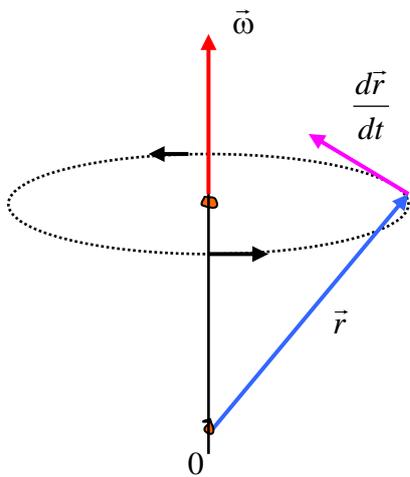


Рис. 2.2.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad (3.2.2)$$

Аналогично можно записать такое же соотношение для любого вращающегося вектора  $\vec{A}$ :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{A}],$$

если он вращается относительно оси, проходящей через его начало (точка 0 на рис. 2.2), с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . В нашей системе отсчета сами орты  $\vec{e}_x(t), \vec{e}_y(t), \vec{e}_z(t)$  вращаются с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Тогда можно сразу написать, что для их производных по времени имеем равенства аналогичные (3.2.2):

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_x}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_x] \\ \frac{d\vec{e}_y}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_y] \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} &= [\vec{\omega}, \vec{e}_z]\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

Эти соотношения необходимо учитывать, когда будем вычислять производные по времени от вектора  $\vec{r}$ . Рассмотрим сначала первую производную  $\dot{\vec{r}}$ .

### 3.2.2. Скорость в системе К

Итак, координаты точки М в системе К запишем как обычно (рис.2.1):

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (3.2.4)$$

Найдем скорость точки М, дифференцируя радиус-вектор по времени и учитывая, что орты тоже меняются во времени:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) + \left( x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt} \right) \quad (3.2.5)$$

Если мы находимся в системе К (и, следовательно, вращаемся вместе с ортами системы), то относительно нас точка М движется со скоростью  $v_{омн}$ , и вектор этой скорости определяется

$$\vec{v}_{омн} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad (3.2.6)$$

Второе слагаемое в (3.2.5) можно преобразовать, используя формулы (3.2.3) (или (3.2.2)):

$$\left( x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt} \right) = x[\vec{\omega}, \vec{e}_x] + y[\vec{\omega}, \vec{e}_y] + z[\vec{\omega}, \vec{e}_z] = [\vec{\omega}, (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)] = [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad (3.2.7)$$

Итак, получаем:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{омн} + [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad (3.2.8)$$

Точно так же как и ранее (см уравнение (3.1.5) §3.1), можно записать выражение для абсолютной скорости, т.е. для скорости относительно системы  $K_1$ , как сумму скоростей:

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{омн} + \vec{v}_{пер} \quad (3.2.9)$$

Но в отличие от движения, рассмотренного в §3.1, в этом случае получаем более сложное выражение для переносной скорости. В самом деле, имеем:

1) **Относительная скорость**  $\vec{v}_{омн}$  – скорость точки М относительно системы К, т.е. относительно центра 0 и ортов  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  как и ранее. Если точка М покоится относительно К системы, то  $\vec{v}_{омн} = 0$ .

2) **Переносная скорость**  $\vec{v}_{пер}$  состоит из 2-х слагаемых:

$$\vec{v}_{пер} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad (3.2.10)$$

Переносная скорость  $\vec{v}_{пер}$  – это та абсолютная скорость, с которой бы двигалась точка М относительно системы  $K_1$ , если бы она покоилась в системе К. Эта скорость состоит из двух слагаемых: 1) первое  $\vec{v}_0$  –

переносная скорость, определяющая скорость начала координат 0 системы К и 2) второе  $[\vec{\omega}, \vec{r}]$  – переносная скорость, определяющая скорость из-за вращения системы К относительно начала 0.

### 3.2.3. Ускорение в системе К.

Немного сложнее обстоит дело с *абсолютным ускорением*. В самом деле, продифференцируем по времени уравнение (3.2.9) с учетом (3.2.10):

$$\vec{a}_{abc} \equiv \frac{d\vec{v}_{abc}}{dt} = \dot{\vec{v}}_{omn} + \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad (3.2.11)$$

Второе слагаемое  $\dot{\vec{v}}_0$  в правой части уравнения (3.2.11) описывает ускорение точки 0 системы К относительно начала отсчета системы  $K_1$ . С другими слагаемыми в (3.2.11) разберемся по очереди.

1) Производная по времени от относительной скорости, исходя из уравнения (3.2.6) и беря производные по времени от ортов, как и ранее в (3.2.7), имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_{omn}}{dt} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{x}\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{e}_y}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{a}_{omn} + \dot{x}[\vec{\omega}, \vec{e}_x] + \dot{y}[\vec{\omega}, \vec{e}_y] + \dot{z}[\vec{\omega}, \vec{e}_z] = \\ &= \vec{a}_{omn} + [\vec{\omega}, \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z] = \vec{a}_{omn} + [\vec{\omega}, \vec{v}_{omn}] \end{aligned}$$

Итак, получаем, что производная от относительной скорости состоит из 2-х слагаемых:

$$\frac{d\vec{v}_{omn}}{dt} = \vec{a}_{omn} + [\vec{\omega}, \vec{v}_{omn}] \quad (3.2.12)$$

где *относительное ускорение*, т.е. ускорение точки М для наблюдателя в системе К, равно:

$$\vec{a}_{omn} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (3.2.13)$$

2) Преобразуем третье слагаемое в уравнении (3.2.11), в которое вместо производной от радиус-вектора подставим уравнение (3.2.8):

$$[\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}] = [\vec{\omega}, \vec{v}_{omn}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] \quad (3.2.14)$$

Теперь (3.2.12) и (3.2.14) подставим в абсолютное ускорение (3.2.11) и окончательно получаем:

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{omn} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{omn}] + \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad (3.2.15)$$

Итак, абсолютное ускорение состоит из 5 слагаемых. Введем следующие обозначения

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{omn} + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{пер} \quad (3.2.16)$$

Здесь относительное ускорение  $\vec{a}_{omn}$ , определяемое формулой (3.2.13), описывает ускорение точки относительно координат К системы.

Введенное *переносное ускорение* определяется суммой трех слагаемых:

$$\vec{a}_{пер} = \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad (3.2.17)$$

и зависит только от движения системы К относительно неподвижной системы  $K_1$ . Именно такое ускорение испытывает точка М, если она покоится в системе К, поэтому уравнение (3.2.17) определяет переносное ускорение.

В уравнение (3.2.16) ввели также *Кориолисово ускорение*:

$$\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}], \quad (3.2.18)$$

которое зависит от относительного и переносного движений, т.е. “смешивает” 2 движения между собой, поэтому оно выделено в отдельное ускорение.

**Теорема Кориолиса:** абсолютное ускорение является векторной суммой относительного, Кориолисова и переносного ускорений:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{пер}.$$

Последние 2 слагаемых рассмотрим подробнее ниже.

*Примечание 1. Гюстав Гаспар Кориолис, французский физик, 1792-1843 г.г.*

#### 3.2.4. Переносное ускорение

Рассмотрим более подробно переносное ускорение, определяемое уравнением (3.2.17).

- 1) Первое слагаемое в (3.2.17) –  $\dot{\vec{v}}_0$  – переносное ускорение, вызванное *поступательным* ускоренным движением системы К, т.е. ускорением точки начала отсчета 0.
- 2) Все остальные слагаемые в (3.2.17) – обусловлены вращением системы К относительно  $K_1$ . Так, третье слагаемое в (3.2.17) “ $[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}]$ ” появляется из-за неравномерности вращения системы К. При равномерном вращении угловое ускорение  $\dot{\vec{\omega}} = 0$  и угловая скорость постоянна  $\vec{\omega} = const$ .
- 3) Второе слагаемое в (3.2.17) –  $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{a}_{цс}$  – *центростремительное* ускорение. Оно всегда направлено к мгновенной оси вращения. В самом деле, разложим радиус-вектор на составляющие вдоль оси вращения и перпендикулярно оси вращения:  $\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$ . Параллельная компонента радиус-вектора не входит в это ускорение, поскольку  $[\vec{\omega}, \vec{r}_{||}] = 0$ . Тогда, расписывая двойное векторное произведение по правилу БАЦ-ЦАБ и учитывая, что скалярное произведение  $(\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}) = 0$ , получаем:

$$\vec{a}_{цс} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}]] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}) - \vec{r}_{\perp}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = 0 - \omega^2 \vec{r}_{\perp} = -\omega^2 \vec{r}_{\perp} \quad (3.2.19)$$

Из последнего видно, что центростремительное ускорение направлено к оси вращения и перпендикулярно ей.

### 3.2.5. Уравнение относительного движения

Запишем уравнение относительного движения для тела массы  $m$  в виде:

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} - m\vec{a}_{кор} - m\vec{a}_{пер} \quad (3.2.20)$$

Итак, получили, что к настоящей (Ньютоновой) силе  $\vec{F}$  добавились еще 2 силы инерции: *Кориолисова сила*

$$\vec{F}_{кор} = -m\vec{a}_{кор} = 2m[\vec{v}_{отн}, \vec{\omega}] \quad (3.2.21)$$

и *переносная сила инерции*

$$\vec{F}_{пер} = -m\vec{a}_{пер} = -m\dot{\vec{v}}_0 + m\omega^2\vec{r}_\perp - m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad (3.2.22)$$

В уравнении (3.2.22) имеем:

$$\vec{F}_{пер1} = -m\vec{v}_0 \quad \text{– поступательная сила инерции} \quad (3.2.23)$$

$$\vec{F}_{пер2} = -m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad \text{– сила инерции из-за неравномерности вращения} \quad (3.2.24)$$

$$\vec{F}_{пер3} = m\omega^2\vec{r}_\perp \quad \text{– центробежная сила} \quad (3.2.25)$$

Все эти силы вводят только в ускоренно движущихся системах отсчета. Приведем несколько примеров действия центробежной силы:

- 1) возникновение перегрузки летчиков при исполнении фигур высшего пилотажа;
- 2) отклонение тел при поворотах или вращении (предметы на карусели, раскидай и т.д.).
- 3) движение частиц в центрифугах и сепараторах.

Кориолисова сила (3.2.21) возникает только тогда, когда система вращается, а материальная точка движется относительно этой системы. Эта сила инерции, помимо скорости вращения, зависит от относительной скорости  $\vec{v}_{отн}$ . Сила Кориолиса всегда перпендикулярна относительной скорости и поэтому работы не совершает. Сила Кориолиса – *гироскопическая сила, не потенциальная*.

Примеры действия силы Кориолиса:

- 1) движение человека по вращающейся карусели,
- 2) движение шарика по поверхности вращающегося диска, пущенного из центра, – траекторией шарика в системе отсчета диска является кривая линия под действием силы Кориолиса (см рис. 2.3),

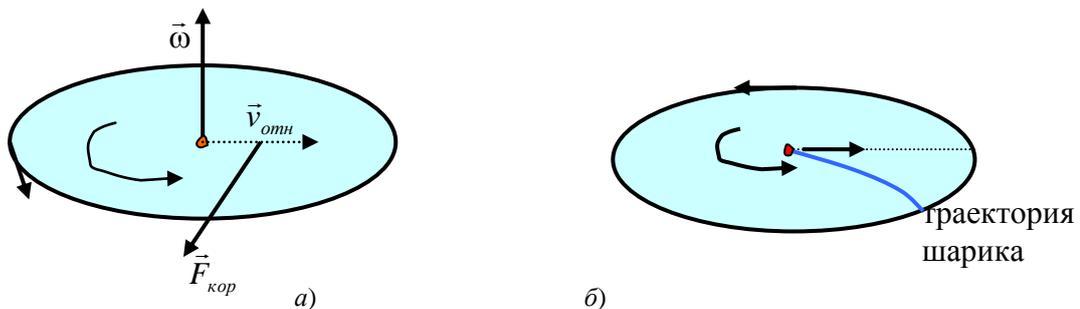


Рис. 2.3.

- 3) движение тел в поле Земли, отклонение падающих тел от вертикали и т.д.  
 4) реки, текущие по меридиану (Волга, Енисей, Одер и другие) подмывают свои правые берега. С течением времени русло смещается вправо, оставляя левые берега пойменными.

Подробнее пример движения тел в поле Земли рассмотрим в следующем параграфе.

### 3.3. Движение материальной точки относительно Земли.

#### 3.3.1. Уравнение движения тел относительно Земли.

Системы отсчета, связанные с поверхностью Земли – неинерциальные системы отсчета. Применим уравнение относительного движения (3.2.20) к движению тел относительно Земли. Введем далее для простоты написания следующие обозначения:  $\vec{a}_{отн} = \vec{a}$ ,  $\vec{v}_{отн} = \vec{v}$ .

Пусть *начало отсчета нашей системы находится в центре Земли*, тогда в уравнениях (3.2.20)-(3.2.25)  $\vec{v}_0$  и  $\dot{\vec{v}}_0$  – скорость и ускорение центра Земли относительно “неподвижной” системы отсчета (СО, примем за неподвижную СО – Солнце). Тогда уравнение относительного движения (3.2.20) принимает вид

$$m\vec{a} = \vec{F} + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] - m\dot{\vec{v}}_0 + m\omega^2\vec{r}_\perp - m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad (3.3.1)$$

Учтем следующие обстоятельства. Земля вращается равномерно (приблизительно), поэтому  $\dot{\vec{\omega}} = 0$ . Далее, распишем обычные силы более подробно:

$$\vec{F} \Rightarrow \vec{F}_3 + \vec{F}_0 + \vec{F} \quad , \quad (3.3.2)$$

где  $\vec{F}_3$  – гравитационное притяжение Земли;  $\vec{F}_0$  – равнодействующая сил гравитационного притяжения Солнца, Луны и других планет;  $\vec{F}$  – сумма всех других сил земного происхождения (сила сопротивления, упругости и т.д.). Тогда уравнение (3.3.1) представим в виде

$$m\vec{a} = (\vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp) + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + \vec{F} + (\vec{F}_0 - m\dot{\vec{v}}_0) \quad (3.3.3)$$

*Обобщенный закон Галилея*: все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Ускорение  $\dot{\vec{v}}_0$  – ускорение центра Земли в поле тяготения Солнца и планет. Оно одинаково для всех тел, в том числе и для тел, находящихся на Земле. Отсюда следует:

$$\vec{F}_0 - m\dot{\vec{v}}_0 = 0 \quad (3.3.4)$$

То есть силы гравитационного притяжения Солнца, Луны, других планет выпадают из уравнений относительного движения. Это есть свободное падение Земли и земных тел во внешнем гравитационном поле (что напоминает свободно падающий маятник, см пункт 3.1.2). Эти

гравитационные силы полностью компенсируются поступательными силами инерции, возникающими из ускорений, сообщаемых Земле и всем телам на Земле этими полями.

Итак, получаем уравнение движения тела в поле Земли:

$$m\vec{a} = \vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + \vec{F} \quad (3.3.5)$$

Далее рассмотрим примеры применения этого уравнения к задачам движения в поле Земли.

### 3.3.2. Ускорение свободного падения и вес тел.

Рассмотрим тело, покоящееся на поверхности Земли (см уравнение (3.3.5) и рис.3.1). Сила  $\vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp$  не зависит от движения материальной точки и характеризует только гравитационное поле Земли и ее вращение. Поэтому для суммы этих сил, которая зависит только от точки пространства, можно ввести обозначение

$$m\vec{g} = \vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp \quad (3.3.6)$$

Если внешних сил нет и скорость тела  $\vec{v} = 0$ , тогда имеем:

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad (3.3.7)$$

То есть, получаем, что  $g$  – ускорение свободно падающего тела относительно Земли (важно при этом, что его скорость равна 0 в рассматриваемый момент, иначе вступает в дело сила Кориолиса). Это ускорение можно представить, как сумму двух величин

$$\vec{g} = \vec{g}_{gr} + \omega^2\vec{r}_\perp, \quad (3.3.8)$$

где  $\vec{g}_{gr} = \vec{F}_3/m$  – ускорение за счет гравитационного притяжения, а второе слагаемое в (3.3.8) – центробежное ускорение. Видно, что сила тяжести не направлена к центру Земли (за исключением экватора и полюсов).

**Вес тела**  $P$  – это сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или подвес, если опора или подвес покоятся в той системе отсчета, где производится взвешивание

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp \quad (3.3.9)$$

Если Земля была бы сферически симметрична, то и тогда бы направление вектора  $\vec{P}$  не совпадало бы с направлением на центр. Угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{F}_3$  можно найти с помощью теоремы синусов (см рис.3.1):

$$\frac{m\omega^2 r_\perp}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \theta}$$

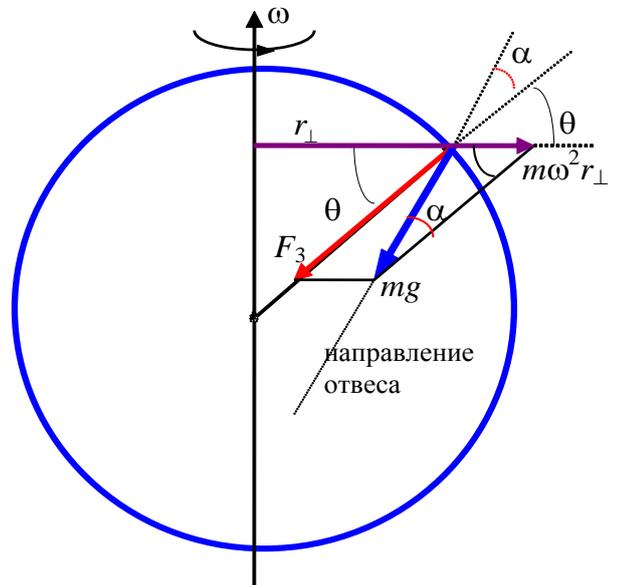


Рис. 3.1.

Учитывая, что  $r \cos \theta = r_{\perp}$ , получаем:

$$\sin \alpha = \frac{\omega^2 r_{\perp}}{g} \sin \theta = \frac{\omega^2 r}{2g} \sin 2\theta \quad (3.3.10)$$

Здесь угол  $\theta$  – это *географическая широта*. Проектируя ускорения (3.3.8) на направление  $\vec{g}$  и считая угол  $\alpha$  достаточно малым, что  $\cos \alpha \approx 1$  и  $\cos(\theta + \alpha) \approx \cos \theta$ , имеем:

$$g = g_{gr} \cos \alpha - \omega^2 r_{\perp} \cos(\theta + \alpha) \approx g_{gr} - \omega^2 r \cos^2 \theta \quad (3.3.11)$$

Точность полученного выражения  $\sim \alpha^2$ .

Опыты показали, что ускорение свободного падения  $g$  зависит от географической широты. На полюсе ( $\theta = \pi/2$ ):  $g = 983.2 \text{ см/с}^2$ , на экваторе ( $\theta = 0$ ):  $g = 978.0 \text{ см/с}^2$ . Таким образом, различие в весе одного того же тела на полюсе и экваторе составляет  $\delta P / P = 0.5\%$ .

---

**Примечание 1.** В действительности  $g_{gr}$  на экваторе меньше, чем на полюсе, дополнительно еще из-за одного фактора – ”сплюснутости” Земли:  $R_{\text{полюс}} = 6357 \text{ км}$ ,  $R_{\text{экватор}} = 6378 \text{ км}$ .

---

### 3.3.3. Отклонение падающих тел. Маятник Фуко.

Рассмотрим свободное падение тел (рис. 3.2). При этом Ньютоновы силы отсутствуют  $\vec{F} = 0$  и уравнение движения тела (3.3.5) с учетом вращения Земли и уравнения (3.3.6) принимает вид:

$$\vec{a} = \vec{g} + 2[\vec{v}, \vec{\omega}] \quad (3.3.12)$$

Вращение Земли вызывает центробежную силу, которая входит в ускорение  $g$ , и Кориолисову силу  $\vec{F}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$ . При падении тел без начальной скорости Кориолисова сила проявляется в отклонении свободно падающих тел к востоку и экватору от направления отвеса. Легко увидеть из рисунка 3.2, что сила Кориолиса направлена за плоскость чертежа перпендикулярно к вектору скорости и плоскости «штриховой» окружности.

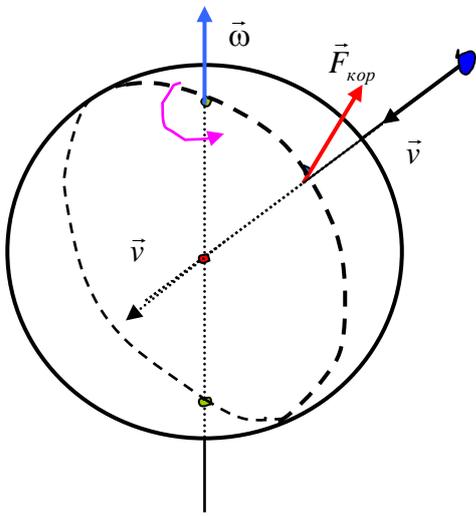


Рис. 3.2.

Опыты по отклонению падающих тел к востоку доказывают неинерциальность системы отсчета Земли. Однако точность таких опытов невелика, для более точного определения степени неинерциальности на поверхности Земли лучше использовать маятник Фуко (рис. 3.3 и 3.4).

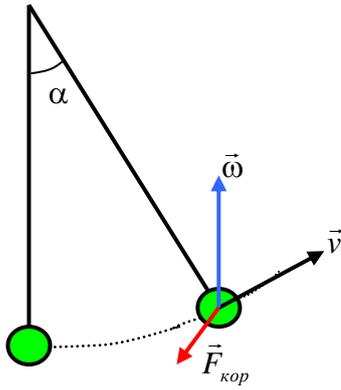


Рис. 3.3.

Если бы Земля была инерциальной системой отсчета, то действующие силы тяжести  $m\vec{g}$  и натяжения нити  $\vec{F}$ , лежащие в одной плоскости, обеспечивали бы колебания в одной плоскости (если специально не закрутить маятник). Однако плоскость колебаний маятника медленно поворачивается вокруг вертикали в том же направлении, что Солнце и звезды. Ж Фуко демонстрировал свой маятник в Париже в 1850-51 г.г.

Уравнение движения маятника имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + \vec{F} \quad (3.3.13)$$

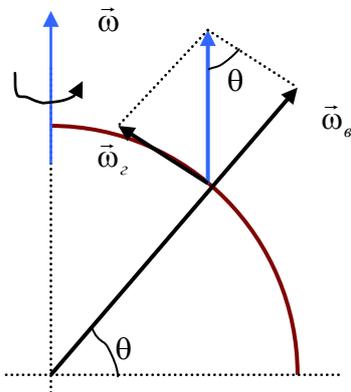


Рис. 3.4.

Напомним, что здесь  $\omega$  угловая скорость вращения Земли (угловая частота). На рисунке 3.3 показана ситуация с силой Кориолиса на полюсе. На широте  $\theta$  (см рис. 3.4) вектор угловой скорости вращения  $\vec{\omega}$  Земли можно разбить на две составляющие – вертикальную  $\omega_g$  и горизонтальную  $\omega_2$ . Причем вертикальная составляющая угловой скорости, равная  $\omega_g = \omega \sin \theta$ , обеспечивает вращение плоскости колебаний маятника. Это и демонстрирует маятник Фуко.

Примеры возможных траекторий маятника представлены на рисунках 3.5 для двух предельных начальных условий. Пусть на рисунках вертикальная составляющая угловой скорости вращения земли направлена из плоскости рисунка на нас. Окружность определяет границы движения

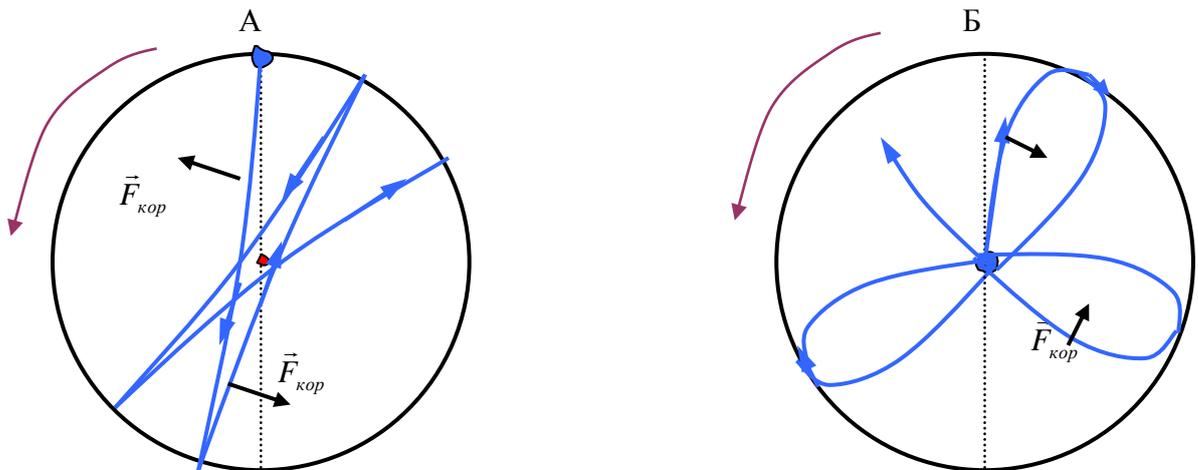


Рис. 3.5.

маятника, т.е. радиус окружности равен амплитуде смещения. Рассмотрим случай А, когда маятник отклонен в крайнее положение, тогда в результате

получаем траекторию в виде “розетки”. В случае Б, когда маятнику был дан толчок в положении равновесия, траектория показана на правой части рисунка 3.5.

Очевидно, что полученные фигуры определяются действием силы Кориолиса на каждом участке движения маятника.

*Примечание 2. Жан Бернар Леон Фуко, французский физик, 1819–1868 г.г.*

### 3.4. Инертная и гравитационная массы. Принцип эквивалентности.

#### 3.4.1. Инертная и гравитационная массы.

*Инертная масса*  $m^i$  выступает как коэффициент пропорциональности между импульсом и скоростью или между силой и ускорением:

$$\vec{p} = m^i \vec{v}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m^i \frac{d\vec{v}}{dt} = m^i \vec{a} \quad (3.4.1)$$

В основе определения этой массы лежат инертные свойства тел.

Однако тела обладают не только свойствами инерции, но и способностью возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля (по аналогии с зарядами в электричестве), при этом сила взаимодействия между двумя точечными телами записывается (закон Всемирного тяготения):

$$F = G \frac{m_1^g m_2^g}{r^2} \quad (3.4.2)$$

Здесь  $m^g$  – *гравитационная масса*, коэффициент  $G$  введен для согласования системы единиц, чтобы инертная и гравитационная массы измерялись в одних единицах. Важно подчеркнуть, что инерция тел и их способность возбуждать гравитационные поля не должны рассматриваться как взаимосвязанные или, тем более, тождественные свойства. В принципе, задавая расстояние  $r$  и силу  $F$  известными единицами, можно при любом  $G$  выбрать единицы гравитационных масс  $m^g$ .

Рассматривая движение тела в поле Земли, имеем силу тяготения:

$$F = G \frac{m^g M^g}{R^2}, \quad (3.4.3)$$

где  $M^g$  – масса Земли и  $R$  – ее радиус. Если тело имеет инертную массу  $m^i$ , то под действием этой силы тяжести тело приобретает ускорение:

$$a = \frac{F}{m^i} = G \frac{M^g}{R^2} \cdot \frac{m^g}{m^i} = g \frac{m^g}{m^i} \quad (3.4.4)$$

Галилей же прямыми опытами установил, что ускорение всех тел у поверхности Земли одинаковое.

Итак, физический закон, установленный Ньютоном: *сила гравитационного взаимодействия тел пропорциональна их инертным массам*, то есть инертная масса тела пропорциональна его гравитационной массе. Единицы гравитационной массы  $m^g$  можно выбрать такими же, как и для инертной массы  $m^i$ .

*Это фундаментальный физический закон – закон эквивалентности инертной и гравитационной масс.* Таким образом, можно сформулировать обобщенный закон Галилея: все тела при свободном падении в одном и том же гравитационном поле приобретают одинаковое ускорение (мы уже им пользовались в предыдущем параграфе). Обобщенный закон Галилея соответствует принципу эквивалентности инертной и гравитационной масс.

### 3.4.2. Опыт Этвеша.

Опыты Галилея по проверке одинаковости ускорения тел при свободном падении имели весьма малую точность. Более точные опыты были проведены Ньютоном. Однако их точность также была невелика. Долгое время наиболее точными были опыты Этвеша. Он в 1888 г. сконструировал крутильные весы и с их помощью исследовал и установил в 1889-1908 г.г. равенство инертной и гравитационной масс с относительной точностью  $5 \cdot 10^{-9}$ .

Идея эксперимента Этвеша состоит в следующем. Рассмотрим тело на поверхности Земли (рис. 4.1). Вес тела складывается из двух различных сил:

$F_3 = m^g g$  – гравитационная сила притяжения, которая пропорциональна гравитационной массе  $m^g$ , и

$F_{in} = m^i \omega^2 r_{\perp}$  – центробежная сила инерции, которая пропорциональна инертной массе  $m^i$ .

Если бы  $m^i$  и  $m^g$  были не строго пропорциональны друг другу, то направление отвеса зависело бы от материала тела.

Чтобы использовать это рассуждение, опыт ставился следующим образом. На нити подвешивался стержень с 2 грузами на краях: из меди 1 и платины 2 (рис. 4.2). Стержень длины  $l$  ориентировался перпендикулярно к меридиану (меридиан – прямая с севера на юг на рисунке обозначена как NS). Тогда условие равновесия для стержня в вертикальном направлении к поверхности Земли при условии, что стержень равноплечный (плечи равны по  $l/2$ ), имеет вид:

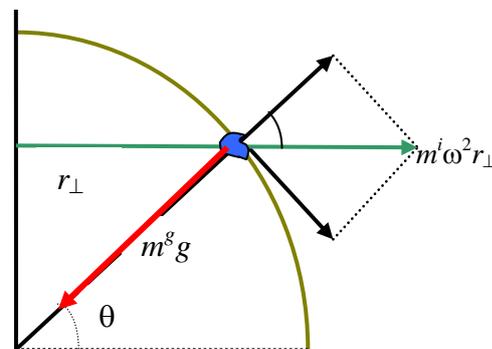


Рис. 4.1.

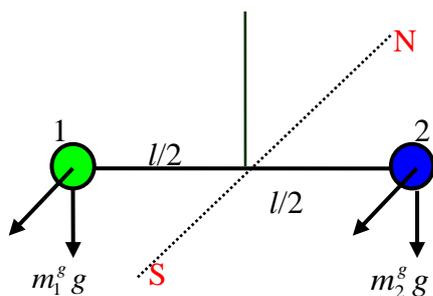


Рис. 4.2.

$$m_1^g g - m_1^i \omega^2 r_{\perp} \cos\theta = m_2^g g - m_2^i \omega^2 r_{\perp} \cos\theta \quad (3.4.5)$$

где угол  $\theta$  определяет широту (см рис. 4.1). Введем коэффициенты пропорциональности:

$$\alpha_1 = \frac{m_1^g}{m_1^i}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2^g}{m_2^i} \quad (3.4.6)$$

$$m_1^i (\alpha_1 g - \omega^2 r_{\perp} \cos\theta) = m_2^i (\alpha_2 g - \omega^2 r_{\perp} \cos\theta) \quad (3.4.7)$$

Если  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  (т.е. массы не пропорциональны), то  $m_1^i \neq m_2^i$ . В этом случае центробежные силы, действующие на грузы, а с ними и горизонтальные составляющие, направленные к югу S, не были бы одинаковыми, и при этом появился бы вращательный момент, равный:

$$M = m_1^i \omega^2 r_{\perp} \sin\theta \cdot \frac{l}{2} - m_2^i \omega^2 r_{\perp} \sin\theta \cdot \frac{l}{2} = \omega^2 r_{\perp} \frac{l}{2} \sin\theta \cdot (m_1^i - m_2^i) \quad (3.4.8)$$

Итак, при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  появляется момент силы  $M_1$ , закручивающий нить на угол  $\varphi_1 \sim M_1$ . Если повернуть весь прибор на  $180^\circ$ , то появляющийся момент силы  $M_2$  закручивает нить в другую сторону на угол  $\varphi_2 \sim M_2$ , причем  $M_1 = -M_2$  и  $\varphi_1 = -\varphi_2$ . При этом нить закрутится относительно начального положения на угол:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\varphi_2 \quad (3.4.9)$$

Однако опыты Этвеша показали, что  $\Delta\varphi = 0$ , т.е. получается, что коэффициенты пропорциональности одинаковы  $\alpha_1 = \alpha_2$ , и это доказывает равенство гравитационных и инертных масс. Относительная точность проведенного эксперимента составляла  $\sim 5 \cdot 10^{-9}$ .

Принцип эквивалентности неоднократно уточнялся и проверялся. В 1959-1963 гг. американским физиком Р. Дикке точность измерений была увеличена до  $10^{-11}$ , а в 1971 г. советские физики В.П. Брагинский и В.И. Панов довели точность измерения этих величин до  $10^{-12}$ . В настоящее время точность опытов дает, что инертная и гравитационная массы равны с относительной точностью до  $10^{-13}$ , т.е.

$$\frac{m^g - m^i}{m^i} \leq 10^{-13} \quad (3.4.10)$$

Иначе говоря, нет экспериментальных оснований считать их неэквивалентными. Однако проверки их эквивалентности продолжают, поскольку это связано с проверкой Общей Теории Относительности.

---

Примечание 1. *Роланд Этвеш, венгерский физик, 1848-1919г.г.*

---

### 3.4.3. Принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации.

Эквивалентность инертной и гравитационной масс имеет фундаментальное значение для понимания природы тяготения. А. Эйнштейн обратил на это внимание и задавался вопросом: почему законы природы записываются в одинаковой форме только в специальных системах отсчета (СО), которые движутся равномерно и прямолинейно относительно друг друга – т.е. в инерциальных СО (ИСО). Это понять и объяснить достаточно трудно, поскольку реально выделить такую систему отсчета в реальном физическом пространстве невозможно. Но классическая механика и СТО базируются как раз на существовании, хотя бы в принципе, инерциальных систем отсчета. По мнению Эйнштейна, это естественно, *физические законы должны иметь одинаковую форму в любых системах отсчета.*

В чем состоит недостаток неинерциальных СО? В них появляются не ньютоновы силы – силы инерции. Эти силы пропорциональны инертной массе тела.

С другой стороны, в ИСО могут действовать гравитационные силы, которые пропорциональны гравитационной массе.

Но экспериментально показано, что инертная и гравитационная массы эквивалентны, следовательно, можно сделать вывод, что силы инерции эквивалентны силам гравитации. Эти рассуждения пригодны как для механики малых скоростей, так и для релятивистской механики.

Рассмотрим важный поясняющий *пример с лифтом* (лифт Эйнштейна), изображенный на рис. 4.3.

Пример А (на рис. 4.3): закрытый лифт находится в гравитационном поле напряженности  $g$ . Лифт – инерциальная система отсчета, тогда наблюдатель, находящийся внутри кабины, видит падение тел с ускорением  $g$ , растяжение нити или пружины под действием силы тяжести  $mg$ , силу давления

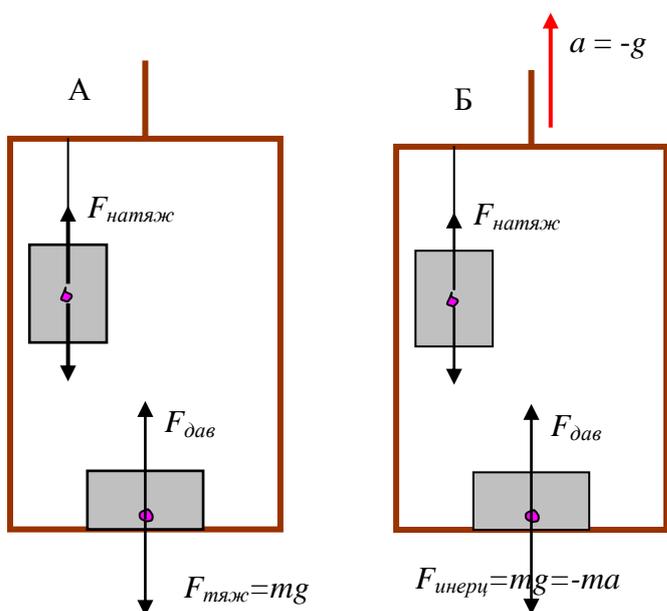


Рис. 4.3.

тела на пол и реакцию опоры и так далее. В этой системе отсчета работает обычная ньютоновская механика. Когда лифт свободно падает, возникает явление невесомости в соответствии с обобщенным принципом Галилея.

Пример Б (см рис. 4.3): лифт, находящийся вдали от Земли и других небесных тел, чтобы не было силы тяжести, движется с ускорением  $a = -g$ . Лифт – неинерциальная система отсчета. На тела внутри лифта будет действовать поступательная сила инерции  $F = -ma = mg$ . Для наблюдателя,

также находящегося внутри кабины, все явления будут происходить точно также как в случае с неподвижным лифтом в поле тяжести: так же будут падать тела, проявляться сила натяжения или реакции опоры и так далее.

То есть действие силы инерции для наблюдателя внутри будет таким же, как в поле гравитационном.

*Принцип эквивалентности Эйнштейна:* все физические явления в равномерно ускоренном лифте будут происходить в точности так же, как в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести. Никакие опыты по свободному падению тел в лифте не могут отличить однородное гравитационное поле от однородного поля сил инерции. То же нельзя сделать и любыми другими физическими опытами.

*Общая формулировка принципа эквивалентности:* Все физические явления в гравитационном поле происходят совершенно так же, как в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а начальные условия одинаковы для всех тел замкнутой системы.

Отсюда следует вывод: физические законы в неинерциальной системе отсчета записываются точно так же, как в инерциальной системе отсчета в присутствии сил тяготения.

Однако не все гравитационные поля могут быть описаны поступательными силами инерции. Это легко сделать для однородных гравитационных полей. Но, например, гравитационное поле точечной массы, Земли и других тел – неоднородные поля, а поступательные силы инерции – однородны. Силы инерции во вращающихся системах отсчета также не могут заменить неоднородные гравитационные поля.

Выход состоит в том, чтобы рассматривать достаточно малый объем, в пределах которого гравитационное поле можно считать однородным. Именно для такого малого объема и справедлив принцип эквивалентности, в нем гравитационное поле может быть имитировано ускоренным движением системы отсчета. То есть принцип эквивалентности носит *локальный характер*. Единственное, что достижимо соответствующим выбором системы отсчета, это исключение гравитационного поля в данном малом объеме пространства, достаточно малом, чтобы в нем можно было считать поле однородным.

В общей теории относительности (ОТО – *релятивистская теория гравитации*) Эйнштейн объединил гравитационное поле и поле всех сил инерции в единое поле. Эйнштейн написал уравнения гравитационного поля (в расширенном смысле), причем закон всемирного тяготения Ньютона получается как частный случай этих уравнений и справедлив приближенно. Математически задача заключается в переходе от галилеевской СО к неинерциальной СО, которая определяется в локальном пространстве точки. В ОТО *геометрические свойства пространства не самостоятельны – они обусловлены материей*. И само физическое пространство является

неэвклидовым, наличие материи искривляет его, а кривизна пространства зависит от плотности и движения вещества. Если материя и ее распределение в пространстве известны, то можно говорить о геометрической структуре мира.

Какие особенности такого пространства?

- 1) Тело, движущееся равномерно и прямолинейно относительно галилеевой СО, будет двигаться, вообще говоря, по криволинейной траектории относительно НСО.
- 2) Световой луч в поле тяготения и в НСО искривляется. Поясним подробнее этот момент, поскольку мы пользуемся принципом, что свет распространяется между 2 точками по кратчайшему пути. Не имеем ли мы здесь нарушение этого принципа? Оказывается, что нет, поскольку в неэвклидовом пространстве кратчайшее расстояние между 2 точками – кривая линия. Пример: рассматривая мир на сферической поверхности, получаем, что кратчайшее расстояние между 2 точками – дуга большого круга.
- 3) Однако если свет движется по кривой, то его скорость меняется. Как же обстоит дело с постулатом о постоянстве скорости света? Оказывается, что в присутствии сильных гравитационных полей постулат о постоянстве скорости света может быть пересмотрен.

Вообще название *Общая Теория Относительности*, введенное Эйнштейном, не совсем правильно отражает суть теории, поэтому более ее современное название есть *Теория Тяготения*. Итак, *первая основная идея* Эйнштейна, основанная на принципе эквивалентности и составляющая основу теории Тяготения, заключается в том, что в поле тяготения все тела движутся по *геодезическим линиям* в пространстве-времени, которое, однако, искривлено, и, следовательно, геодезические линии уже не прямые. Таким образом, поле тяготения по Эйнштейну есть отклонение свойств пространства-времени от свойств плоского (неискривленного) многообразия специальной теории относительности. *Вторая важная идея*, лежащая в основе теории Эйнштейна, – утверждение, что тяготение (т.е. искривление пространства-времени) определяется не только массой вещества, слагающего тело, но и всеми видами энергии, присутствующими в системе. Согласно этой идее, тяготение зависит не только от распределения масс в пространстве, но и от их движения, от давления и натяжений, имеющих в телах, от электромагнитного поля и всех других физических полей.

#### 3.4.4. Поведение часов и масштабов в присутствии полей тяготения

Рассмотрим поведение часов и масштабов в присутствии полей тяготения или полей инерции на примере поля инерции во вращающейся системе отсчета. Пусть имеются 2 наблюдателя, один в центре ИСО, а другой на поверхности вращающейся сферы (рис. 4.4). На наблюдателя, находящегося на поверхности сферы, действует центробежная сила инерции,

направленная от центра сферы и которая по принципу эквивалентности аналогична силе тяготения.

Геометрические измерения. Наблюдатель 1 находится на вращающейся поверхности и измеряет длину окружности вокруг неподвижного центра. Наблюдатель 2 находится в центре ИСО, следит за этими измерениями и верит в принцип эквивалентности, зная, что для первого наблюдателя существует необычное поле тяготения. Для наблюдателя 2 отношение длины окружности к диаметру есть число  $\pi$ :

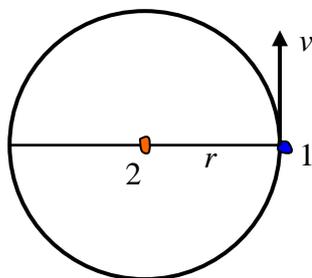


Рис. 4.4.

$$\frac{l_0}{d} = \pi = 3.1415 \quad (3.4.11)$$

Для наблюдателя 1 при измерении диаметра окружности ничего не происходит, т.к. скорость его перпендикулярна к диаметру и при этом координаты (и масштабы) не меняются. При измерении длины окружности масштаб будет располагаться по касательной к окружности, вдоль которой наблюдатель 1 движется со скоростью  $V = \omega r$ . Следовательно, измеряемая им длина окружности равна

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.4.12)$$

где  $\beta = V/c = \omega r/c$ . Т.е. получаем Лоренцево сокращение длины окружности. Таким образом, для наблюдателя 1 отношение длины окружности к диаметру равно:

$$\frac{l}{d} = \pi \sqrt{1 - \beta^2} < \pi \quad (3.4.13)$$

Более того, поскольку скорость  $V$  на поверхности сферы зависит от радиуса сферы  $r$ , то и отношение масштабов зависит от каждой точки по радиусу. То есть в присутствии гравитационного поля пространство становится неевклидовым, и при этом линейные масштабы изменяются от точки к точке непрерывно.

Что будет с часами? Очевидно, что примерно то же, что и с масштабами, поскольку часы, расставленные по радиусу, движутся с различными скоростями и для наблюдателя 2 (находящегося в центре окружности) их ход будет замедляться согласно соотношению

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.4.14)$$

Таким образом, часы изменяют свой ход непрерывно при перемещении вдоль радиуса, т.е. наличие гравитационного поля приводит к изменению хода часов.

Последнее утверждение можно проверить экспериментально, если наблюдать частоту излучения в известных линиях спектра источников, находящихся в сильном поле тяготения. Ход атомных часов определяется периодом  $T$ , или частотой  $\nu$ , электромагнитной волны, излучаемой атомом, поэтому можно записать для движущихся источников (с не очень большими скоростями  $V$ ):

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \nu = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right) \quad (3.4.15)$$

где  $T_0$  и  $\nu_0$  период колебаний и частота часового маятника неподвижного наблюдателя (или наблюдателя, у которого нет гравитационного поля). В нашем примере скорость равна  $V = \omega r$ , ее и подставим в (3.4.15):

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = \nu_0 \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \quad (3.4.16)$$

Здесь мы вспомнили, что  $\Phi = \omega^2 r^2 / 2$  – центробежный потенциал (см движение в центральном поле §1.13, потенциальная энергия которого равна  $U(r) = m\omega^2 r^2 / 2 = m\Phi(r)$ ), определяющий поле сил инерции. В силу принципа эквивалентности центробежный потенциал  $\Phi$  – это то же, что и гравитационный потенциал, взятый со знаком “минус”:

$$\Phi_{sp} = -\frac{\omega^2 r^2}{2} \quad (3.4.17)$$

Естественно, что (3.4.17) верно только для определенного гравитационного поля, которое можно заменить нашим полем инерции для вращающейся сферы. Тогда вообще можно записать изменение частоты в виде:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \quad (3.4.18)$$

Очевидно, что уравнение (3.4.18) можно записать для любого гравитационного поля (не очень сильного). Тогда для гравитационного потенциала Ньютона для материальной точки или шара имеем:

$$\Phi(r) = -G \frac{M}{r} \quad (3.4.19)$$

и, подставляя (3.4.19) в (3.4.18), получаем *сдвиг частоты* в гравитационном потенциале:

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = G \frac{M}{c^2 r} \quad (3.4.20)$$

Такой сдвиг впервые наблюдал У. Адамс в 1924 г., исследуя спектры спутника Сириуса – белого карлика Сириус-В. В лабораторных условиях гравитационное смещение спектральных линий, обусловленное гравитационным полем Земли, было измерено в 1960 году Р. Паундом и Г. Ребкой, используя Мессбауэровский эффект.

---

*Примечание 2. Уолтер Сидни Адамс, американский астроном, (1876–1956), провел первые эксперименты по наблюдению гравитационного красного смещения для белого карлика Сириус В в 1925 году*  
*Роберт Вивиан Паунд, американский физик –экспериментатор, 1919-2010*  
*Глен Андерсен Ребка, американский физик, 1931 - 2015*

---

### 3.4.5. Элементы теории тяготения Эйнштейна.

В специальной теории относительности (СТО) в инерциальной системе отсчета квадрат 4-хмерного “расстояния” в пространстве-времени (интервала) между двумя бесконечно близкими событиями записывается:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4.21)$$

Или можно записать:

$$ds^2 = dx_\nu dx^\nu \quad (3.4.22)$$

где  $\nu = 0,1,2,3$ , а  $x^1, x^2, x^3$  ( $x_1, x_2, x_3$ ) – произвольные пространственные координаты,  $x^0 = ct$  ( $x_0 = ct$ ) – временная координата; в выражении (3.4.22) и в формулах ниже подразумевается сумма по повторяющимся значкам.

Выражения (3.4.21) - (3.4.22) не изменяются при преобразованиях Лоренца. Пространство-время, в котором можно ввести систему координат так, что в каждой точке  $ds^2$  записывается в виде (3.4.21)- (3.4.22), называется псевдоэвклидовым, плоским или пространством-временем Минковского. СТО является теорией физических процессов в таком пространстве.

Если в пространстве-времени Минковского использовать неинерциальные системы отсчета и недекартовы координаты, то в новых координатах квадрат интервала  $ds^2$  запишется в виде:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.4.23)$$

где, как и ранее,  $\mu, \nu = 0,1,2,3$ . В искривленном пространстве-времени общей теории относительности (в конечных, не малых, областях) уже нельзя ввести декартовы координаты, и использование криволинейных координат становится неизбежным. В конечных областях искривленного пространства-времени  $ds^2$  записывается в криволинейных координатах в общем виде (3.4.23). Зная коэффициенты  $g_{\mu\nu}$  как функции 4-х координат, можно определить все геометрические свойства пространства-времени. Говорят, что величины  $g_{\mu\nu}$  определяют метрику пространства-времени, а совокупность всех величин  $g_{\mu\nu}$  называют *метрическим тензором*. С помощью  $g_{\mu\nu}$  вычисляются как темп течения времени в различных точках системы отсчета, так и расстояния между точками в трехмерном пространстве. Так, формула для вычисления бесконечно малого интервала времени  $dt$  по часам, покоящимся в системе отсчета, имеет вид:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (3.4.24)$$

Например, в поле тяготения звезды массы  $M$  для  $g_{00}$  имеем:

$$g_{00} = 1 - \frac{2MG}{c^2 r}$$

Квадрат пространственного расстояния  $dl^2$  определяется следующим образом через пространственные координаты:

$$dl^2 = h_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.4.25)$$

где

$$h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} \quad (3.4.26)$$

и индексы  $i, k = 1, 2, 3$ .

Математический аппарат, изучающий неевклидову геометрию, или, как говорят, **Риманова геометрия**, в произвольных координатах, – тензорное исчисление. Теория Тяготения использует аппарат тензорного исчисления, ее законы записываются в произвольных криволинейных координатах в ковариантном виде.

Основная задача теории Тяготения – определение гравитационного поля, что соответствует в теории Эйнштейна нахождению геометрии пространства-времени. Эта последняя задача сводится к нахождению метрического тензора. Уравнения тяготения Эйнштейна связывают величины  $g_{\mu\nu}$  с величинами, характеризующими материю, создающую поле. Также записываются уравнения, определяющие геодезические линии в искривленном пространстве-времени, по которым движутся свободные тела (т.е. тела в поле тяготения, но на них не действуют негравитационные силы).

Ряд выводов теории Эйнштейна качественно отличается от выводов ньютоновской теории тяготения. Важнейшие из них связаны с возникновением черных дыр (гравитационный коллапс), гравитационных волн.

Есть ли экспериментальные факты, подтверждающие выводы теории тяготения или общей теории относительности (ОТО)? До недавнего времени к ним относили только 4 экспериментальные факта – подтверждения теории Тяготения:

- А) Гравитационное красное смещение спектральных линий.
- Б) Искривление лучей света гравитационными полями. Так в 1919 г. Эддингтон и Кроммелин в астрономической экспедиции по исследованию солнечного затмения обнаружили искривление пространства около Солнца.
- В) Изменение в орбите Меркурия. Происходит смещение перигелия – вращение большой полуоси вытянутой орбиты Меркурия.

Г) Запаздывание радарного эха. Измерение времени необходимое для радарного сигнала, чтобы достичь планеты, расположенной на внутренней орбите, и, отразившись, вернуться обратно на Землю.

Однако прогресс в астрофизических исследованиях в последнее время привнес огромное число данных по образованию разнообразных звездных систем и объектов, а также по их эволюции, движению в пространстве. В частности, появились данные о существовании черных дыр, гравитационных волн. Эти данные укладываются в рамки теории Тяготения, что с несомненностью подтверждает ее справедливость.

---

*Примечание 3. Артур Стэнли Эддингтон, английский астрофизик и физик, 1882–1944 г.г.  
Эндрю Клод де ля Шеруа Кроммелин, английский астроном, 1865-1939 г.г.*

---