

Глава 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ.

3.1. Уравнение непрерывности. Время релаксации.

3.1.1. Ток и плотность тока. Опытные законы.

Электрический ток – упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока являются свободные заряды – электроны, ионы. В металлах носителями тока являются электроны. Экспериментальное доказательство электронной проводимости металлов – опыты Т. Стюарта и Р. Толмена 1916 года. В растворах (жидких электролитах) носителями тока становятся положительные и отрицательные ионы.

Рассмотрим упорядоченное движение зарядов (пусть e – заряд электрона) со средней (часто называемой "дрейфовой") скоростью u , тогда через площадку dS (см рис. 1.1) за время dt пройдет заряд dq :

$$dq = neu \cdot dS \cdot dt \quad (3.1.1)$$

где n – концентрация носителей.

Введем понятие вектора **плотности тока** \vec{j} как заряд проходящий через единичную поперечную площадку в единицу времени (рис. 1.1)

$$\begin{aligned} j &= \frac{dq}{dS \cdot dt} \\ \vec{j} &= ne\vec{u} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Если введем вектор площадки $d\vec{S}$, то заряд, проходящий в единицу времени через площадку dS и определяющий элементарный вклад в электрический ток dI , записывается в виде (см рис. 1.2):

$$dI = \frac{dq}{dt} = \vec{j} d\vec{S} \quad (3.1.3)$$

Полный ток через проводник сечением S равен:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} \quad (3.1.3a)$$

Подчеркнем, что ток I – это скалярная величина, в то время как плотность тока \vec{j} – векторная.

Основные опытные законы для тока в электрической цепи: **закон Ома** и **закон Джоуля-Ленца**

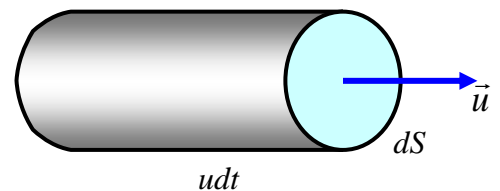


Рис. 1.1

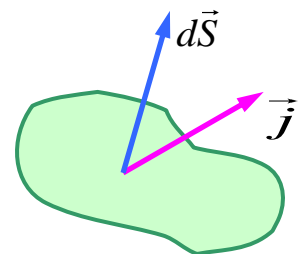


Рис. 1.2.

1) Закон Ома для участка цепи. Сила тока пропорциональна приложенному напряжению (разности потенциалов):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = I \sim U, \quad I = \frac{U}{R} \quad (3.1.4)$$

Здесь I и U – ток и падение напряжения на участке цепи, R – коэффициент пропорциональности или *сопротивление участка цепи*.

О единицах измерения силы тока.

Единица силы тока в системе CGSE:

$$1 \text{ CGSE}_I = 1 \text{ CGSE}_q \cdot c^{-1}.$$

Разность потенциалов и сопротивление измеряются в единицах $1 \text{ CGSE}_\varphi = 1 \text{ CGSE}_q / \text{см}$ и 1 CGSE_R , соответственно.

В системе СИ сила тока измеряется в *Амперах*. Ампер – сила тока, соответствующая переносу заряда в один кулон за одну секунду, что эквивалентно переносу $6.2 \cdot 10^{18}$ электронов в секунду. Связь между единицами тока в системах CGSE и СИ такая же как между единицами заряда:

$$1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ CGSE}_I.$$

Формальное определение единицы тока в системе СИ:

Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным и прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке проводника, длиной 1 м, силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$.

Сопротивление в системе СИ измеряется в Омах – Ом. Подробнее о единицах электромагнитных величин см ниже в §§3.2 и 3.5.

Закон Ома (3.1.4) можно переписать в дифференциальной форме, вспоминая, что сопротивление участка цепи прямо пропорционально длине проводника и обратно пропорционально величине его поперечного сечения. Тогда сопротивление малого участка проводника, вводя коэффициент пропорциональности – *удельное сопротивление* ρ_R , можно записать следующим образом:

$$R = \rho_R \frac{dl}{dS} \quad (3.1.5)$$

где dl и dS – длина и поперечное сечение малого участка провода. Удельное сопротивление определяется свойствами проводника, зависит от температуры, и в данном случае служит коэффициентом пропорциональности.

Учитывая (3.1.5) и считая, что электрическое поле однородно на участке длиной dl , закон Ома переписывается в следующем виде:

$$dI = \frac{dU}{R} = \frac{Edl}{\rho_R \frac{dl}{dS}} = \frac{E}{\rho_R} dS \quad (3.1.6)$$

где E – напряженность электрического поля. Далее, записывая (3.1.6) через плотность тока, имеем:

$$j = \frac{dq}{dtdS} = \frac{dI}{dS} = \frac{E}{\rho_R} = \sigma_R E. \quad (3.1.7)$$

Окончательно получаем *закон Ома в векторной дифференциальной форме*:

$$\vec{j} = \sigma_R \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho_R} \quad (3.1.8)$$

Здесь введена *удельная проводимость проводника*:

$$\sigma_R = \frac{1}{\rho_R}.$$

В системе *CGSE* удельная проводимость измеряется в обратных секундах $1CGSE_\sigma = 1 \text{ c}^{-1}$, соответственно удельное сопротивление – в секундах. В системе *СИ* удельная электропроводность измеряется в *Сименсах* на метр длины (*См/м*) или в $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Учитывая связи между единицами тока и напряженности электрического поля $[E] = 1 \text{ CGSE}_E = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$, соотношение между единицами проводимости равно:

$$1CGSE_\sigma = 1 \text{ c}^{-1} = 1/(9 \cdot 10^9) \text{ См/м} = 1.11265 \cdot 10^{-10} \text{ См/м}.$$

Величина удельного сопротивления металлов, являющихся хорошими проводниками, может иметь значения порядка $10^{-8} - 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ (например, медь, серебро, железо и т. д.). Для анизотропных проводников удельное сопротивление является тензором второго ранга.

Поскольку плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля \vec{E} и направлена вдоль его силовых линий, то можно ввести также понятие силовых линий плотности тока – поле токов \vec{j} .

2) Закон Джоуля - Ленца. Энергия (тепло) W , выделяемая на участке цепи за время t или dt , определяется произведением силы тока, напряжения и времени:

$$\begin{aligned} W &= IUt = I^2 Rt \\ dW &= IUdt = I^2 Rdt \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Вводя выделяемую мощность

$$\frac{dW}{dt} = IU = j \cdot \Delta S \cdot E \cdot \Delta l = jE \cdot \Delta V,$$

получаем *закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме*:

$$\frac{dW}{dt\Delta V} = \frac{dw}{dt} = jE = \rho_R j^2 = \frac{j^2}{\sigma_R} \quad (3.1.10)$$

где ΔV – объем проводника, w – плотность выделяемой энергии.

Примечание 1. *Георг Симон Ом, немецкий физик, 1787-1854.*

Джеймс Прескотт Джоуль, английский физик, 1818-1889.

Эмилий Христианович Ленц, русский физик, 1804-1865.

3.1.2. Закон сохранения электрического заряда.

Закон сохранения электрического заряда – это фундаментальный закон, являющийся обобщением опытных фактов. Пусть произвольная замкнутая поверхность S , представленная на рис. 1.3, ограничивает некоторый объем V . Тогда количество электричества, протекающего через всю поверхность S в единицу времени, равно:

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = \oint j_n dS = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (3.1.11)$$

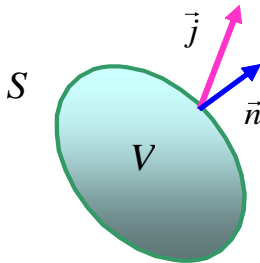


Рис. 1.3.

Минус перед зарядом показывает, что происходит уменьшение полного заряда внутри объема V . Далее, записывая заряд в объеме через плотность заряда и воспользовавшись теоремой Гаусса, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\int_V \text{div} \vec{j} dV \quad (3.1.12)$$

Поскольку это уравнение записано для произвольного объема, то равенство справедливо для подинтегральных выражений тоже:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (3.1.13)$$

Это и есть *уравнение непрерывности*, или *уравнение неразрывности*, выражающее в дифференциальной форме *закон сохранения заряда*. Итак, изменение заряда в единицу времени в объеме равно потоку заряда через поверхность, окружающую этот объем. Или в применении к дифференциальной форме записи можно сказать, что изменение плотности

заряда в данной точке (элементе объема) приводит к “рождению” линий тока из этой точки.

Если токи стационарны (постоянны во времени), тогда $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и из (3.1.13) получаем $div \vec{j} = 0$ или $\oint \vec{j} d\vec{S} = 0$. Если поток вектора \vec{j} через любую замкнутую поверхность равен нулю, то это означает, что силовые линии плотности тока замкнуты, т.е. не имеют источников.

3.1.3. Максвелловское время релаксации.

Ранее, мы говорили об отсутствии в проводнике объемных зарядов в равновесном состоянии, поскольку, при появлении объемного заряда в проводниках возникает ток, который идет до тех пор, пока заряд в объеме не исчезнет. Если имеем уединенный проводник, то весь сообщаемый ему заряд располагается на поверхности. Равновесное состояние возникает тогда, когда электрическое поле и объемный заряд внутри проводника равны нулю.

Установление равновесного состояния в проводниках происходит очень быстро. Рассмотрим изменение величины объемного заряда во времени. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ создана некоторая объемная плотность стороннего заряда $\rho(0) \neq 0$. Воспользуемся законом сохранения заряда (3.1.13) и законом Ома в дифференциальной форме (3.1.8):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div \sigma_R \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma_R div \vec{E} = 0, \quad (3.1.14)$$

где воспользовались тем, что для однородного проводника проводимость постоянна $\sigma_R = const$. Вспоминая, что

$$div \vec{E} = 4\pi\rho,$$

получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -4\pi\sigma_R\rho, \quad (3.1.15)$$

Решением этого уравнения является следующая экспоненциальная функция

$$\rho(t) = \rho(0) \exp(-4\pi\sigma_R t) = \rho(0) \exp\left(-\frac{4\pi}{\rho_R} t\right) \quad (3.1.16)$$

Таким образом, плотность заряда, созданного каким-либо образом внутри проводника, со временем падает по экспоненциальному закону. Характерное время – *время релаксации (Максвелловское)* – определяется моментом времени, когда плотность заряда падает в e раз:

$$\tau = \frac{1}{4\pi\sigma_R} \quad (3.1.17)$$

В проводящих средах время релаксации составляет $\sim 10^{-14}$ с. Эта величина на несколько порядков больше, чем время, получаемое из уравнения (3.1.17) $\sim 10^{-17} \div 10^{-19}$ с, поскольку последняя оценка пренебрегает инерционностью разбегающихся зарядов.

Примечание 2. Если среда характеризуется диэлектрической проницаемостью ε , то время релаксации умножается на эту величину. В системе СИ (3.1.17) имеет вид: $\tau = \varepsilon_0 \varepsilon / \sigma_R$.

3.1.4. Опыты Стюарта и Толмена.

Предположение о том, что в металлах носителями тока являются свободные, т.е. сравнительно слабо связанные с ионами кристаллической решетки, электроны, было проверено экспериментально. Если бы в переносе электрического заряда в металлах участвовали ионы, то электрический ток сопровождался бы электролизом и связанным с ним переносом вещества. Карл Рикке в течение года пропускал электрический ток через поставленные друг на друга медный, алюминиевый и снова медный цилиндры. Общий заряд, прошедший через эту систему, составил 3.5 миллиона *Кулонов*, однако никакого проникновения металлов друг в друга обнаружено не было, и вес цилиндров сохранился с точностью до $\pm 0,03$ мг. Еще более определенное заключение о природе носителей тока в металлах позволяют сделать опыты с возбуждением электрического тока с помощью сил инерции.

Идея опытов Ричарда Толмена и Томаса Стюарта (1916г.) состояла в следующем: разогнать кусок металла, концы которого соединены с гальванометром, до большой скорости v_0 и потом быстро затормозить.

При торможении свободные носители заряда испытывают “ускорение”

$$a = -dv/dt.$$

Торможение свободных носителей происходит за счет электрического поля неподвижных зарядов. При этом эффективное электрическое поле, действующее на заряд e , равно:

$$E = \frac{F}{e} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} \quad (3.1.18)$$

Свободные заряды останавливаются не мгновенно, а проходят некоторое расстояние, то есть возникает некоторый ток. Плотность появляющегося тока получаем из закона Ома (3.1.8):

$$j = \frac{E}{\rho_R} = -\frac{m}{e\rho_R} \frac{dv}{dt} \quad (3.1.19)$$

Тогда полное количество электричества, которое пройдет через гальванометр, определяется зарядом, смещенным за все время торможения через поперечное сечение S , т.е. равно

$$Q = S \int_{v_0}^0 \left(-\frac{m}{e} \right) \frac{1}{\rho_R} \frac{dv}{dt} dt = \frac{m v_0 S}{e \rho_R} \quad (3.1.20)$$

Реально в опытах Стюарта и Томсона использовались катушки из металлической (медной, алюминиевой и серебряной) проволоки, длиной до 500 м, которые приводились в быстрое вращение вокруг своей оси (линейная скорость достигала $v_0 = 300 \text{ м/с}$). Концы проволочной обмотки были соединены с очень чувствительным баллистическим гальванометром длинными гибкими проводами, скручивающимися во время вращения катушки. При помощи специальных неподвижных катушек с электрическим током магнитное поле Земли было настолько тщательно скомпенсировано, так что во вращающейся катушке при её равномерном движении гальванометр не обнаруживал никаких индукционных токов. Убедившись в этом, экспериментаторы быстро тормозили вращение катушки, тогда гальванометр тотчас же отклонялся. Количество электричества, протекшего через гальванометр, описывается уравнением

$$q = \frac{mlv}{eR}, \quad (3.1.21)$$

где l – длина проволоки в катушке; v – линейная скорость вращения; R – общее сопротивление цепи. Направление отклонения гальванометра показало, что носителями тока в металлах являются отрицательные заряды.

Удельный заряд $\frac{m}{e}$ в пределах ошибок измерений оказался таким же, как и у электронов в опытах с катодными лучами. Это указало на то, что носителями тока в проводниках являются электроны.

Примечание 3. Карл Виктор Рикке, немецкий физик, 1845-1915.

Ричард Чейз Толмен (Richard Chase Tolman) американский физик-математик и физико-химик, 1881 -1948.

Томас Д. Стюарт, американский физик, 1890 -1958.

3.2. Классическая электронная теория проводимости.

Можно ли понять экспериментальные закономерности электрического тока, исходя из известных классических представлений о движении зарядов и структуре вещества? В этом параграфе мы рассмотрим простую микроскопическую модель, позволяющую объяснить опытные законы для тока в электрической цепи – *законы Ома и Джоуля - Ленца*.

3.2.1. Модель проводника. Закон Ома.

Рассмотрим следующую модель *металла* (или проводника):

в объеме, созданном положительными ионами (ионной решеткой), находятся электроны, которые можно считать слабо связанными с ионами, – так называемые, свободные электроны. В отсутствие внешнего электрического поля свободные электроны движутся хаотически со средней кинетической (тепловой) энергией

$$\frac{m\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Из этого равенства нетрудно оценить среднюю квадратичную скорость этих электронов при нормальной температуре ($T = 300^\circ\text{K}$):

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{9 \cdot 10^{-28}}} \approx \sqrt{\frac{10^{-14}}{10^{-28}}} \approx 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{c}} \approx 100 \frac{\text{km}}{\text{c}} \quad (3.2.1)$$

Включаем внешнее электрическое поле, тогда на электрон действует сила

$$\vec{F} = -e\vec{E} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.2.2)$$

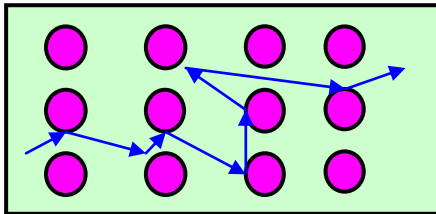


Рис. 2.1.

Под действием этой силы у электронов начинается упорядоченное движение. Движение электрона в действительности оказывается очень сложным (рис. 2.1), т.к. упорядоченное движение электронов под влиянием внешнего поля накладывается на хаотическое. При этом взаимодействие электрона с решеткой (столкновение с ионами решетки) играет

важную роль. Полная скорость движения вдоль выбранного направления поля по оси x равна сумме хаотической скорости v_x и скорости упорядоченного движения u , называемой *скоростью дрейфа*:

$$v = v_x + u \quad (3.2.3)$$

Более точно нужно рассматривать уравнение движения вдоль оси x – уравнение Ньютона:

$$F_0 - eE = m \frac{d}{dt}(v_x + u) \quad (3.2.4)$$

Здесь F_0 – проекция на ось x суммарной силы, действующей на электрон со стороны ионов и других электронов, определяющая, в частности, столкновения с ними. Обычно скорость дрейфа значительно меньше

скорости теплового движения $u \ll v_x$. Если усреднить уравнение (3.2.4) по всем электронам, то средняя проекция хаотической скорости равна нулю

$$\left\langle \frac{dv_x}{dt} \right\rangle = 0,$$

при этом появится также средняя сила взаимодействия электронов с ионами $\langle F_0 \rangle$, которая “отбирает” энергию у электронов, приобретенную в электрическом поле.

Нас интересует только упорядоченное движение зарядов – *ток*, поэтому сложную картину передачи энергии от электронов ионам (воздействие силы $\langle F_0 \rangle$) заменим более простой. Итак, рассматриваем следующую модель.

Электрон ускоряется под влиянием электрического поля в течение времени τ , приобретает скорость упорядоченного движения u_{max} , затем сталкивается с атомом (ионом) решетки и передает ему всю приобретенную энергию, полученную от ускоряющего поля. А затем вновь разгоняется до

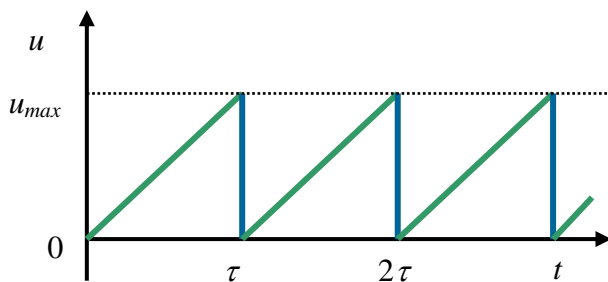


Рис. 2.2.

скорости u_{max} , сталкивается с новым ионом и т.д. Если построить график зависимости *дрейфовой скорости* u от времени, то получим пилообразную кривую (рис. 2.2). Для такой модели имеются веские основания, поскольку электрон обладает скоростью теплового движения (в соответствии с распределением Максвелла),

существенно большую u_{max} , и после очередного столкновения он просто «забывает» об упорядоченном движении.

На рис.2.2 временной интервал τ – *время релаксации* неравновесного распределения электронов (заряда) к тепловому равновесию с кристаллической решеткой, оно характеризует скорость возвращения к этому равновесию. С другой стороны, τ имеет смысл среднего времени между столкновениями, т.е. времени свободного пробега:

$$\tau = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle},$$

где $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега, а $\langle v \rangle$ – средняя скорость беспорядочного (теплового) движения. При этом частота столкновений определяется величиной обратной времени между столкновениями τ^{-1} . Таким образом, действие силы $\langle F_0 \rangle$ сводится к “сбрасыванию” приобретенной скорости u через каждые τ секунд. А в течение τ секунд *упорядоченное*

движение определяется только силой электрического поля eE , т.е. электрон движется с постоянным ускорением $a = \frac{eE}{m}$.

Тогда средний путь, проходимый электроном от одного столкновения до последующего столкновения, равен

$$S = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{eE}{2m} \tau^2 \quad (3.2.5)$$

Средняя скорость дрейфа равна

$$u = \frac{S}{\tau} = \frac{eE}{2m} \tau = \frac{eE\langle l \rangle}{2m\langle v \rangle} \quad (3.2.6)$$

Скорость упорядоченного движения u обратно пропорциональна частоте соударений

$$\frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle} = \frac{1}{\tau},$$

т.е. уменьшается с ростом температуры. Итак, используя (3.2.6) и формулы для определения плотности тока (3.1.2), получаем для плотности тока следующее выражение:

$$\vec{j} = ne\vec{u} = \frac{ne^2\langle l \rangle}{2m\langle v \rangle} \vec{E} = \sigma_R \vec{E} \quad (3.2.7)$$

Таким образом, получили закон Ома в дифференциальной форме. Из (3.2.7) проводимость определяется из следующей формулы:

$$\sigma_R = \frac{ne^2\langle l \rangle}{2m\langle v \rangle} \quad (3.2.8)$$

Итак, **классическая проводимость** прямо пропорциональна плотности носителей заряда, квадрату величины заряда и обратно пропорциональна квадратному корню из температуры: $\sigma_R \sim n, e^2, T^{-1/2}$.

Часто вводится понятие **подвижности носителей** заряда, как отношение скорости дрейфа к напряженности электрического поля:

$$\mu = \frac{\langle u \rangle}{E} \quad (3.2.9)$$

При этом получаем связь между подвижностью и проводимостью:

$$\vec{j} = en\langle \vec{u} \rangle = en\mu\vec{E} = \sigma_R \vec{E}$$

$$\mu = \frac{\sigma_R}{en} = \frac{e\langle l \rangle}{2m\langle v \rangle} \quad (3.2.10)$$

Опыт дает для подвижности электронов в металлах следующие значения:

$$\mu_e \sim (10^{-4} - 10^{-3}) \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с} \text{ (в системе СИ)}.$$

Отсюда также видно, что скорость дрейфа в металлах, в самом деле, значительно меньше средней скорости теплового движения (см (3.2.1)).

Если имеется несколько сортов носителей, то у каждого из них своя подвижность μ_i и тогда проводимость проводника равна:

$$\sigma_R = \sum_i q_i n_i \mu_i \quad (3.2.11)$$

Рассмотрим кратко *единицы измерения* введенных величин. В системе CGSE удельное сопротивление измеряется в секундах:

$$\rho_R = \frac{E}{j} = \frac{\text{заряд}/\text{см}^2}{\text{заряд}/\text{с}\cdot\text{см}^2} = \text{с}.$$

Для металлов, к примеру, меди Cu удельное сопротивление $\rho_R \sim 10^{-17} \text{ с}$ (металл), для стекла $\rho_R \sim 10^3 \text{ с}$ (диэлектрик).

В системе СИ удельное сопротивление измеряется в Ом·м. Подробнее о системах единиц для электрических величин рассмотрим далее в §3.5. Здесь же в Таблице уместно привести единицы заряда, тока, сопротивления и связи между ними в двух системах единиц:

Физические величины	CGSE	СИ	Связь единиц
Заряд q	1 CGSE _q	1 Кл	1 Кл = 3·10 ⁹ CGSE _q
Ток I	1 CGSE _I	1 А = 1 Кл / 1 с	1 А = 3·10 ⁹ CGSE _I
Плотность тока j	1 CGSE _j	1 А/м ²	1 А/м ² = 3·10 ⁵ CGSE _j
Разность потенциалов U	1 CGSE _φ = = 1 CGSE _q / см	1 В = 1 Дж·Кл ⁻¹	1 В = 1/300 CGSE _φ
Сопротивление R	1 CGSE _R	1 Ом = 1 В·А ⁻¹	1 Ом = 1/9·10 ⁷ CGSE _R
Удельное сопротивление ρ_R	1 CGSE _ρ = 1 с	1 Ом·м	1 Ом·м = 1/9·10 ⁹ CGSE _ρ
Удельная проводимость σ_R	1 CGSE _σ = 1 с ⁻¹	1 См·м ⁻¹ = 1 Ом ⁻¹ ·м ⁻¹	1 См·м ⁻¹ = 9·10 ⁹ CGSE _σ

3.2.2. Закон Джоуля - Ленца.

Итак, в рамках рассматриваемой модели за время τ электрон набирает максимальную скорость

$$u_{max} = a\tau = \frac{eE \langle l \rangle}{m \langle v \rangle}$$

и приобретает, соответственно, кинетическую энергию, равную

$$W_K = \frac{mu_{max}^2}{2} = \frac{1}{2} m \frac{e^2 E^2 \langle l \rangle^2}{m^2 \langle v \rangle^2} = \frac{e^2 E^2 \langle l \rangle^2}{2m \langle v \rangle^2} \quad (3.2.12)$$

Частота столкновений одного электрона с атомами определяется обратным временем свободного пробега:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}.$$

Тогда полное число соударений электронов в единице объема и в единицу времени ν зависит от числа электронов в единице объема (прямо пропорционально концентрации n) и определяется:

$$\nu = \frac{n \langle v \rangle}{\langle l \rangle} \quad (3.2.13)$$

Каждый акт соударения сопровождается передачей набранной кинетической энергии упорядоченного движения W_K атомам или ионам проводника. Следовательно, в рамках принятой модели выделяемая теплота в единице объема за единицу времени, т.е. объемная плотность мощности, равна:

$$\frac{dw}{dt} = W_K \frac{n \langle v \rangle}{\langle l \rangle} = \frac{e^2 n \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle} E^2 = \sigma_R E^2 \quad (3.2.14)$$

Здесь мы воспользовались уже определенным ранее выражением для проводимости (3.2.8). Итак, получаем закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме

$$\frac{\delta Q}{dt dV} = \frac{dw}{dt} = \sigma_R E^2 = \frac{j^2}{\sigma_R} = \rho_R j^2 \quad (3.2.15)$$

Мощность тепла, выделяемого в единице объема пропорциональна квадрату плотности электрического тока и обратно пропорциональна удельной проводимости.

Переход к обычной записи закона Джоуля - Ленца для участка цепи осуществляется интегрированием по объему провода

$$\frac{dQ}{dt} = \int \frac{j^2}{\sigma_R} dV = \int \frac{j^2}{\sigma_R} S dl = I^2 \int \frac{dl}{\sigma_R S} = I^2 R \quad (3.2.16)$$

где S – поперечное сечение провода, dl – элемент длины и R – сопротивление рассмотренного участка провода.

3.2.3. Закон Видемана - Франца. Недостатки классической теории.

В итоге классическая теория смогла объяснить, по крайней мере, качественно опытные законы Ома и Джоуля - Ленца. Что касается количественного согласия, дело обстоит гораздо хуже. Однако отметим, что классические представления и не должны были обеспечивать количественного согласия с экспериментальными законами, поскольку движение электронов в веществе относится к явлениям микромира, которые описываются в рамках квантовой физики.

Тем не менее, классическая теория смогла объяснить еще один результат, который случайно хорошо согласуется с опытом. И хотя классический вывод этого соотношения неверен, сам результат оказался правильным, поэтому приведем его.

Металлы – хорошие проводники не только электричества, но и тепла. В рамках той же модели металла переносчиками электричества и тепла в металлах являются одни и те же частицы – электроны. Поэтому основной механизм теплопроводности должны обеспечивать свободные электроны. При этом роль ионов в переносе тепла пренебрежимо мала. В курсе Молекулярной физики (см Глава 5, §5.3, формула (5.3.4)) было получено следующее выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{i}{2} k = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \frac{C_v}{N_A} = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda c_v \quad (3.2.17)$$

где n – концентрация электронов, $\langle l \rangle = \lambda$ – длина свободного пробега электрона. Здесь C_v и $c_v = ik/2$ – молярная теплоемкость и теплоемкость на 1 электрон, соответственно, i – число степеней свободы ($i = 3$ для электрона), k – постоянная Больцмана ($k = 1.3807 \cdot 10^{-16}$ Эрз/К = $1.3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К), N_A – число Авогадро ($N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹).

Найдем отношение коэффициента теплопроводности (3.2.17) и удельной электропроводности (3.2.8):

$$\frac{\chi}{\sigma_R} = \frac{\frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \frac{3}{2} k}{\frac{1}{2} \frac{e^2 n \lambda}{m \langle v \rangle}} = \frac{m \langle v \rangle^2 k}{e^2} \quad (3.2.18)$$

В рамках рассматриваемой приближенной теории учитывать разницу между средней скоростью и среднеквадратичной скоростью есть превышение

точности, поэтому можно положить $\langle v \rangle^2 \approx \langle v^2 \rangle$ и $\frac{m\langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$. Тогда отношение (3.2.18) принимает вид:

$$\frac{\chi}{\sigma_R} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T \quad (3.2.19)$$

Это *закон Видемана-Франца* – отношение коэффициента теплопроводности и удельной электропроводности для всех металлов одно и то же:

$$\frac{\chi}{\sigma_R} = 2.23 \cdot 10^{-8} T \quad (3.2.21)$$

и зависит только от температуры.

Оказалось, что закон Видемана-Франца находится в хорошем согласии с опытом. Как далее оказалось, это согласие – случайное для классического описания. При нашем модельном описании мы не учитывали Максвелловское распределение электронов по скоростям, что на самом деле необходимо сделать. В рамках классического описания Л.Лоренц учел его и получил вместо “3” фактор “2”, что только ухудшило согласие с экспериментом. Зоммерфельд показал, что квантовая теория дает коэффициент $\pi^2/3$, что хорошо совпадает с простейшим классическим результатом “3”.

Вообще классическая модель наглядна и дает правильные качественные зависимости, выражаемые законами Ома, Джоуля – Ленца, Видемана – Франца. Однако она не приводит к правильным количественным результатам. Рассмотрим, в чем состоят основные *расхождения* и недостатки классической теории:

- 1) Оказалось, что чтобы получить правильные значения электропроводности σ_R , необходимо принимать очень большие значения длины свободного пробега электронов, на три порядка превышающие межатомные расстояния, что не находит убедительного объяснения в классической физике.
- 2) Классическая теория предсказывает также другую зависимость удельной проводимости от температуры: $\sigma_R \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, в то же время эксперимент дает следующую зависимость $\sigma_R \sim \frac{1}{T}$.
- 3) В теплоемкость металлического проводника, согласно “классике”, аддитивный вклад вносят электронный газ $C_v = \frac{3}{2}R$ и решетка $C_v = 3R$ (закон Дюлонга и Пти), что в сумме дает $C_v = \frac{9}{2}R$. Однако этот результат

не находит подтверждения в эксперименте: теплоемкость металлов практически равна $3R$ (см §3.3 Молекулярной физики).

Квантовая физика позволяет устранить эти расхождения. Прежде всего, необходимо учитывать различие в поведении микрочастиц и обычных макрочастиц. Квантовая физика допускает, как называли ранее, “дуализм” в поведении микрочастиц, т.е. приписывает им корпускулярные и волновые свойства. Именно последние позволяют “обтекать” атомы без столкновений, что приводит к увеличению длины свободного пробега электронов.

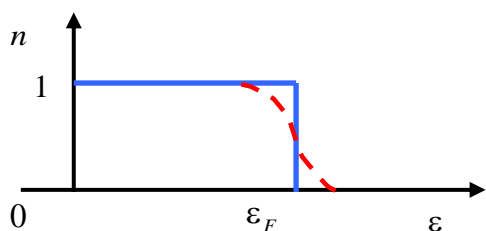


Рис. 2.3.

Распределение электронов по энергиям подчиняется *квантовой статистике Ферми - Дирака* (см рис. 2.3). На рис. 2.3. представлено распределение плотности свободных электронов по энергиям. Согласно статистике Ферми-Дирака, в состоянии с определенной энергией не может находиться более

одного электрона. Таким образом, при нуле температуры электроны занимают все возможные нижние энергетические состояния от нуля вплоть до максимальной энергии — *энергии Ферми* ϵ_F . В образовании электронной проводимости и теплоемкости участвует лишь малая часть электронов, имеющих энергии вблизи *уровня Ферми* ϵ_F . Именно поэтому электронный газ не вносит существенного вклада в теплоемкость и теплоемкость близка к закону Дюлонга - Пти (см §3.3 Молекулярной физики).

Квантовая физика предсказывает для температурной зависимости проводимости $\sigma_R \sim 1/T$, что и наблюдается в эксперименте. При сверхнизких температурах (ниже 20 K) в металлах наблюдается явление сверхпроводимости, открытое еще в начале века. Однако в конце 80-х годов была обнаружена сверхпроводимость при температурах $90\text{-}160\text{ K}$, причем на керамических материалах. Подобные явления уже не вписываются в картину представлений классической физики, а являются прерогативой физики квантовой. Позже мы вернемся к этим явлениям.

Отметим также, что в разных конденсированных средах — твердых телах, жидкостях, газах, вакууме — реализуется, в принципе, различный механизм проводимости.

3.2.4. Электрические цепи. ЭДС. Законы Кирхгофа.

Для того, чтобы поддерживать ток, необходимо поддерживать электрическое поле и осуществлять круговорот зарядов в цепи, при котором они бы двигались по замкнутому пути. В замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные носители тока движутся в сторону убывания потенциала, должны быть участки, на которых перенос положительных

зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электростатического поля.

Перемещение носителей на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых *сторонними силами*. Сторонние силы можно характеризовать работой, которую они совершают. Работа, совершенная сторонними силами над единичным положительным зарядом, называется *электродвижущей силой* (ЭДС):

$$E = \frac{A}{q} \quad (3.2.22)$$

Очевидно, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала.

Рассмотрим неоднородный участок электрической цепи, содержащий сопротивления и источники ЭДС. Можно также ввести понятие напряженности поля сторонних сил E_{cm} :

$$\vec{E}_{cm} = \frac{\vec{F}_{cm}}{q} \quad (3.2.23)$$

Работа сторонних сил на неоднородном участке электрической цепи 1 – 2 равна

$$A_{cm} = q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \quad (3.2.24)$$

Тогда работа сторонних сил на этом участке цепи по перенесению единичного заряда – ЭДС на участке цепи – равна:

$$E_{12} = \frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \quad (3.2.25)$$

Для замкнутой цепи получаем полную ЭДС в цепи как циркуляция вектора напряженности сторонних сил:

$$E = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} \quad (3.2.26)$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля \vec{E} , тогда результирующая сила равна:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}_{cm}) \quad (3.2.27)$$

Работа, совершаемая этой силой на участке цепи 1 – 2 определяется суммой работ электрических сил и сторонних сил:

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + qE_{12} \quad (3.2.28)$$

Тогда для падения напряжения на этом участке цепи можно записать следующее выражение:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12} \quad (3.2.29)$$

Можно также записать закон Ома для неоднородного участка цепи. На неоднородном участке цепи на носители тока действуют электростатические и сторонние силы. Тогда плотность тока записывается

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{cm}) \quad (3.2.30)$$

Умножая скалярно вектор плотности тока на вектор элемента проводника длиной $d\vec{l}$ и вспоминая, что проводимость $\sigma_R = 1/\rho_R$, имеем:

$$\begin{aligned} \vec{j}d\vec{l} &= \sigma_R(\vec{E} + \vec{E}_{cm})d\vec{l} \\ I\rho_R \frac{d\vec{l}}{S} &= (\vec{E} + \vec{E}_{cm})d\vec{l} \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Интегрируя по всему участку цепи 1 – 2, получаем *закон Ома для участка цепи*:

$$\begin{aligned} I \int_1^2 \rho_R \frac{d\vec{l}}{S} &= IR = \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{cm})d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12} \\ I &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}}{R} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Если интегрирование распространяется на всю замкнутую цепь, то получаем *закон Ома для полной цепи*:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} + \oint \vec{E}_{cm}d\vec{l} = 0 + \oint \vec{E}_{cm}d\vec{l} = E = IR \quad (3.2.33)$$

Здесь мы воспользовались тем, что работа электростатического поля по замкнутому пути, или иначе сумма всех потенциалов в замкнутой цепи, равна нулю.

Разбивая сопротивление всей цепи на сопротивление внешнего участка цепи $R_{внешней}$ и внутреннее r_0 сопротивление источника, или источников, получаем обычную формулу для ЭДС замкнутой цепи:

$$E = I(R_{внешней} + r_0) \quad (3.2.34)$$

На практике для вычисления токов и падений напряжений на различных участках разветвленных электрических цепей полезны правила Кирхгофа, основанные на законах сохранения заряда и энергии. Прежде всего по всей цепи распределяем направление токов на каждом из участков цепи и определяем направление действия ЭДС. Далее используем первое правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*

$$\sum_i I_i = 0 \quad (3.2.35)$$

Затем применяем второе правило Кирхгофа для обхода замкнутого контура в цепи. Выбирая направление обхода для любого выделенного в цепи замкнутого контура, получаем:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k E_k \quad (3.2.36)$$

Иначе, сумма всех падений напряжений на участках выбранного замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре.

Примечание 1. Густав Генрих Видеман, немецкий физик, 1826–1899.

Рудольф Франц, немецкий физик, 1827-1902.

Людвиг Валентин Лоренц, датский физик-теоретик, 1829–1891.

Арнольд Иоганн Вильгельм Зоммерфельд, немецкий физик-теоретик, 1868–1951.

Энрико Ферми, итальянский физик, 1901–1954, Нобелевская премия 1938 г. за открытие искусственной радиоактивности.

Поль Адриен Морис Дирак, английский физик-теоретик, 1902–1984, в 1933 г. - Нобелевская премия за создание квантовой механики.

Пьер Луи Дюлонг, французский физик и химик, 1785–1838.

Алексис Терез Пти, французский физик, 1791–1820.

Густав Роберт Кірхгоф, 1824–1887, немецкий физик, член Берлинской академии наук, с 1862 г. член-корреспондент Санкт-Петербургской академии наук.

3.3. Магнитное взаимодействие и магнитное поле движущихся зарядов.

3.3.1. Экспериментальные факты. Магнитная индукция.

Магнитные явления обнаружены давно – с древних времен находились естественные магниты, которые взаимодействовали между собой и с магнитным полем Земли. Так было обнаружено, что магнитные стрелки ориентируются в поле Земли. Кроме факта, что магниты воздействует на другие магниты, выяснилось также, что магнит действует на движущиеся заряды, т.е. на электрические токи. Для описания магнитных явлений было введено понятие *магнитного поля*.

Основные экспериментальные факты, которые положены в теорию взаимодействия магнитных полей, были установлены в XIX веке.

- 1) Движущиеся заряды создают магнитное поле
- 2) Магнитное поле действует на движущиеся заряды

Эти фундаментальные положения были получены в результате многочисленных опытов с проявлениями магнитных взаимодействий. Приведем пару примеров этих опытов, послуживших основой теории электромагнетизма.

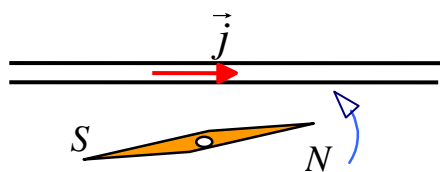


Рис. 3.1.

- 1) **Опыт Эрстеда (1820 г.).** Х.К. Эрстед установил связь электричества и магнетизма. Ток пропускался по проволоке, подвешенной над стрелкой компаса (рис. 3.1). Стрелка, первоначально установленная параллельно проволоке, при пропускании по проволоке тока ориентировалась перпендикулярно ей, причем направление вращения стрелки

зависело от направления протекания тока. Таким образом, впервые была установлена связь электричества и магнетизма.

2) **Опыт Ампера (1820 г.).** А.М. Ампер рассматривал взаимодействие двух параллельных токов. Два параллельных провода, по которым текут одинаково направленные токи (рис. 3.2), притягиваются друг к другу. Он

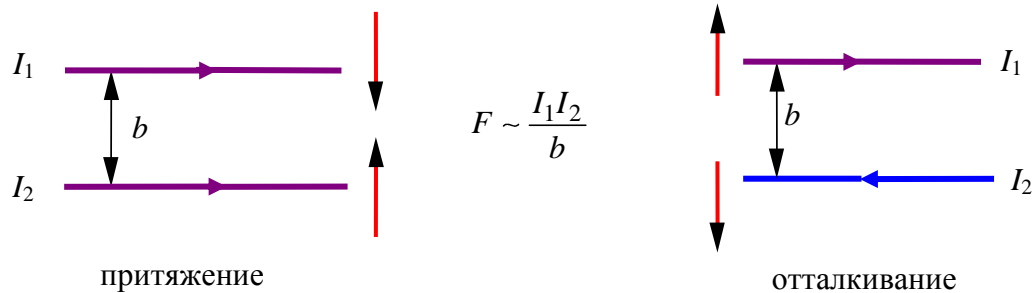


Рис. 3.2.

установил, что сила, приходящаяся на единицу длины любого из проводов с током, прямо пропорциональна произведению обоих токов и обратно пропорциональна расстоянию между проводами. Перемена направления одного из токов превращает силу притяжения в силу отталкивания. Между двумя нитями с постоянным электрическим током существует нечто вроде “действия на расстоянии”.

Сила, о которой идет речь, зависит только от зарядов, движущихся по проводам, т.е. от двух токов. Это – *магнитные силы*; причина их появления – *движение зарядов*. Стрелка компаса Эрстеда мало похожа на цепь постоянного тока. Однако Ампер догадался, что отклонение стрелки компаса, происходящее без видимого движения зарядов, обусловлено электрическими токами в атомном масштабе. Катушка с током ведет себя под влиянием проходящего вблизи тока точно также как магнитная стрелка компаса

3) Более современный опыт по влиянию магнитного поля на движущиеся заряды изображен на рисунке 3.3: отклонение пучка электронов в электронно-лучевой трубке при поднесении провода с током. Электроны в электронно-лучевой трубке, движущиеся прямолинейно, отклоняются к проводу с током или от него в зависимости от направления тока в этом проводе.

Для описания взаимодействия движущихся зарядов вводят понятие магнитного поля, величину и направление которого характеризуют вектором *индукцией магнитного поля* \vec{B} . Индукция магнитного поля есть аналог

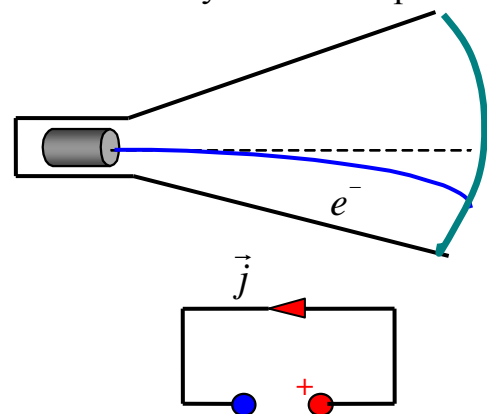


Рис. 3.3.

напряженности электрического поля \vec{E} в электростатике, а отличие в названиях (индукция \leftrightarrow напряженность) связано с историческими причинами (аналогичные вектора, вводимые для описания магнитного и электрического поля в веществе, $\vec{H} \sim \vec{D}$ также имеют различные названия: напряженность \leftrightarrow индукция, соответственно).

На покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует. Магнитное поле действует только на движущийся заряд. Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического поля, справедлив принцип суперпозиции. Магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности.

Итак, для магнитного поля справедлив *принцип суперпозиции*:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i \quad (3.3.1)$$

Для того, чтобы определить магнитную индукцию и ввести единицы измерения, необходимы опытные факты и законы, связывающие взаимодействие магнитного поля с движущимися зарядами.

Примечание 1. Ханс Кристиан Эрстед, датский физик, 1777-1851.
 Андре Мари Ампер, французский физик, 1775-1836.

3.3.2. Релятивистская природа магнитного поля.

Природа взаимодействия движущихся зарядов обусловлена релятивистскими свойствами пространства и времени. Это утверждение вытекает из релятивистского уравнения движения. Релятивистское уравнение движения выглядит внешне, как и обычное уравнение движения (см в разделе Механика Главу 2, формулы (2.7.28)):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (3.3.2)$$

Оно инвариантно и, следовательно, имеет одинаковый вид в K - системе и во всех других инерциальных системах отсчета. Напомним, что в этом уравнении стоит релятивистский импульс $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. В частности, в инерциальной K' системе отсчета можно записать такое же уравнение:

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}' \quad (3.3.3)$$

В левые части уравнений (3.3.2) -(3.3.3) входят чисто механические величины, изменение которых при переходе из одной системы отсчета в другую известно. Следовательно, левые части этих уравнений в обеих системах отсчета можно связать между собой. Тогда оказываются связанными между собой, вследствие релятивистской инвариантности уравнений, силы \vec{F} и \vec{F}' . Поскольку в левые части уравнений входят скорости, то можно заключить, что сила взаимодействия 2^x движущихся зарядов зависит от скорости и не сводится к кулоновской силе, т.к. последняя не зависит от скорости \vec{v} . Следовательно, появляется дополнительная составляющая силы, которая носит чисто релятивистский характер.

Вывод: *Следовательно, взаимодействие движущихся зарядов осуществляется не только посредством кулоновской силы, но также и силой другой природы – магнитной.*

Обсудим подробнее сказанное выше на конкретном примере: *взаимодействие точечного заряда и бесконечной равномерно заряженной нити*. Рассмотрение равномерно заряженной нити удобно, т.к. ее электрическое поле симметрично вдоль оси движения.

1). Пусть в K' системе отсчета нить и точечный заряд q покоятся (см рис. 3.4), нить ориентирована вдоль оси x' . Точечный заряд q расположен на оси y' на расстоянии y'_0 от нити. Объемная плотность заряда на нити ρ' и тогда малый элемент заряда нити $dq' = \rho' S' dx'$. Сила, действующая на точечный заряд q со стороны нити, определяется напряженностью электрического поля нити (которая находится по теореме Гаусса):

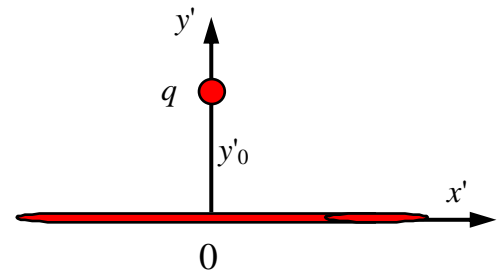


Рис. 3.4.

$$E \cdot 2\pi r h = 4\pi \rho' S' h; \quad E = \frac{2\rho' S'}{r}, \quad (3.3.4)$$

где r – расстояние от оси нити. Тогда вектор рассматриваемой силы имеет следующие компоненты:

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 2q \frac{\rho' S'}{y'_0}, \quad F'_z = 0. \quad (3.3.5)$$

2). Теперь рассмотрим эту же задачу в K системе, которая движется со скоростью \vec{v} в отрицательном направлении оси x' , т.е. заряд и заряженная нить в ней движутся в положительном направлении оси x (см рис. 3.5). Найдем силу взаимодействия (отталкивания) нити с точечным зарядом q . Заряд q является *релятивистским инвариантом*, т.е. при переходе из одной ИСО в другую он не меняется. Однако, при переходе в K систему отсчета

линейные размеры нити сокращаются и на единицу длины приходится теперь больше зарядов, чем на единицу длины неподвижной нити.

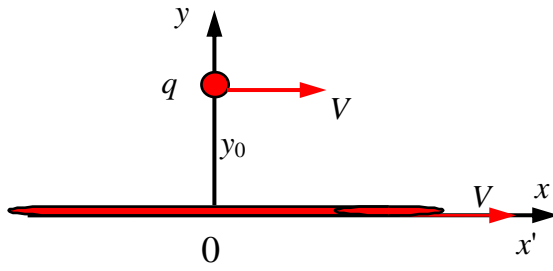


Рис. 3.5.

Действительно, продольные размеры сокращаются согласно преобразованиям Лоренца

$$dx = dx' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Поперечные размеры не меняются, т.е. сечение нити остается одинаковым $S = S'$. Тогда

для плотностей распределения заряда в нити в обеих системах имеем $\rho' = \frac{dq}{Sdx'}$

и $\rho = \frac{dq}{Sdx}$. Откуда плотность зарядов в K -системе отсчета равна:

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.3.6)$$

Далее расчет силы взаимодействия заряда q с нитью в K системе аналогичен расчету в K' системе отсчета. Тогда компоненты силы f равны:

$$f_x = 0, \quad f_y = 2q \frac{\rho S}{y_0}, \quad f_z = 0 \quad (3.3.7)$$

Здесь мы вычислили только кулоновскую (электрическую) силу взаимодействия, но, как увидим далее, это не полная сила взаимодействия, поэтому обозначаем ее маленькой буквой f . Поскольку поперечные размеры не изменяются, то $y_0 = y'_0$. Сравнивая f_y (3.3.7) и F'_y (3.3.5), получаем связь между перпендикулярными компонентами электрической силы в двух системах отсчета:

$$f_y = \frac{2q\rho S}{y_0} = \frac{2q\rho' S'}{y'_0 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{F'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.3.8)$$

3). Теперь рассмотрим преобразование полной силы при переходе из K' в K . Воспользуемся уравнением движения и напомним его для перпендикулярной составляющей в K и K' системах:

$$F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} \quad (3.3.9)$$

Вспомним преобразования Лоренца для координат и времени:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dt = dt' \frac{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

при этом компонента скорости заряда q в K' системе $\frac{dx'}{dt'} = v'_x = 0$. Тогда имеем преобразование для промежутков времени:

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.3.10)$$

Записывая перпендикулярную компоненту скорости и импульс (помня, что $v'_x = 0$), имеем:

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$p'_y = m_0 v'_y = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} v_y \sqrt{1 - \beta^2} = m v_y = p_y$$

Таким образом, перпендикулярная компонента импульса инвариантна

$$p_y = p'_y. \quad (3.3.11)$$

Примечание 2. Справедливость (3.3.11) можно получить проще, если вспомнить свойства 4-х векторов. Ранее в релятивистской механике рассматривали 4-х вектор энергии-импульса $(E/c, p_x, p_y, p_z)$, компоненты которого преобразуются при переходе к новой ИСО также как компоненты 4-х радиус вектора (преобразования Лоренца). При этом меняется только нулевая и продольная компоненты, а перпендикулярная компонента импульса не меняется: $p_y = p'_y$, $dp_y = dp'_y$.

Тогда, принимая во внимание (3.3.10) и (3.3.11), получаем для перпендикулярной составляющей полной силы:

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = F'_y \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.3.12)$$

4). Сравнивая последнее уравнение с (3.3.8) и исключая силу F'_y , получаем связь между полной силой F_y и кулоновской силой f_y :

$$F_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) f_y \quad (3.3.13)$$

Таким образом, получаем, что кулоновская сила отталкивания f_y больше силы (полной) F_y , действующей на движущийся заряд со стороны движущейся заряженной нити. Следовательно, кроме кулоновской силы отталкивания, на

заряд действует еще другая сила – сила притяжения, которая отлична от кулоновской силы. Эта сила – *магнитная сила - сила магнитного взаимодействия движущихся зарядов*.

Магнитное взаимодействие как часть электромагнитного взаимодействия предполагает полевую трактовку. Приведенный пример иллюстрирует экспериментальные факты, положенные в основу теории электромагнитных явлений и упомянутые вначале параграфа. А именно, движущийся электрический заряд создает в окружающем его пространстве магнитное поле; а на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила. В нашем примере магнитная сила определяется:

$$F_{\text{магн}} = F_y - f_y = -\frac{v^2}{c^2} f_y \quad (3.3.14)$$

где f_y – кулоновская сила, а знак “минус” здесь указывает на силу притяжения. Видно из (3.3.13) и (3.3.14), что магнитная сила сравнима с кулоновской силой только при достаточно больших скоростях. Поэтому *магнитное поле проявляется как релятивистский эффект*. Однако если в проводящей среде протекает электрический ток (алгебраическая сумма зарядов проводника равна нулю), то кулоновская сила равна нулю и остается только магнитная сила, проявление которой мы и наблюдаем. При скоростях дрейфа электронов в проводнике магнитная сила в $\sim 10^{20}$ раз меньше кулоновской силы.

3.4. Сила Лоренца и закон Ампера.

3.4.1. Сила Лоренца.

В результате многочисленных экспериментов по исследованию магнитных явлений физиками были получены основные (фундаментальные) законы. Эти законы, записанные в виде математических формул, являются обобщением опытных фактов. Исторически первыми проводились опыты с прямыми токами (законы Ампера, Био и Савара) и устанавливались основные законы их взаимодействия. Однако при изучении этого раздела курса удобнее ввести те же законы для элементарных движущихся зарядов и затем

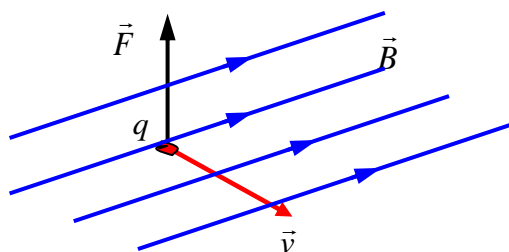


Рис. 4.1.

их связать с законами взаимодействия токов.

Итак, рассмотрим первый опытный факт: на движущийся электрический заряд в магнитном поле (см рис. 4.1) действует сила – *сила Лоренца*, которая определяется следующим векторным произведением:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \quad (3.4.1)$$

где q – заряд, \vec{v} – скорость заряда, \vec{B} – индукция магнитного поля. Здесь c – некоторая константа (физический смысл ее рассмотрим позже), которая определяется выбранной системой единиц. Индукция магнитного поля \vec{B} – векторная силовая характеристика магнитного поля, определяющая величину и направление действия силы на движущийся заряд по формуле (3.4.1).

В системе единиц *CGSE* (Гаусса), в чем мы убедимся далее, константа c – скорость света. В системе *СИ* константа $c = 1$, т.е. сила Лоренца в системе *СИ* записывается:

$$\vec{F}_q = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (3.4.1a)$$

Таким образом, это соотношение может служить определением единиц магнитной индукции \vec{B} , поскольку остальные единицы, входящие в (3.4.1a), уже определены. В системе *СИ* имеем: $[F] = 1H$, $[q] = 1Кл$, $[v] = 1м/с$, тогда единица магнитной индукции определяется как $[B] = 1Тл$ (Тесла). Подробнее о единицах обсудим в следующем параграфе.

Если движение заряда происходит одновременно в магнитном и электрическом полях, то сила Лоренца равна сумме сил:

$$\vec{F}_q = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{B}]\right) \quad (3.4.2)$$

Однако при этом заметим, что разделение силы на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета.

3.4.2. Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле.

По второму закону Ньютона уравнение, описывающее движения заряда q в магнитном поле индукции \vec{B} , имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_q = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (3.4.3)$$

где m – масса заряда, \vec{v} – его скорость. Рассмотрим отдельно составляющие (проекции) скорости вдоль направления магнитного поля v_{\parallel} и перпендикулярно к нему v_{\perp} : $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ (см рис. 4.2). Легко видеть, что в направлении, параллельном магнитному полю, проекция силы, действующей со стороны поля на движущийся заряд, равна нулю, что вытекает из свойств векторного произведения:

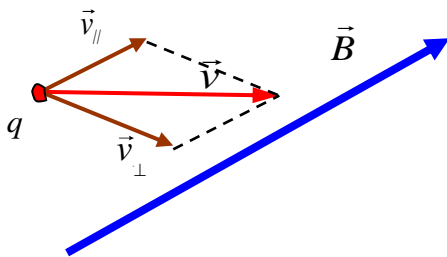


Рис. 4.2.

$$m \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{v}_{\parallel}, \vec{B}] = 0 \quad (3.4.4)$$

Поэтому составляющая скорости, параллельная вектору индукции магнитного поля, не меняется $v_B = v_{\parallel} = \text{const}$.

Для составляющей скорости, перпендикулярной к направлению магнитного поля \vec{B} , имеем уравнение:

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{v}_{\perp}, \vec{B}] = m\vec{a} \quad (3.4.5)$$

Ускорение заряда равно

$$\vec{a} = \frac{q}{mc} [\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]$$

и направлено перпендикулярно скорости частицы (и индукции магнитного поля). Как известно из курса механики ускорение, перпендикулярное скорости (центростремительное ускорение), не изменяет ее величину, а меняет только направление скорости. В этом случае частица движется в магнитном поле с постоянной по модулю скоростью $v_{\perp} = \text{const}$, и, следовательно, траекторией движения заряда в плоскости перпендикулярной к полю является *окружность* (рис. 4.3). При этом центростремительное

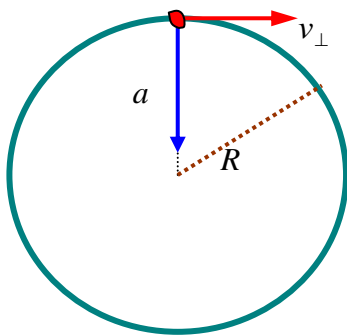


Рис. 4.3.

ускорение определяется как $a = \frac{v_{\perp}^2}{R}$. Подставляя это ускорение в уравнение (3.4.5) и рассматривая его по модулю, находим радиус описываемой окружности:

$$\frac{qv_{\perp}B}{c} = \frac{mv_{\perp}^2}{R} \quad (3.4.6)$$

$$R = \frac{mcv_{\perp}}{qB}$$

Учитывая (3.4.6), получаем частоту вращения (угловую скорость) заряда вокруг силовой линии индукции магнитного поля – так называемую, *циклотронную частоту* вращения:

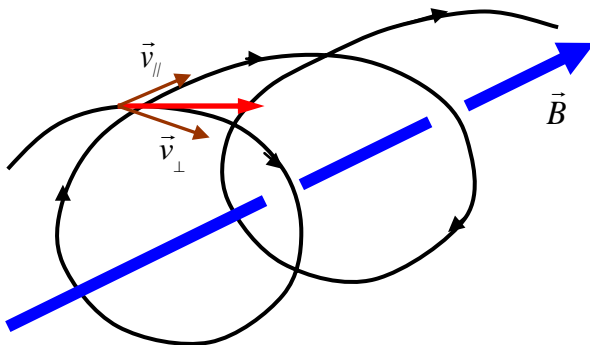


Рис. 4.4.

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{R} = \frac{qB}{mc} \quad (3.4.7)$$

Если скорость частицы направлена под произвольным углом к магнитному полю (вектору \vec{B}), то траектория частицы представляет собой винтовую линию (рис. 4.4), навитую на направление индукции магнитного поля.

Итак, в итоге получаем:

- 1) равномерное движение вдоль направления магнитного поля и
- 2) движение в плоскости перпендикулярной к магнитному полю с ускорением перпендикулярным к скорости, т.е. движение по окружности с постоянной скоростью.

3.4.3. Взаимодействие токов. Закон Ампера.

Обычно эксперименты проводились с постоянными токами, поскольку с ними проще оперировать, чем с отдельными зарядами. Рассмотрим взаимодействие токов. Каждый носитель тока в проводнике испытывает действие магнитной силы. В результате магнитное поле действует с определенной силой на сам проводник с током в целом.

Пусть имеем провод с током, помещенный в магнитное поле. На каждый заряд q (носитель) действует сила Лоренца (3.4.1)

$$\vec{F}_q = \frac{q}{c} [(\vec{v} + \vec{u}), \vec{B}], \quad (3.4.8)$$

где \vec{v} – скорость хаотического движения, \vec{u} – скорость дрейфа носителей. Если S – сечение проводника, n – концентрация носителей, то на элемент тока длиной dl будет действовать сила

$$d\vec{F} = \langle \vec{F}_q \rangle n S dl, \quad (3.4.9)$$

где $\langle \vec{F}_q \rangle$ – средняя сила, действующая на заряд; $dV = Sdl$ – элементарный объем проводника. Так как средняя скорость теплового движения равна нулю $\langle \vec{v} \rangle = 0$, а средняя скорость дрейфа – $\langle \vec{u} \rangle = \vec{u}$, то получаем:

$$\langle \vec{F}_q \rangle = \frac{q}{c} [(\langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle), \vec{B}] = \frac{q}{c} [\langle \vec{u} \rangle, \vec{B}] = \frac{q}{c} [\vec{u}, \vec{B}], \quad (3.4.10)$$

Тогда сила, действующая на элемент объема проводника dV , равна:

$$d\vec{F} = \frac{q}{c} n [\vec{u}, \vec{B}] S dl = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] dV, \quad (3.4.11)$$

Здесь ввели плотность тока $\vec{j} = nq\vec{u}$. Итак, получаем силу, действующую на *объемный элемент тока*:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] dV \quad (3.4.12)$$

Можно написать силу, действующую на тонкий провод с током в магнитном поле. Для этого объемный элемент тока выразим через *линейный элемент тока*:

$$\vec{j} dV = \vec{j} S dl = Id\vec{l}. \quad (3.4.13)$$

Тогда сила, действующая на провод длиной $d\vec{l}$ в магнитном поле, определяется:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}] \quad (3.4.14)$$

Сила, действующая на провод конечной длины, записывается через интеграл:

$$\vec{F} = \int \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}] \quad (3.4.15)$$

В общем случае необходимо учитывать векторный характер подынтегрального выражения при получении результирующей силы.

Если имеем участок прямого провода с током длины l , находящийся в постоянном магнитном поле, тогда величина силы, действующей на этот участок, получается из интегрирования (3.4.15) и равна:

$$F = \frac{I}{c} Bl \sin \vartheta \quad (3.4.16)$$

где угол ϑ – угол между направлением силовых линий индукции магнитного поля и прямым участком провода.

Эти соотношения (3.4.12) - (3.4.16) и определяет закон взаимодействия токов – *закон Ампера* (1820г.).

3.5. Поле движущегося заряда. Закон Био-Савара.

3.5.1. Магнитное поле движущегося заряда.

Если точечный заряд покоится, то он создает в окружающем его пространстве только электрическое поле. Это поле изотропное, и положение заряда определяет центр симметрии электростатического поля. Если заряд движется со скоростью \vec{v} , то в пространстве появляется выделенное направление, связанное с направлением его движения. Поэтому магнитное поле, появляющееся в результате движения заряда, имеет осевую (аксиальную) симметрию.

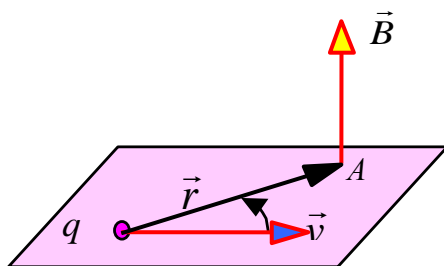


Рис. 5.1.

В результате обобщения экспериментальных данных был получен фундаментальный закон:

точечный заряд q , равномерно движущийся с малой (нерелятивистской $v \ll c$) скоростью, создает в окружающем пространстве магнитное поле:

$$\vec{B} = k \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \quad (3.5.1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения A (см рис. 5.1). Конец радиус-вектора \vec{r} неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью \vec{v} , поэтому вектор \vec{B} в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени. В соответствии с (3.5.1) вектор \vec{B} направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы \vec{v} и \vec{r} . Направление вектора индукции магнитного поля \vec{B} образует с направлением \vec{v} правовинтовую систему и определяется по правилу "буравчика": при повороте вектора скорости \vec{v} в направлении вектора \vec{r} поступательное движение винта определяет направление \vec{B} . Таким образом, по своим свойствам вектор индукции магнитного поля \vec{B} – аксиальный вектор (псевдовектор). При обращении времени меняется направление скорости и соответственно меняется направление магнитного поля.

Примечание 1: В системе CGSE (Гаусса) коэффициент $k = \frac{1}{c}$.

В системе СИ: $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$.

Электрическое поле неподвижного и движущегося с **нерелятивистской** скоростью заряда определяется тем же законом Кулона $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$, тогда магнитное поле, созданное таким движущимся зарядом, может быть записано через напряженность электрического поля:

$$\vec{B} = k[\vec{v}, \vec{E}] = \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{E}] \quad (3.5.2)$$

Закон (3.5.1) положен в **основание теории магнетизма**, хотя исторически первым экспериментально было получено выражение для магнитного поля, создаваемого прямым током.

3.5.2. Магнитное поле тока.

Вычислим магнитное поле, создаваемое элементом тока I длиной dl и поперечным сечением S (рис. 5.2). Число носителей в этом элементе равно $nSdl = ndV$, где n – концентрация носителей. Каждый носитель заряда q согласно (3.5.1) создает в

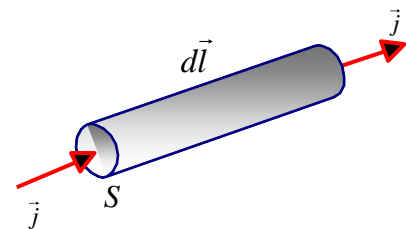


Рис. 5.2.

окружающем пространстве магнитное поле:

$$\vec{B}_q = \frac{q}{c} \frac{[(\vec{v} + \vec{u}), \vec{r}]}{r^3}, \quad (3.5.3)$$

где \vec{v} – скорость хаотического движения, а \vec{u} – скорость направленного движения (дрейфа). Вычисляя магнитное поле элемента тока, будем исходить из установленного опытным путем *принципа суперпозиции*. Следуя этому принципу, будем учитывать, что каждый заряд q возбуждает поле, совершенно не зависящее от наличия других зарядов. Усредняя по всем носителям, заключенным в объеме dV (считая скорость дрейфа – $\langle \vec{u} \rangle = \vec{u}$)

$$\langle \vec{B}_q \rangle = \frac{q}{c} \frac{[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}, \quad \langle \vec{v} \rangle = 0 \quad (3.5.4)$$

и умножая на их количество, мы получим магнитное поле созданное элементом тока:

$$d\vec{B} = \langle \vec{B}_q \rangle nSdl ;$$

$$d\vec{B} = \frac{qn}{c} \frac{[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3} dV = \frac{1}{c} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV \quad (3.5.5)$$

Это соотношение составляет содержание *закона Био-Савара*: магнитное поле, создаваемое объемным элементом тока, определяется выражением:

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV ; \quad (3.5.6)$$

Магнитное поле, создаваемое линейным элементом тока, согласно соотношению (3.4.13) равно:

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.5.7)$$

Здесь напомним, \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от элемента тока к точке наблюдения. Именно последнее выражение, определяющее вклад малого линейного участка тока в полное магнитное поле, было получено первоначально Био и Саваром и обобщено Лапласом. Запись закона Био-Савара в виде соотношения (3.5.1) легко может быть получена из (3.5.7), если ток обратно представить через движение зарядов с дрейфовой скоростью.

Магнитное поле от проводника конечной длины L получается путем интегрирования по нему:

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int_L \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (3.5.7a)$$

В силу векторного характера последнего выражения интегрирование необходимо проводить по проекциям магнитного поля.

Примечание 2: Жан Батист Био – французский физик, 1774-1862;
Феликс Савар – французский физик, 1791-1841;
Пьер-Симон де Лаплас – французский математик, физик и астроном, 1749-1827;

3.5.3. Примеры магнитных полей.

1) Магнитное поле прямого тока

Вычислим магнитное поле прямого тока I , т.е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (см рис. 5.3). Согласно закону

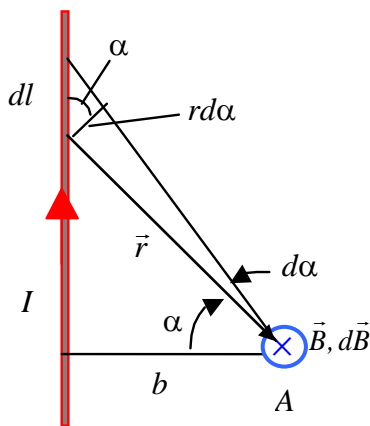


Рис. 5.3.

Био-Савара в произвольно выбранной точке А векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление – на рис. 5.3 (с правой стороны от прямого тока) вектора $d\vec{B}$ направлены за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей dB , причем $\sin(\angle(d\vec{l}, \vec{r})) = \cos \alpha$, и тогда поле от элемента тока $d\vec{l}$ равно:

$$dB = \frac{1}{c} \frac{I dl \cos \alpha}{r^2} \quad (3.5.8)$$

Из рисунка 5.3 следует, что

$$dl \cos \alpha = r d\alpha \quad \text{и} \quad r = \frac{b}{\cos \alpha},$$

где b – расстояние от провода до точки А. Поэтому далее получаем

$$dB = \frac{1}{c} \frac{I \cos \alpha d\alpha}{b}. \quad (3.5.9)$$

Интегрируя последнее выражение по всем элементам бесконечно длинного тока, что эквивалентно интегрированию по углу α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим индукцию магнитного поля прямого тока:

$$B = \frac{2I}{cb} \quad (3.5.10)$$

Магнитное поле, создаваемое прямым током, прямо пропорционально силе тока и обратно пропорционально расстоянию до провода.

Примечание 3. В системе СИ магнитное поле прямого тока равно $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}$.

2) Сила взаимодействия 2-х параллельных токов

Пусть имеем два параллельных тока, расположенных на расстоянии R (рис. 5.4). Поле, создаваемое прямым током I_1 на расстоянии R от него в точках, где находится ток I_2 , направлено за плоскость рисунка и согласно (3.5.10) равно

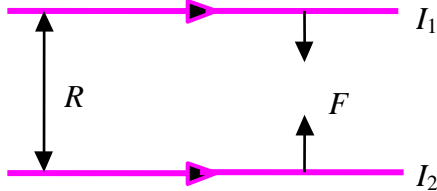


Рис. 5.4.

$$B = \frac{2I_1}{cR}.$$

Тогда сила, действующая на элемент dl прямого тока I_2 со стороны первого тока, согласно закону Ампера (3.4.14), равна

$$dF = \frac{1}{c} I_2 B dl = \frac{2I_1 I_2}{c^2 R} dl.$$

Здесь учтено, что угол между направлением магнитного поля и элементом dl тока I_2 равен $\frac{\pi}{2}$. Итак, *сила взаимодействия на единицу длины* проводника (притяжения или отталкивания зависит от взаимного направления токов) равна:

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 R} \quad (3.5.11)$$

Примечание 4. Сила взаимодействия 2-х токов на единицу длины в системе СИ записывается:

$$f = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi R.$$

Важно отметить, что последнее соотношение используется для определения единицы тока в системе СИ – Ампера (см ниже п.3.5.4).

В общем случае сила магнитного взаимодействия двух элементов тока может быть записано в следующем виде:

$$d\vec{F} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{[d\vec{l}_1, [d\vec{l}_2, \vec{r}]]}{r^3} \quad (3.5.12)$$

где $|\vec{r}|$ – расстояние между двумя элементами тока $I_1 d\vec{l}_1$ и $I_2 d\vec{l}_2$.

3) Магнитное поле кругового тока

Вычислим магнитное поле, создаваемое круговым током на его оси. Выберем точку А на оси контура на расстоянии z от центра контура. На круговом контуре с током выделим (на рис. 5.5) элемент тока Idl . Этот элемент будет создавать в точке А поле $d\vec{B}$, направление вектора которого перпендикулярно плоскости образованной элементом контура $d\vec{l}$ и вектором

\vec{r} . Все элементы кругового тока будут создавать в рассматриваемой точке “конус” векторов индукции $d\vec{B}$. Понятно, что в результате осевой симметрии результирующий вектор индукции магнитного поля \vec{B} , создаваемого в точке А круговым током, будет направлен вверх по оси z . Поэтому для нахождения модуля вектора \vec{B} надо сложить проекции векторов $d\vec{B}$ на ось z . Каждая такая проекция равна

$$dB_z = dB \cos\beta = \frac{1}{c} \frac{Idl}{r^2} \cos\beta,$$

где учтено, что угол между элементом $d\vec{l}$ и радиус-вектором \vec{r} равен $\frac{\pi}{2}$. Интегрируя это выражение по dl (это дает множитель $2\pi R$), и, учитывая, что

$$\cos\beta = \frac{R}{r}, \quad r = \sqrt{z^2 + R^2},$$

получаем, что поле на оси витка на расстоянии z от его центра равно:

$$B = \frac{1}{c} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (3.5.13)$$

В частности, в центре витка ($z = 0$) имеем магнитную индукцию, равную:

$$B_{z=0} = \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R} \quad (3.5.14)$$

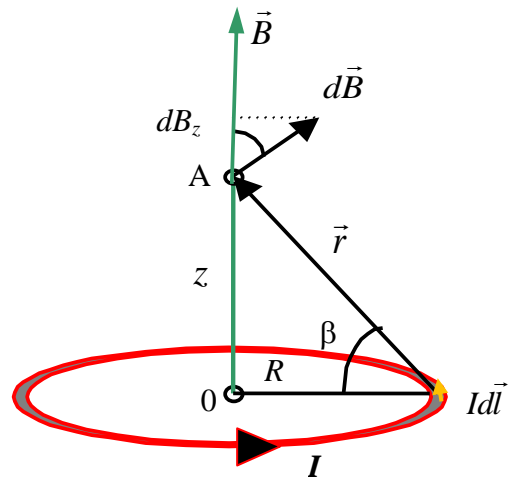


Рис. 5.5.

Примечание 5. В системе СИ имеем $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$ и в центре витка $B_{z=0} = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

3.5.4. О системах единиц.

Закон взаимодействия токов (3.5.11) послужил основой для определения электромагнитных единиц.

1) Напомним вначале, как строится система СГСЭ (CGSE). Основные единицы: см, г, с, а единица заряда CGSE_q, определяется из закона Кулона $F = q_1 q_2 / r^2$. Следовательно, магнитные величины уже не произвольны. Так, сила, действующая на 1 длины провода с током в магнитном поле другого тока, равна

$$f = \frac{dF}{dl} = k \frac{2I_1 I_2}{R}$$

Из этого закона взаимодействия токов получаем, что константа k имеет размерность. Ее размерность легко определить (размерность R и dl совпадают):

$$[k] = \frac{[F]}{[I]^2} = \frac{\text{сила}}{\text{квадрат тока}} = \frac{[q^2/r^2]}{[q/t]^2} = \left[\frac{t}{r} \right]^2 = \frac{\text{квадрат времени}}{\text{квадрат длины}} = \frac{c^2}{\text{см}^2} \quad (3.5.15)$$

То есть размерность k равна обратному квадрату скорости. Опыты показали, что

$$k = \frac{1}{c^2}. \quad (3.5.16)$$

Здесь константа c – *электродинамическая постоянная*, которая равна скорости света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Максвелл показал, что свет – это электромагнитная волна. Далее отсюда строятся все единицы магнитных величин в системе СГСЭ. Напоминаем, что в системе СГСЭ законы Лоренца (Ампера) и Био-Савара записываются в виде:

$$\vec{F} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}], \quad \vec{B} = \frac{q}{cr^3} [\vec{v}, \vec{r}]$$

2) Система СГСМ (СГСМ) строится также как СГСЭ – основные механические единицы те же: см, г, с, но дальше для введения электромагнитных единиц измерения используют *закон взаимодействия токов* в виде

$$f = \frac{2I_1 I_2}{R} \quad (3.5.17)$$

Здесь коэффициент $k = 1$ и уравнение (3.5.17) используется для определения единицы тока: 1 СГСМ_{тока}.

Единица тока 1 СГСМ_т (=1 Био) равна такому току, который, протекая по бесконечному проводу, действует на параллельный такой же ток (единицу длины провода), находящийся на расстоянии в 1 см, с силой в 2 Дн. Итак, в этой системе основной единицей электромагнитных величин является *единица тока*. Тогда в системе СГСМ имеем законы Ампера и Био-Савара без дополнительных коэффициентов:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad \vec{B} = \frac{q}{r^3} [\vec{v}, \vec{r}] \quad (3.5.18)$$

Однако в этих соотношениях надо учитывать, что заряды измерены в системе СГСМ (СГСМ_q).

Уравнения (3.5.18) служат для определения единицы индукции поля в СГСМ – 1 Гс (Гаусс): 1 Гс – один Гаусс есть индукция такого магнитного

поля, которое действует на заряд в 1 CGSM_q с силой в 1 Дн , если заряд движется перпендикулярно магнитному полю со скоростью 1 см/с .

$$B = \frac{qv}{r^2}, \quad 1\Gamma c = \frac{[q] \cdot [v]}{[r]^2} = \frac{1\text{CGSM}_q \cdot 1\text{см/с}}{\text{см}^2} = \frac{1\text{CGSM}_q}{\text{см} \cdot \text{с}}$$

$$F = qvB, \quad 1\text{Дн} = 1\text{CGSM}_q \cdot 1\text{см/с} \cdot 1\Gamma c$$

Исключая отсюда единицу заряда, получим:

$$[B] = [F]^{1/2} [r]^{-1}, \quad 1\Gamma c = \frac{1\text{Дн}^{1/2}}{\text{см}} = 1\text{с}^{1/2} \text{см}^{-1/2} \text{с}^{-1}$$

Аналогично получаем все магнитные единицы в системе CGSM .

3) Система СИ – основные единицы: м , кг , с и *сила тока* измеряется в А (*Амперах*). Основанием определения силы тока является уравнение:

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r} \quad (3.5.19)$$

Ампер – это сила тока, который, проходя по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии в 1 м в вакууме, вызвал бы силу на 1 м каждого проводника, равную $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$.

Откуда получаем для коэффициента μ_0 следующее значение:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ Г/м} \quad (\text{Генри/метр}, 1\Gamma = \frac{1\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}).$$

Единица измерения магнитной индукции – 1 Тс (*Тесла*), которая, как уже упоминалось в §3.4, определяется из уравнения $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$, где все величины записаны в системе СИ .

$$1\text{Тс} = \frac{1\text{Н}}{1\text{Кл} \cdot 1\text{м/с}} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2}$$

Отсюда определяются также все остальные магнитные величины в системе СИ .

4) Запишем связь между единицами заряда и тока в рассмотренных системах единиц. Из сравнения (3.5.11) и (3.5.17) в системах CGSE и CGSM , а также уравнение (3.5.19) в системе СИ с учетом определения Ампера и значения константы μ_0 , получаем связь между единицами тока:

$$1\text{Био} = 1\text{CGSM}_I = c \cdot 1\text{CGSE}_I \approx 3 \cdot 10^{10} \cdot 1\text{CGSE}_I = 10 \text{ А}$$

Единицы заряда связаны соответственно (см также в электростатике параграф 1.2. формулы (1.2.3) и (1.2.4.):

$$1 \text{ CGSM}_q = c \cdot 1 \text{ CGSE}_q \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ CGSE}_q = 10 \text{ Кл}$$

Единицы индукции магнитного поля:

$$1 \text{ Тс} = 10^4 \text{ Гс}$$

Итак, основные выводы.

Система *СИ* и ее единицы наиболее часто используется в технической физике.

Система *CGSE (CGCE)* используется для измерения чисто электрических величин: заряд, напряженность и индукция электрического поля, электрического потенциала, емкости, электропроводности и т.д.

Система *CGSM (CGCM)* используется для измерения чисто магнитных величин: напряженность и индукция магнитного поля, магнитного потока, коэффициентов индукции и самоиндукции, магнитных моментов и т.д.

Гаусс объединил системы единиц *CGSE* и *CGSM*, и эта объединенная система чаще используется в физических исследованиях и работах. *Гауссова система единиц*: все электрические величины (q, I, E, D, \dots) измеряются в единицах *CGSE*, а магнитные величины (B, H, L, M, \dots) – в единицах *CGSM*. В этой системе единиц в формулы, куда входят одновременно магнитные и электрические величины, пишут множитель $1/c$ на каждую величину тока I и заряда q . Этот множитель превращает величины I и q , выраженные в единицах *CGSE*, в значения этих величин, выраженные в системе *CGSM*.

Итак, в системе единиц Гаусса основные соотношения с участием магнитного поля и тока записываются:

$$\vec{B} = \frac{q}{c} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad \vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}], \quad d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}], \quad f = \frac{2I_1 I_2}{c^2 a} \quad (3.5.20)$$

Фактически мы использовали Гауссову систему единиц при написании формул во всех предыдущих параграфах.

3.6. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции.

3.6.1. Поток вектора магнитной индукции.

Как и любое векторное поле, магнитное поле может быть наглядно представлено с помощью линий вектора магнитной индукции \vec{B} . Их проводят, как и для напряженности электрического поля, так, чтобы касательная к этим линиям в каждой точке совпадала с направлением вектора \vec{B} , а густота линий была бы пропорциональна модулю вектора \vec{B} в данном месте. Геометрическая картина позволяет судить о конфигурации рассматриваемого магнитного поля и значительно облегчает анализ конкретных ситуаций.

Для электростатического поля в Главах 1 и 2 мы получили 2 теоремы: о потоке вектора напряженности электрического поля и его циркуляции как следствие закона Кулона. Поступим точно также для вектора индукции магнитного поля. Определяя поток вектора \vec{B} (“*магнитный поток*”) через поверхность ΔS обычным образом

$$\Phi_B = \int_{\Delta S} \vec{B} d\vec{S},$$

найдем магнитный поток через замкнутую поверхность. Поскольку для магнитных полей справедлив принцип суперпозиции, поток геометрической суммы нескольких векторов индукции через любую поверхность равен алгебраической сумме потоков этих векторов. Поэтому достаточно найти поток вектора поля, создаваемого отдельным точечным зарядом, движущимся со скоростью \vec{v} .

Магнитное поле, создаваемое подобным точечным зарядом, определяется законом Био-Савара (3.5.1)

$$\vec{B} = \frac{q}{c} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.6.1)$$

При этом *силовые линии* поля имеют вид *концентрических окружностей*, плоскости которых перпендикулярны вектору скорости заряда. Это есть следствие аксиальной симметрии магнитного поля относительно вектора скорости заряда \vec{v} . Произвольная силовая линия, проходящая через любую выбранную замкнутую поверхность S , пересекает ее дважды, или четное число раз (рис. 6.1). То есть потоки в малых окрестностях этих пересечений будут одинаковы по величине и противоположны по знаку, что следует из скалярного произведения вектора индукции поля и внешней нормали к поверхности

$$\vec{B} d\vec{S} = -B_n dS_1 = B_n dS_2.$$

Таким образом, сумма потоков через такие площадки будет равна 0 так же, как и полная сумма потоков через всю замкнутую поверхность. Иначе говоря, сколько силовых линий индукции поля входит внутрь поверхности, столько и выходит.

Итак, *поток вектора магнитной индукции \vec{B} через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.6.2)$$

Уравнение (3.6.2) – теорема Гаусса для вектора магнитной индукции. Эта теорема является, по существу, обобщением опыта. Она отражает тот

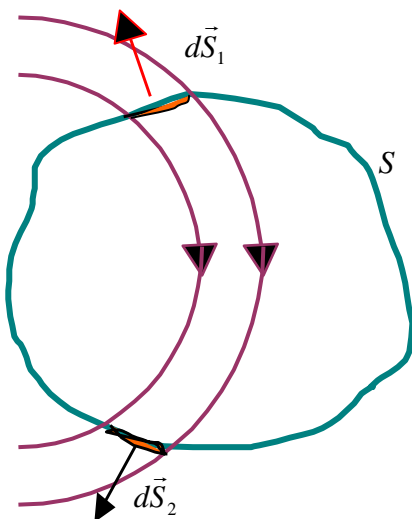


Рис. 6.1.

экспериментальный факт, что линии вектора \vec{B} не имеют ни начала, ни конца. Поэтому число линий, выходящих из объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , всегда равно числу линий, входящих в этот объем. Как следствие, поток вектора \vec{B} через произвольную поверхность S , ограниченную некоторым замкнутым контуром, не зависит от формы поверхности S .

Рассматриваемая теорема выражает и тот факт, что *в природе нет магнитных зарядов*, на которых начинались или заканчивались бы линии вектора \vec{B} . Источником магнитного поля являются не магнитные заряды, а электрические токи. Магнитное поле – *соленоидальное* или *вихревое* поле.

Примечание 1. Отсутствие магнитных зарядов – экспериментальный факт. Однако, современная квантовая теория поля предсказывает существование магнитного заряда – монополя Дирака. По теории эти заряды проявляются при очень больших энергиях, не достижимых в нашем обычном макром мире.

Стягивая объем, заключенный внутри поверхности S к интересующей нас точке поля, или воспользовавшись теоремой Гаусса–Остроградского

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV,$$

можем записать теорему Гаусса для вектора \vec{B} в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.6.3)$$

Полученные выражения имеют *фундаментальный характер*: они справедливы не только для постоянных, но и для переменных магнитных полей.

3.6.2. Циркуляция вектора магнитной индукции.

Рассмотрим циркуляцию вектора магнитной индукции по замкнутому контуру $\oint_L \vec{B} d\vec{l}$.

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции: Циркуляция вектора магнитной индукции \vec{B} поля постоянных токов по произвольному замкнутому контуру в системе единиц Гаусса равна произведению $4\pi/c$ на алгебраическую сумму токов, пронизывающих контур циркуляции.

Доказательство этой теоремы рассмотрим последовательно, применяя метод индукции. Вначале докажем эту теорему для прямого тока I и контура L , лежащего в плоскости, перпендикулярной направлению тока (см рис. 6.2). Согласно закону Био-Савара (см (3.5.10) – полученное ранее поле прямого

тока) в каждой точке контура L вектор \vec{B} поля прямого тока I направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку, а его модуль равен

$$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r}, \quad (3.6.4)$$

где r – расстояние от оси тока до точки определения поля. Проведем для интересующей нас точки окружность радиуса r (см рис. 6.3, на котором

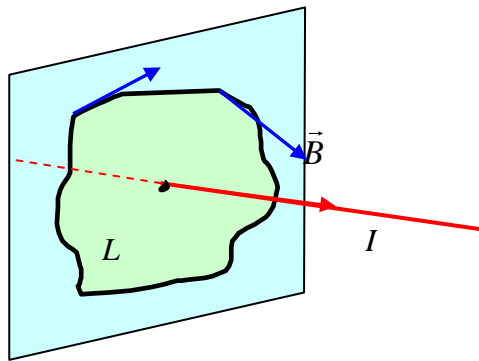


Рис. 6.2.

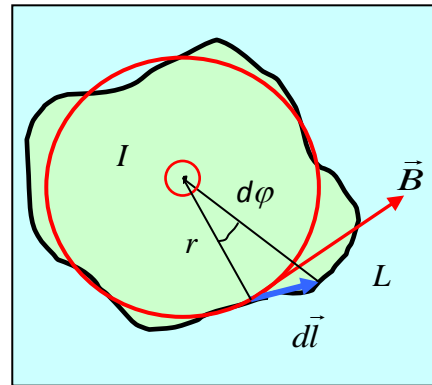


Рис. 6.3.

показан вид на контур со стороны тока – ток течет на нас). Тогда для скалярного произведения векторов индукции и элемента контура имеем:

$$\vec{B}d\vec{l} = Bdl_B = \frac{2I}{cr} dl_B = \frac{2I}{c} d\varphi,$$

где $dl_B = rd\varphi$ – проекция вектора $d\vec{l}$ на направление вектора \vec{B} (рис. 6.3). Суммируя по всему контуру, получаем:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{2I}{c} \oint_L d\varphi = \frac{2I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{c} I \quad (3.6.5)$$

Если контур L не охватывает ток I , то, как видно из рис. 6.4, проекции

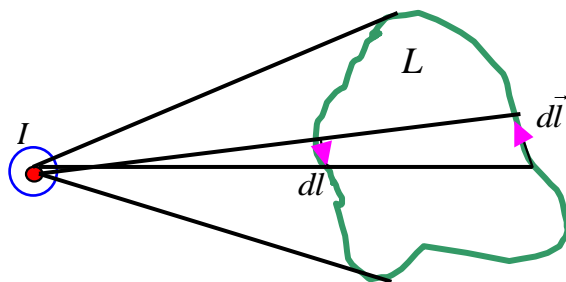


Рис. 6.4.

вектора $d\vec{l}$ на направление вектора \vec{B} индукции поля прямого тока I на противоположных сторонах контура будут иметь обратные знаки (на рис. 6.4 направление тока перпендикулярно плоскости листа). В этом случае получаем $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 0$.

Отметим, что в примере выше рассматривался частный случай: прямой ток и плоский контур. Однако полученный результат легко обобщить на произвольно ориентированный относительно направления тока контур L . Так, на рис. 6.5 линии индукции магнитного поля (красная линия) лежат в плоскости, а выбранный контур с выделенным элементом $d\vec{l}$ (фиолетовый отрезок линии) пересекает ее. При этом скалярное произведение равно

$$\vec{B}d\vec{l} = B \cdot dl_B = Brd\varphi.$$

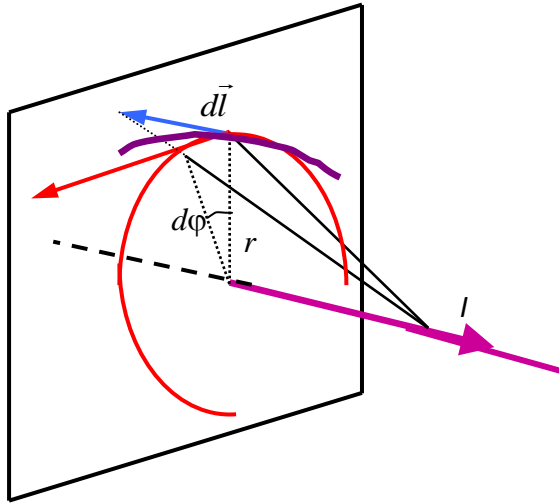


Рис. 6.5.

Здесь под элементом угла $d\varphi$ следует понимать проекцию угла, под которым виден элемент контура $d\vec{l}$, на плоскость, перпендикулярную направлению тока. Поэтому при интегрировании по всему контуру мы вновь получаем выражение (3.6.5).

Чтобы обобщить полученный результат на случай произвольного числа прямолинейных токов достаточно воспользоваться принципом суперпозиции для вектора магнитной индукции \vec{B} .

Справедливость теоремы для криволинейных токов следует из дифференциального характера закона, который будет рассмотрен в следующем пункте этого параграфа.

Итак, получаем теорему о циркуляции вектора магнитной индукции \vec{B}

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_i I_i \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I \quad (3.6.6)$$

Здесь I – полный ток, охватываемый контуром и равный алгебраической сумме всех токов, проходящих через контур.

При применении формулы (3.6.6) необходимо учитывать следующее.

- 1). Токи, проходящие через контур, суммируются алгебраически.
- 2). Положительное направление обхода образует правовинтовую систему с направлением тока.
- 3). Изменение направления обхода контура изменяет знак в правой части уравнения.
- 4). Токи, не охватываемые контуром, не дают вклада в сумму, стоящую в правой части уравнения.

Если токи распределены непрерывно внутри контура, то полный ток, проходящий через контур, равен:

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S}, \quad (3.6.7)$$

где S – площадь поверхности, опирающаяся на контур L , \vec{j} – объемная плотность тока. В этом случае теорема о циркуляции принимает вид:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} \quad (3.6.8)$$

Иногда теорему *о циркуляции вектора \vec{B} называют законом полного тока*. Тот факт, что циркуляция вектора \vec{B} , вообще говоря, не равна нулю, означает, что магнитное поле не потенциально (в отличие от электростатического поля). Как уже упоминалось в первом пункте этого параграфа, такое поле называют *вихревым* или *соленоидальным*.

3.6.3. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции.

Полный ток через поверхность, охватываемую контуром L , определяется интегралом (3.6.7) и формула (3.6.8) определяет интегральную форму теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля. К дифференциальной форме теоремы о циркуляции можно также перейти, воспользовавшись теоремой Стокса (см пункт 1.5.3 §1.5), а именно: *циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, опирающуюся на этот контур*:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} \quad (3.6.9)$$

От интеграла, выражающего циркуляцию вектора \vec{B} по замкнутому контуру, переходим к интегралу по поверхности, определяющему поток $\text{rot} \vec{B}$. Тогда имеем:

$$\int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

и в силу произвольности выбора контура L и, следовательно, поверхности S получаем равенство подинтегральных выражений

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.6.10)$$

Теорема о циркуляции, представленная в виде (3.6.10), имеет дифференциальный характер и справедлива в каждой точке. Отсюда следует, что она справедлива для произвольного магнитного поля, хотя в предыдущем пункте доказательство ограничивалось рассмотрением поля, порождаемого током, текущим по прямолинейному бесконечному проводнику. Исходя же из (3.6.10) можно доказать теорему о циркуляции в интегральном виде для произвольных токов (а не только прямолинейных), рассуждая в обратном порядке: берем любую поверхность, интегрируем, используем теорему Стокса и получаем (3.6.8).

Теорема о циркуляции вектора \vec{B} , выраженная в дифференциальной форме (3.6.10), ясно показывает, что магнитное поле является *вихревым* в тех областях, где текут токи, и *безвихревым*, где токов нет. В последнем случае, в

тех областях, где нет токов $\vec{j} = 0$, вектор \vec{B} может быть представлен (по аналогии с электростатикой) в виде градиента *магнитного потенциала*, что облегчает в некоторых случаях решение задач. Однако такое представление невозможно в тех областях, где текут токи $\vec{j} \neq 0$. Там понятие магнитного потенциала лишено смысла. Действительно, известно дифференциальное тождество $\text{rot grad } \varphi_m \equiv 0$, какова бы ни была функция φ_m . Тогда, если $\vec{B} = -\text{grad } \varphi_m$, то имеем $\text{rot } \vec{B} = 0$ и $\vec{j} = 0$, что лишено смысла.

Примечание 2. В системе СИ теорема о циркуляции имеет вид:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

3.6.4. Примеры вычисления магнитных полей

Теорема о циркуляции вектора индукции \vec{B} справедлива для любого замкнутого контура, она есть отражение фундаментального закона об отсутствии магнитных зарядов и, как следствие, вихревого характера магнитного поля. Силовые линии индукции магнитного поля являются замкнутыми кривыми, не имеющими начала и конца. Для расчета индукции магнитного поля в конкретных случаях теорему о циркуляции (3.6.8) удобно использовать, когда рассматриваются симметричные конфигурации электрического тока и возбуждаемого им магнитного поля. Тогда выбором соответствующего контура интегрирования искомую индукцию \vec{B} можно вынести за знак интеграла.

Приведем ряд примеров применения теоремы о циркуляции.

1). Рассмотрим *длинный пустотелый проводящий цилиндр* радиусом R , по поверхности которого течет ток I (рис.6.6). Найдем поле внутри и снаружи цилиндра с помощью теоремы о циркуляции (3.6.8), выбирая контур интегрирования в виде концентрической окружности, на которой индукция магнитного поля постоянна по модулю в силу симметрии.

А. Поле внутри цилиндра: рассматриваем контур интегрирования в виде окружности радиуса $r < R$, и поскольку внутри токов нет, то по теореме о циркуляции получаем, что магнитное поле внутри такого цилиндра равно 0:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = 0, \text{ и отсюда } \vec{B} = 0.$$

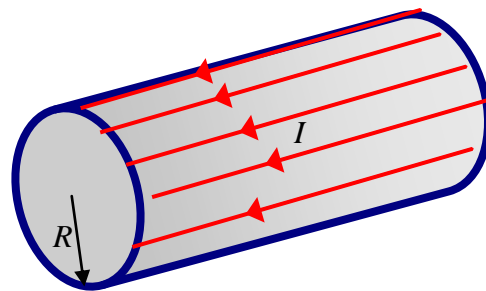


Рис. 6.6.

Б. Поле снаружи цилиндра: рассматриваем контур интегрирования в виде окружности радиуса $r > R$ и тогда в результате интегрирования по такому контуру получаем индукцию магнитного поля вне цилиндра

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I; \text{ и далее } B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I;$$

$$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r}. \quad (3.6.11)$$

Естественно, что полученное выражение совпадает с формулой (3.5.10) для индукции магнитного поля, созданной бесконечным прямолинейным током I .

2). Рассмотрим **прямолинейный бесконечный провод** радиусом R с постоянной по сечению плотностью токов \vec{j} . На рис. 6.7 показан перпендикулярный срез провода, причем ток течет в направлении за плоскость рисунка. Рассмотрим магнитное поле внутри и снаружи проводника.

А. Поле внутри провода: магнитные силовые линии внутри провода – коаксиальные окружности. Циркуляция вектора \vec{B} по круговому контуру L_1 радиусом r ($< R$) вдоль силовой линии равна:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I;$$

где I – ток, охватываемый окружностью радиуса r . Тогда имеем

$$B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \pi r^2 j.$$

Откуда поле внутри провода определяется током, проходящим через плоскость контура L_1 , и его величина пропорциональна расстоянию r от оси провода:

$$B = \frac{1}{c} 2\pi jr. \quad (3.6.12)$$

Б. Поле снаружи провода легко найти через циркуляцию вектора магнитной индукции по контуру L_2 ($r > R$) и его индукция определяется формулой (3.6.11), где берется полный ток, текущий через все сечение провода:

$$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r}$$

Итак, магнитная индукция вне провода с током падает с расстоянием до провода по закону $1/r$.

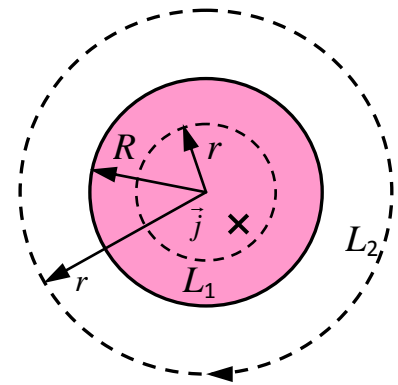


Рис. 6.7.

3). Рассмотрим магнитное поле внутри длинного соленоида, по которому течет ток I . Выберем контур l , проходящий внутри соленоида и снаружи, как показано на рис. 6.8. Легко увидеть из симметрии, что поле внутри соленоида направлено вдоль его оси, поэтому по перпендикулярным к оси участкам контура вклад в циркуляцию равен нулю:

$$\int_{\perp} \vec{B} d\vec{l} = 0$$

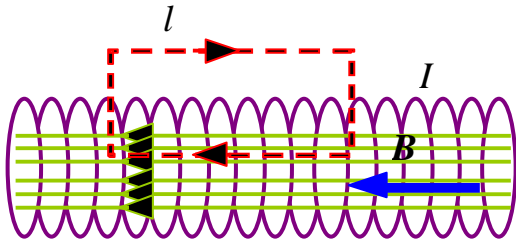


Рис. 6.8.

Вклад в циркуляцию участка вне длинного соленоида также равен нулю: в этом можно убедиться, если наружный горизонтальный участок контура увести на бесконечность, где поле всегда равно нулю. Однако можно увидеть, что поле снаружи равно нулю просто из суперпозиции полей, создаваемых соседними витками, если они расположены достаточно близко друг к другу.

Итак остается отличным от нуля только горизонтальный участок контура внутри соленоида, поэтому циркуляция индукции магнитного поля по выбранному контуру равна:

$$B \cdot l = \frac{4\pi}{c} n \cdot I \cdot l$$

где n – плотность числа витков (количество на единицу длины), I – ток, текущий по проводам соленоида. Окончательно получаем поле внутри соленоида:

$$B = \frac{4\pi}{c} nI \quad (3.6.13)$$

Магнитное поле внутри длинного соленоида постоянно, т.е. не зависит от расстояния до оси соленоида, таким образом внутри соленоида получаем однородное магнитное поле.

3.7. Векторный потенциал магнитоэстатического поля. Магнитный момент.

3.7.1. Векторный потенциал. Неоднозначность, калибровка и градиентная инвариантность.

Для описания магнитного поля мы получили в предыдущем параграфе уравнения (3.6.3) и (3.6.10). Сравним эти уравнения с уравнениями электростатического поля, найдем отличия и аналогии.

Ранее для электростатического поля мы записали уравнения поля в следующем дифференциальном виде

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (\text{следствие закона Кулона } E \sim 1/r^2) \quad \text{и}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \text{ (потенциальность поля).}$$

Оба вектора \vec{E} и \vec{B} – силовые характеристики электрического и магнитного полей. В Главе 1 (параграфы 1.6 и 1.7) мы вводили понятие потенциала как энергетическую характеристику электростатического поля. Возникает вопрос, можно ли наряду с потенциалом электростатического поля ввести аналогичную величину для поля магнитного, которая являлась бы его энергетической характеристикой, и найти соответствующее уравнение, решением которого она бы являлась.

Напомним основные результаты, полученные ранее в §§1.6-1.7. Для электрического поля вводили скалярную потенциальную функцию $\varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r})$ (см также соотношение (1.6.7)), определяющую распределение потенциала в пространстве.

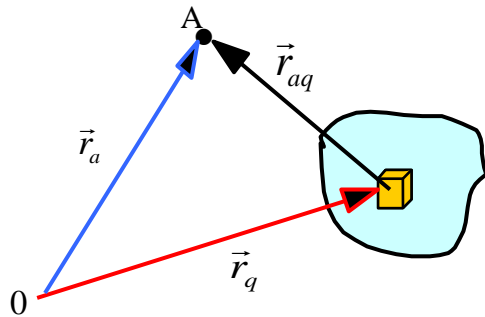


Рис. 7.1.

Пусть (x_a, y_a, z_a) – координаты точки наблюдения А (вектор \vec{r}_a на рис. 7.1), в которой определяем потенциал. Координаты точек пространства (x_q, y_q, z_q) , где распределены заряды с плотностью ρ , определяются вектором \vec{r}_q . Тогда потенциал электрического поля в точке А записывается:

$$\varphi(x_a, y_a, z_a) = \int \frac{\rho(x_q, y_q, z_q)}{r_{aq}} dV_q \quad (3.7.1)$$

где разность координат $\vec{r}_{aq} = \vec{r}_a - \vec{r}_q$, dV_q – элемент объема заряженного тела, а интеграл берется по всему объему этого тела.

Вообще для любой скалярной функции всегда можно взять ее градиент, и при этом ротор ее градиента тождественно равен нулю (условие потенциальности силового поля):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) \equiv [\nabla, \nabla\varphi] \equiv 0 \quad (3.7.2)$$

Потенциал электростатического поля (3.7.1) – скалярная функция, при этом вектор напряженности \vec{E} определяется как градиент потенциала $\vec{E} = -\nabla\varphi(x_a, y_a, z_a) = -\nabla_a\varphi$, поэтому уравнение $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$ выполняется автоматически. Напомним также, что дифференциальное уравнение для потенциала – уравнение Пуассона имеет вид:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

Решением этого уравнения и является потенциал (3.7.1).

Магнитное поле \vec{B} носит существенно другой характер, чем электрическое \vec{E} . В общем случае $\operatorname{rot}\vec{B} \neq 0$ и вектор индукции \vec{B} не может

быть градиентом скалярной функции. Уравнения магнитостатического поля (3.6.3) и (3.6.10) напомним, имеют вид:

$$\nabla \vec{B} = 0, \quad [\nabla, \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.7.3)$$

где \vec{j} – объемная плотность тока.

Однако, в векторной алгебре известно другое тождество – дивергенция от ротора вектора тождественно равна нулю:

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) \equiv (\nabla, [\nabla, \vec{A}]) \equiv 0 \quad (3.7.4)$$

Физический смысл этого векторного тождества состоит в том, что у соленоидального (вихревого) поля нет его источников – зарядов. Силовые линии такого поля представляют замкнутые кривые. Исходя из (3.7.4), индукцию магнитного поля можно представить как ротор некоторой векторной функции \vec{A} :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (3.7.5)$$

где \vec{A} носит название *векторного потенциала*. При этом первое уравнение из (3.7.3) выполняется автоматически. Зачем вводить векторный потенциал, и каков его физический смысл, поясним несколько позже. Пока ограничимся только тем, что если векторный потенциал нам известен, то магнитное поле находится из соотношения (3.7.5).

Выбор векторного потенциала *неоднозначен*. Поле с заданной индукцией \vec{B} может быть описано многими векторными потенциалами. Пусть векторный потенциал \vec{A} описывает магнитное поле \vec{B} , тогда другой векторный потенциал

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \chi \quad (3.7.6)$$

при произвольной функции χ описывает то же самое поле \vec{B} . В самом деле, в силу (3.7.2) имеем:

$$\vec{B}' = \text{rot} \vec{A}' = \text{rot} \vec{A} + \text{rot}(\text{grad} \chi) = \text{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad (3.7.7)$$

Преобразование векторного потенциала (3.7.6) называют *градиентным*, а эквивалентность векторов \vec{A} и \vec{A}' в смысле описания одного и того же магнитного поля – *градиентной инвариантностью*. Неоднозначность векторного потенциала аналогична неоднозначности скалярного потенциала в теории электростатического поля. Только потенциал ϕ определяется с точностью до произвольной постоянной, а векторный потенциал \vec{A} – с точностью до произвольной функции определенного класса.

Благодаря градиентному преобразованию на векторный потенциал можно накладывать дополнительные условия, которые могут быть удовлетворены подбором скалярной функции χ .

3.7.2. Пример однородного магнитного поля.

Рассмотрим случай однородного магнитного поля и определим его векторный потенциал. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси z : $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Тогда имеем следующие уравнения для компонент векторного потенциала, исходя из (3.7.5):

$$\begin{cases} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B \end{cases} \quad (3.7.8)$$

В частности, имеем три решения системы (3.7.8) (как следствие неоднозначности определения векторного потенциала):

$$(1) A_y = Bx, \quad A_x = A_z = 0 \quad (3.7.9a)$$

$$(2) A_x = -By, \quad A_y = A_z = 0 \quad (3.7.9б)$$

$$(3) A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0, \quad \text{т.е. } \vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B}, \vec{r}] \quad (3.7.9в)$$

Нетрудно убедиться, что подействовав оператором ротора на эти решения с учетом условия $\vec{B} = const$, получаем выполнение уравнения (3.7.5). Например, проверим третье уравнение (3.7.9в):

$$\text{rot}\vec{A} \equiv -\left[\nabla, \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{B}]\right] = -\frac{1}{2}(\vec{B}, \nabla)\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{B}(\nabla, \vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{B} + \frac{3}{2}\vec{B} = \vec{B}.$$

Примечание 1. Напомним, что, *выполняя операции с векторами, необходимо позаботиться, чтобы операторный множитель всегда находился впереди тех сомножителей, на которые он действует в исходном выражении.* Это также относится к формуле “БАЦ-ЦАБ” для двойного векторного произведения.

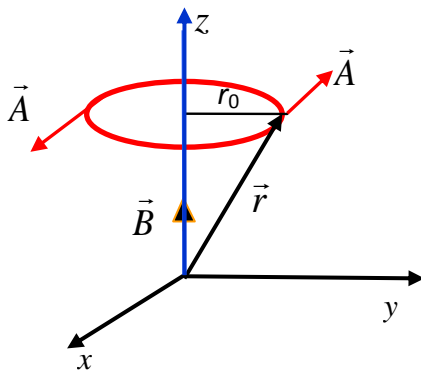


Рис. 7.2.

Поскольку вектор \vec{A} в виде (3.7.9в) перпендикулярен к плоскости, в которой лежат вектора \vec{B} и \vec{r} , и зависит только от модуля r , то отсюда получаем, что силовые линии вектора \vec{A} представляют собой окружности вокруг направления индукции однородного магнитного поля (см рис. 7.2). Иначе говоря, вектор \vec{A} “вращается” вокруг оси z , причем его величина определяется $A = \frac{1}{2}Br_0$, где r_0 – радиус

окружности относительно оси z (рис. 7.2). Вычислим, чему равен интеграл $\oint \vec{A} d\vec{l}$ по окружности:

$$A \cdot 2\pi r_0 = \frac{1}{2} B r_0 2\pi r_0 = B \cdot \pi r_0^2.$$

Таким образом, получили, что интеграл по замкнутому контуру (окружности) равен потоку вектора \vec{B} через круг радиуса r_0 и это не случайно, т.к. в общем случае это же следует из теоремы Стокса:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (3.7.10)$$

В чем состоит удобство и смысл введения векторного потенциала? Проявляется ли он на опыте? К этим вопросам мы вернемся ниже, проясним его физический смысл, и затем снова рассмотрим векторный потенциал при описании электромагнитных волновых процессов.

3.7.3. Уравнение для векторного потенциала. Векторный потенциал токов.

Какому уравнению удовлетворяет векторный потенциал? Подставим (3.7.5) во второе уравнение (3.7.3), представляющее дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции. При этом воспользуемся правилом “БАЦ-ЦАБ” и свойствами операторного множителя (оператор стоит слева от величины, на которую он действует):

$$[\nabla, \vec{B}] = [\nabla, [\nabla, \vec{A}]] = \nabla(\nabla, \vec{A}) - (\nabla, \nabla)\vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Воспользуемся неоднозначностью потенциала, наложив на потенциал определенное дополнительное условие – *калибровку*. В магнитостатике обычно выбирают следующую калибровку (отсутствие источников векторного потенциала):

$$\text{div} \vec{A} \equiv (\nabla, \vec{A}) = 0 \quad (3.7.11)$$

Тогда уравнение для векторного потенциала магнитостатического поля имеет следующий вид:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.7.12)$$

Поскольку это векторное уравнение, то на самом деле мы имеем три уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\frac{4\pi}{c} j_x \\ \Delta A_y &= -\frac{4\pi}{c} j_y \\ \Delta A_z &= -\frac{4\pi}{c} j_z \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

где A_i, j_i - компоненты векторного потенциала и плотности токов. Каждое из этих трех уравнений аналогично уравнению Пуассона в электростатике (см уравнение (1.6.13)), решения которого мы уже знаем. Так например, решение для x -ой компоненты векторного потенциала можно записать в виде:

$$A_x(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \frac{j_x(\vec{r}_q) dV_q}{r_{aq}}, \quad (3.7.14)$$

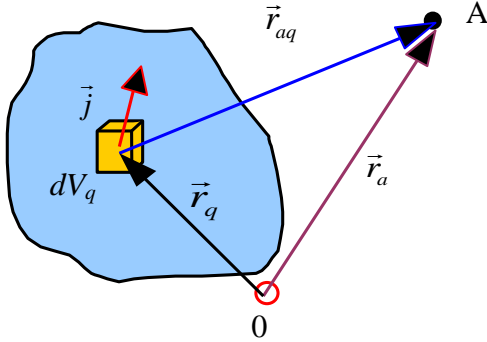


Рис. 7.3.

где $\vec{r}_a(x_a, y_a, z_a)$ координаты точки наблюдения, а $\vec{r}_q(x_q, y_q, z_q)$ - координаты точек, где распределены токи \vec{j} , $r_{aq} = |\vec{r}_a - \vec{r}_q|$ (см рис. 7.3). Отметим, что дифференцирование в (3.7.12) и (3.7.13) происходит по координате \vec{r}_a . В векторном виде решение системы (3.7.13) можно записать в виде уравнения, имеющего название: **векторный потенциал объемных токов**:

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_q) dV_q}{r_{aq}} \quad (3.7.15)$$

Векторный потенциал линейных токов равен соответственно:

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \frac{I(\vec{r}_q) d\vec{l}_q}{r_{aq}} \quad (3.7.16)$$

Примечание 2. В системе СИ этот потенциал записывается $\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{I(\vec{r}_q) d\vec{l}_q}{|\vec{r}_a - \vec{r}_q|}$

В заключение этого пункта сделаем некоторые простейшие преобразования, показывающие правильность полученных соотношений. Проверим, что векторный потенциал токов (3.7.15) подчиняется условию калибровки (3.7.11). Подействуем оператором дивергенции на (3.7.15) и внесем оператор под интеграл:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \vec{\nabla} \left(\vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} \right) dV_q \quad (3.7.17)$$

Здесь оператор “градиента” осуществляет дифференцирование по точкам наблюдения \vec{r}_a :

$$\nabla_a \equiv \text{grad}_a = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x_a} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y_a} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z_a}$$

От дифференцирования по координатам \vec{r}_a – точки наблюдения A – перейдем к дифференцированию по координатам элементов тока \vec{r}_q под интегралом следующим образом:

$$\left\{ \vec{\nabla}_a \cdot \left(\vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} \right) = \vec{j}(\vec{r}_q) \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) = -\vec{j}(\vec{r}_q) \vec{\nabla}_q \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) = -\vec{\nabla}_q \left(\vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} \right) + \frac{1}{r_{aq}} \left(\vec{\nabla}_q \vec{j}(\vec{r}_q) \right) \right\} \quad (3.7.18)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) = -\vec{\nabla}_q \left(\frac{1}{r_{aq}} \right)$$

Для стационарных токов имеем из теоремы неразрывности

$$\vec{\nabla}_q \vec{j}(\vec{r}_q) = \text{div} \vec{j} = 0,$$

Тогда продолжая (3.7.17) по теореме Гаусса-Остроградского, получаем равенство дивергенции векторного потенциала нулю:

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) = -\frac{1}{c} \int_v \vec{\nabla}_q \left(\vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} \right) dV_q = -\frac{1}{c} \oint \vec{j}(\vec{r}_q) \frac{1}{r_{aq}} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \oint \frac{j_n dS}{r_{aq}} = 0, \quad (3.7.19)$$

т.к. на поверхности проводников нормальная составляющая вектора плотности тока $j_n = 0$. Таким образом, выполняется калибровка потенциала токов (3.7.15) и (3.7.16).

А что получим для индукции магнитного поля \vec{B} ? Подействуем оператором ротора на векторный потенциал (3.7.15):

$$\vec{B} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \frac{1}{c} \int \left[\vec{\nabla}_a, \frac{\vec{j}(\vec{r}_q)}{r_{aq}} \right] dV_q = -\frac{1}{c} \int \left[\vec{j}(\vec{r}_q), \vec{\nabla}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) \right] dV_q = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}_q), \vec{r}_{aq}]}{r_{aq}^3} dV_q \quad (3.7.20)$$

Получили закон Био-Савара в интегральной форме (см формулу (3.5.6)), что и следовало ожидать.

3.7.4. О физическом смысле векторного потенциала.

Обычно в классической физике векторный потенциал \vec{A} рассматривается как вспомогательная величина, не имеющая физического смысла, т.е. не наблюдаемая и не измеряемая величина. Такая интерпретация восходит к работам О.Хевисайда и Г.Герца, рассматривавших электромагнитное поле довольно формально и интересовавшихся больше методами расчетов, чем физическими свойствами векторного потенциала. Однако Максвелл вводил векторный потенциал как величину,

пропорциональную импульсу (количеству движения) сгустка электромагнитного поля, сопровождающего движущийся электрический заряд.

В середине этого века Я.Ааронов и Д.Бом предсказали интересный эффект, позже обнаруженный экспериментально. В области, где отсутствует магнитное поле $\vec{B} = 0$, но существует отличный от нуля векторный потенциал, изменение векторного потенциала меняет движение электронов, т.к. меняется импульс сгустка электромагнитного поля, сопровождающего электрон.

Такая ситуация складывается для длинного соленоида с током, у которого магнитное поле сосредоточено внутри цилиндра, а во внешней области магнитное поле равно нулю.

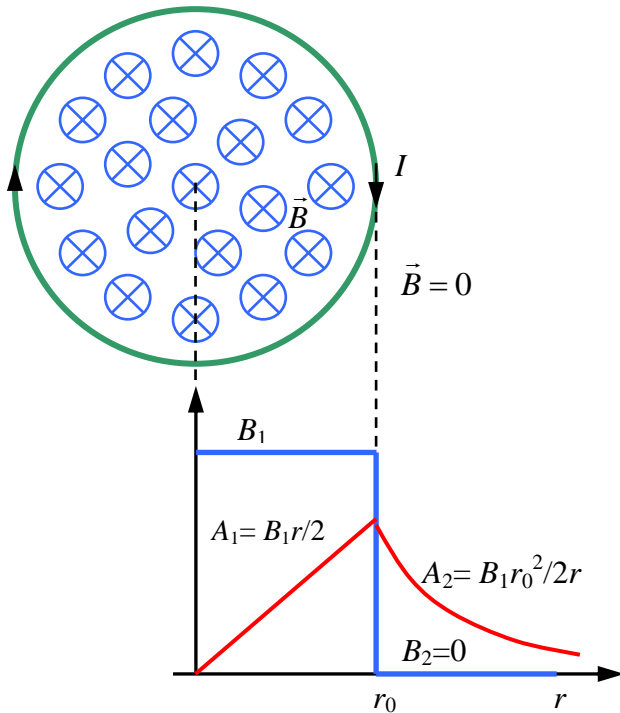


Рис. 7.4.

На рис. 7.4 показан соленоид в разрезе, причем магнитное поле внутри соленоида направлено за плоскость рисунка. Индукция магнитного поля, определяемая соотношением $B = \partial A / \partial r$, терпит на границе соленоида (на радиусе r_0) конечный скачок (синяя кривая на рис. 7.4), а зависимость векторного потенциала от расстояния до центра $A(r)$ всего лишь меняет наклон (красная кривая на рис. 7.4). Таким образом, векторный потенциал отличен от нуля и вне соленоида, т.е. там, где индукция магнитного поля обращается в нуль. Отметим, приведенная на рисунке зависимость $B(r)$ (синяя кривая), где r_0 – радиус соленоида, является довольно грубой,

т.к. не учитывает некоторых деталей на границе соленоида, но дает правильное качественное представление.

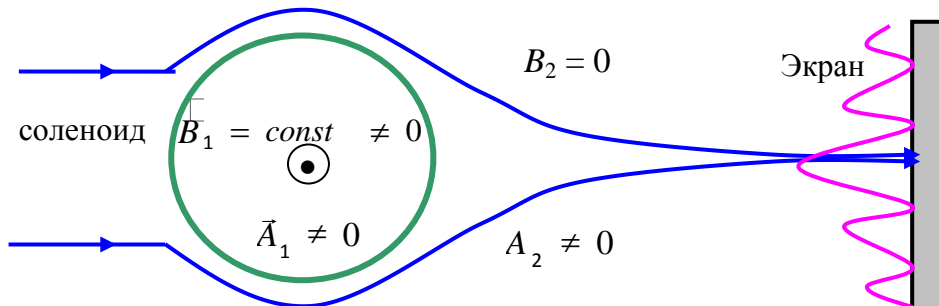


Рис. 7.5.

И. Ааронов и Д. Бом рассматривали рассеяние электронов на соленоиде, причем электроны, направленные перпендикулярно оси соленоида, могли огибать соленоид сверху или снизу (см рис. 7.5). Электронам присущи волновые свойства, и в отсутствие тока в катушке электронные волны, огибая соленоид (в этой части курса не будем вдаваться в детали), создают на экране некоторую интерференционную картину.

При появлении в соленоиде тока оказывается, что интерференционная картина сдвигается, хотя электроны по-прежнему движутся во внешней области, где индукция магнитного поля \vec{B} равна нулю. Это означает, что *изменение векторного потенциала* в пространстве, окружающем соленоид, *меняет фазы электронных волн*, что в свою очередь приводит к изменению наблюдаемой на экране интерференционной картины. Следовательно, по изменению интерференционной картины можно определить изменение векторного потенциала. Таким образом, *изменение векторного потенциала магнитного поля оказывается наблюдаемой, измеряемой физической величиной*.

Необходимо отметить, что объяснение эффекта Ааронова – Бома возможно только при учете квантовых законов движения электронов в магнитном поле.

Кроме того, хотя в классической физике нет прямого способа измерения векторного потенциала \vec{A} , введение его очень удобно для теории поля. Так, с введением векторного потенциала упрощается выражение для энергии взаимодействия системы зарядов и токов с электромагнитным полем, векторный потенциал определяет электрокинетический импульс заряженной частицы в электромагнитном поле, с его помощью упрощается запись системы уравнений Максвелла. Помимо всего прочего векторный потенциал \vec{A} вместе со скалярным потенциалом электростатического поля ϕ образуют 4-х вектор, компоненты которого при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую преобразуются согласно преобразованиям Лоренца.

Однако отметим, что все сказанное выше было получено для статических полей, когда нет зависимости от времени. В дальнейшем мы рассмотрим зависящий от времени векторный потенциал и соответствующие электромагнитные поля.

*Примечание 3. Оливер Хевисайд, английский физик, 1850-1925;
 Генрих Рудольф Герц, немецкий физик, 1857-1894.
 Дэвид Джозеф Бом, американский физик, 1917-1992;
 Якир Ааронов, израильский физик, 1932)*

3.7.5. Векторный потенциал и магнитное поле витка с током.

В этом пункте для примера используем векторный потенциал для вычисления магнитного поля витка или контура с током. Перепишем векторный потенциал линейных токов (3.7.16) в виде:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \oint \frac{I d\vec{l}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} \quad (3.7.21)$$

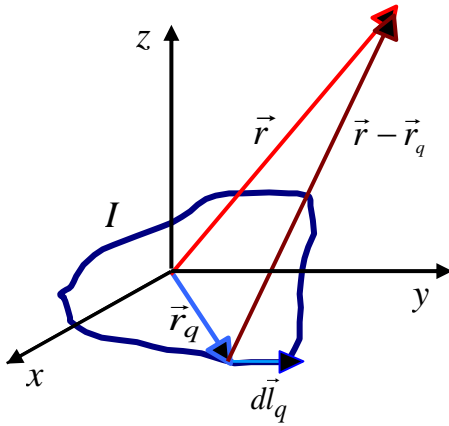


Рис. 7.6.

где $d\vec{l}_q$ – элемент контура с током I (см рис. 7.6), \vec{r} и \vec{r}_q – радиус-векторы до точки наблюдения и до элемента контура, соответственно.

Пусть $r_q \ll r$, т.е. рассмотрим малый контур на больших расстояниях, тогда можно использовать следующее разложение:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2(\vec{r}, \vec{r}_q)}} \approx \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}, \vec{r}_q)}{r^3} \quad (3.7.22)$$

Ограничимся первыми двумя членами разложения и, подставляя их в (3.7.21), имеем:

$$\vec{A} = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{l}_q}{r} + \frac{I}{c} \oint \frac{(\vec{r}_q, \vec{r})}{r^3} d\vec{l}_q \quad (3.7.23)$$

Первое слагаемое в (3.7.23) равно нулю:

$$\frac{I}{cr} \oint d\vec{l}_q = 0,$$

в силу векторного обхода замкнутого контура.

Разберемся со вторым слагаемым в (3.7.23):

$$\frac{I}{cr^3} \oint (\vec{r}_q, \vec{r}) d\vec{l}_q. \quad (3.7.24)$$

Для вычисления интеграла по контуру (3.7.24) воспользуемся определением вектора площадки

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint [\vec{r}_q, d\vec{l}_q] \quad (3.7.25)$$

(см рис. 7.7), а также известным векторным тождеством для произвольного постоянного вектора \vec{b} :

$$\oint d\vec{l}_q (\vec{r}_q, \vec{b}) = - \left[\vec{b}, \frac{1}{2} \oint [\vec{r}_q, d\vec{l}_q] \right] = \left[\oint d\vec{S}, \vec{b} \right] = [\vec{S}, \vec{b}], \quad (3.7.26)$$

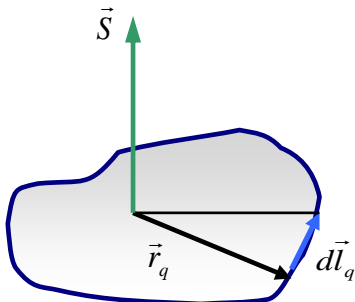


Рис. 7.7.

где интегрирование проводится по замкнутому контуру с площадью S (рис. 7.7). Доказательство (3.7.26) приведено в Приложениях 1 и 2.

Видно, что в качестве произвольного вектора \vec{b} можно рассмотреть вектор, входящий в (3.7.24):

$$\vec{b} = \frac{I\vec{r}}{cr^3}$$

Тогда интеграл (3.7.24), следуя (3.7.26), можно записать в виде:

$$\vec{A} = \frac{I}{cr^3} \oint (\vec{r}_q, \vec{r}) d\vec{l}_q = \frac{I}{cr^3} [\vec{S}, \vec{r}] \quad (3.7.27)$$

Итак, в общем случае векторный потенциал малого витка с током равен:

$$\vec{A} = \frac{I}{cr^3} [\vec{S}, \vec{r}] = \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.7.28)$$

Здесь мы ввели *магнитный момент* \vec{M} витка с током:

$$\vec{M} = \frac{I}{c} \vec{S} \quad (3.7.29)$$

Магнитный момент определяет векторный потенциал магнитного поля и играет в магнетизме ту же роль, что и электрический дипольный момент диполя в электростатике (сравни с формулами (1.7.1) и (1.7.4)).

Теперь используя полученное выражение для векторного потенциала витка с током и определение $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, считаем *магнитное поле витка с током*, пользуясь правилом БАЦ-ЦАБ:

$$\vec{B} = [\nabla, \vec{A}] = \left[\nabla, \left[\frac{\vec{M}, \vec{r}}{r^3} \right] \right] = \vec{M} \left(\nabla, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{M}, \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3.7.30)$$

Первое слагаемое равно нулю, т.к. $\left(\nabla, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \equiv \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$ и, далее, для второго слагаемого имеем:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{1}{r^3} (\vec{M}, \nabla) \vec{r} - \vec{r} \left(\vec{M}, \nabla \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{\vec{M}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{M}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} \\ \vec{B} &= \frac{3(\vec{M}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{M}}{r^3} \end{aligned} \quad (3.7.31)$$

Итак, выражение для магнитного поля, созданного витком с током, в точности совпадает с выражением для электрического поля электрического диполя при замене дипольного момента диполя на магнитный момент витка с током.

Примечание 4. В системе СИ имеем $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3}$, $\vec{M} = I\vec{S}$

Приложение 1. Докажем следующую формулу:

$$\oint_L (\vec{\rho}, \vec{b}) d\vec{l} = \left[\int_S d\vec{S}, \vec{b} \right] = [\vec{S}, \vec{b}],$$

где \vec{b} – некоторый вектор в пространстве, $\vec{\rho} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ – вектор, определяющий координаты элемента $d\vec{l}$ контура L , а интегрирование ведется по контуру и поверхности опирающейся на контур. Умножим равенство скалярно на произвольный, но постоянный вектор \vec{a} , который можно ввести под знак интеграла:

$$\left(\vec{a}, \oint_L (\vec{\rho}, \vec{b}) d\vec{l} \right) = \oint_L (\vec{\rho}, \vec{b}) \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot}([\vec{\rho}, \vec{b}] \vec{a}) d\vec{S} = \int_S \left\{ (\vec{\rho}, \vec{b}) \text{rot} \vec{a} + [\nabla(\vec{\rho}, \vec{b}), \vec{a}] \right\} d\vec{S} =$$

Здесь мы воспользовались теоремой для циркуляции вектора $(\vec{\rho}, \vec{b}) \vec{a}$, по которой циркуляция вектора $(\vec{\rho}, \vec{b}) \vec{a}$ по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, опирающуюся на этот контур, и следующим векторным соотношением

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} + [\nabla \varphi, \vec{a}]$$

Далее, поскольку вектор $\vec{a} = \text{const}$, то $\text{rot} \vec{a} = 0$ и получаем, продолжая равенство:

$$= \int_S [\nabla(\vec{\rho}, \vec{b}), \vec{a}] d\vec{S} = \int_S [\vec{b}, \vec{a}] d\vec{S} = -[\vec{a}, \vec{b}] \int_S d\vec{S} = -\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \int_S d\vec{S} \right] \right) = \left(\vec{a}, \left[\int_S d\vec{S}, \vec{b} \right] \right)$$

Здесь учли, что $\nabla(\vec{\rho}, \vec{b}) = \vec{b}$, и воспользовались циклической перестановкой в смешанном (скалярном и векторном) произведении векторов. Из последнего соотношения в силу произвольности постоянного вектора $\vec{a} = \text{const}$, получаем выше указанное равенство.

Приложение 2. Можно формулу (3.7.26) получить непосредственно из прямых вычислений. Пусть для простоты имеем плоский контур, причем начало координат лежит внутри контура, а оси (x, y) в плоскости контура, т.е.

$$\vec{r}_q = x_q \vec{e}_x + y_q \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z \quad \text{и} \quad d\vec{l}_q = dx_q \vec{e}_x + dy_q \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z.$$

Тогда записываем:

$$\oint (\vec{r}_q, \vec{r}) d\vec{l}_q = \oint (x_q x + y_q y) d\vec{l}_q = \oint (x_q x + y_q y) (dx_q \vec{e}_x + dy_q \vec{e}_y)$$

Считаем слагаемые отдельно - y -ую компоненту и x -ую компоненту:

$$\oint (x_q x + y_q y) dy_q = x \oint x_q dy_q + y \frac{y_q^2}{2} \Big|_{-a}^a = x S_z + 0 = x S_z$$

$$\oint (x_q x + y_q y) dx_q = x \frac{x_q^2}{2} \Big|_{-a}^a + y \oint y_q dx_q = 0 - y S_z = -y S_z$$

Здесь мы ввели величину a , характеризующую пределы изменения переменных x (y) контура, и определили проекцию вектора малой площадки контура на ось z как интеграл $S_z = \oint x_q dy_q = -\oint y_q dx_q$. Во втором интеграле получаем отрицательное значение, т.к. $dx_q < 0$ там, где $y_q > 0$. Итак, получаем для компонент векторного потенциала:

$$A_x = -\frac{IyS_z}{cr^3}, \quad A_y = \frac{IxS_z}{cr^3}$$

Видно, что это есть компоненты векторного произведения радиус-вектора на вектор площадки контура.

3.8. Контур с током в магнитном поле.

3.8.1. Контур с током в однородном магнитном поле.

Рассмотрим силу, действующую на виток с током I в постоянном (однородном) магнитном поле $\vec{B} = const$ (см рис. 8.1). Исходя из формулы Ампера, имеем силу, действующую на элемент контура $d\vec{l}$ с током:

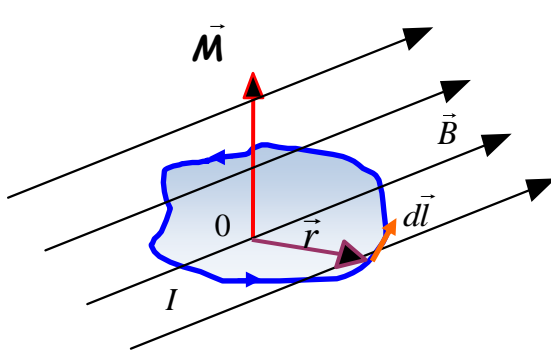


Рис. 8.1.

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}].$$

Интегрируя по всему контуру витка, получаем, что полная сила, действующая на виток с током, равна нулю

$$\vec{F} = \frac{I}{c} \oint [d\vec{l}, \vec{B}] = \frac{I}{c} \left[\oint d\vec{l}, \vec{B} \right] = 0, \quad (3.8.1)$$

т.к. для замкнутого провода $\oint d\vec{l} = 0$.

Однако момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле, отличен от нуля $\vec{M} \neq 0$. Так, например, стрелка компаса в магнитном поле Земли под действием момента сил поворачивается вдоль направления магнитного поля. Момент сил, действующих на элемент контура с током $d\vec{l}$ в магнитном поле \vec{B} относительно точки O , определяется выражением:

$$d\vec{M} = [\vec{r}, d\vec{F}] = \frac{I}{c} [\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}]], \quad (3.8.2)$$

где вектор \vec{r} определяет положение элемента контура $d\vec{l}$ относительно точки O . Тогда полный момент сил Ампера, действующих на виток с током равен:

$$\vec{M} = \oint d\vec{M} = \frac{I}{c} \oint [\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}]] = \frac{I}{c} \oint (d\vec{l}(\vec{r}, \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r}, d\vec{l})) = \frac{I}{c} \oint d\vec{l}(\vec{r}, \vec{B}) - \frac{I}{c} \oint \vec{B}(\vec{r}, d\vec{l}). \quad (3.8.3)$$

Первый интеграл в (3.8.3) мы уже считали (см формулы (3.7.24), (3.7.26) и (3.7.27)), когда получали выражение для векторного потенциала, с той лишь разницей, что вместо вектора \vec{B} ранее стоял вектор $\vec{b} = I\vec{r}/cr^3$:

$$\frac{I}{c} \oint d\vec{l}(\vec{r}, \vec{B}) = \frac{I}{c} [\vec{S}, \vec{B}] = \vec{M} \times \vec{B} \equiv [\vec{M}, \vec{B}] \quad (3.8.4)$$

Здесь \vec{M} магнитный момент контура. Второй интеграл в (3.8.3), учитывая, что $\vec{B} = const$, равен нулю:

$$-\frac{I}{c} \oint \vec{B}(\vec{r}, d\vec{l}) = -\frac{I}{c} \vec{B} \oint (\vec{r}, d\vec{l}) = -\frac{I}{c} \vec{B} \oint \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) d\vec{l} = 0, \quad (3.8.5)$$

т.к. интеграл по замкнутому контуру от операции *grad* равен нулю. В самом деле, при переходе по теореме Стокса к потоку ротора вектора, мы получаем под интегралом *rot(grad)*, который тождественно равен нулю: $rot\ grad \equiv 0$.

Таким образом, *механический момент сил* определяется следующим выражением:

$$\vec{M} = [\vec{M}, \vec{B}] \quad (3.8.6)$$

Магнитное поле стремится развернуть магнитный момент \vec{M} контура с током вдоль поля (вектора \vec{B} , см рис. 8.2). Такое положение контура устойчиво, т.к. при $\vec{M} \parallel \vec{B}$ получаем $\vec{M} = 0$, также, как и \vec{F} .

Из механики известно, что если результирующая сила всех сил, действующих на систему, равна нулю, то суммарный момент этих сил не зависит от точки, относительно которой определяют моменты этих сил. Поэтому в нашем случае можно просто говорить о моменте “амперовых” сил, действующих на виток с током.

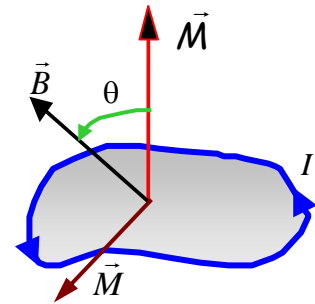


Рис. 8.2.

Получим *потенциальную энергию контура с током в магнитном поле*. Тот факт, что поле стремится ориентировать контур относительно направления вектора \vec{B} , означает, что потенциальная энергия контура с током будет зависеть от его ориентации в поле. Работа момента сил при малом повороте на угол $d\theta$ (рис. 8.2) равна:

$$dW = Md\theta = M \cdot B \sin \theta d\theta;$$

Тогда запас энергии при произвольном угле между векторами индукции магнитного поля и магнитного момента равен:

$$W = -M \cdot B \cos \theta + const = -M \cdot B \cos \theta.$$

Постоянную можно положить равной нулю. Окончательно получаем выражение для потенциальной энергии в виде:

$$W = -\vec{M} \cdot \vec{B}. \quad (3.8.7)$$

Напомним, что аналогичное выражение мы получали для энергии диполя в электрическом поле (см (1.7.14) в §1.7).

3.8.2. Контур с током в неоднородном магнитном поле.

Рассмотрим неоднородное магнитное поле и контур с током, который будем считать достаточно маленьким по сравнению с областью существенного изменения магнитного поля (рис.8.3). Найдем, как меняется вблизи контура индукция внешнего магнитного поля $\vec{B}(\vec{\rho})$, где $\vec{\rho}$ – координаты контура, отсчитанные от его условного центра. Для этого представим компоненты неоднородного поля вблизи границы витка как сумму однородного магнитного поля на границе и изменения поля в её окрестностях в первом порядке разложения по степеням проекций вектора $\vec{\rho}$:

$$B_x(\vec{\rho}) = B_{0x} + \vec{\rho} \vec{\nabla} B_x = B_{0x} + \rho_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial B_x}{\partial z};$$

$$B_y(\vec{\rho}) = B_{y_0} + \vec{\rho} \vec{\nabla} B_y; \quad (3.8.8)$$

$$B_z(\vec{\rho}) = B_{z_0} + \vec{\rho} \vec{\nabla} B_z.$$

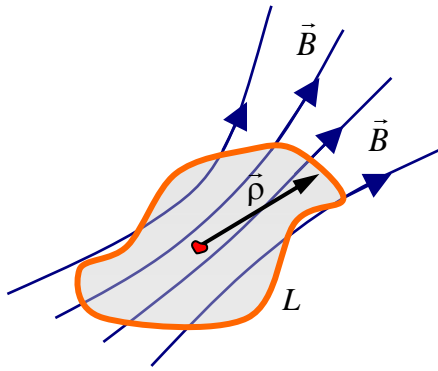


Рис. 8.3.

Таким образом, получаем для всего вектора индукции магнитного поля в окрестности малого контура:

$$\vec{B}(\vec{\rho}) = \vec{B}_0 + (\vec{\rho}, \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (3.8.9)$$

Запишем силу, действующую в магнитном поле на элемент $d\vec{l}$ витка с током:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}] = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}_0] + \frac{I}{c} [d\vec{l}, (\vec{\rho}, \vec{\nabla}) \vec{B}]. \quad (3.8.10)$$

Первое слагаемое при интегрировании обращается в нуль, так как $\vec{B}_0 = const$ определяет индукцию однородного поля. Второе слагаемое в (3.8.10) перепишем подробнее:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{I}{c} \oint d\vec{l} \times (\vec{\rho}, \vec{\nabla}) \vec{B} = \frac{I}{c} \oint d\vec{l} \times [(\vec{\rho}, \vec{\nabla} B_x) \vec{e}_x + (\vec{\rho}, \vec{\nabla} B_y) \vec{e}_y + (\vec{\rho}, \vec{\nabla} B_z) \vec{e}_z] = \\ &= \frac{I}{c} \left(\oint d\vec{l} (\vec{\rho}, \vec{\nabla} B_x) \right) \times \vec{e}_x + \frac{I}{c} \left(\oint d\vec{l} (\vec{\rho}, \vec{\nabla} B_y) \right) \times \vec{e}_y + \frac{I}{c} \left(\oint d\vec{l} (\vec{\rho}, \vec{\nabla} B_z) \right) \times \vec{e}_z \end{aligned}$$

Опять получаем интегралы, которые мы фактически сосчитали ранее (см (3.7.26) и (3.7.27)).

$$\frac{I}{c} \oint d\vec{l} (\vec{\rho}, \vec{\nabla} B_i) = \frac{I}{c} [\vec{S}, \vec{\nabla} B_i] = [\vec{M}, \vec{\nabla} B_i],$$

Подставим их значения и далее, используя свойства перестановки в векторных произведениях и правило “БАЦ-ЦАБ”, имеем в продолжении для силы:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \left[[\vec{M}, \vec{\nabla} B_x] \vec{e}_x \right] + \left[[\vec{M}, \vec{\nabla} B_y] \vec{e}_y \right] + \left[[\vec{M}, \vec{\nabla} B_z] \vec{e}_z \right] = - \left[\vec{e}_x [\vec{M}, \vec{\nabla} B_x] \right] + \dots = \\
&= (\vec{M}, \vec{e}_x) \vec{\nabla} B_x - (\vec{\nabla} B_x, \vec{e}_x) \vec{M} + (\vec{M}, \vec{e}_y) \vec{\nabla} B_y - \dots = \\
&= (M_x \vec{\nabla} B_x + M_y \vec{\nabla} B_y + M_z \vec{\nabla} B_z) - \vec{M} \operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{M}, \vec{B}), \tag{3.8.11}
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались также тем, что $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

С другой стороны мы знаем, что потенциальная энергия магнитного момента во внешнем поле равна $W = -\vec{M}\vec{B}$, тогда для силы получаем

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W = \vec{\nabla} (\vec{M}, \vec{B}) \tag{3.8.12}$$

Полученную формулу можно переписать несколько иначе, используя формулу “БАЦ-ЦАБ” для двойного векторного произведения:

$$\vec{\nabla} (\vec{M}, \vec{B}) = [\vec{M}, [\vec{\nabla}, \vec{B}]] + (\vec{M}, \vec{\nabla}) \vec{B}. \tag{3.8.13}$$

($\vec{\nabla} \times \vec{B} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{B}] \equiv \operatorname{rot} \vec{B}$). В тех областях, где отсутствует токи, $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$, и $\vec{\nabla} (\vec{M}, \vec{B}) = (\vec{M}, \vec{\nabla}) \vec{B}$, поэтому верны обе формулы, определяющие силу, действующую на малый контур с током с моментом \vec{M} в неоднородном магнитном поле:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{M}, \vec{B}) \quad \text{и} \quad \vec{F} = (\vec{M}, \vec{\nabla}) \vec{B} \tag{3.8.14}$$

(\vec{M} не зависит от координат точки \vec{r} , поэтому его можно “пронести” через оператор $\vec{\nabla}$ влево).

Формулы (3.8.14) можно написать сразу, если показать, что $W = -\vec{M}\vec{B}$ есть потенциальная энергия витка с током в данной точке поля, связанная не только с его ориентацией, но и местоположением. Поясним, почему это выражение вообще можно считать всей механической энергией витка в магнитном поле, хотя мы ее получили исходя только из поворота магнитного момента в магнитном поле.

Предположим, что имеем магнитное поле \vec{B} и магнитный момент \vec{M} . По определению потенциальная энергия равна работе сторонних сил по перемещению тела из бесконечности (где поле равно 0) в заданную точку пространства. Предположим, что мы вносим магнитный момент \vec{M} в поле так, что направление магнитного момента перпендикулярно направлению магнитного поля во всех точках траектории. В этом случае сила, действующая на магнитный момент \vec{M} , может быть легко найдена (считаем, что это ось x направлена перпендикулярно к индукции магнитного поля \vec{B}):

$$\vec{F} = (\vec{M}, \vec{\nabla}) \vec{B} = M \frac{\partial}{\partial x} \vec{B} = M \frac{\partial}{\partial x} (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) = M \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{e}_z \right)$$

т.к. $B_x = 0$. Таким образом, сила перпендикулярна к оси x , т.е. к перемещению магнитного момента и работа по его перемещению равна 0. Поэтому работа

затрачена только на поворот \vec{M} в поле, для которого мы имеем энергию $W = -\vec{M}\vec{B}$.

3.8.3. Сравнение формул электростатики и магнитостатики. Аналогия и различие.

Рассмотрим и сравним основные соотношения для электростатики и магнитостатики. Формулы представлены в системе единиц Гаусса и в СИ.

Электростатика	Магнитостатика
Система единиц Гаусса (СИ)	Система единиц Гаусса (СИ)
Напряженность электрического поля $\vec{E} = \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV \quad (\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV)$	Индукция магнитного поля $\vec{B} = \frac{1}{c} \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV \quad (\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV)$
Скалярный потенциал электрического поля $\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{r} \quad (\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r})$	Векторный потенциал магнитостатического поля $\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV \quad (\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV)$
Связь потенциала и напряженности $\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi$	Связь векторного потенциала и индукции $\vec{B} = rot\vec{A} = [\nabla, \vec{A}]$
Уравнение Пуассона для потенциала $\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad (\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0})$	Уравнение для векторного потенциала $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j})$
Электрический диполь $\vec{p} = q\vec{l}$	Магнитный диполь $\vec{M} = \frac{I}{c} \vec{S} \quad (\vec{M} = I\vec{S})$
Поле электрического диполя $\vec{E} = \frac{3(\vec{p}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}$	Поле магнитного диполя $\vec{B} = \frac{3(\vec{M}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{M}}{r^3}$
Момент сил, действующих на диполь во внешнем поле $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$	Момент сил, действующих на диполь во внешнем поле $\vec{M} = [\vec{M}, \vec{B}]$
Энергия электрического диполя во внешнем поле $W = -(\vec{p}, \vec{E})$	Энергия магнитного диполя во внешнем поле $W = -(\vec{M}, \vec{B})$
Сила, действующая на электрический диполь $\vec{F} = (\vec{p}, \nabla)\vec{E}$	Сила, действующая на магнитный диполь $\vec{F} = (\vec{M}, \nabla)\vec{B}$

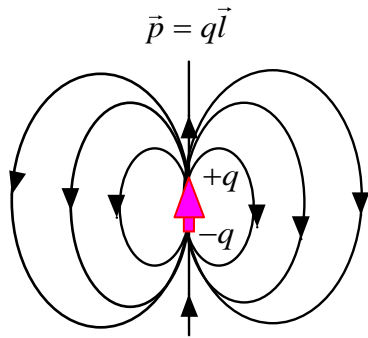


Рис. 8.4.

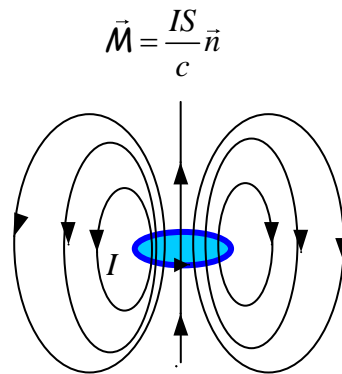


Рис. 8.5.

На рисунках 8.4 и 8.5 показано подобие линий напряженности электрического поля диполя и линий индукции магнитного диполя.

Отличие электростатических и магнитостатических величин связано с тем, что магнитное поле соленоидальное, т.е. не имеет источников ($\text{div}\vec{B}=0$). Электрическое поле - потенциальное ($\text{rot}\vec{E}=0$). Однако, эта разница относится только к области пространства, в которой расположена система создающая поле. Если посмотреть на силовые линии полей, создаваемые диполями, видна полная аналогия. И если исключить из рассмотрения малую область, заключающую дипольные моменты, то картинки абсолютно одинаковые. Есть ли различие? Да, во внешнем поле магнитный \vec{M} и электрический \vec{p} дипольные моменты ориентируются вдоль поля, но ориентировка магнитных моментов усиливает поле, а ориентировка электрических – ослабевает внешнее поле.

3.9. Магнитное поле в веществе.

3.9.1. Магнитные моменты в веществе.

До сих пор мы рассматривали магнитные поля и электрические токи в вакууме. В веществе магнитное поле возбуждается не только электрическими токами, текущими по проводам, но и движениями зарядов внутри атомов и молекул. Также давно известно, что существуют постоянные магниты, у которых магнитное поле появляется за счет внутренних ресурсов, и вопрос состоит в том, какие токи внутри этих веществ создают магнитное поле.

Ампер выдвинул следующую гипотезу: в веществе циркулируют замкнутые токи. Каждый замкнутый ток представляет собой магнитный момент и создает магнитное поле вокруг себя. В отсутствии внешнего магнитного поля в обычных средах (не ферромагнитных) магнитные моменты ориентированы беспорядочно и полное поле от них равно нулю.

Под влиянием внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию. Отсюда суммарный магнитный момент образца не равен нулю, вещество – *магнетик*, намагничивается и в нем появляется внутреннее магнитное поле \vec{B} .

Гипотеза Ампера – это гипотеза о *молекулярных* или *атомных токах*. Однако поясним, какова реальная физика, отвечающая появлению магнитных моментов в веществе. Атомы состоят из положительных ионов и внешних электронов. Последние вращаются вокруг атомных ядер по замкнутым орбитам (*орбитальное* движение) и тем самым имеют механические и магнитные моменты. Кроме того, электроны обладают *спином* – собственным вращательным (механическим) моментом импульса и собственным магнитным моментом. Орбитальное движение и спиновые моменты электронов описываются квантовой механикой. Ампер, исходя из классических представлений, как раз и попытался учесть их проявление с помощью гипотезы о внутренних (молекулярных) токах в веществе.

Итак, магнетизм вещества обусловлен тремя основными причинами. Перечислим их, пользуясь терминологией квантовой физики.

1) *Орбитальное движение электронов*. Состояния электронов в атомах описываются квантовыми числами (n, l, m_l, m_s) . *Главное квантовое число* n определяет номер электронной оболочки атома $n = 1, 2, 3, \dots$. Механический момент орбитального движения (момент импульса) электрона L квантован и принимает дискретные значения $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, где \hbar – постоянная Планка, а *орбитальное квантовое число* l принимает целые значения от 0 до $(n-1)$. Проекция механического момента на произвольную ось z также квантована и равна $L_z = m_l \hbar$. Магнитный момент, появляющийся от орбитального движения электрона, равен

$$M = m_l \frac{e\hbar}{2m_0c} = m_l M_B, \quad (3.9.1)$$

где m_l – *магнитное квантовое число* ($m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), e и m_0 – заряд и масса электрона, M_B – *магнетон Бора*, единица элементарного магнитного момента:

$$M_B = \frac{e\hbar}{2m_0c} = 9.27 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}. \quad (3.9.2)$$

В зависимости от состояния электрон обладает разными значениями проекций m_l и, соответственно, разными магнитными моментами, кратными магнетону Бора M_B . Часто вводят отношение магнитного момента к механическому, которое называется *гиромагнитным* (или *магнитомеханическим*) отношением:

$$\frac{M}{L_z} = \frac{e}{2m_0c} \quad (3.9.3)$$

2) *Спин электронов – собственный механический момент* частицы. Его проекция на произвольную ось z определяется $S_z = m_s \hbar = \pm \hbar/2$, а соответствующий (спиновый) магнитный момент равен магнетону Бора с проекцией $\pm M_B$.

3) *Спин ядер*. Поскольку ядра состоят из протонов и нейтронов, обладающих собственными магнитными моментами, то ядра также обладают магнитными моментами. Однако, в обычных условиях вклад ядерного магнетизма в общую картину магнитных свойств мал. Подход к рассмотрению магнитных свойств вещества, в котором пренебрегают ядерным магнетизмом, называется *адиабатическим приближением*.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что все вещества являются магнетиками, т.е. при внесении во внешнее магнитное поле сами становятся источниками дополнительного магнитного поля – *намагничиваются*. Индивидуальные магнитные свойства различных веществ определяются, в первую очередь, строением электронных оболочек атомов, входящих в их состав, и характером взаимодействия между атомами вещества.

В зависимости от характера взаимодействия с внешним магнитным полем (реакции на внешнее поле) все вещества подразделяют на два больших класса: *диамагнетики* и *парамагнетики*.

Диамагнетиками называют вещества, ослабляющие магнитное поле, в которое они помещены, индуцированный в веществе магнитный момент направлен против вызывающего его внешнего поля.

Парамагнетиками называют вещества, усиливающие магнитное поле, в которое они помещены, суммарный магнитный момент атомов вещества направлен вдоль ориентирующего его внешнего поля.

Отметим сразу же, что диамагнетизм присущ всем без исключения веществам и диамагнетикам, и парамагнетикам, но в парамагнетиках чаще всего он маскируется более сильным парамагнитным эффектом. В обоих классах веществ существуют свои яркие представители, т.е. вещества, обладающие аномально большим откликом на внешнее магнитное поле. У диамагнетиков – *сверхпроводники*, среди парамагнетиков – *ферромагнетики* (или *ферримагнетики*), *антиферромагнетики*.

В заключение этой вводной части необходимо отметить, что помимо перечисленных выше существуют и другие факторы, вносящие свой вклад в магнитные свойства вещества и, в частности, обусловленные специфическим движением электронов в конденсированных средах. Однако все они, так или

иначе, связаны с механическим переносом заряда. Их изучение выходит за рамки нашего курса.

3.9.2. Микро и макрополе. Вектор намагничивания.

В магнетизме, как и электростатике, можно ввести в рассмотрение как *микроскопическое*, так и *макроскопическое* поля. *Микроскопическое поле* – это поле, возбуждаемое движущимися в веществе элементарными зарядами. Это в некотором смысле истинное поле в веществе, оно резко меняется на расстояниях атомного масштаба. *Макроскопическое поле* в веществе получается путем “сглаживания” микрополей, т.е. их усреднения по физически бесконечно малым объемам. Напомним, что физически малый объем – это объем, содержащий большое число атомов, но имеющий размеры во много раз меньшие, чем те расстояния, на которых макрополе заметно меняется. Усреднение по таким объемам сглаживает все нерегулярные и быстро меняющиеся вариации микрополя на расстояниях порядка атомных, но сохраняет плавные изменения макрополя на макроскопических расстояниях. Итак, записываем индукцию магнитного поля в веществе

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{макро}} = \langle \vec{B}_{\text{микро}} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{B}_{\text{микро}} dV. \quad (3.9.4)$$

Орбитальное и спиновое движение электронов и атомных ядер эквивалентны токам, циркулирующим в атомах вещества. Эти круговые токи получили общее название *молекулярных токов*. Для вычисления макроскопического поля \vec{B} молекулярные токи можно заменить макроскопическими токами, получившими название *токов намагничивания* I_m . Плотность этих токов обозначим \vec{j}_m .

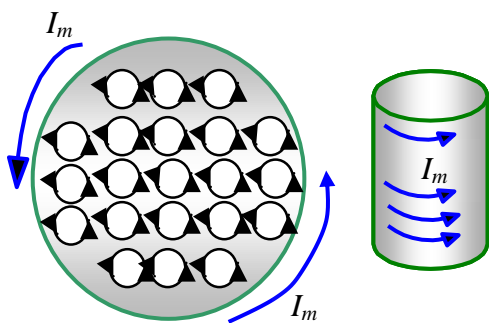


Рис. 9.1.

Чтобы понять, как возникают токи намагничивания, сначала представим себе *намагниченный* цилиндр из однородного материала (см рис. 9.1). У соседних молекул молекулярные токи в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и взаимно компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются только те молекулярные токи, которые выходят на боковую поверхность цилиндра. Эти токи и образуют *макроскопический поверхностный ток намагничивания* I_m , циркулирующий по боковой поверхности цилиндра. Ток I_m возбуждает такое же макроскопическое магнитное поле, что и молекулярные токи вместе взятые.

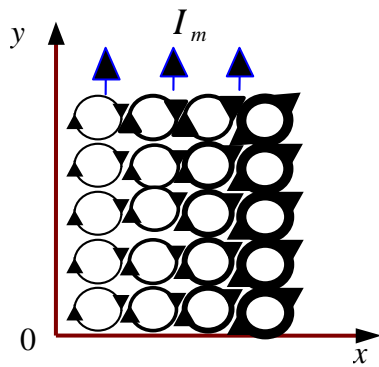


Рис. 9.2.

Рассмотрим теперь другой случай: намагниченный образец является неоднородным. Пусть молекулярные токи расположены в плоскости xOy , и толщина линий на рис. 9.2 соответствует силе молекулярных токов. Видно, что здесь компенсации молекулярных токов внутри образца уже нет, в результате чего возникает объемный макроскопический ток намагничивания I_m , текущий в положительном направлении оси y .

Можно сказать, что влияние среды на магнитное поле сводится к действию токов намагничивания. Таким образом, поле \vec{B} в веществе возбуждается токами проводимости (ток I с плотность тока \vec{j}) и токами намагничивания (I_m, \vec{j}_m). То, что источниками для вектора \vec{B} являются и токи проводимости \vec{j} , и токи намагничивания \vec{j}_m , проявляется в теореме о циркуляции вектора индукции магнитного поля, которая в интегральной и дифференциальной форме записывается:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (I + I_m) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j} + \vec{j}_m) d\vec{S} \quad (3.9.5)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_m) \quad (3.9.6)$$

Остается также в силе теорема Гаусса, которая выражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов и означает, что линии вектора \vec{B} и при наличии вещества остаются всюду непрерывными:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad \text{или} \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad (3.9.7)$$

Если известны плотность токов проводимости \vec{j} и плотность токов намагничивания \vec{j}_m , то можно забыть о наличии вещества и проводить вычисления по формулам, которые используются при расчете поля \vec{B} в вакууме. Однако сложность такого рассмотрения состоит в том, плотность токов намагничивания обычно неизвестна, так как \vec{j}_m зависит от самого магнитного поля \vec{B} . Т.е. получаем сложную взаимозависимость: магнитное поле зависит от токов намагничивания, а токи намагничивания в свою очередь зависят от поля в веществе.

Намагниченность среды характеризуют *вектором намагничивания* \vec{J} , который определяется как результирующий (средний) *магнитный момент единицы объема* вещества, создаваемый молекулярными токами. По определению средний магнитный момент единицы объема равен:

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{M}_i}{\Delta V} \quad (3.9.8)$$

Здесь \vec{M}_i – магнитный момент отдельной молекулы, ΔV – физически малый объем в окрестности данной точки. Если ввести средний магнитный момент молекулы \vec{M}_0 , то вектор намагничивания равен:

$$\vec{J} = n\vec{M}_0 \quad (3.9.9)$$

где n – концентрация молекул. Магнитный момент элемента объема dV определяется:

$$d\vec{M} = \vec{J}dV \quad (3.9.10)$$

Вполне очевидно, что токи намагничивания \vec{j}_m связаны с намагниченностью \vec{J} : чем сильнее токи \vec{j}_m , тем больше магнитный момент единицы объема.

Идея подхода к описанию магнитного поля в веществе состоит в следующем: найти экспериментальную связь между векторами \vec{J} и \vec{B} , а затем решать задачу о нахождении индукции магнитного поля \vec{B} .

3.9.3. Связь между вектором намагничивания и молекулярными токами.

Вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, которые охватываются произвольно выбранным контуром L . Натянем на замкнутый контур L произвольную поверхность S и сосчитаем полный молекулярный ток, текущий через эту поверхность

$$I_m = \int_S \vec{j}_m d\vec{S}.$$

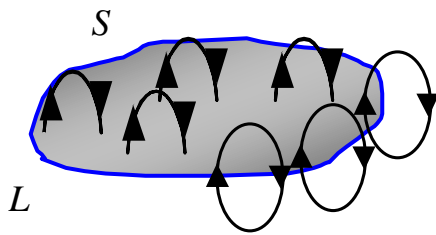


Рис. 9.3.

Из рис. 9.3 видно, что все молекулярные токи можно подразделить на следующие токи.

1) Токи, которые пересекают поверхность дважды, причем в разных направлениях, и поэтому не вносят вклада в результирующий ток намагничивания через поверхность S .

2) Токи, которые, обвиваясь вокруг контура L , пересекают поверхность S только один раз. Такие молекулярные токи и создают макроскопический ток намагничивания I_m , “пронизывающий” поверхность S .

Пусть каждый молекулярный ток равен I' и охватывает площадь S' . Тогда малый элемент dl контура L обвивают те молекулярные токи, чьи центры попадают внутрь косоугольного цилиндра объемом (рис. 9.4)

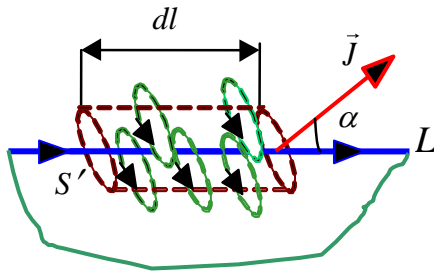


Рис. 9.4.

$$dV = S'dl \cos \alpha ,$$

где α – угол между элементом контура $d\vec{l}$ и направлением вектора \vec{J} в данном месте. Все эти молекулярные токи пересекают поверхность S один раз и дают следующий вклад в ток намагничивания

$$dI_m = I'ndV ,$$

где n – концентрация молекул. Подставляя выражение для элемента объема dV , получаем:

$$dI_m = I'S'ndl \cos \alpha = cM_0ndl \cos \alpha = cJdl \cos \alpha = c\vec{J}d\vec{l} . \quad (3.9.11)$$

Здесь учтено, что $\frac{1}{c}I'S' = M_0$ – магнитный момент отдельной молекулы (молекулярного тока), а $nM_0 = n\frac{I'S'}{c} = J$ – магнитный момент единицы объема вещества, т.е. вектор намагничивания.

Проинтегрировав по всему контуру, получим теорему о циркуляции для вектора намагничивания \vec{J} :

$$\begin{aligned} c \oint_L \vec{J}d\vec{l} &= I_m \\ \oint_L \vec{J}d\vec{l} &= \frac{1}{c}I_m \end{aligned} \quad (3.9.12)$$

Циркуляция намагниченности \vec{J} по произвольному контуру L равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых контуром L , где полный ток определяется:

$$I_m = \int \vec{j}_m d\vec{S} , \quad (3.9.13)$$

причем интегрирование проводится по произвольной поверхности S , опирающейся на контур L . Заметим, что мы пока рассматриваем стационарные токи и поля, когда они не зависят от времени (магнитостатика).

Воспользуемся (3.9.12) и теоремой Стокса: $\oint_L \vec{J}d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{J}d\vec{S}$, и тогда получаем

$$\int \text{rot} \vec{J}d\vec{S} = \frac{1}{c} \int \vec{j}_m d\vec{S}$$

В силу произвольности выбранного контура и опирающейся на него поверхности, получаем дифференциальную теорему о циркуляции вектора намагничивания:

$$\operatorname{rot} \vec{J} \equiv [\nabla, \vec{J}] = \frac{1}{c} \vec{j}_m. \quad (3.9.14)$$

Ротор намагниченности равен плотности токов намагничивания в той же точке пространства.

Если намагниченность однородна ($\vec{J} = \text{const}$), то $\vec{j}_m = 0$. Как это понять? Достаточно взглянуть на рисунок 9.1 в этом параграфе. Молекулярные токи внутри магнетика в местах соприкосновения текут в противоположных направлениях и компенсируют друг друга (отсюда $\vec{j}_m = 0$). Некомпенсированным остается только ток по поверхности, который и создает макрополе $\vec{J} = \text{const}$.

Если магнетик неоднородный, то ток намагничивания, вообще говоря, компенсируется не полностью соседним током, поэтому пронизывает всю поверхность и $\vec{j}_m \neq 0$. Именно поэтому его можно записать, как $I_m = \int \vec{j}_m d\vec{S}$, где интегрирование распространяется на всю поверхность S , ограниченную контуром L .

Примечание 1. В системе СИ имеем следующую запись формул для намагниченности

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_m d\vec{S}; \quad \operatorname{rot} \vec{J} = \vec{j}_m; \quad \vec{M} = I_m \vec{S}$$

3.9.4. Напряженность магнитного поля.

Подставим в дифференциальную формулу (3.9.6) $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_m)$ полученный результат для плотности тока намагничивания (намагничения) (3.9.14) $\vec{j}_m = c \cdot \operatorname{rot} \vec{J}$. Тогда в выражении:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c \cdot \operatorname{rot} \vec{J}),$$

перенеся $c \cdot \operatorname{rot} \vec{J}$ в левую часть уравнения, получаем

$$\operatorname{rot} (\vec{B} - 4\pi \vec{J}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.9.15)$$

Введем вспомогательный вектор – *напряженность магнитного поля* \vec{H} :

$$\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi \vec{J}. \quad (3.9.16)$$

Тогда имеем следующие интегральное и дифференциальное уравнения для напряженности магнитного поля \vec{H} :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (3.9.17)$$

После введения вектора напряженности магнитного поля \vec{H} в правой части уравнений остаются только токи проводимости (\vec{j}, I) , токи намагничивания выпадают из уравнений. В этом и заключается смысл введения этого вспомогательного вектора. Вектор \vec{H} в учении о магнетизме играет такую же вспомогательную роль, как вектор \vec{D} в электростатике.

Основным физическим вектором является вектор индукции \vec{B} – *силовой вектор*. Исторически он получил неудачное название – вектор индукции, хотя было бы правильнее (по смыслу) называть его вектором напряженности магнитного поля. Такая иррациональность возникла из-за того, что учение о магнетизме развивалось по аналогии с электростатикой, а об отсутствии магнитных зарядов стало известно позднее.

По определению

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{J}$$

векторы \vec{B} и \vec{H} имеют одинаковую размерность в гауссовой системе единиц. Поэтому они должны иметь и одинаковую единицу измерения. Для магнитной индукции \vec{B} в гауссовой системе это *гаусс*. Однако при измерении напряженности магнитного поля \vec{H} её называют *эрстедом*. Это разные названия одной и той же единицы, что, естественно, неудобно. Такое положение сохраняется как дань исторической традиции.

Примечание 2. В системе СИ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{B} &= \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_m); & \operatorname{rot}\vec{J} &= \vec{j}_m; \\ \vec{H} &= \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}; & \operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

Единицы измерения полей: $[\vec{B}] = \text{Тесла}; \quad [\vec{H}] = \frac{\text{А}}{\text{м}}.$

3.9.5. Магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.

Все магнетики можно подразделить на основные две группы, используя в качестве критерия сравнительную интенсивность взаимодействия атомных магнитных моментов с внешним магнитным полем и между собой. Вещества, для которых взаимодействие между отдельными магнитными моментами (в обычных условиях) пренебрежимо мало по сравнению взаимодействием каждого из моментов с внешним магнитным полем, называют слабомагнитными – это пара- и диамагнетики. Сильномагнитными называют вещества, в которых взаимодействие между атомными магнитными моментами является доминирующим, по сравнению с взаимодействием атомных моментов с внешним полем. Следует понимать, что такое подразделение весьма условно и зависит от тех внешних условий (прежде всего, температуры), в которых находится материал.

Сильномагнитные вещества характеризуются весьма сложной зависимостью между векторами намагниченности \vec{J} и магнитной индукции \vec{B} . К таким веществам относятся ферромагнетики, например, железо, кобальт, никель, некоторые редкоземельные элементы, а также различные сплавы и соединения. Для них, во-первых, зависимость между векторами \vec{J} и \vec{B} нелинейная. А во-вторых, у таких материалов наблюдается явление гистерезиса, т.е. неоднозначная зависимость между этими величинами, обусловленная наличием у них “памяти” о своем предыдущем состоянии.

Для парамагнитных и диамагнитных сред зависимость между векторами \vec{J} и \vec{B} *линейная*. И по идее надо было бы ввести коэффициент пропорциональности между ними, как это было сделано в электростатике для связи между векторами \vec{P} и \vec{E} . Однако, в силу опять-таки исторических причин, вначале принято связывать между собой векторы намагниченности \vec{J} и напряженности магнитного поля \vec{H} .

Для изотропных сред записываем:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}; \quad (3.9.18)$$

Для анизотропных сред χ – тензор, при этом вектор намагниченности \vec{J} может быть не сонаправлен с вектором напряженности \vec{H} . Величина χ называется *магнитной восприимчивостью* (или тензором магнитной восприимчивости) и имеет следующие свойства:

- 1) χ не зависит от напряженности \vec{H} (слабомагнитные вещества, слабые магнитные поля);
- 2) χ безразмерна;
- 3) χ – тензор для анизотропных сред;
- 4) χ может быть больше и меньше нуля.

Следует отметить, что χ служит коэффициентом пропорциональности и не имеет какого-либо другого физического смысла.

Для изотропных сред запишем:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{J} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H} = \mu\vec{H}. \quad (3.9.19)$$

Итак, имеем соотношение:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (3.9.20)$$

где μ – *магнитная проницаемость* вещества:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi. \quad (3.9.21)$$

Величины χ и μ используются в качестве классификаторов и определителей магнитных свойств веществ:

$\chi < 0$, $\mu < 1$ – диамагнетики (CO_2 , N_2 , H_2O , Ag и другие);

$\chi > 0$, $\mu > 1$ – парамагнетики (O_2 , Al, Pt, $FeCl_3$ и другие).

Примечание 3. В системе СИ с учетом материальных уравнений имеем:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \mu = 1 + \chi$$

3.10. Граничные условия для векторов магнитного поля.

Рассмотрим магнитные поля на границе двух магнетиков. Получим граничные для векторов \vec{B} и \vec{H} , исходя из теоремы о потоке вектора через замкнутую поверхность: $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ и из теоремы о циркуляции вектора \vec{H} по замкнутому контуру: $\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$.

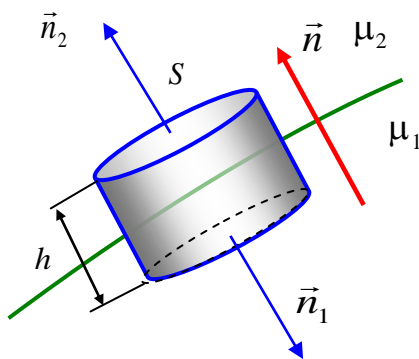


Рис. 10.1.

Сосчитаем поток вектора \vec{B} через поверхность малого цилиндра, охватывающего границу раздела 2-х сред:

$$B_{1n_1} S + B_{2n_2} S + \langle B_\tau \rangle S_{бок} = 0,$$

где S – площадь основания цилиндра, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности. Устремляя высоту цилиндра $h \rightarrow 0$ и $S_{бок} \rightarrow 0$, получаем на границе:

$$B_{1n_1} = -B_{2n_2}$$

и, учитывая, что n_1 и n_2 – противоположно направленные нормали, и вводя общую нормаль \vec{n} , имеем:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.10.1)$$

Итак: *нормальные составляющие вектора \vec{B} непрерывны на границе раздела двух магнетиков.*

Нормальные составляющие вектора \vec{H} получим, используя соотношение (3.9.20) $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$, справедливое для изотропных магнетиков. Тогда из (3.10.1) имеем:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$$

Откуда получаем соотношение для нормальных составляющих напряженности магнитного поля:

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (3.10.2)$$

Нормальные составляющие вектора \vec{H} терпят разрыв на границе двух магнетиков.

Предположим для общности, что вдоль поверхности раздела магнетиков течет ток проводимости I . Применим теорему о циркуляции вектора \vec{H} к очень малому прямоугольному контуру, пересекающему границу 2-х сред, причем высота контура b пренебрежимо мала по сравнению с его длиной a (см рис. 10.2):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_{2\tau}a - H_{1\tau}a + 2 \langle H_n \rangle b = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} j_N ab. \quad (3.10.3)$$

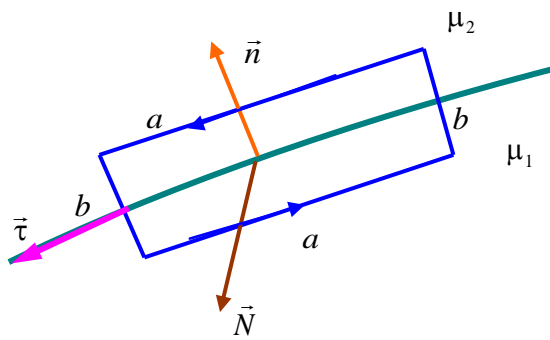


Рис. 10.2.

Здесь j_N – нормальная составляющая вектора плотности тока к выбранному контуру, т.е. перпендикулярная к векторам $\vec{n}, \vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор вдоль контура (\vec{N} – единичный вектор, перпендикулярный к плоскости контура, как показано на рис. 10.2). Тогда устремляя $b \rightarrow 0$, получаем:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N, \quad (3.10.4)$$

где $\vec{i} = \vec{j}b$ плотность поверхностного тока, т.е. ток, текущий через единицу длины поверхности. Перейдем к векторной форме записи полученного выражения, учитывая, что $\vec{\tau} = [\vec{N}, \vec{n}]$, $H_\tau = \vec{H}\vec{\tau}$ и $i_N = \vec{i}\vec{N}$:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\vec{\tau} = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot [\vec{N}, \vec{n}] = ([\vec{n}, \vec{H}_2] - [\vec{n}, \vec{H}_1])\vec{N} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}\vec{N},$$

Здесь мы воспользовались циклической перестановкой векторов в смешанном скалярно-векторном произведении. Из последнего равенства получаем:

$$[\vec{n}, \vec{H}_2] - [\vec{n}, \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \vec{i}. \quad (3.10.5)$$

Итак, *тангенциальная составляющая вектора \vec{H} при переходе границы раздела магнетиков, вообще говоря, претерпевает скачок, связанный с наличием поверхностных токов проводимости.*

Если токов проводимости вдоль поверхности раздела нет, то тангенциальные составляющие вектора \vec{H} также непрерывны:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (3.10.6)$$

Итак, если на границе раздела двух однородных магнетиков тока проводимости нет, то при переходе этой границы проекции векторов B_n и H_τ изменяются непрерывно, без скачка. Составляющие B_τ и H_n при этом претерпевают скачок.

На границе раздела двух магнетиков линии вектора \vec{B} испытывают преломление (рис. 10.3). Найдем отношение тангенсов углов α_1 и α_2 , определяющих направление вектора \vec{B} по разные стороны границы раздела:

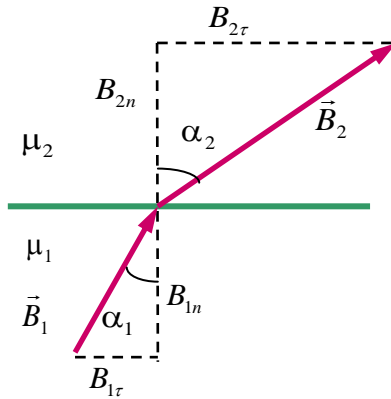


Рис. 10.3.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{B_{2\tau}/B_{2n}}{B_{1\tau}/B_{1n}}. \quad (3.10.7)$$

Ограничимся случаем, когда на поверхности раздела тока нет, то есть

$$\frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} \quad \text{и} \quad B_{2n} = B_{1n}.$$

В этом случае закон преломления линий вектора \vec{B} имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (3.10.8)$$

Аналогичное соотношение получаем для преломления силовых линий вектора напряженности магнитного поля \vec{H} .

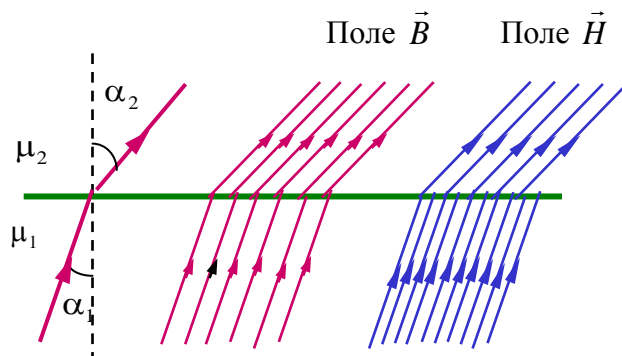


Рис. 10.4.

Изобразим поле векторов \vec{B} и \vec{H} вблизи границы раздела двух при отсутствии токов проводимости и, полагая $\mu_2 > \mu_1$ (см рис. 10.4). Из сравнения "густоты" линий видно, что $B_2 > B_1$, а $H_2 < H_1$. Линии вектора \vec{B} не терпят разрыва при переходе границы раздела, а линии вектора \vec{H} терпят в этом случае разрыв из-за наличия на поверхностях магнетиков токов намагничивания.

На явлении преломления магнитных линий на поверхностях раздела магнетиков основана *магнитная защита*. При внесении в магнитное поле замкнутой оболочки из сильномагнитного материала линии этого поля будут концентрироваться (иначе говоря, сгущаться) преимущественно в самом материале оболочки. Внутри же полости, окруженной оболочкой, магнитное

поле оказывается сильно ослабленным по сравнению с внешним полем. Таким образом, такая оболочка обладает экранирующим действием. Это свойство используют для предохранения чувствительных приборов от внешних магнитных полей.

Экраны из сильномагнитных материалов не позволяют свести к нулю действие внешнего магнитного поля. Полностью экранируют магнитное поле лишь сверхпроводники.

3.11. Гиромагнитные эффекты.

3.11.1. Гиромагнитные отношения.

Как упоминалось в §3.9, магнитные свойства вещества определяются магнитными моментами атомов. Магнитные моменты непосредственно связаны с механическими моментами импульса тех же атомов, поэтому намагничивание вещества сопровождается ориентировкой как магнитных, так и механических моментов атомов.

Наглядное представление о взаимосвязи магнитных и механических свойств частиц можно получить из рассмотрения орбитального движения электронов в рамках простого квантовомеханического рассмотрения. В водородоподобном атоме состояние электрона задается набором четырех квантовых чисел (n, l, m_l и m_s). Здесь n – главное квантовое число; l – орбитальное квантовое число; m_l – магнитное квантовое число; m_s – спиновое (магнитное) квантовое число. Пусть e и m_0 – заряд и масса электрона, соответственно, тогда магнитный момент, вызванный орбитальным движением электрона определяется:

$$\mathbf{M} = m_l \frac{e\hbar}{2m_0c} = m_l \mathbf{M}_B, \quad (3.11.1)$$

где $m_l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$, а $\mathbf{M}_B = \frac{e\hbar}{2m_0c} = 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ эрг} / \text{Гс}$ – магнетон Бора, элементарный магнитный момент.

Механический момент орбитального движения электрона обозначим, как и ранее, L , а его проекция равна: $L_z = m_l \hbar$. Тогда отношение:

$$g_L = \frac{\mathbf{M}}{L_z} = \frac{e}{2m_0c} \quad (3.11.2)$$

называется *магнитомеханическим* или *гиромагнитным* отношением. Для орбитального движения оно выражается через мировые константы.

Нетрудно увидеть, что к такому же результату (3.11.2) приводят вычисления по полуклассической (старой квантовой) модели атома Бора.

Ток, создаваемый движущимся по орбите радиусом r электроном, определяется (см рис. 11.1):

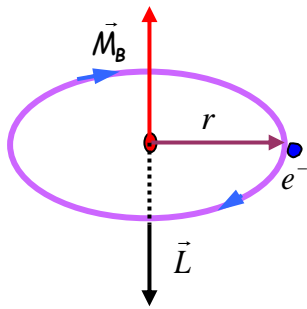


Рис. 11.1.

$$I = -\frac{e}{T}, \quad (3.11.3)$$

где $T = \frac{2\pi r}{v}$ – период обращения электрона по орбите, v – скорость орбитального движения. Тогда магнитный момент орбитального движения электрона записывается:

$$M = \frac{1}{c} IS = -\frac{1}{c} \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = -\frac{evr}{2c}. \quad (3.11.4)$$

Механический момент движения электрона равен: $L = m_0 vr$. Итак получаем, что *орбитальное гиромагнитное отношение* равно:

$$g_L = \frac{M}{L} = \frac{e}{2m_0 c}.$$

Полученное отношение совпадает с квантовым определением гиромагнитного отношения (3.11.2).

Рассмотрим спиновые механический и магнитный моменты. В квантовой физике получаем, что проекция собственного момента количества движения электрона определяется $S_z = m_s \hbar = \pm \hbar/2$, т.к. спиновое квантовое число $m_s = \pm 1/2$. Соответствующий (спиновый) магнитный момент равен магнетону Бора $M = \frac{e\hbar}{2m_0 c}$. Отсюда получаем *спиновое гиромагнитное отношение*, которое в 2 раза больше орбитального гиромагнитного отношения:

$$g_s = \frac{e}{m_0 c}. \quad (3.11.5)$$

Этот результат подтверждается на эксперименте. Важно отметить, что в рамках классической физики, которая рассматривает электрон как вращающийся заряженный объект, получаем для спина в 2 раза меньшее отношение $g_s^{кл} = e/2m_0 c$, и это свидетельствует лишь о *непригодности классической модели в описания спина* электрона.

В квантовой механике получаем, что момент импульса, его проекции и магнитный момент могут принимать только дискретные значения.

Полный механический и магнитный моменты любого многоэлектронного атома получаются векторным суммированием орбитальных и спиновых моментов. При сложении этих моментов магнитные орбитальные и спиновые моменты взаимодействуют между собой. Это – так называемое *спин-орбитальное* взаимодействие. Могут существовать состояния атомов и молекул, где механические и магнитные моменты равны

0, то есть они скомпенсированы. Пример таких ситуаций: в замкнутых (заполненных электронами) оболочках в атомах суммарный механический и магнитный моменты равны нулю.

Если в атоме оболочки незамкнутые, то магнитный момент атома в целом определяется суммой полного орбитального и полного спинового моментов. А поскольку g_L и g_S отличаются друг от друга, то часто возникает ситуация, когда полный механический момент не коллинеарен магнитному моменту в атоме. При этом проекции моментов на выделенную в пространстве ось становятся различными и таким образом определяют новые значения гиромагнитных отношений.

При этом очевидно, что для каждой частицы, атома или молекулы вещества, магнитомеханическое отношение имеет вполне определенное значение. Поэтому экспериментальное исследование магнитомеханических (гиромагнитных) характеристик позволяет сделать заключение о природе носителей магнетизма в различных веществах.

3.11.2. Опыт Эйнштейна–де Гааза и эффект Барнетта.

Экспериментальное исследование гиромагнитных отношений позволяет определить, чем обусловлена намагниченность, и кто отвечает за ее появление – орбитальное движение или спиновые эффекты.

Идея опыта Эйнштейна-де Гааза (1915г.) состояла в следующем: когда происходит намагничивание образца, магнитные моменты поворачиваются (выстраиваются). Однако, с ними связаны механические моменты атомов или молекул, которые также изменяют свои направления в пространстве. Эти изменения механических моментов происходит за счет внутренних сил, иначе говоря, если система замкнута, то кристаллическая решетка должна получить механический момент, обратный выстроенному магнитному моменту, т.к. полный момент образца сохраняется.

Исследование крутильных колебаний позволяет определить гиромагнитное отношение g для материала образца. В экспериментах для железного образца было получено значение $g = e/m_0c$, которое означает, что *магнитные свойства железа определяются спиновым магнетизмом электронов* (ферромагнетизм).

Рассмотрим опыт чуть подробнее. Мысленно разобьем исследуемое вещество на две подсистемы: электронные оболочки атомов и кристаллическую решетку. Пусть магнитные свойства вещества обусловлены электронами атомных электронных оболочек. При намагничивании образца атомные магнитные моменты \vec{M} поворачиваются, стремясь сориентироваться вдоль вектора индукции \vec{B}_0 внешнего магнитного поля. Однако с магнитными моментами атомов \vec{M} связаны механические моменты

количества движения электронов оболочек атомов, равные M/g , которые также изменяются. Эти изменения механических моментов происходит за счет взаимодействий между атомами, т.е. *внутренних сил*, поэтому если система замкнута, то полный момент количества движения не может измениться и кристаллическая решетка должна получить такой же по величине, но противоположный по знаку механический момент. Следует заметить, что, в действительности, замкнутой является система “образец + намагничивающее поле в соленоиде”. Однако, если в качестве образца взять цилиндр, то из соответствующих расчетов известно, что электромагнитное поле имеет относительно цилиндра момент количества движения, равный нулю, и поэтому не дает вклада в суммарный импульс системы.

Магнитный момент образца равен $\vec{J} \cdot V$, где \vec{J} – вектор намагничивания, V – объем образца. Тогда в результате намагничивания момент количества движения электронных оболочек в веществе увеличивается на величину:

$$\vec{L}_{эл} = \frac{\vec{J} \cdot V}{g} = \frac{V}{g} \vec{J}. \quad (3.11.6)$$

Отсюда следует, что кристаллическая решетка образца должна получить такой же по величине момент импульса, но противоположного знака, т.е.

$$\vec{L}_{реш} = -\frac{V}{g} \vec{J}.$$

Поэтому, если до намагничивания образец находился в состоянии покоя, то в результате намагничивания он должен прийти во вращение.

Если I_z – момент инерции тела, то $L_z = I_z \omega$ и угловая скорость ω вращения тела может быть найдена из уравнения

$$I_z \vec{\omega} = -\frac{V}{g} \vec{J}. \quad (3.11.7)$$

Эксперимент ставился следующим образом. Небольшой железный цилиндр подвешивался на тончайшей кварцевой нити и помещался внутрь соленоида, в котором создавалось магнитное поле. Повороты цилиндра отмечались с помощью маленького зеркала, скрепленного с ним. Оценим величину эффекта. Предположим, что цилиндр радиусом r и массой $m_{обр}$ намагничивается до насыщения. Далее, пусть каждый атом в образце обладает магнитным моментом, равным одному магнетону Бора $M_B = e\hbar/2m_e c$, тогда магнитный момент всего образца будет равен

$$VJ = N M_B = \frac{m_{обр}}{A} N_A M_B,$$

где N_A – число Авогадро, а A – атомный вес. Принимая во внимание, что для цилиндра момент инерции равен $I_z = m_{обр} r^2 / 2$, переписываем (3.11.7):

$$\frac{1}{2} m_{обp} r^2 \omega = - \frac{m_{обp}}{gA} N_A M_B$$

и далее получаем угловую скорость:

$$\omega = - \frac{1}{g} \frac{2N_A M_B}{Ar^2}. \quad (3.11.8)$$

Для железного ($A = 56$) цилиндра радиусом $r = 1$ мм эта формула дает значение угловой скорости, равное $\omega \approx 10^{-3}$ рад/с.

Эффект очень мал. Поэтому Эйнштейн и де Гааз, добиваясь усиления эффекта, пропускали по обмотке соленоида переменный ток. В переменном магнитном поле образец, периодически намагничиваясь и размагничиваясь, приходил в колебательное движение. Эффект усиливался, если частота изменения внешнего поля ω (частота переменного тока, изменяемая в опыте) совпадала с частотой собственных колебаний цилиндра ω_0 , т.е. наблюдалось явление резонанса.

Уравнение крутильных колебаний цилиндра записывается в виде

$$\frac{d}{dt} (L_{пew} + L_{эл}) = -f\dot{\varphi} - \alpha\dot{\varphi}, \quad (3.11.9)$$

где φ – угол отклонения цилиндра из положения равновесия; f – модуль кручения нити; α – постоянная, учитывающая сопротивление воздуха и прочие тормозящие силы, которые предполагаются пропорциональными угловой скорости (напомним, что $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$). Далее, учитывая (3.11.6), имеем:

$$\frac{dL_{пew}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{V}{g} J \right) = \frac{d}{dt} (I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \ddot{\varphi}; \quad (3.11.10)$$

$$\frac{dL_{эл}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{g} J \right) = \frac{V}{g} \frac{dJ}{dt} = \frac{V}{g} \dot{j}. \quad (3.11.11)$$

Поэтому уравнение крутильных колебаний принимает вид:

$$I_z \ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + f\varphi = -\frac{V}{g} \dot{j}. \quad (3.11.12)$$

Если теперь ввести частоту собственных колебаний, как $\omega_0^2 = f/I_z$ и коэффициент затухания $\beta = \alpha/2I_z$, то получаем

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = -\frac{V}{gI_z} \dot{j}. \quad (3.11.13)$$

Это уравнение вынужденных крутильных колебаний. Величина, стоящая в правой части уравнения играет роль вынуждающей силы. Она возникает в результате намагничивания и перемагничивания цилиндра и предполагается известной. Поскольку связь между намагниченностью и вызывающим её полем нелинейна (железо – ферромагнетик), то правую часть уравнения раскладывают в ряд Фурье, сохраняя в этом разложении для нахождения

решения вблизи резонанса только член с основной частотой ω (см Сивухин, т.3, § 78).

Эффект Барнетта (1909г.). Существует явление, обратное магнитомеханическому. Оно заключается в том, что при вращении парамагнитные тела намагничиваются, и это явление называется *гиромагнитным*. Объяснить этот эффект можно следующим образом. При внесении в магнитное поле электронная оболочка атома приходит во вращение относительно кристаллической решетки с угловой скоростью $\vec{\Omega} = -g\vec{B}$. При наличии такого относительного движения столкновения между атомами приводят к намагничиванию среды. Поскольку движение относительное, то следует ожидать такого же намагничивания, если привести во вращение решетку с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равной по величине, но противоположно направленной скорости $\vec{\Omega}$. Другими словами, вращение тела с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вызывает то же намагничивание, что и магнитное поле $\vec{B} = \vec{\omega}/g$. Это явление наблюдалось Барнеттом в 1909 г.

Сделаем численную оценку величины этого эффекта. Допустим, что гиромагнитное отношение связано с орбитальным движением электронов, т.е. имеем $g = -\frac{e}{2m_0c}$. При скорости вращения, равной 100 об/с или угловой скорости $\omega = 2\pi \cdot 100 \text{ рад/с}$, для индукции магнитного поля получаем:

$$B = \frac{2m_0c}{e} \omega \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ Гс.}$$

Для сравнения, магнитное поле у поверхности Земли составляет $0,3 \div 0,7 \text{ Гс}$.

Исследования магнитомеханического и гиромагнитного явлений показали, что гиромагнитное отношение g *всегда отрицательно*. Тем самым было подтверждено, что магнетизм обусловлен движением отрицательных электрических зарядов (электронов). Численные значения величины g оказались заключенными в пределах от $e/2m_0c$ до e/m_0c . Весьма важно, что для всех исследованных ферромагнетиков (железо, никель, кобальт, ряд сплавов) гиромагнитное отношение оказалось равным: $-e/m_0c$. Это показывает, что *магнетизм ферромагнетиков обусловлен только спином электронов, а не их орбитальным движением*.

Примечание 1. Альберт Эйнштейн, великий немецкий физик-теоретик, 1879–1955, Нобелевская премия 1921 г. за открытие законов фотоэффекта.
Вандер Иоханнес де Гааз, нидерландский физик, 1878–1960.
Сэмюэл Джексон Барнетт, американский физик, 1873–1956.

3.11.3. Опыт Штерна-Герлаха.

Наглядное и непосредственное доказательство пространственного квантования магнитного момента, а также наличия у электрона собственного магнитного момента, было получено немецкими физиками О. Штерном и В. Герлахом в опытах, поставленных ими в 1922 г.

В вакуумированной установке исследовалось прохождение узкого пучка атомов серебра (Ag), двигавшихся в направлении оси x , через область сильно

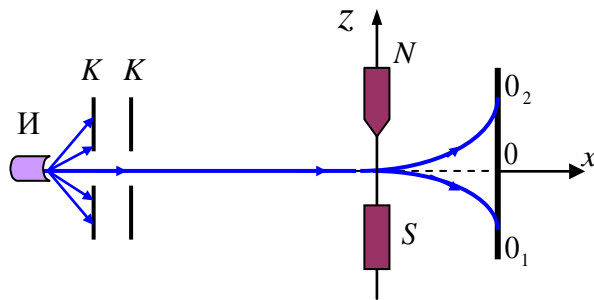


Рис. 11.2.

неоднородного (вдоль оси z) магнитного поля. После прохождения этой области атомы серебра фиксировались на экране. В неоднородном магнитном поле атомы, обладающие магнитным моментом, должны отклоняться от направления их первоначального распространения. На атом с магнитным моментом \vec{M} в

неоднородном магнитном поле ($\partial \vec{H} / \partial z \neq 0$) действует сила, равная

$$\vec{F} = (\vec{M}, \vec{\nabla}) \vec{H}. \quad (3.11.14)$$

Если магнитный момент атома \vec{M} направлен под углом ϑ к оси z , то эта сила равна:

$$F = M \frac{\partial H}{\partial z} \cos \vartheta. \quad (3.11.15)$$

Под влиянием этой силы атом будет отклоняться вдоль оси z на величину

$$z_{\vartheta} = \frac{1}{2} \frac{M}{M} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)_{cp} t^2 \cos \vartheta, \quad (3.11.16)$$

Здесь M – масса атома. Время пролета в магнитном поле t определяется из условия $t = l/v$, где l – длина магнита, v – скорость атомов вдоль оси x .

Если бы все значения углов ϑ были равновероятны, то при включении магнитного поля на экране вместо сфокусированного в точке 0 изображения получили бы широкую полосу в пределах от 0_1 до 0_2 (см рис. 11.3). Пределы полосы простирались бы от максимального отклонения против оси z до максимального отклонения по оси z . Однако в опыте Штерна – Герлаха атомный пучок расщеплялся на две компоненты, симметрично расположенные относительно первоначального направления (см рис. 11.4). Полученный

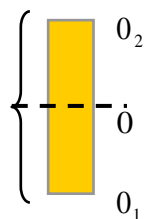


Рис. 11.3.

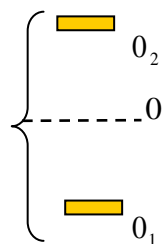


Рис. 11.4.

результат означает, что атомы пучка обладают магнитным моментом \vec{M} , проекция которого M_z в поле \vec{H} принимает только два значения M_z , т.е. *проекция магнитного момента квантуется* (принимает дискретные значения). Этот вывод согласуется с теоретическими представлениями о пространственном квантовании проекции магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля \vec{H} : $M_z = mM_B$ (при $m = \pm 1$).

Однако, если $m = \pm 1$, то мы имеем дело, по крайней мере, с орбитальным квантовым числом $l = 1$. И помимо атомов с проекциями $m = \pm 1$ должны быть атомы с проекцией с $m = 0$, для которых магнитная сила равна 0 и которые бы не отклонялись от отметки 0 на экране.

В опыте Штерна – Герлаха использовались атомы серебра, в основном состоянии которых во внешней электронной оболочке находится один электрон в s – состоянии. Электрон в s – состоянии не обладает орбитальным и магнитным моментами (орбитальное квантовое число $l = 0$). То, что атомы серебра испытывают отклонение в магнитном поле, означает, что магнитный момент атома может быть связан только с существованием собственного магнитного момента электрона. Опыт Штерна – Герлаха и другие, более ранние, эксперименты привели Уленбека и Гаудсмита (1925г.) к гипотезе существования у электрона собственного механического момента – *спина*. Поскольку проекция спина электрона равна $S_z = \pm \hbar/2$ и имеем только 2 значения магнитного момента $M_B = \pm \frac{e\hbar}{2m_0c}$, то в своем опыте Штерн и Герлах получили именно 2 расщепленные полоски.

Примечание 2. Отто Штерн, O.Stern, немецкий физик, 1888–1969, Нобелевская премия 1943г. за развитие молекулярно-лучевого метода и открытие магнитного момента протона.

Вальтер Герлах, W.Gerlach, немецкий физик, 1889–1979.

Джордж Юджин Уленбек, американский физик-теоретик, 1900.

Сэмюел Абрахам Гаудсмит, американский физик-теоретик, 1902–1979.

3.12. Диамагнетизм.

3.12.1. Ларморовская прецессия.

Как уже отмечалось в §3.9 (пункт 3.9.1), диамагнетизм присущ всем веществам, но практически проявляется лишь у тех веществ, атомы которых в отсутствие внешнего магнитного поля не обладают магнитным моментом. Проясним, что происходит с этими атомами при включении магнитного поля.

Рассмотрим движение электрона в атоме с позиций классической физики. Частица массой m , движущаяся по круговой орбите радиусом \vec{r} со скоростью \vec{v} , обладает механическим моментом количества движения

$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}].$$

Вращение электрона вокруг ядра создает круговой ток (рис. 12.1). Поэтому орбитальное движение электрона можно охарактеризовать магнитным моментом \vec{M} . Во внешнем магнитном поле на него действует момент силы:

$$\vec{M} = [\vec{M}, \vec{B}] = \frac{I}{c} [\vec{S}, \vec{B}], \tag{3.12.1}$$

который стремится развернуть орбитальный магнитный момент электрона в направлении магнитного поля \vec{B} .

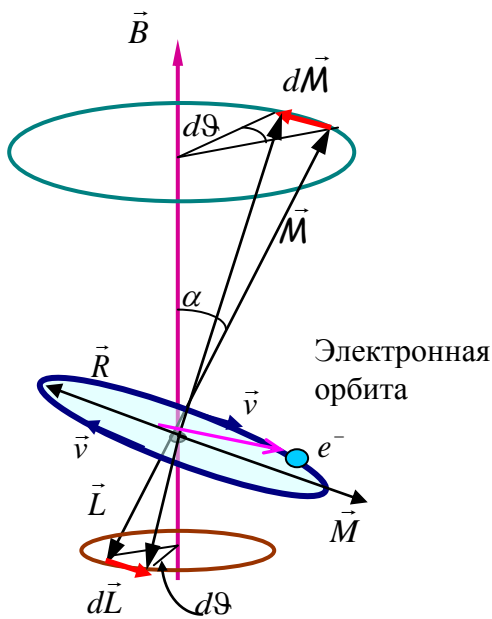


Рис. 12.1.

Механический момент импульса \vec{L} , обусловленный орбитальным движением электрона, направлен в сторону, противоположную магнитному моменту \vec{M} , (т.к. заряд электрона $e^- < 0$) и может изменяться под действием силы Лоренца, действующей на электрон со стороны магнитного поля.

Найдем изменение момента импульса электрона $d\vec{L}$ (см рис. 12.1). Механический момент количества движения электрона связан с моментом сил \vec{M} , действующим на электрон в магнитном поле, уравнением моментов:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{3.12.2}$$

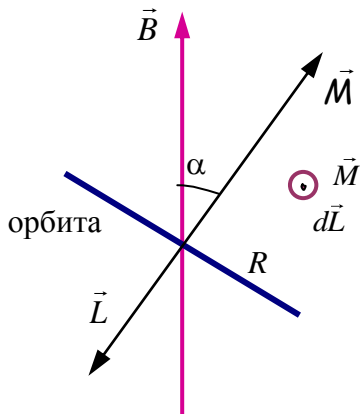


Рис. 12.2.

Следовательно, изменение момента импульса электрона $d\vec{L} = \vec{M}dt$ и очевидно, что $d\vec{L} \parallel \vec{M}$. Изменение момента импульса орбитального движения электрона можно связать с углом поворота $d\vartheta$ плоскости (\vec{B}, \vec{M}) , или (\vec{B}, \vec{L}) вокруг направления магнитного поля \vec{B} . Угол $d\vartheta$ называется *углом прецессии*. Так как вектор момента силы \vec{M} перпендикулярен плоскости (\vec{B}, \vec{M}) , или (\vec{B}, \vec{L}) , то и $d\vec{L}$ также перпендикулярен этой плоскости.

На рис. 12.2 векторы \vec{B} , \vec{L} и \vec{M} лежат в плоскости листа, а векторы момента силы \vec{M} и приращения момента

импульса $d\vec{L}$ перпендикулярны ей и направлены из плоскости страницы на читателя. Модуль вектора приращения момента импульса $d\vec{L}$ равен:

$$|d\vec{L}| = |\vec{M}| dt = \left| [\vec{M}, \vec{B}] \right| dt = M \cdot B \sin \alpha \cdot dt. \quad (3.12.3)$$

Тогда приращение угла прецессии определяется отношением длины дуги к радиусу (рис. 12.1):

$$d\vartheta = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}| \sin \alpha} = \frac{M \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot dt}{L \cdot \sin \alpha} = \frac{M \cdot B}{L} dt, \quad (3.12.4)$$

а *угловая скорость прецессии* соответственно равна:

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{M \cdot B}{L} = \frac{e}{2mc} B, \quad (3.12.5)$$

так как $\frac{M}{L} = \frac{e}{2mc}$ – гиромангнитное отношение для орбитального движения электрона (см § 3.11). Итак, орбита электрона прецессирует с постоянной угловой скоростью (частотой) – частотой *ларморовской прецессии*:

$$\omega_L = eB/2mc.$$

Частота прецессии ω_L одинакова для всех электронов и не зависит от радиуса орбиты и наклона орбиты к вектору индукции внешнего магнитного поля \vec{B} . Ларморовская частота ω_L много меньше частоты ω орбитального движения электрона $\omega_L \ll \omega$ даже в очень сильных магнитных полях (рекордное значение постоянного магнитного поля на эксперименте $B \sim 36 \text{ Тс} = 360\,000 \text{ Гс}$, импульсного поля $\sim 2.8 \cdot 10^3 \text{ Тс}$).

Теорема Дж. Лармора: *При наличии внешнего постоянного магнитного поля внутреннее движение электронов атома не изменяется, но атом в целом получает дополнительное вращение с угловой скоростью ω_L .*

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2mc} \vec{B} \quad (3.12.6)$$

Понятно, что вектор угловой скорости ларморовского вращения электронов $\vec{\omega}_L$ совпадает по направлению с вектором магнитной индукции \vec{B} и не зависит от направления скорости движения электрона по орбите (!). Таким образом, все орбиты электронов в атоме испытывают одинаковую по величине и направлению прецессию. Так как заряд электрона отрицательный ($e^- < 0$), то магнитный момент \vec{M}' , связанный с этим вращением, направлен против поля \vec{B} и может быть представлен как

$$\vec{M}' = \frac{1}{c} I' S = \frac{e\omega_L}{c2\pi} \pi \langle r^2 \rangle = \frac{e\omega_L}{2c} \langle r^2 \rangle, \quad (3.12.7)$$

$$I' = \frac{e}{T} = \frac{e\omega_L}{2\pi}$$

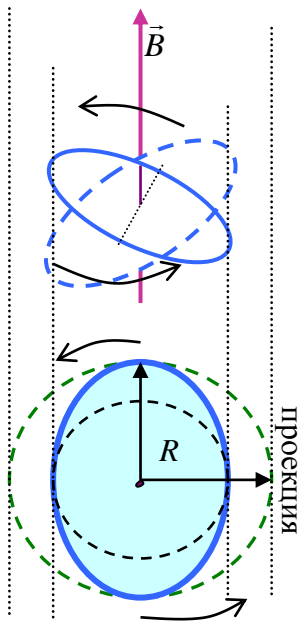


Рис. 12.3.

где T – период прецессии; здесь мы ввели также средний квадрат радиуса проекции орбиты на плоскость, перпендикулярную направлению поля (см рис. 12.3). Все орбиты электронов, в принципе, разные и находятся под некоторым углом к внешнему полю, а вклад каждой орбиты определяется ее проекцией на плоскость перпендикулярную направлению магнитного поля. На рис. 12.3 показано, что эти проекции имеют вид эллипсов, которые с угловой скоростью $\bar{\omega}_L$ вращаются вокруг направления \vec{B} . В результате создается намагничивание среды \vec{J} , направленное против вектора вызывающего его магнитного поля \vec{B} . Это явление называют *диамагнетизмом*.

Примечание 1. Джозеф Лармор, английский физик, 1857-1942.

3.12.2. Диамагнитная восприимчивость и проницаемость.

Рассчитаем диамагнитные восприимчивость и проницаемость вещества. Момент импульса электрона, обусловленный прецессией, равен $L_L = mr^2\omega_L$, тогда соответствующий магнитный момент можно получить, используя гиромагнитное отношение:

$$\vec{M} = -\frac{er^2}{2c}\bar{\omega}_L = -\frac{e^2r^2}{4mc^2}\vec{B} \quad (3.12.8)$$

Чтобы найти наведенный магнитный момент атома, надо просуммировать вклад всех его электронов. Средний квадрат радиуса проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную полю \vec{B} , определяющий магнитный момент ларморовской прецессии, равен $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$. Квадрат расстояния электрона до ядра атома R^2 определяется выражением $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Полагая, что электроны в атоме распределены сферически симметрично, можем записать

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle R^2 \rangle. \quad (3.12.9)$$

Если в атоме Z электронов, то его средний магнитный момент, обусловленный ларморовской прецессией в магнитном поле равен:

$$M = -\frac{Ze^2(\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle)}{4mc^2} B \approx -\frac{Ze^2}{6mc^2} \langle R^2 \rangle H, \quad (3.12.10)$$

где

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle R^2 \rangle \quad (3.12.11)$$

Замена индукции магнитного поля B на его напряженность H произведена в связи с тем, что для диамагнетиков разница между этими величинами пренебрежимо мала $B \approx H$. Тогда, если n – число атомов в единице объема, вектор намагничивания, т.е. магнитный момент единицы объема, равен:

$$\vec{J} = -\frac{nZe^2}{6mc^2} \langle R^2 \rangle \vec{H} \quad (3.12.12)$$

Из выражения $\vec{J} = \chi \vec{H}$ находим магнитную восприимчивость диамагнетика

$$\chi = -\frac{nZe^2}{6mc^2} \langle R^2 \rangle \quad (3.12.13)$$

Видно из (3.12.13), что магнитная восприимчивость диамагнетиков зависит только от типа атома и концентрации.

Примечание 2. В системе СИ магнитная восприимчивость диамагнетиков равна:

$$\chi = -\frac{nZe^2}{6m} \mu_0 \langle R^2 \rangle$$

Магнитная проницаемость материала определяется:

$$\mu = 1 - 4\pi \frac{nZe^2}{6mc^2} \langle R^2 \rangle \quad (3.12.14)$$

То есть, получаем, что для диамагнетизма магнитная восприимчивость меньше нуля: $\chi < 0$; и отсюда следует, что магнитная проницаемость меньше единицы: $\mu < 1$.

Энергия теплового движения слишком мала, чтобы изменить внутреннее движение в атоме. Поэтому восприимчивость и проницаемость диамагнетиков не должны зависеть от температуры. Этот вывод следует из соотношений (3.12.13)- (3.12.14), что находится в согласии с опытом.

С ларморовским вращением связана дополнительная кинетическая энергия атома. Магнитные силы не могут сообщить атому ларморовское вращение, т.к. они перпендикулярны скорости электрона и поэтому работы не производят. Поэтому магнитные силы могут только поддерживать, но не создавать ларморовское вращение. Это движение возникает во время включения магнитного поля и является одним из проявлений электромагнитной индукции.

Величина диамагнитного эффекта мала $\chi \sim -10^{-6}$, так как пропорциональна $\langle R^2 \rangle \sim 10^{-16} \text{ см}^2$. Например, магнитные восприимчивости водорода и воды при нормальных условиях равны, соответственно:

$$\begin{aligned}\chi &= -6 \cdot 10^{-8} && \text{для } H_2 \\ \chi &= -9 \cdot 10^{-6} && \text{для } H_2O\end{aligned}$$

В заключение параграфа отметим, что *диамагнетизм есть универсальное явление, присущее всем средам*. Однако в тех случаях, когда атомы обладают собственными магнитными моментами, диамагнитный эффект перекрывается значительно более сильным парамагнитным эффектом.

3.13. Парамагнетизм.

3.13.1. Магнитная восприимчивость.

Вещества, у которых магнитная восприимчивость невелика, но больше нуля $\chi > 0$, а магнитная проницаемость больше единицы $\mu = 1 + 4\pi\chi > 1$, называются *парамагнетиками*. Явление *парамагнетизма* проявляется у веществ, атомы которых обладают собственным магнитным моментом в отсутствие магнитного поля.

В этом параграфе мы будем рассматривать лишь слабомагнитные, или не обладающие атомным магнитным порядком вещества, т.е. такие, в которых взаимодействием между магнитными моментами отдельных атомов можно пренебречь, и рассматривать только взаимодействие атомных магнитных моментов с внешним полем

В отсутствие внешнего поля в пространстве нет выделенных направлений, магнитные моменты отдельных атомов ориентированы беспорядочно, поэтому суммарный магнитный момент парамагнетика равен нулю $\sum \vec{M}_a = 0$.

Во внешнем магнитном поле магнитные моменты атомов \vec{M}_a ориентируются преимущественно по полю \vec{B} , т.к. минимум энергии (устойчивое состояние) достигается при совпадении направлений векторов \vec{M}_a и \vec{B} . Это следует из выражения для энергии взаимодействия магнитного дипольного момента \vec{M}_a с внешним магнитным полем \vec{B} :

$$W = -(\vec{M}, \vec{B}) = -MB \cos \vartheta.$$

Таким образом, вещество намагничивается в направлении вектора индукции магнитного поля \vec{B} ($\vec{J} \parallel \vec{B}$), т.е. магнитное поле увеличивается, что и составляет суть явления парамагнетизма:

$$\vec{B} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H};$$

$$\vec{J} = \chi\vec{H}.$$

Полуклассическая *теория парамагнетизма* была разработана П. Ланжевеном в 1905г. Поскольку намагниченность парамагнетика обусловлена ориентацией дипольных магнитных моментов во внешнем поле, введем функцию распределения $f(\vec{l})$ (плотность вероятности) для описания распределения осей диполей по направлениям в пространстве. Величина

$$dn = nf(\vec{l})d\Omega$$

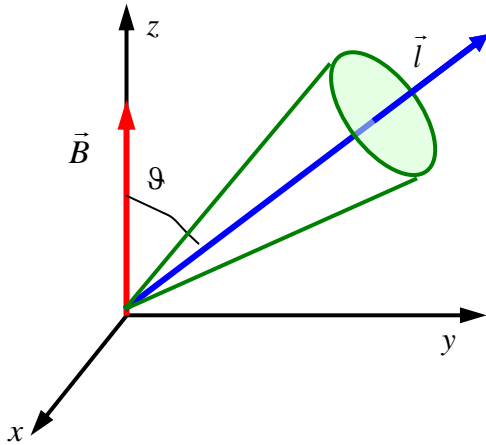


Рис. 13.1.

определяет среднее число диполей, оси которых лежат в пределах телесного угла $d\Omega$, в единице объема вещества (рис. 13.1). Единичный вектор \vec{l} указывает направление оси элементарного телесного угла $d\Omega$. В отсутствие внешнего магнитного поля все направления дипольных моментов равновероятны, т.е. $f(\vec{l})$ имеет одинаковые значения по всем направлениям.

При наличии внешнего магнитного поля в состоянии термодинамического равновесия пространственная ориентация магнитных моментов должна подчиняться распределению Больцмана, т.е.

$$f(\vec{l}) = C \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = C \exp\left(\frac{\vec{M}_a \vec{B}}{kT}\right) \quad (3.13.1)$$

Если выполняется условие

$$\frac{M_a B}{kT} \ll 1, \quad (3.13.2)$$

то функцию $f(\vec{l})$ можно разложить в ряд. Для того, чтобы понять в каких случаях это можно сделать, сделаем численные оценки. Положим магнитный момент атома равным магнетону Бора $M_a = M_b \cong 9 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}$; внешнее магнитное поле – $B = 10^4 \text{ Гс} (=1 \text{ Тл})$; температуру – $T = 300 \text{ К}$; $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$. Тогда в числителе получаем величину $(M_a \cdot B) \cong 9 \cdot 10^{-17} \text{ эрг}$; в знаменателе – $kT \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}$ и условие (3.13.2) хорошо выполняется.

Другими словами, для не слишком низких температур T и не слишком больших магнитных полей B имеем $\frac{M_a B}{kT} \ll 1$. Поэтому разложим функцию

$f(\vec{l})$ в степенной ряд и ограничимся первыми двумя членами разложения. Предполагая, что поле \vec{B} направлено вдоль оси z , получаем

$$f(\vec{l}) \cong C \left(1 + \frac{\vec{M}_a \vec{B}}{kT} \right) = C \left(1 + \frac{M_a B \cos \vartheta}{kT} \right). \quad (3.13.3)$$

Постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int f(\vec{l}) d\Omega = 1. \quad (3.13.4)$$

Здесь предполагается, что интегрирование производится по всем направлениям в пространстве:

$$C \int d\Omega + C \frac{M_a B}{kT} \int \cos \vartheta d\Omega = C 4\pi = 1, \quad \text{т.е. получаем}$$

$$C = \frac{1}{4\pi}. \quad (3.13.5)$$

Интеграл $\int \cos \vartheta d\Omega$ обращается в нуль, т.к. $\cos \vartheta$ может с равной вероятностью иметь одинаковые по модулю положительные и отрицательные значения.

По определению намагниченности $\vec{J} = n \langle \vec{M}_i \rangle$, где $\langle \vec{M}_i \rangle$ – средний магнитный момент частицы (атома). Очевидно, что вектор намагниченности среды \vec{J} будет направлен вдоль \vec{B} , т.е. направлен по оси z . Если магнитный момент атома \vec{M}_a заключен в элементарном телесном угле $d\Omega$, т.е. он направлен вдоль вектора \vec{l} , то его вклад в намагниченность равен $M_a \cos \vartheta$. Тогда, интегрируя по всем направлениям ($\Omega = 4\pi$), получаем

$$\vec{J} = n \langle \vec{M}_i \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \frac{n}{4\pi} M_a \int \left(1 + \frac{M_a B}{kT} \cos \vartheta \right) \cos \vartheta d\Omega = \frac{n}{4\pi} M_a \left(\int \cos \vartheta d\Omega + \frac{M_a B}{kT} \int \cos^2 \vartheta d\Omega \right) = \quad (3.13.6)$$

$$= \frac{n}{4\pi} M_a \left(0 + \frac{M_a B}{kT} \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{n M_a^2}{3kT} B$$

Таким образом, намагниченность вещества равна:

$$\vec{J} = \frac{n M_a^2}{3kT} \vec{B} \quad (3.13.7)$$

Используя соотношения $\vec{J} = \chi \vec{H}$ и $\vec{B} = \mu \vec{H} = (1 + 4\pi\chi) \vec{H}$, получаем следующее уравнение для определения магнитной восприимчивости:

$$\frac{\chi}{1 + 4\pi\chi} = \frac{n M_a^2}{3kT}. \quad (3.13.8)$$

Можно учесть малость магнитной восприимчивости χ по сравнению с единицей ($\chi \sim 10^{-7} \div 10^{-4}$; $4\pi\chi \ll 1$), тогда получаем для *парамагнитной восприимчивости* следующее выражение:

$$\chi = \frac{nM_a^2}{3kT} \quad (3.13.9)$$

Итак, зависимость магнитной восприимчивости парамагнетика от температуры имеет вид

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (3.13.10)$$

и носит название *закона Кюри*, где введена *постоянная Кюри*:

$$C = \frac{nM_a^2}{3k}$$

Эта зависимость магнитной восприимчивости от температуры была обнаружена экспериментально П. Кюри еще до разработки соответствующей теории в 1896 г.

Закон Кюри хорошо описывает парамагнетизм газов, паров щелочных металлов, разбавленных жидких растворов парамагнитных солей и некоторых парамагнитных солей в кристаллическом состоянии. Для большинства твердых тел температурная зависимость магнитной восприимчивости подчиняется закону Кюри-Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \quad (3.13.11)$$

где постоянная T_c – температура Кюри – которая также может быть получена из (3.13.8), если не пренебрегать магнитной восприимчивостью в знаменателе:

$$T_c = 4\pi C$$

Температура Кюри определяется взаимодействием магнитных моментов атомов между собой и с внутрикристаллическим полем и, таким образом, определяется свойствами вещества.

Примечание 1. *Поль Ланжевэн, французский физик, 1872-1946.*

Пьер Кюри, французский физик, 1859–1906; Нобелевская премия 1903г. за исследование радиоактивности и открытие радия.

Пьер Эрнест Вейсс, французский физик, 1865–1940.

3.13.2. Намагничивание в сильных полях (или при малых температурах T).

Обобщение результатов на случай сильных магнитных полей или низких температур, когда условие $\frac{M_a B}{kT} \ll 1$ не выполняется, было также выполнено

П. Ланжевром. Чтобы найти намагниченность при низких температурах необходимо учесть, что магнитный момент атома квантуется. Поэтому мы будем считать, что магнитный момент атома может принимать значения, кратные магнетону Бора $M_a = m M_B$ (см §3.9. формулы (3.9.1)-(3.9.2), $M_B = e\hbar/2m_0c \sim 0.9 \cdot 10^{-20}$ эрг/Гс), и соответственно рассматривать ориентации, допускаемые правилами квантования.

Для упрощения вычислений примем, что магнитный момент атома определяется только спиновым моментом и равен одному магнетону Бора $M_a = M_B$. Тогда в магнитном поле возможны только две ориентации магнитного момента: вдоль и против поля (см опыт Штерна – Герлаха, пункт (3.11.3)). При параллельной ориентации проекция магнитного момента атома на направление магнитного поля равна $(+M_B)$, в случае антипараллельной ориентации $-(-M_B)$. Этим состояниям соответствуют следующие энергии взаимодействия момента с внешним полем

$$W_{\uparrow\uparrow} = -M_B B \quad \text{и} \quad W_{\uparrow\downarrow} = +M_B B. \quad (3.13.12)$$

Согласно распределению Больцмана числа атомов в единице объема, сориентированных по полю и против поля, будут соответственно равны:

$$n_{\uparrow\uparrow} = C e^x \quad \text{и} \quad n_{\uparrow\downarrow} = C e^{-x},$$

где $x = M_B B / kT$. Нормировочная постоянная C определяется из условия $n_{\uparrow\uparrow} + n_{\uparrow\downarrow} = n$, где n – полная концентрация атомов. Это дает возможность определить C :

$$\begin{aligned} C(e^x + e^{-x}) &= n; \\ C &= \frac{n}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned} \quad (3.13.13)$$

Тогда намагничивание образца равно:

$$J = (n_{\uparrow\uparrow} - n_{\uparrow\downarrow}) M_B = n M_B \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = n M_B \text{th } x. \quad (3.13.14)$$

где $\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ – гиперболический тангенс.

Намагниченность образца принято описывать функцией Ланжевена $L(x)$. В рассмотренном нами случае функция Ланжевена обозначается $L_{1/2}(x)$ и равна

$$L_{1/2}(x) = \text{th } x. \quad (3.13.15)$$

Индекс $1/2$ соответствует спиновому механическому моменту атома, который в единицах \hbar равен $1/2$. Примерная зависимость функции

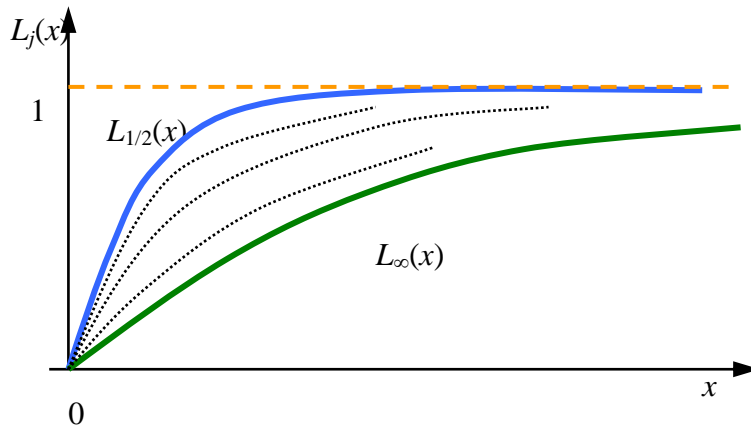


Рис. 13.2.

Ланжевена изображена на рис. 13.2.

Если магнитный момент атома больше одного магнетона Бора, то расчет проводится по той же схеме. При этом увеличивается только число возможных ориентаций и значения проекций магнитных моментов атомов на направление магнитного

поля. Во всех случаях результирующая намагниченность записывается в виде

$$J = nM_a L(x),$$

где $L(x)$ – функция Ланжевена. Для веществ, атомы которых обладают полным механическим моментом j , измеренным в единицах \hbar , функцию Ланжевена обозначают $L_j(x)$. При различных значениях j функция $L_j(x)$ изменяется, но общий характер зависимости сохраняется (см рис. 13.2). В классическом пределе, когда допускаются любые ориентации магнитных моментов атомов (нет квантования), функция Ланжевена обозначается $L_{\infty}(x)$ и равна

$$L_{\infty}(x) = \text{cth} x - \frac{1}{x}, \quad (3.13.16)$$

где $\text{cth} x$ – гиперболический котангенс. При малых значениях переменной x , разлагая функции Ланжевена (3.13.15) – (3.13.16) в ряд ($x = M_a B/kT \ll 1$), получаем:

$$L_{1/2}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots, \quad L_{\infty}(x) = \frac{1}{3}x + \dots$$

Тогда для намагниченности при $j = 1/2$ имеем

$$\text{а) с учетом квантования: } J = nM_a \frac{M_a B}{kT} = \frac{nM_a^2}{kT} B, \quad (3.13.17)$$

$$\text{б) без учета квантования } J = \frac{nM_a^2}{3kT} B, \text{ т.е. втрое меньше.} \quad (3.13.18)$$

Последний результат, как и следовало ожидать, совпадает с полученным при классическом рассмотрении задачи (см формулу (3.13.9)). Квантовый результат для $j = 1/2$ отличается от классического результата в 3 раза.

Тепловое движение атомов вещества недостаточно интенсивно, чтобы изменить сами магнитные моменты \vec{M}_a , которые определяются внутренним строением атома, а может определять только их ориентацию относительно магнитного поля. Поэтому, как следует из полученного результата, магнитная восприимчивость парамагнетиков должна меняться обратно пропорционально абсолютной температуре, что согласуется с опытным законом Кюри.

В сильных полях ($x \gg 1$) обе функции $L_{1/2}(x)$ и $L_\infty(x)$ асимптотически стремятся к единице, как это видно также из рис. 13.2. Этому соответствует состояние *насыщения намагничивания* $J = nM_a$, когда все магнитные моменты атомов выстраиваются параллельно магнитному полю.

Поясним в нескольких словах механизм возникновения намагниченности. В магнитном поле атом как целое совершает регулярную прецессию с ларморовской частотой вокруг направления магнитного поля (рис. 13.3). При таком движении угол между направлениями магнитного момента \vec{M}_a и поля \vec{B} и, следовательно, проекция вектора \vec{M}_a на направление магнитного поля остаются неизменными. Поэтому прецессия сама по себе не может привести к намагничиванию парамагнетика.

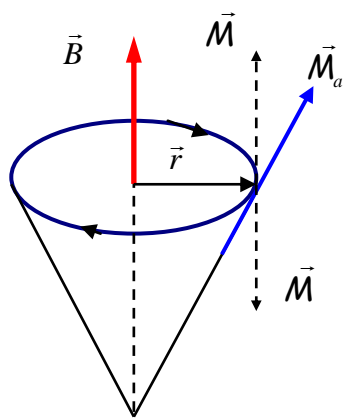


Рис. 13.3.

Намагничивание (для орбитального движения – изменение наклона плоскости орбиты относительно направления магнитного поля) *возникает в результате взаимодействий атомов между собой*.

Если атом получает толчок в направлении прецессионного вращения, то соответствующий момент сил вызовет дополнительную прецессию вокруг оси, перпендикулярной магнитному полю. Это приведет к увеличению угла между векторами \vec{M}_a и \vec{B} . Толчок, полученный атомом в противоположном направлении, уменьшит этот угол. Взаимодействия первого типа будут размагничивать парамагнетик, а второго – намагничивать. В целом эффект намагничивания будет преобладающим, т.к. толчки, получаемые навстречу движению, будут в среднем сильнее толчков, получаемых “вдогонку”.

Таким образом, намагничивание веществ создается и устанавливается в результате столкновений атомов между собой. Магнитное поле \vec{B} только задает направление в пространстве и поддерживает намагничивание парамагнетика, но не создает его.

Парамагнетизм, создаваемый ориентацией во внешнем поле магнитных моментов атомов, не является единственным вкладом, определяющим парамагнитные свойства веществ и, прежде всего, твердых тел.

Дополнительный вклад в магнитные свойства материалов могут вносить эффекты, связанные, например, с влиянием кристаллического поля решетки на движение электронов в атоме (парамагнетизм Ван-Флека), а также обусловленные спиновыми магнитными моментами электронов проводимости (парамагнетизм В. Паули). В отличие от “ориентационного” парамагнетизма эти составляющие магнитной восприимчивости в широких пределах не зависят от температуры.

3.14. Ферромагнетизм.

Ферромагнетизм – магнитоупорядоченное состояние вещества, при котором все магнитные моменты атомных носителей магнетизма в пределах пространственных областей, называемых *доменами*, параллельны. Сами ферромагнитные вещества обладают при этом самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью.

3.14.1. Свойства ферромагнетиков.

Ферромагнетиками называются вещества, обладающие **атомным магнитным порядком** в отсутствие внешнего поля. Другими словами, ферромагнитным называется такое состояние вещества, при котором энергия взаимодействия между атомными магнитными моментами значительно превышает энергию взаимодействия магнитных моментов отдельных атомов с внешним магнитным полем. Именно эти вещества обнаруживаются в природе в виде постоянных магнитов.

Ферромагнитное состояние вещества реализуется ниже определенной температуры, называемой температурой Кюри. При более высоких температурах эти вещества, как правило, переходят в парамагнитное состояние, в котором температурная зависимость их магнитной восприимчивости подчиняется закону Кюри – Вейсса (см формулу (3.13.11)).

Среди чистых химических элементов ферромагнитными свойствами обладают переходные металлы группы железа: железо Fe, кобальт Co, никель Ni (*3d* – металлы) и редкоземельные металлы: гадолиний Gd, тербий Tb, диспрозий Dy, гольмий Ho, эрбий Er, тулий Tm (*4f* – элементы). Кроме того, ферромагнетиками является большое количество сплавов этих и некоторых других металлов.

Характерной особенностью ферромагнетиков является *сложная нелинейная зависимость между намагниченностью \vec{J} и напряженностью магнитного поля \vec{H}* или между векторами \vec{B} и \vec{H} . Типичные зависимости $J(H)$ и $B(H)$ изображены на рис. 14.1. Впервые эту зависимость систематически исследовал для железа А.Г. Столетов.

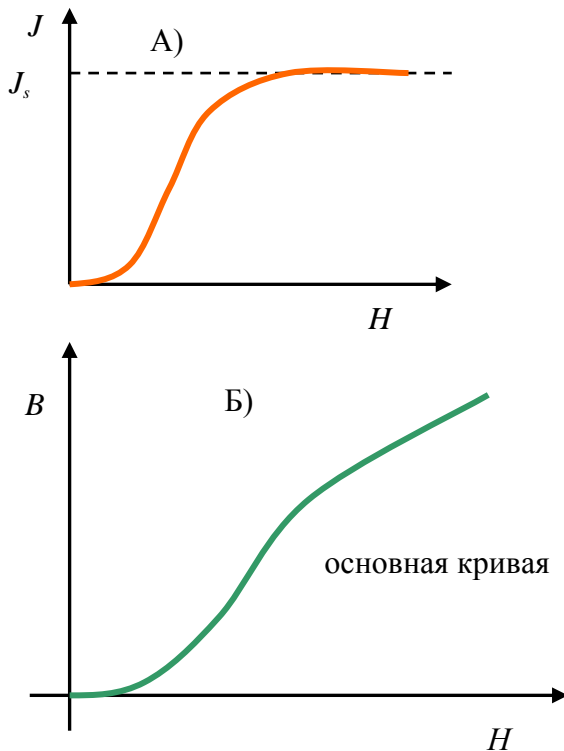


Рис. 14.1.

Если тело изначально не намагничено, то по мере возрастания \vec{H} намагниченность \vec{J} сначала быстро растет, а затем становится практически постоянной: $\vec{J} = \vec{J}_s$ – *состояние насыщения*, т.е. кривая $J = J(H)$ переходит в горизонтальную прямую (кривая А на рис. 14.1).

Магнитная индукция в образце

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{J} \quad (3.14.1)$$

также возрастает с ростом поля \vec{H} . В состоянии насыщения получаем

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{J}_s = \vec{H} + const, \quad (3.14.2)$$

т.е. кривая $B = B(H)$ переходит в прямую, наклоненную к обоим осям под углом 45° (если H и B отложены в одинаковых масштабах, кривая Б на

рис. 14.1). Для ферромагнетиков можно по-прежнему написать соотношения

$$\vec{J} = \chi\vec{H} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}. \quad (3.14.3)$$

Однако теперь магнитные восприимчивость χ и проницаемость μ следует рассматривать не как определенные постоянные величины, а как функции напряженности магнитного поля H . Эти функции χ и μ сначала возрастают с увеличением поля, проходят через максимум при достижении в материале

намагниченности насыщения и затем стремятся в сильных полях к нулю ($\chi \rightarrow 0$) и единице ($\mu \rightarrow 1$), соответственно.

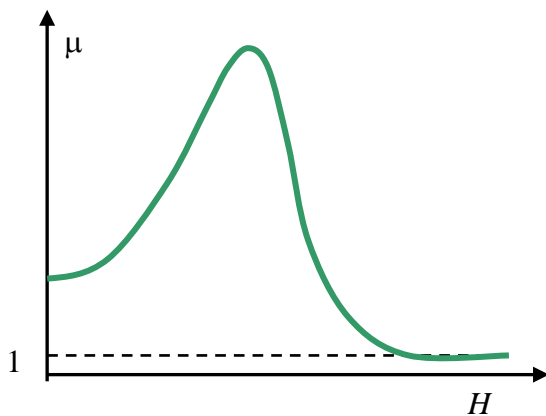


Рис. 14.2.

Примерная зависимость проницаемости магнитного поля μ в ферромагнетиках изображена на рис. 14.2. Определение χ и μ с помощью ранее приведенных соотношений лишено смысла. Поэтому для ферромагнетиков величины χ и μ определяются соотношениями –

дифференциальными восприимчивостями и проницаемостями:

$$\chi = \frac{dJ}{dH}, \quad \mu = \frac{dB}{dH}. \quad (3.14.4)$$

Значения проницаемости μ в максимуме для большинства ферромагнетиков достигают сотен и тысяч единиц (чистое железо – 5000), а для некоторых специальных сплавов приближаются к миллиону (супермаллой – 800000). Следует заметить, что понятие магнитной проницаемости применяют только к основной кривой намагничивания (кривая, которая начинается из нуля $0A_1A$ на рис. 14.3).

Второй характерной особенностью ферромагнетиков является наличие *магнитного гистерезиса*, т.е. связь между величинами J и H или B и H

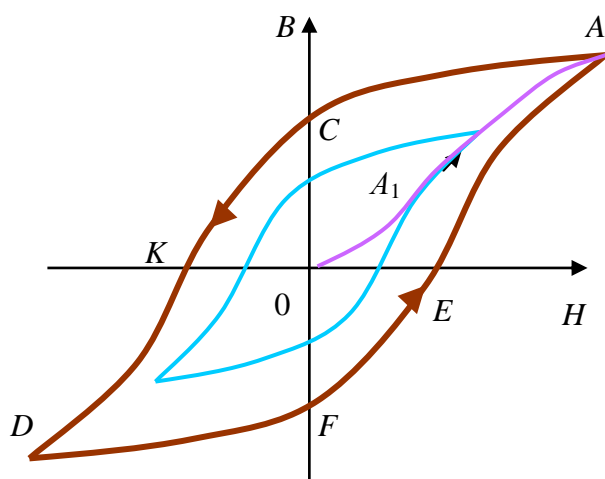


Рис. 14.3.

является неоднозначной и определяется предшествующей историей намагничивания ферромагнетика.

Пусть имеем первоначально не намагниченный ферромагнетик. Будем его намагничивать, увеличивая поле H от нуля до значения H_1 , при котором наступает насыщение (точка A на рис. 14.3). Затем начнем уменьшать магнитное поле, изменяя его величину от значения $+H_1$ до противоположного по знаку

значения $-H_1$. Как показывает опыт, кривая намагничивания пойдет не по начальному пути $0A_1A$, а пройдет выше, например, по пути $ACKD$. Если теперь изменять напряженность поля в обратном направлении от $-H_1$ до значения $+H_1$, то кривая намагничивания пройдет ниже $0A_1A$ – по пути $DFEA$ (рис. 14.3).

Полученная замкнутая кривая называется *петлей гистерезиса*. Если в точках A и D материал достигает насыщения, то петля гистерезиса носит название *максимальной*, или *предельной*. Когда в крайних точках петли насыщения нет, то получается петля меньшего размера, как бы вписанная в предельную. Кривая $0A_1A$ называется *основной кривой намагничивания*. Из рисунка видно, что при $H = 0$ индукция B не обращается в нуль. Величина индукции B , численно равная отрезку $0C$ на оси ординат, называется *остаточной индукцией*, а соответствующая ей величина $J = \frac{B}{4\pi}$ – *остаточной намагниченностью*. С наличием остаточного намагничивания связано существование постоянных магнитов в природе.

Для того чтобы размагнитить материал, надо довести кривую намагничивания до точки K , т.е. приложить к образцу магнитное поле H_c , численно равное длине отрезка $0K$ на оси абсцисс и имеющее направление,

противоположное полю, вызвавшему намагничивание. Величина H_c называется *коэрцитивной силой*. Значения остаточного намагничивания и коэрцитивной силы для разных ферромагнетиков меняются в широких пределах. По величине коэрцитивной силы ферромагнетики делятся на магнитно-мягкие (материалы для трансформаторов, электромоторов, генераторов и т.д.) и магнитно-жесткие (постоянные магниты).

Третьей характерной особенностью ферромагнетиков является наличие определенной температуры, называемой *точкой (температурой) Кюри* T_c , при переходе через которую вещество претерпевает фазовый переход второго рода. В результате получаем, что ферромагнитные свойства вещества реализуются только ниже определенной температуры $T < T_c$. При переходе через точку Кюри вещество теряет эти свойства и при температурах $T > T_c$ находится, как правило, в парамагнитном состоянии. В окрестности точки Кюри парамагнитная восприимчивость образца подчиняется закону Кюри–Вейсса

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \quad (3.14.5)$$

где C – постоянная, зависящая от свойств конкретного вещества.

3.14.2. Природа ферромагнетизма.

Первая количественная теория ферромагнетизма была разработана П. Вейссом в 1907 г. Эта теория носит полуфеноменологический характер. Чтобы учесть силы взаимодействия, которые ориентируют магнитные моменты атомов ферромагнетика, Вейсс наряду с обычным макроскопическим полем в веществе ввел эффективное молекулярное поле. Последнее, согласно предположению Вейсса, пропорционально намагниченности ферромагнетика

$$H_{эфф} = AJ_s, \quad (3.14.6)$$

где A – постоянная молекулярного поля ($A > 0$), J_s – намагниченность насыщения. Энергия магнитного взаимодействия в этом случае квадратично зависит от J_s :

$$W = -J_s H_{эфф} / 2 = -AJ_s^2 / 2 < 0. \quad (3.14.7)$$

Отсюда следует, что ферромагнетик будет самопроизвольно намагничен и в отсутствие внешнего поля, т.к. благодаря гипотетическому взаимодействию, введенному Вейссом, состояние спонтанного намагничивания энергетически выгодно.

Теория молекулярного поля дает хорошее согласие с опытом при высоких температурах ($T \sim T_c$). Однако, простые оценки показывают, что постоянная молекулярного поля имеет величину порядка $10^3 \div 10^4$, т.е. внутренние поля, необходимые для объяснения ферромагнетизма, в тысячи и десятки тысяч раз превышают магнитные поля, которые могут создать ориентированные магнитные моменты атомов в веществе. Поэтому ферромагнетизм не может быть объяснен магнитным взаимодействием атомов. Это доказал прямой опыт, поставленный Я.Г. Дорфманом в 1927 г.

Кратко рассмотрим опыт Дорфмана. Между полюсами сильного электромагнита параллельно магнитному полю помещалась никелевая фольга толщиной ~ 20 микрон. Через фольгу, перпендикулярно её поверхности (и полю \vec{H}), пропусклся пучок быстрых электронов от радиоактивного источника (β -излучение). После прохождения через фольгу след пучка регистрировался на фотопластинке. Измерения проводились как при включенном, так и при выключенном магнитном поле электромагнита. При постановке опыта предполагалось, что если никелевая фольга будет намагничена до насыщения параллельно её поверхности, то молекулярное поле \vec{H}_{mol} будет ориентировано во всем образце параллельно внешнему полю. Если это поле магнитной природы, то пучок электронов после прохождения через фольгу должен отклоняться под действием суммарного поля $\vec{H} + \vec{H}_{mol}$. Ожидаемое отклонение составило бы ~ 10 мм. Обнаруженное на опыте смещение пучка $\sim 0,3$ мм и соответствовало полю в образце $\sim 10^4$ Гс. На основании этого опытного результата был сделан вывод о немагнитной природе молекулярного поля.

Объяснение свойств ферромагнетиков при низких температурах и объяснение физической природы молекулярного поля Вейсса смогла дать только квантовая физика. Это было сделано в 1927 ÷ 1928 гг. в работах Я.И. Френкеля и В. Гейзенберга. Кратко рассмотрим суть идеи, не привлекая математического аппарата квантовой механики. В отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнитный образец можно рассматривать как совокупность большого числа малых (но макроскопических $\sim 1 \div 10$ мкм) пространственных областей, каждая из которых намагничена до насыщения (идея Вейсса). Эти области получили название *доменов*. При этом векторы намагниченности отдельных доменов \vec{J}_{Si} направлены так, что суммарный магнитный момент всего образца равен нулю (учитывая объем домена V_i):

$$\vec{M} = \sum_i \vec{J}_{Si} V_i = 0.$$

В монокристаллических ферромагнетиках существуют оси легкого намагничивания (главные оси симметрии кристалла), вдоль (против) которых

направлены векторы самопроизвольной намагниченности \vec{J}_s ферромагнитных доменов.

“Распад” ферромагнетика на домены происходит потому, что этот процесс энергетически выгоден. Он является следствием конкуренции двух видов взаимодействий: *обменного*, имеющего существенно квантовомеханическую природу, и *магнитного* – диполь-дипольного взаимодействия магнитных моментов. Минимум суммарной энергии этих взаимодействий определяет устойчивую конфигурацию внутренней структуры магнетика. Обменное взаимодействие – короткодействующее (радиус действия \sim размеров атомов). Оно стремится установить магнитные моменты атомов параллельно и отвечает за однородную намагниченность в доменах. Минимум энергии обменного взаимодействия электронов достигается при намагничивании всего ферромагнетика в определенном направлении. Однако такому состоянию магнетика соответствует значительная энергия создаваемого им магнитного поля. Диполь - дипольное взаимодействие не может конкурировать с обменным взаимодействием в пределах домена. Однако, являясь дальнедействующим, оно ориентирует антипараллельно векторы намагниченности соседних доменов. Тем самым магнитное поле, возбуждаемое ферромагнетиком, ослабляется, и уменьшается соответствующая ему энергия.

Благодаря короткодействующему характеру обменных сил, энергия обменного взаимодействия остается неизменной для всех электронов, за исключением электронов на границах доменов. Энергия этих электронов возрастает из-за различной ориентации электронных спинов атомов, принадлежащих соседним доменам. Энергия обменного взаимодействия атомов, расположенных на границах доменов, пропорциональна полной площади поверхностей, вдоль которых граничат домены, и носит название *поверхностной энергии*. По мере увеличения числа доменов поверхностная, а с ней и полная энергия обменного взаимодействия возрастает, но убывает энергия магнитного поля ферромагнетика. Образование доменов прекращается, когда сумма обменной и магнитной энергий достигает минимума. Этим условием определяется и размер доменов. При некоторых критически малых размерах ферромагнитных образцов образование в них нескольких доменов может стать энергетически невыгодным. Тогда такие мелкие ферромагнитные частицы при $T < T_c$ оказываются однородно намагниченными (однодоменные частицы).

Доменную структуру вещества можно наблюдать экспериментально методом порошковых фигур и при пропускании поляризованного света через ферромагнитные пленки.

Намагничивание ферромагнетика состоит в переориентации векторов намагниченности доменов в направлении приложенного поля и включает в себя *смещение*, *вращение* и *парапроцесс*.

Процесс *смещения* в многодоменном ферромагнетике заключается в перемещении границ между доменами: объем доменов, векторы \vec{J}_s которых составляют наименьший угол с направлением напряженности магнитного поля \vec{H} , при этом увеличивается за счет соседних доменов с энергетически менее выгодной ориентацией вектора намагниченности \vec{J}_s относительно поля. При своем смещении границы доменов могут менять форму, размеры и собственную энергию. Эти факторы в одних случаях способствуют, а в других препятствуют процессу смещения. Обычно задержка смещения (и, соответственно, намагничивания) происходит при встрече границы домена с какими-либо неоднородностями структуры ферромагнетика. Для продолжения смещения необходимо вновь изменять магнитное поле \vec{H} (либо температуру или давление). Такой рост доменов, происходящий в слабых полях, имеет обратимый характер.

Процесс *вращения* состоит в повороте векторов \vec{J}_s в направлении поля \vec{H} . Причиной возможной задержки или ускорения процесса вращения является магнитная анизотропия ферромагнетика (первоначально векторы доменов направлены вдоль осей легкого намагничивания, в общем случае не совпадающих с направлением вектора \vec{H}). При полном совпадении вектора намагниченности \vec{J}_s с направлением поля \vec{H} достигается, так называемое, техническое магнитное насыщение, равное величине намагниченности насыщения \vec{J}_s ферромагнетика при данной температуре.

Парапроцесс обусловлен ориентацией в поле элементарных носителей магнетизма (орбитальных и спиновых магнитных моментов), остававшихся неупорядоченными вследствие дезорганизующего действия теплового движения. Парапроцесс в большинстве случаев дает очень малый прирост намагниченности, поэтому намагничивание ферромагнетика определяется в основном процессами смещения и вращения.

Магнитную восприимчивость ферромагнетика можно приближенно представить в виде суммы

$$\chi = \chi_{\text{смещ}} + \chi_{\text{вращ}}. \quad (3.14.8)$$

Анализ кривых намагничивания $J(H)$ показывает, что в слабых полях $\chi_{\text{смещ}} \gg \chi_{\text{вращ}}$. В сильных полях, после крутого подъема кривой $J(H)$, имеем $\chi_{\text{вращ}} \gg \chi_{\text{смещ}}$.

На рис. 14.4 приведена кривая намагничивания полностью размагниченого ферромагнетика ($J = 0$) в медленно и монотонно возрастающем поле H (основная кривая намагничивания). На этой кривой можно выделить следующие характерные области, в которых преобладают разные механизмы намагничивания.

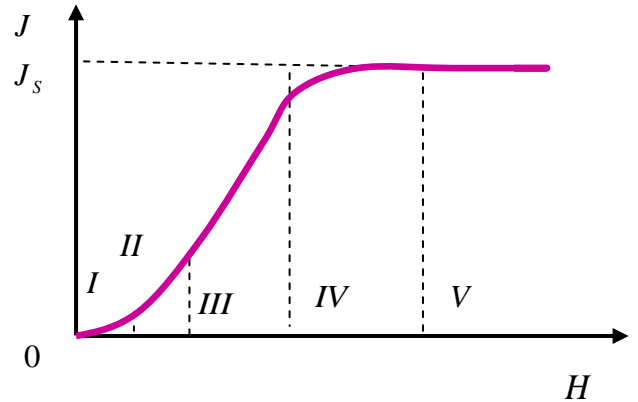


Рис. 14.4.

- I* – область начального, или обратимого намагничивания. Процессы упругого смещения границ доменов, $J \sim H$.
- II* – область Рэлея. Процессы упругого (обратимого, $J \sim H$) и неупругого (необратимого, $J \sim H^2$) смещения границ.
- III* – это область наибольших проницаемостей. Необратимое смещение междоменных границ. Скачкообразное намагничивание.
- IV* – область приближения к насыщению. Основную роль играют процессы вращения.
- V* – область парапроцесса.

При намагничивании ферромагнетиков изменяются их размеры и форма. Это явление называется *магнитострикцией*. Наблюдается также и обратный эффект, т.е. кривые намагничивания и петли гистерезиса зависят от внешних механических напряжений.

Опыт показывает, что при перемагничивании ферромагнетик нагревается. При этом в единице объема ферромагнетика выделяется теплота численно равная площади петли гистерезиса:

$$Q = \oint H dB. \quad (3.14.9)$$

3.14.3. Другие формы магнитного упорядочивания

Антиферромагнетизм. В зависимости от свойств кристалла обменные силы могут вызывать не только параллельную, но и антипараллельную ориентацию электронных спинов соседних атомов. В простейшем случае магнитную структуру антиферромагнетика можно представить как систему вставленных друг в друга пространственных решеток магнитных ионов – магнитных подрешеток, в узлах каждой из которых находятся магнитные моменты, параллельные друг другу. Каждая из подрешеток состоит из атомов одного сорта. Суммарные магнитные моменты подрешеток компенсируются,

поэтому в отсутствие внешнего поля результирующий магнитный момент антиферромагнетика равен нулю.

Под действием внешнего поля антиферромагнетики подобно парамагнетикам приобретают слабую намагниченность. Для магнитной восприимчивости χ антиферромагнетиков типичны значения $10^{-4} \div 10^{-6}$. Примеры таких веществ: MnO , MnS , MnF_2 , FeF_2 , FeCl_2 , Cr_2O_3 и другие.

В антиферромагнетике обменные силы отвечают за создание антиферромагнитного порядка и стремятся установить каждую пару соседних магнитных моментов строго антипараллельно. Ориентацию магнитных моментов в кристалле (относительно кристаллографических осей) определяют силы магнитной анизотропии. По аналогии с ферромагнетиком направление магнитных моментов в антиферромагнетике называют осью легкого намагничивания. Переход из антиферромагнитного состояния в парамагнитное происходит при температуре Нееля T_N и представляет собой фазовый переход II рода.

Если величина намагничивания обеих подрешеток неодинакова, то возникает нескомпенсированный антиферромагнетизм, называемый *ферримагнетизмом*. В этом случае вещество в отсутствие внешнего поля обладает отличным от нуля магнитным моментом, величина которого может быть довольно значительна (сравнима с ферромагнитным).

Эти типы магнетиков далеко не исчерпывают перечень веществ, обладающих атомным магнитным порядком. Однако их дальнейшее рассмотрение и изучение выходит за рамки нашего курса общей физики.

Дополнение 1. *Обменное взаимодействие* имеет электростатическую природу и эффективно проявляется в тех случаях, когда «перекрываются» волновые функции отдельных частиц системы, т.е. существуют области пространства, в которых с заметной вероятностью может находиться частица в различных состояниях движения. Для фермионов обменное взаимодействие является следствием принципа Паули, препятствующего сближению тождественных частиц с одинаковым направлением спинов, и эффективно проявляется как отталкивание их друг от друга на расстояниях порядка или меньше волны де Бройля.

Примечание 1. *Александр Григорьевич Столетов, русский физик, 1839-1896.*

Пьер Эрнест Вейсс, французский физик, 1865–1940.

Яков Григорьевич Дорфман, советский физик, окончил ЛПИ в 1925, работал в ФТИ им. А.Ф.Иоффе с 1921 по 1931, 1899-1974.

Яков Ильич Френкель, советский физик-теоретик, зав. кафедрой теоретической физики ЛПИ и работал в ФТИ, 1894-1952 гг.

Вернер Карл Гейзенберг, немецкий физик-теоретик, Нобелевская премия 1932 г. за создание квантовой механики – матричная форма, 1901-1976.

Генрих Георг Баркгаузен, немецкий физик, 1881–1956.

Луи Неель, французский физик, Нобелевская премия 1970 г. за работы по магнетизму, 1904–2000.

3.15. Электропроводность в магнитном поле.

3.15.1. Классический эффект Холла (1879 г.).

Когда металлическая пластинка, вдоль которой течет постоянный ток, помещена в магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости пластинки, то на боковых гранях, параллельных приложенному полю и току, возникает разность потенциалов

$$U_H = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Это *классический эффект Холла*.

Рассмотрим подробнее этот эффект, геометрия которого представлена на рис. 15.1. Постоянное магнитное поле направлено вдоль оси z , движение зарядов происходит вдоль оси x . В выбранной системе координат компоненты векторов скорости носителей тока (или вектора плотности тока) и индукции приложенного магнитного поля определяются:

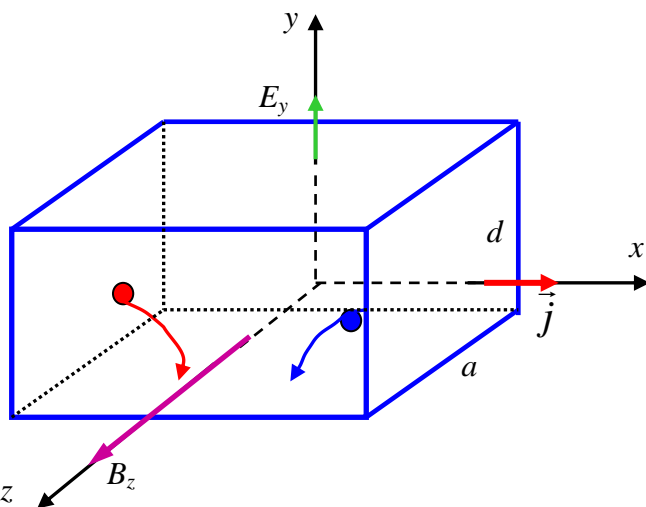


Рис. 15.1.

носителей тока (или вектора плотности тока) и индукции приложенного магнитного поля определяются: $\vec{v}(v_x, 0, 0)$ и $\vec{B}(0, 0, B_z)$, т.е. имеем

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \vec{e}_x \\ \vec{B} &= B_z \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.15.1)$$

Сила Лоренца

$$\vec{F} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}]$$

смещает заряды к грани перпендикулярной к оси y (рис. 15.1). Действие этой силы эквивалентно действию эффективного электрического поля \vec{E} :

$$q\vec{E} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \quad (3.15.2)$$

Поэтому заряды будут смещаться до тех пор, пока они не накопятся на гранях, перпендикулярных оси y , в количестве достаточном для того, чтобы создать такое же электрическое поле, препятствующее смещению зарядов:

$$\vec{E}(0, E_y, 0) \quad (3.15.3)$$

Отметим при этом, что положительные и отрицательные заряды смещаются в одну сторону. На рис. 15.2 показано направление тока \vec{j} (на рисунке слева направо) и соответствующее направление движения положительного и отрицательного зарядов (при этом индукция магнитного поля \vec{B} направлена перпендикулярно плоскости рисунка и направлена на нас).

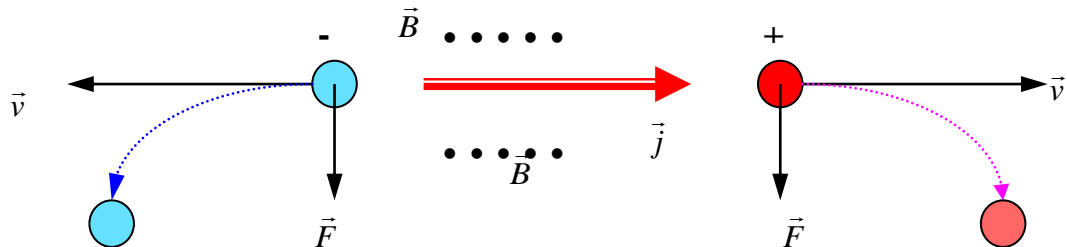


Рис. 15.2.

Итак, возникает электрическое поле, направленное по оси y и равное по величине:

$$E_y = \pm \frac{1}{c} v_x B_z \quad (3.15.4)$$

Знак «+» в (3.15.4) относится к положительным носителям тока, знак «-» – к отрицательным. Скорость движения зарядов находим из плотности тока $j_x = qn v_x$:

$$v_x = \frac{j_x}{qn}, \quad (3.15.5)$$

где n – концентрация носителей. Таким образом, электрическое поле Холла равно:

$$E_y = \frac{j_x B_z}{cnq} \quad (3.15.6)$$

Коэффициент или *постоянная Холла* определяются следующим образом:

$$R = \frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{cnq} \quad (3.15.7)$$

Разность потенциалов на обкладках по оси y (в силу того, что электрическое поле однородное) называется *Холловской разностью потенциалов*:

$$U_H = E_y d = R j_x B_z d = \frac{j_x B_z d}{cnq} \quad (3.15.8)$$

В этом и заключается эффект Холла. Эксперимент Холла позволяет определить знак носителей заряда. Смена знака носителей заряда ведет к смене направления E_y и, соответственно, к смене знака зарядов на стенках

образца. На практике постоянную Холла получают из следующего соотношения:

$$R = \frac{E_y \cdot ad}{Bj \cdot ad} = \frac{U_H \cdot a}{B \cdot I} \quad (3.15.9)$$

где a – ширина образца. Итак, измеряя постоянную Холла, можно найти знак и концентрацию носителей заряда. Было подтверждено, что в металлах носителями являются электроны. В полупроводниках проводимость может обеспечиваться как отрицательными, так и положительными носителями заряда – *дырками*.

Вводят понятие *подвижности* носителей тока (см ранее § 3.2 (3.2.9)):

$$\mu = \frac{v}{E} \quad (3.15.10)$$

где v – скорость носителей, а E – электрическое поле вдоль направления тока (в отличие от E_y). Тогда можно записать соотношение, связывающее постоянную Холла, проводимость и подвижность:

$$\frac{j}{E} = \sigma = nq \frac{v}{E} = nq\mu \quad (3.15.11)$$

$$R\sigma = \frac{\mu}{c}$$

Эффект Холла широко используется в опытах для определения знака заряда носителей тока.

3.15.2. Двумерный ток. МДП структуры.

Устремим толщину образца к нулю $a \rightarrow 0$ (рис. 15.1), получая при этом плоскую двумерную структуру, – по такой тонкой пластинке течет двумерный ток. Введем при этом линейную плотность тока \vec{i} (полный ток $I = id$) как ток, текущий через единицу длины (см) тонкой пластинки. При этом Холловская разность потенциалов, следуя (3.15.8), равна:

$$U_H = -\frac{di}{nqc} B = -\frac{IB}{nqc} \quad (3.15.12)$$

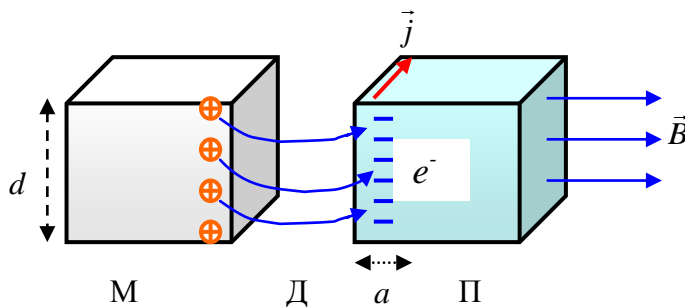


Рис. 15.3.

Концентрация носителей n в плоскости пластинки определяется:

$$n = \frac{dN}{dS} = \frac{dN}{dx dy} \quad (3.15.13)$$

Случай двумерного тока реализован в 70-е годы. На рис. 15.3 изображена структура, где

последовательно помещены (слева направо) М – металл и П – полупроводник, а между ними тонкий слой Д – диэлектрика. Это так называемые *МДП структуры*. Ток \vec{j} (\vec{i}) течет в плоскости x, y вдоль границы полупроводника в слое толщиной a (рис. 15.3, см также рис. 15.4).

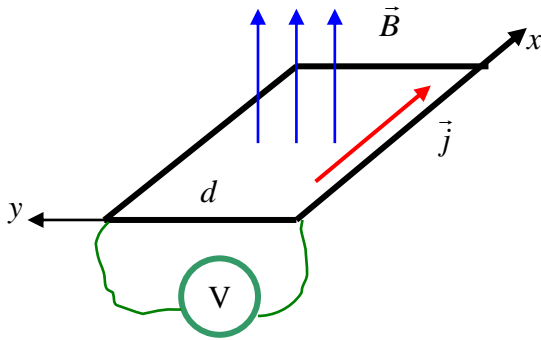


Рис. 15.4.

Диэлектрик обычно представляет собой очень тонкую пленку окисла на поверхности полупроводника. Электроны, перескочившие через диэлектрическую пленку в полупроводник посредством диффузии, задерживаются на поверхности полупроводника полем, возникающим в металле положительным зарядом. Толщина слоя $a \sim 10$ Ангстрем. Прикладываем внешнее электрическое поле параллельно границе раздела, так что

ток идет вдоль границы, и также прикладываем внешнее магнитное поле перпендикулярно поверхности (рис. 15.4). Таким образом получаем эффект Холла практически на плоской поверхности. Холловская разность потенциалов равна ($I = id$, $q = e$):

$$U_H = U_y = \frac{I_x B}{nec} \quad (3.15.14)$$

Откуда Холловское сопротивление равно:

$$r_H = \rho_{xy} = \frac{U_y}{I_x} = \frac{B}{nec} \quad (3.15.15)$$

Заметим, что это не совсем обычное сопротивление, т.к. обычное сопротивление определяется $R = \rho_{xx} = U_x/I_x$, а здесь имеем отношение Холловской разности потенциалов (по оси y) к току вдоль оси x . Холловское сопротивление (двумерный случай) не зависит от размеров образца:

$$r_H = \frac{U_y}{I_x} = \frac{E_y d}{i_x d} = \frac{E_y}{i_x} = \rho_{xy}, \quad (3.15.16)$$

т.е. полное сопротивление равно удельному сопротивлению (напомним дифференциальный закон Ома $\vec{E} = \rho \vec{j}$). Можно также показать для двумерного случая, что обычное сопротивление также не зависит от размеров образца в отличие от трехмерного случая.

Проводимость Холла: (на самом деле в теории она вводится чуть сложнее) в нашем случае равна:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{I_x}{U_y} = \frac{nec}{B} \quad (3.15.17)$$

Классические зависимости Холловского сопротивления и проводимости (3.15.17) от величины магнитной индукции B и концентрации носителей n представлены на рисунках 15.5 и 15.6.

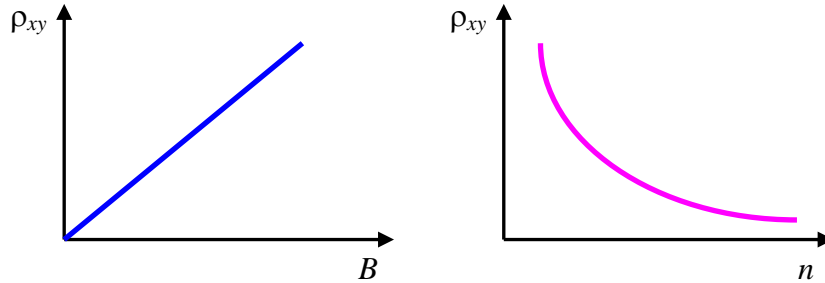


Рис. 15.5.

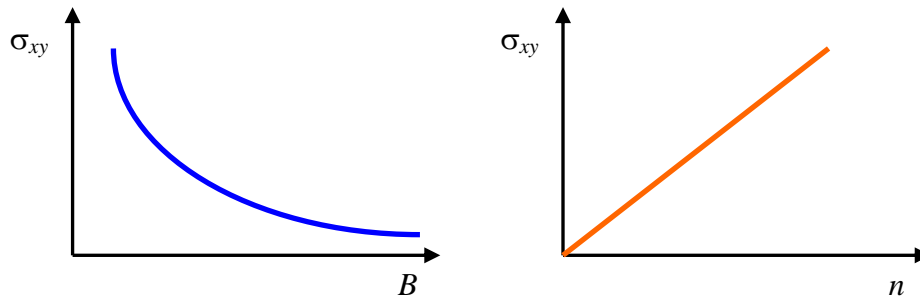


Рис. 15.6.

3.15.3. Квантовый эффект Холла.

Измерения проводимости двумерного тока при сверх низких температурах ($T \leq 5^{\circ}K$) показали, что Холловская проводимость σ_{xy} меняется ступенчато с ростом магнитного поля B и концентрации n носителей, в данном случае электронов (см рис. 15.7). Скачок проводимости определяется фундаментальными константами – элементарным зарядом e и постоянной Планка $\hbar = h/2\pi$. Этот скачок имеет смысл *кванта проводимости*:

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h}. \quad (3.15.18)$$

На рис. 15.7 представлены экспериментально полученные ступенчатые зависимости Холловской проводимости с изменением индукции B и концентрации n носителей, причем проводимость меняется по формуле

$$\sigma_{xy} = N \frac{e^2}{h}, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15.19)$$

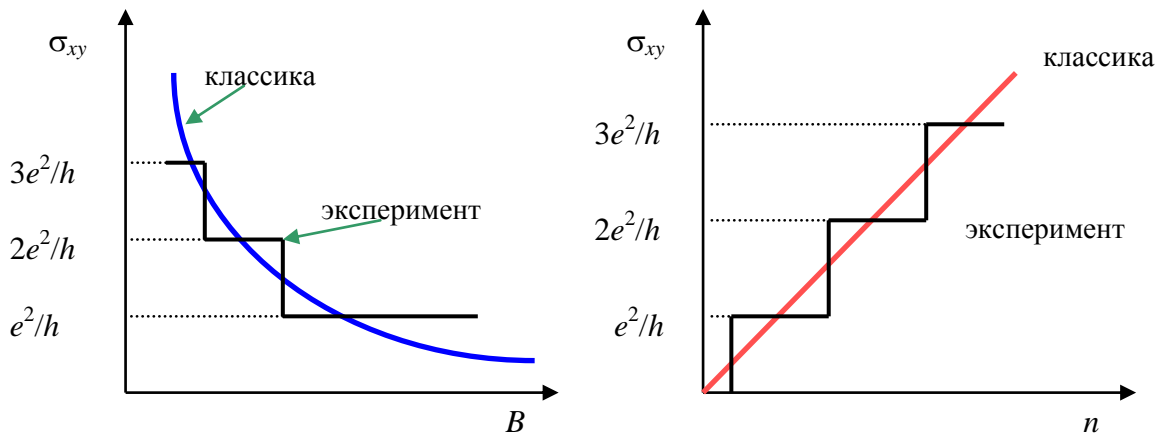


Рис. 15.7.

Точность определения ступенек и их соответствие кратным значениям e^2/h на эксперименте весьма велика, порядка 7-9 значащих цифр. Чем ниже температура, тем ярче выражены ступеньки. Итак, эксперимент показал, что сопротивление от “ступеньки” определяется фундаментальным соотношением:

$$r_{step} = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{h}{e^2} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} = 25812.80 \text{ Ом} \quad (3.15.20)$$

Из (3.15.20) следует **важный вывод**: от материала образца ничего не зависит. Сопротивление зависит только от фундаментальных констант. То есть мы получаем “*эталон сопротивления*” – международный стандарт сопротивления – r_{step} . Впервые это было обнаружено немецким физиком Клаусом фон Клитцингом, который за открытие квантового эффекта Холла получил Нобелевскую премию в 1985 году.

Приведем качественные соображения для пояснения движения электронов в плоскости. Уравнение движения электрона в магнитном поле имеет вид (см также §3.4):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \quad (3.15.21)$$

Поскольку сила всегда направлена перпендикулярно к вектору скорости, то энергия сохраняется, а электрон движется по окружности. В самом деле, умножим уравнение (3.15.21) скалярно на вектор скорости \vec{v} :

$$m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c} \vec{v} [\vec{v}, \vec{B}] = 0$$

Правая часть уравнения равна нулю, а левую представим в виде:

$$\frac{m}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = 0$$

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = const \quad (3.15.22)$$

где ω угловая скорость движения электрона по окружности. Подставляя $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ в (3.15.21), имеем (см рис. 15.8):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\omega}, \vec{v}] = -\frac{e}{mc} [\vec{v}, \vec{B}] = \frac{e}{mc} [\vec{B}, \vec{v}]$$

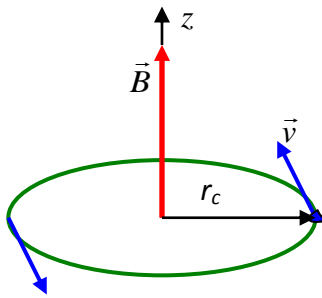


Рис. 15.8.

Из сравнения этих соотношений получаем **циклотронную частоту и циклотронный радиус**:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{e\vec{B}}{mc} \\ r_c &= \frac{mc}{eB} v \end{aligned} \quad (3.15.23)$$

Координаты электрона $x(t)$ и $y(t)$ как функции времени на плоскости (x,y) (см рис. 15.4) испытывают гармонические колебания с частотой ω , энергия которых в соответствии с квантовой механикой **квантуется**:

$$W_{\text{кол}} = W_{\text{вращ}} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \hbar\omega, \quad (3.15.24)$$

где $k = 0,1,2,3,\dots$. Расстояние между уровнями энергии при $\Delta k = 1$ определяется

$$\Delta W = \hbar\omega = \frac{m}{2} \omega^2 r_c^2.$$

Откуда получаем циклотронный радиус:

$$r_c^2 = \frac{2\hbar}{m\omega} = \frac{2\hbar c}{eB} \quad (3.15.25)$$

который, как видно, не зависит от массы частицы (и это важно!!).

Вернемся к двумерному эффекту Холла. Если тока нет, то электрон кружится на месте. Если ток есть, то “крутящийся” электрон движется поступательно (рис. 15.9). Радиус “кружка” определяется формулой (3.15.25). С математической точки зрения эффект Холла можно представить как дрейф

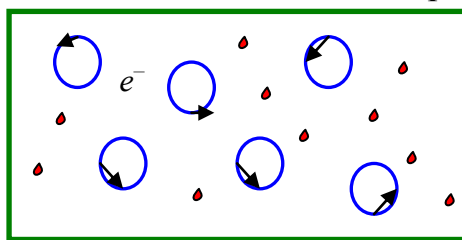


Рис. 15.9.

вращающегося электрона вдоль приложенного напряжения.

Сколько можно “уложить кружков”, если учесть невозможность их пересечения (по принципу Паули для ферми частиц)? Площадь кружка, учитывая (3.15.25), равна:

$$\pi r_c^2 = \frac{2\pi\hbar c}{eB} = \frac{1}{n_e},$$

где n_e – концентрация электронов при условии, что “кружки” заполняют всю плоскость:

$$n_e = \frac{eB}{2\pi\hbar c} \quad (3.15.26)$$

Холловская проводимость равна:

$$\sigma_{xy} = \frac{n_e e c}{B} = \frac{eB e c}{2\pi\hbar c B} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h} \quad (3.15.27)$$

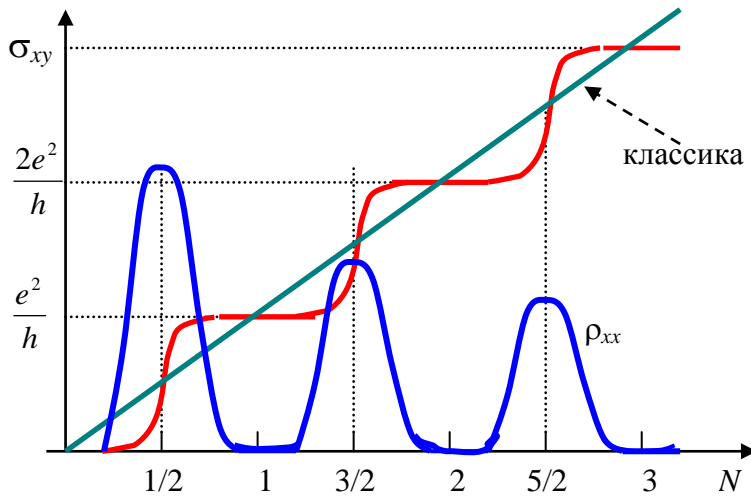


Рис. 15.10.

Оказывается, и это важно, что в двумерном случае площадь “кружка” πr_c^2 есть фазовый объем и эти “кружки” не могут накладываться друг на друга, поскольку только одна ферми-частица может находиться в этом элементе фазового объема. Но над плоскостью электронов можно заполнить еще одну плоскость электронов

(плоскость или уровень Ландау) – выше по энергии. Это происходит до тех пор, пока уровни “влезают” в толщину слоя $a \sim 10 \text{ \AA}$.

Пусть у нас заполнено N плоскостей, тогда Холловская проводимость равна:

$$\sigma_{xy} = N \frac{e^2}{h} \quad (3.15.28)$$

Как уровень Ландау заполнен и до момента заполнения следующего наблюдаем плато в проводимости (см рис. 15.10). Когда уровни Ландау заполняются и при этом появляются дополнительные носители, то эта ситуация соответствует моментам перехода с одного плато на уровень другого плато.

Интересен тот факт, что если рассмотреть обычное омическое сопротивление ρ_{xx} (синяя кривая на рис. 15.10), то оно равно нулю, когда Холловская проводимость соответствует заполненному уровню Ландау (т.е. соответствует (3.15.28)). В момент перестройки σ_{xy} омическое сопротивление отлично от нуля $\rho_{xx} \neq 0$.

Приложение 1. Квант магнитного потока.

Из квантования орбиты по правилу квантования Бора находим скорость электрона:

$$p \cdot 2\pi R = 2\pi k\hbar \quad \text{и} \quad v = \frac{k\hbar}{mR}, \text{ где } k = 1, 2, 3 \dots$$

Тогда радиус орбиты электрона, исходя из (3.15.23), равен: $R^2 = \frac{cmv}{eB} = k \frac{c\hbar}{eB}$

Сосчитаем поток магнитной индукции через орбиту электрона:

$$\Phi = \pi R^2 \cdot B = k \frac{\pi chB}{2\pi eB} = k \frac{ch}{2e}$$

При $k = 1$ получаем квант магнитного потока:

$$\Phi_0 = \frac{ch}{2e} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$$

Квант магнитного потока, зависящий только от мировых констант, является наименьшим возможным значением магнитного потока.

Примечание 1. Эдвин Герберт Холл, американский физик, 1855–1938.

Клаус фон Клитцинг, немецкий физик (1980 г.), 1943 г., Нобелевская премия по физике 1985 за открытие квантового эффекта Холла

3.16. Сверхпроводимость.

3.16.1. Основные особенности сверхпроводящего состояния.

Явление открыто в 1911г. Г. Камерлинг-Оннесом. При температуре несколько Кельвинов (температура жидкого He $T = 4.12 \text{ К}$) сопротивление ряда металлов и сплавов скачком обращается в нуль (см рис. 16.1). Эта температура – критическая температура $T_{кр}$ – ниже которой наблюдается сверхпроводящее состояние. Приведем примеры температур перехода в сверхпроводящее состояние для нескольких элементов :

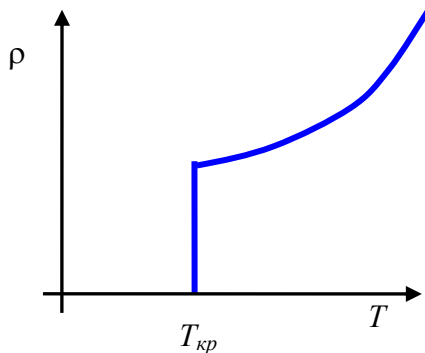


Рис. 16.1.

Элемент	$T_{кр}, \text{ К}$
Ti	0.49
Sn	3.7
Pb	7.2

До 1985 г. – максимальная критическая температура $T_{кр} \sim 20^\circ \text{ К}$ у сплава Nb_3Ge .

Экспериментально сверхпроводимость можно наблюдать следующими способами.

А) В общей электрической схеме включено звено из сверхпроводника, которое охлаждается, и при $T \sim T_{кр}$ наблюдается падение напряжения на нем практически до нуля $\Delta U = 0$. Сопротивление уменьшается не менее, чем в 10^{14} раз.

Б) Кольцо из сверхпроводника находится в поперечном магнитном поле, в кольце индуцировался ток при $T < T_{кр}$ путем включения магнитного поля. Экспериментально проверялось, что ток практически не затухал в течение 2.5 лет. В то время как для нормального состояния время затухания тока мало (менее 1 сек). Удельное сопротивление $\rho_{сверхпр} < 4 \cdot 10^{-23} \text{ Ом} \cdot \text{см}$ (в 10^{17} раз меньше, чем у меди Cu).

Основные экспериментальные факты.

1) Нет сопротивления электрическому току при температуре меньше $T_{кр}$.

2) **Критический ток.** При увеличении тока через сверхпроводник сверхпроводящее состояние нарушается при некотором значении тока $I_{кр}$. Критический ток $I_{кр}$ зависит от температуры, примерная зависимость критического тока от температуры изображена на рисунке 16.2.

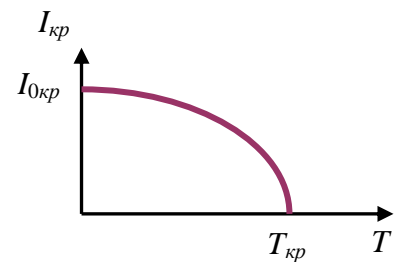


Рис. 16.2.

3) В магнитном поле проявляется **эффект Мейсснера** (1933 г., совместно с Оксенфельдом). В сверхпроводящем состоянии магнитное поле сверхпроводника равно нулю ($\vec{B} = \vec{H} = 0$). То есть при $T < T_{кр}$ магнитное поле полностью или частично вытесняется из сверхпроводника (см рис. 16.3).

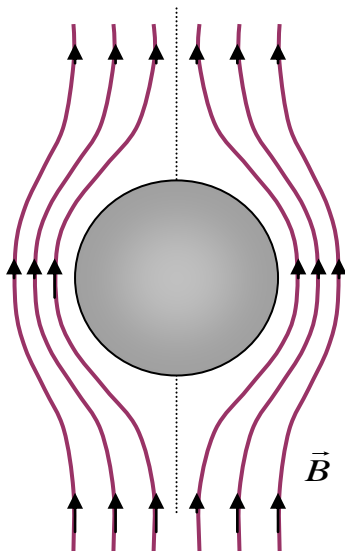


Рис. 16.3.

При полном вытеснении магнитного поля в сверхпроводнике наблюдается интересный эффект, состоящий в том, что сверхпроводник в поле тяготения Земли не падает, а при включении постоянного магнитного поля зависает, ничем не поддерживаемый (“гроб Магомета”). Это происходит за счет сильного взаимодействия собственных магнитных моментов с внешним магнитным полем.

Полный эффект Мейсснера наблюдается у чистых металлов (за исключением Nb, V и Tc), когда магнитное поле не проникает внутрь их объема. Это **сверхпроводники 1-го рода**. Частичный эффект Мейсснера — когда нет полного вытеснения магнитного поля (наблюдается у сплавов). Это **сверхпроводники 2-го рода**. Итак, сверхпроводник 1-го рода — идеальный диамагнетик ($\mu = 0$). У них нет объемного тока, весь ток течет по поверхности (в некотором узком, но конечном по толщине слое).

4) *Критическое поле*. При некотором значении магнитного поля $B_{кр}$ сверхпроводимость разрушается. Значение критического поля $B_{кр}$ зависит от материала и температуры как примерно показано на рис. 16.4. Чем ниже температура проводника при $T < T_{кр}$, тем большие по величине магнитные поля нужно приложить для разрушения сверхпроводящего состояния.

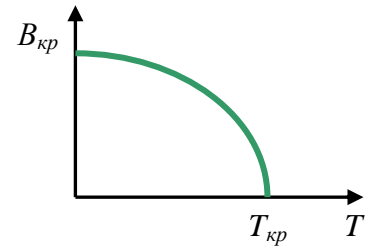


Рис. 16.4.

Примечание 1. *Гейке Камерлинг-Оннес, голландский физик, 1853–1926, Нобелевская премия в 1913г.*
Вальтер Фриц Мейсснер, немецкий физик, 1882–1974.

3.16.2. Уравнение Лондонов.

В 1935 г. Ф. и Г. Лондоны осуществили попытку построить электродинамику сверхпроводников. Цель их попытки состояла в следующем: не вникая в механизм образования сверхпроводимости, оформить в математическом виде основные экспериментальные факты, а именно отсутствие сопротивления, эффект Мейсснера.

Движение электрона без трения (без сопротивления) описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}. \quad (3.16.1)$$

Поскольку плотность тока: $\vec{j} = en_s \vec{v}$, где n_s – концентрация электронов в сверхпроводнике, уравнение движения можно переписать:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{j}}{e^2 n_s} \right) = \vec{E} \quad (3.16.2)$$

Вводя обозначение:

$$\Lambda \equiv \frac{m}{e^2 n_s} \quad (3.16.3)$$

получаем уравнение движения в виде:

$$\frac{d}{dt} (\Lambda \vec{j}) = \vec{E}. \quad (3.16.4)$$

Так как движение электронов в металле происходит с малой скоростью, то полная производная по времени примерно равна частной производной $\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla$. Полная производная означает любое изменение по времени в данном элементе объема, который движется вместе с электронами, а частная

означает изменение в данной части неподвижного пространства. Заменяем полную производную на частную и тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \vec{j}) = \vec{E} \quad (3.16.5)$$

Поддействовав оператором rot на обе части уравнения и вспоминая уравнение Максвелла $rot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[rot(\Lambda \vec{j}) + \frac{1}{c} \vec{B} \right] = 0 \quad (3.16.6)$$

Таким образом получаем, что величина в скобках сохраняется, этот вывод следует из уравнения Максвелла. Однако согласно этому уравнению при охлаждении сверхпроводника (при прохождении $T < T_{kp}$) магнитное поле в сверхпроводнике должно "замораживаться", что противоречит эффекту Мейсснера. Следовательно, необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось 0. Итак, получаем:

$$rot(\Lambda \vec{j}) + \frac{\vec{B}}{c} = 0 \quad (3.16.7)$$

Уравнения (3.16.4) и (3.16.7) составляют основу теории Лондонов.

Рассмотрим массивный полубесконечный сверхпроводник во внешнем магнитном поле, силовые линии которого параллельны поверхности сверхпроводника. Согласно уравнению Максвелла для статического поля имеем:

$$rot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Поддействуем на последнее уравнение оператором ротора:

$$rot rot \vec{B} = grad div \vec{B} - \Delta \vec{B} = \frac{4\pi}{c} rot \vec{j}$$

Поскольку $div \vec{B} = 0$, то получаем:

$$\Delta \vec{B} + \frac{4\pi}{c} rot \vec{j} = 0 \quad (3.16.8)$$

Из (3.16.7) выражаем $rot \vec{j} = -\frac{\vec{B}}{c\Lambda}$ и получаем далее:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{B} - \frac{4\pi}{c^2 \Lambda} \vec{B} &= 0 \\ \Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\delta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16.9)$$

где ввели величину

$$\delta = \left(\frac{c^2 \Lambda}{4\pi} \right)^{1/2} = \left(\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s} \right)^{1/2} \quad (3.16.10)$$

Параметр δ имеет размерность длины и называется *Лондоновской глубиной проникновения*.

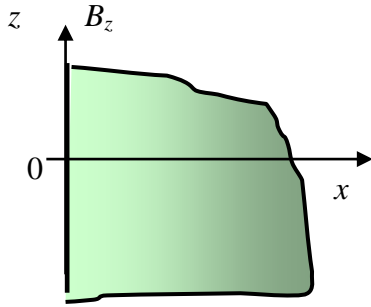


Рис. 16.5.

Если сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$ (см рис. 16.5) и поле имеет только компоненту B_z , то из уравнения (3.16.10) получаем решение:

$$B = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \quad (3.16.11)$$

Можно оценить глубину проникновения магнитного поля δ при $n_s = n_e$, т.е. когда концентрация проводящих электронов совпадает с полной концентрацией электронов. Это, очевидно,

будет справедливо при $T \rightarrow 0$, поскольку n_s зависит от температуры. При этом получаем, что Лондоновская глубина проникновения имеет величину порядка $10^{-5} \div 10^{-6}$ см. Таким образом, из Лондоновской электродинамики следует, что магнитное поле проникает в сверхпроводник только на малую глубину δ .

Согласно (3.16.7) токи также проникают примерно на ту же глубину:

$$-\frac{\partial j_x}{\partial y} + \frac{\partial j_y}{\partial x} = -\frac{B_z}{c\Lambda} \quad (3.16.12)$$

$$j_y = -(c\Lambda)^{-1} \int B_z dx \quad (3.16.13)$$

Учитывая (3.16.11) и вычисляя интеграл, получаем следующую зависимость плотности тока от x (глубины проникновения в сверхпроводнике):

$$j_y = (c\Lambda\delta)^{-1} B_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \quad (3.16.14)$$

Уравнения Лондонов можно выразить через векторный потенциал.

Подставляя $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ и $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ в уравнение (3.16.4), получаем:

$$\text{rot}\left(\Lambda\vec{j} + \frac{\vec{A}}{c}\right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda\vec{j} + \frac{\vec{A}}{c}\right) = 0 \quad (3.16.15)$$

Откуда имеем:

$$\vec{j} = -(c\Lambda)^{-1} \vec{A} = -\left(\frac{n_s e^2}{mc}\right) \vec{A} \quad (3.16.16)$$

при дополнительном условии – условии Лоренца: $\text{div}\vec{A} = 0$, т.е. имеем снова 2 уравнения. Поскольку векторный потенциал определен с точностью до градиента скалярной функции f , то в более общей форме уравнение (3.16.16) можно переписать:

$$\vec{j} = -n_s \left(\frac{e^2}{mc} \right) (\vec{A} + \text{grad}f) \quad (3.16.17)$$

*Примечание 2. Фриц Лондон, английский физик-теоретик, 1900–1954.
Гейнц Лондон, английский физик, 1907–1970.*

3.16.3. Объяснение сверхпроводимости.

В 1957 г. появилась микроскопическая теория сверхпроводимости Бардина, Купера, Шриффера (теория БКШ). Теория основана на принципах квантовой физики и достаточно сложна для воспроизведения в общем курсе физики. Здесь обсудим качественно основные идеи теории.

Как известно, в микромире имеется 2 статистики, определяющие поведение частиц: *статистика Ферми-Дирака* и *статистика Бозе-Эйнштейна*. Частицы, подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака, называются *фермионами* и имеют полуцелый спин. Частицы, подчиняющиеся статистике Бозе-Эйнштейна, называются *бозонами* и имеют целочисленный спин.

Напомним кратко кто такие *фермионы* и их основные свойства.

- 1) Спин частиц $\Rightarrow S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$. Примеры частиц-фермионов: электроны (e), протоны (p), нейтроны (n), гипероны и другие.
- 2) Для фермионов выполняется принцип Паули: в одном состоянии не может находиться более одной частицы. Фермионы – это частицы индивидуалисты.
- 3) Для фермионов имеет место распределение Ферми-Дирака по энергиям

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}$$

где E_F – энергия Ферми. Распределение Ферми-Дирака изображено на рис. 16.6.

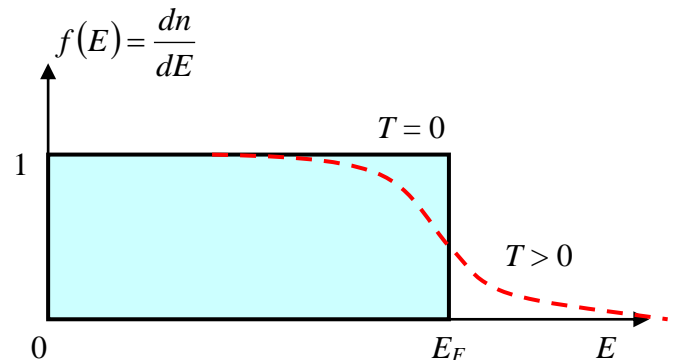


Рис. 16.6.

- 4) Типичный пример Ферми - системы: электронный газ в металле. При температуре абсолютного нуля $T = 0$ электроны занимают низшие уровни энергии до максимального, называемого уровнем Ферми E_F . Энергия Ферми для бесконечной системы совпадает с работой выхода λ . На каждом уровне энергии находится по 2 электрона, которые отличаются спинами (рис. 16.7). Если энергия зависит от спина, то на каждом уровне энергии находится по одному электрону из-за принципа Паули. Электроны, как и все фермионы – индивидуалисты. При температуре, отличной от нуля, часть электронов переходит на более высокие уровни (рис. 16.6)

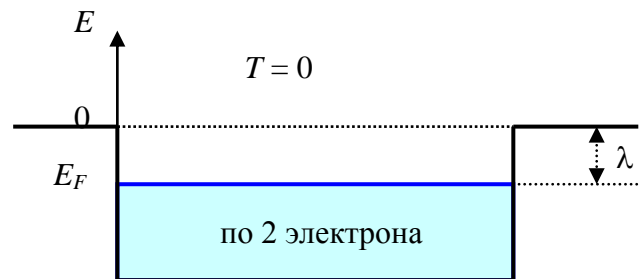


Рис. 16.7.

Для бесконечной системы фермионов между основным и возбужденными состояниями нет энергетической щели. Поэтому даже при очень маленькой температуре (отличной от нуля) энергии тепловых колебаний достаточно для возбуждения и девозбуждения электронов у поверхности Ферми. Они участвуют в проводимости, рассеиваются и обмениваются энергией с решеткой, что и вызывает сопротивление току.

Рассмотрим систему *бозонов*.

- 1) Спин частиц $\Rightarrow S = 0, 1, 2, \dots$ Примеры бозе-частиц: фотоны, фононы, π -мезоны, глюоны, гравитоны и другие.
- 2) Для бозонов не выполняется принцип Паули, бозоны – это частицы-коллективисты, все могут находиться в одном и том же состоянии.
- 3) Распределение Бозе-Эйнштейна по энергиям имеет вид

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) - 1}$$

где μ – химический потенциал, который определяется как дополнительная энергия системы при добавке одной дополнительной частицы (или разность полных энергий системы с $N+1$ и N частицами).

- 4) При температуре абсолютного нуля $T = 0$ все частицы находятся на одном низшем уровне энергии – уровне Бозе. Размещение частиц на низшем уровне называется *Бозе - конденсацией*. При этом для системы бозонов отметим важный факт: для бозонов имеется энергетическая щель между основным состоянием и первым возбужденным состоянием. Движение на низшем уровне может сохраняться без изменения, если сил

взаимодействия не хватает для возбуждения бозонов, т.е. перевода их на ближайший от основного уровень энергии.

Последнее утверждение оказывается очень важным для объяснения сверхпроводимости, поскольку именно наличие энергетической щели могло бы привести к току без сопротивления – сверхпроводимости и сверхтекучести, когда температурных колебаний недостаточно для возбуждения носителей тока (т.е. для проявления сопротивления).

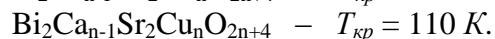
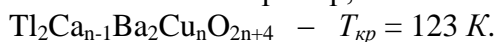
Отдельные электроны, как фермионы, не конденсируются и не могут организовать сверхтекучую жидкость.

Однако оказалось, что электроны проводимости в металлах при низких температурах объединяются в пары, – так называемые, *куперовские пары*. Пару образуют 2 электрона с противоположными спинами, так что вместе они образуют составную частицу с зарядом “ $2e$ ”, являющуюся бозоном, т.к. ее спин равен 0. Без вмешательства "третьих" тел такие пары не образуются из-за кулоновского отталкивания между электронами.

Куперовские пары образуются за счет взаимодействия между электронами через кристаллическую решетку. Электрон движется в металле и поляризует решетку из положительных ионов и этот комплекс (фактически возбуждение фонона – кванта колебаний решетки) притягивает к себе второй электрон. К притяжению приводит обмен фононами между электронами, причем при низких температурах оно превышает кулоновское отталкивание. Это взаимодействие наиболее сильное для электронов с противоположными спинами и импульсами (наглядно это достаточно трудно представить). Электроны не слипаются, а находятся на значительном расстоянии друг от друга, которое на 4 порядка выше межатомного расстояния в кристаллической решетке $\sim 10^{-4}$ см.

При температуре $T < T_{кр}$ не все электроны образуют куперовские пары: та часть электронов, которая образует пары, составляет “сверхпроводящую жидкость”, другая часть электронов – нормальную жидкость. Таким образом, “спаренные” электроны создают бозонную жидкость при низких температурах и обеспечивают явление сверхпроводимости.

Примечание 3. *Высокотемпературные сверхпроводники* (ВТСП). Найдены в 80-е годы керамические соединения висмута Вi и таллия Тl с достаточно высокими критическими температурами. Основные звенья ВТСП - CuO. Например,



Примечание 4. *Джон Бардин, американский физик, 1908 - 1991, две Нобелевские премии по физике: в 1956 году за транзистор и в 1972 году за основополагающую теорию обычных сверхпроводников.*

Леон Нил Купер, американский физик, 1930. Нобелевская премия по физике в 1972 году за создание теории сверхпроводимости.

Джон Роберт Шриффер, американский физик, 1931- 2019гг.; Нобелевская премия 1972 г. за создание теории сверхпроводимости.

Энрико Ферми, итальянский физик, 1901–1954. Нобелевская премия по физике 1938 года «за доказательство существования новых радиоактивных элементов, полученных при облучении нейтронами.

Поль Морис Дирак, английский физик, 1902- 1984 гг. Лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года (совместно с Эрвином Шрёдингером).

Шатъендранат Бозе, индийский физик, 1894–1974.

Исаак Константинович Кикоин, советский физик, 1908 - 1984 гг., окончил Политехнический институт в 1930, работал в ФТИ 1927–1936. Еще в 1941-44 годах эксперименты И.К. Кикоина показали, что носители заряда в сверхпроводниках не имеют собственного магнитного момента, т.е. не обладают спином.
