

Глава 3. ПРОХОЖДЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.

3.1. Законы отражения и преломления электромагнитных волн.

3.1.1. Электромагнитные волны на границе 2-х сред.

Когда свет достигает границы раздела двух сред с разными оптическими свойствами, он частично проходит во вторую среду, изменяя направление распространения в случае наклонного падения, и частично возвращается в первую среду. Направление отраженного и преломленного света описывается хорошо известными законами геометрической оптики. Однако эти законы ничего не говорят о поляризации и интенсивности отраженного и преломленного света. Ответ на эти вопросы и вывод законов отражения и преломления дается на основе электромагнитной теории света.

Появление преломленной и отраженной световых волн на границе раздела сред обусловлено теми же физическими причинами, что и изменение фазовой скорости волны при её распространении в неограниченной среде по сравнению со скоростью света в вакууме: электрическое поле падающей волны раскачивает входящие в состав вещества среды заряженные частицы, которые становятся источниками вторичных волн. Задача нахождения отраженной и преломленной волн, возникающих в результате сложения этих когерентных вторичных волн, может быть решена в рамках макроскопической электродинамики, т.е. с помощью уравнений Максвелла и феноменологических материальных уравнений. При этом среды рассматриваются как сплошные, а их оптические свойства задаются показателями преломления. Законы отражения и преломления, а также выражаемые формулами Френеля соотношения между амплитудами и фазами падающей, отраженной и преломленной волн получаются как следствие граничных условий для электромагнитного поля, вытекающих из уравнений Максвелла.

Закономерности отражения и преломления света относятся к наиболее ранним экспериментальным открытиям в оптике. Закон отражения был известен ещё Архимеду. Открытие закона преломления связывают с именами В. Снеллиуса и Р. Декарта.

Рассмотрим идеализированный случай **бесконечной плоской границы раздела** двух неподвижных *однородных изотропных сред*, каждая из которых занимает целое полупространство. Пусть в одной из сред задана проходящая из бесконечности *плоская монохроматическая волна*, поверхности постоянной фазы которой представляют собой неограниченные плоскости.

Падающая на границу раздела волна порождает волновой процесс в обеих средах, который мы и будем исследовать. Поскольку достаточным является приближенное выполнение этих условий, то полученные в рассматриваемой модели результаты имеют практическое значение. Действительно, небольшие участки сферической волны, приходящей от удаленного источника, могут рассматриваться как плоские. Аналогично, могут приближенно рассматриваться как плоские небольшие участки неплоской границы, если их размеры велики по сравнению с длиной световой волны длины.

Монохроматичность падающей волны предполагает установившийся характер всех процессов. Падающая, отраженная и преломленная волны составляют полное электромагнитное поле, которое должно удовлетворять определенным *граничным условиям*, заключающимся в непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} на границе раздела сред (при отсутствии на границе свободных зарядов и поверхностных токов):

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad (3.1.1)$$

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (3.1.2)$$

Связав величины, входящие в (3.1.1) и (3.1.2), уравнениями Максвелла, можно показать, что, если выполняется первая пара уравнений (3.1.1), то автоматически будет выполняться и 2-ая пара (3.1.2),

Следует отметить, что наличие во второй среде только одной (преломленной) волны, уходящей от границы, не следует непосредственно из уравнений Максвелла, а основано на дополнительном предположении, известном как *условие излучения*. Условие излучения, связанное с *принципом причинности*, дает критерий отбора имеющих физический смысл решений: возбуждаемое тело может порождать лишь уходящие от него волны (отраженные, рассеянные и т.п.). В рассматриваемой задаче физический смысл имеет решение, основанное на предположении о наличии только трех волн: *падающей, отраженной и преломленной*.

Пусть в рассматриваемых средах отсутствуют ферромагнетики ($\mu = \text{const}$), т.е. первая среда характеризуется показателем преломления $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, а вторая – $n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$. Первую среду мы будем считать прозрачной, для второй среды пока не будем делать таких предположений. Итак, пусть на границу двух сред под углом θ_1 падает плоская монохроматическая электромагнитная волна (рис. 1.1):

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \exp[-i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})] \quad (3.1.3)$$

Отраженная и прошедшая волны могут быть записаны соответственно в виде:

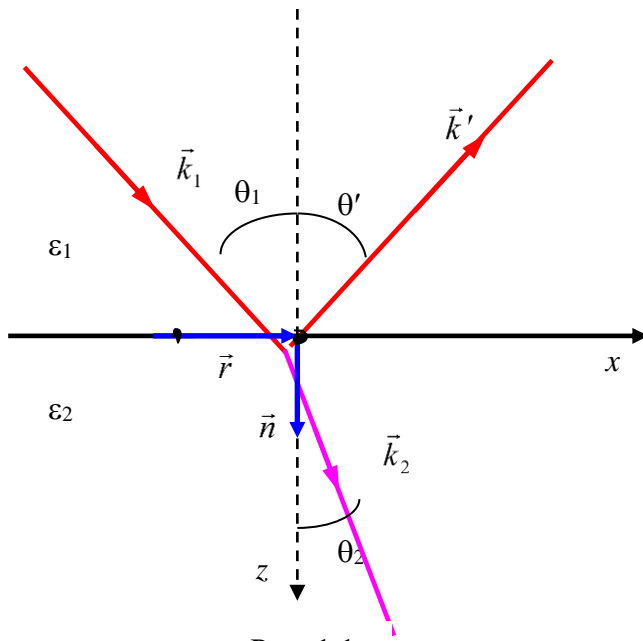


Рис. 1.1.

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}'_0 \exp[-i(\omega't - \vec{k}'\vec{r})] \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20} \exp[-i(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})] \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

При этом для волновых векторов имеем обычные соотношения

$$k_1 = \omega_1/v_1, \quad k_2 = \omega_2/v_2, \quad k' = \omega'/v',$$

где скорости распространения света v_i в средах определяются свойствами соответствующих сред $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$.

Плоскость, образованная векторами \vec{k}_1 и \vec{n} , называется *плоскостью падения* волны (плоскость xz на рис. 1.1). Запишем граничное условие для тангенциальных составляющих

напряженности электрического поля (3.1.1):

$$E_{10\tau} e^{-i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})} + E'_{0\tau} e^{-i(\omega' t - \vec{k}' \vec{r})} = E_{20\tau} e^{-i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})} \quad (3.1.5)$$

Равенство (3.1.5) должно выполняться тождественно в произвольных точках \vec{r} (можно для простоты отсчет вести от точки, находящейся на границе раздела) и в произвольные моменты времени t , причем t и \vec{r} независимы друг от друга. При этом показатели экспонент должны быть одинаковыми, поэтому выполняются следующие уравнения:

$$\omega_1 t = \omega' t = \omega_2 t \quad (3.1.6)$$

$$\vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}' \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r} \quad (3.1.7)$$

Отсюда получаем, что частоты отраженной и преломленной волн равны частоте падающей волны, т.е. *частота электромагнитной волны при отражении и преломлении не изменяется*:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega' = \omega. \quad (3.1.8)$$

Для того, чтобы нагляднее воспользоваться вторым равенством (3.1.7), выберем начало отсчета вектора \vec{r} в плоскости раздела так, чтобы он был перпендикулярен к вектору \vec{k}_1 (т.е. на рис. 1.1 выбранный вектор \vec{r} направлен вдоль оси y перпендикулярно к плоскости рисунка – плоскости падения волны). Тогда из (3.1.7) следует:

$$\vec{k}_1 \vec{r} = 0 = \vec{k}' \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r} \quad (3.1.9)$$

Из этого соотношения следует, что **волновые векторы** (или иначе направления распространения) *всех трех волн лежат в одной плоскости – плоскости падения.*

3.1.2. Законы отражения и преломления.

Определим соотношения между углом падения волны θ_1 , углом отражения θ' и углом преломления θ_2 . Выберем вектор \vec{r} вдоль оси x , тогда из равенства (3.1.7) имеем:

$$k_1 r \sin \theta_1 = k' r \sin \theta' = k_2 r \sin \theta_2 \quad (3.1.10)$$

Сокращая на r и учитывая, что $k_1 = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega'}{v_1} = k'$, получаем из первого равенства (3.1.10), что *угол отражения равен углу падения:*

$$\theta_1 = \theta' \quad (3.1.11)$$

Далее из (3.1.10), получаем:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad (3.1.12)$$

Здесь n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления рассматриваемых сред, а $n_{12} = n$ – относительный показатель преломления. Закон преломления световых волн часто называют *законом Снеллиуса:*

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad (3.1.13)$$

В зависимости от относительного показателя преломления угол преломления может быть меньше или больше угла падения. Так, при $n_1 > n_2$ может возникнуть такая ситуация, когда $\sin \theta_2 = 1$ и, следовательно, угол преломления $\theta_2 = \pi/2$. Возникает явление *полного внутреннего отражения*, при котором отсутствует волна во второй среде. Угол падения, при котором возникает явление полного внутреннего отражения, называется *предельным углом:*

$$\begin{aligned} \sin \theta_{1\text{пред}} &= \frac{n_2}{n_1} \\ \theta_{1\text{пред}} &= \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin n_{12} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Подробнее это явление рассмотрим ниже в §3.3.

Примечание 1 *Архимед, древнегреческий ученый, около 287–212 до нашей эры;
Виллеброрд Снеллиус, голландский ученый, 1580–1626;
Рене Декарт, французский философ и физик, 1596–1650*

3.2. Поляризация при отражении и преломлении электромагнитных волн.

3.2.1. Еще о поляризации света.

О поляризации света говорили ранее (см §1.5 Глава 1) как об упорядочении направления колебаний вектора \vec{E} в электромагнитной волне. Рассматривали для плоской монохроматической волны: линейно поляризованный свет, циркулярно поляризованный и эллиптически поляризованный свет.

Естественный свет не поляризован – это означает, что колебания вектора \vec{E} , их направление в пространстве, в каждый момент времени происходят беспорядочно, т.е. в такой электромагнитной волне получаем всевозможные направления светового вектора. Естественный свет можно представить как сумму 2-х взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих одинаковую интенсивность, но не когерентных. Например, естественный свет можно представить в виде векторной суммы 2-х компонент

$$E_x = E_0 \cos \omega t \quad \text{и} \quad E_y = E_0 \cos(\omega t + \delta(t)),$$

при этом результирующее колебание $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ хаотически меняет направление, если $\delta(t)$ хаотическая функция времени.

Однако из естественного света можно сделать плоско поляризованный, или линейно поляризованный, свет с помощью поляризаторов. *Поляризаторы* – это приборы, которые пропускают свет с колебаниями вектора \vec{E} параллельными плоскости поляризатора и задерживают свет с колебаниями вектора, перпендикулярными этой плоскости. Поляризаторы не всегда абсолютно поляризуют свет. Иногда происходит частичная поляризация и при этом образуется *частично поляризованный свет*. При отражениях и прохождении света через границы тоже появляется частично поляризованный свет. Частично поляризованный свет характеризуется *степенью поляризации* P :

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (3.2.1)$$

где I_{max} – максимальная интенсивность какого-либо направления колебаний (например, колебаний вектора \vec{E} , происходящими параллельно плоскости поляризатора), I_{min} – интенсивность колебаний \vec{E} , перпендикулярных по направлению к колебаниям максимальной интенсивности. Плоско поляризованный свет получаем при $P = 1$. Естественный свет получаем при значении $P = 0$. Однако, отметим, что получаем $P = 0$ также для циркулярно поляризованного света.

3.2.2. Формулы Френеля.

Граничные условия позволяют установить не только направления отраженной и преломленной волн, но также их амплитуды и состояния поляризации. Снова рассмотрим падение электромагнитной волны на границу 2-х сред, ее отражение и преломление. Ось z , как и в предыдущем параграфе, направим перпендикулярно границе, ось x – в плоскости падения волны вдоль границы, а ось y – также вдоль границы, но перпендикулярно плоскости падения. На рис. 2.1 направление оси y показано точкой в начале координат («смотрит» из страницы).

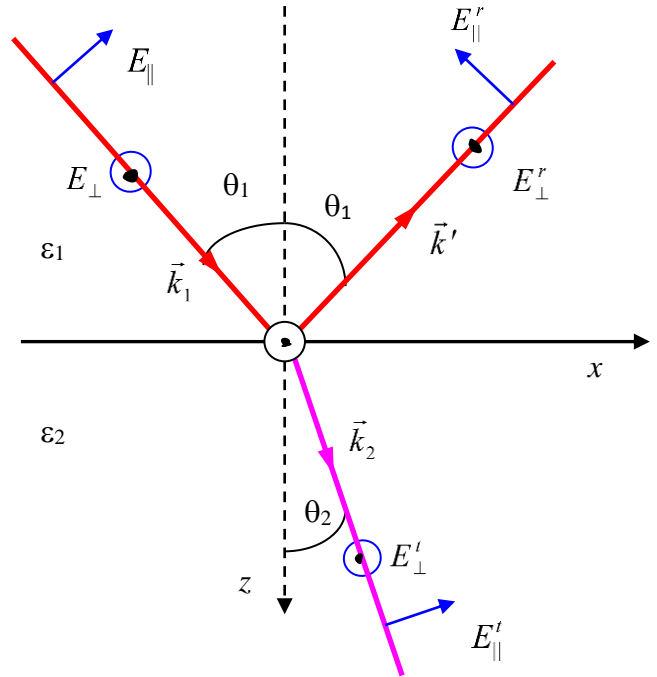


Рис. 2.1.

Разложим каждую из трех волн на две составляющие: волну, поляризованную в плоскости падения (индекс \parallel обозначает параллельную составляющую \vec{E}_{\parallel}), и волну, поляризованную в перпендикулярном плоскости падения направлении (индекс \perp обозначает перпендикулярную составляющую \vec{E}_{\perp}):

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel} = E_{\perp} \vec{e}_y + \vec{E}_{\parallel}. \quad (3.2.2)$$

Аналогичное разложение запишем для отраженной и преломленной волн. Фазовые множители можно опустить и рассматривать только амплитудные значения, так как в любой точке границы раздела фазы одинаковы для всех 3-х волн.

Магнитные свойства пока не будем учитывать, т.е. можно рассматривать векторы индукции магнитного поля и напряженности одинаковыми $\vec{B} = \vec{H}$. Тогда запишем связь между E и H (см соотношение (1.1.23) и (1.1.24) в §1.1):

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right] = \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right] = n \left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right]$$

Здесь для немагнитных сред считаем, что магнитная проницаемость $\mu \approx 1$ и показатель преломления $n \approx \sqrt{\varepsilon}$. Тогда в дальнейшем будем вычислять компоненты вектора напряженности магнитного поля из этого векторного произведения.

Итак, на границе раздела сред ($z = 0$) составляющие электрического и магнитного полей в падающей волне равны (см рис.2.1):

$$\begin{aligned} E_x &= E_{\parallel} \cos\theta_1, & E_y &= E_{\perp}, & E_z &= -E_{\parallel} \sin\theta_1 \\ H_x &= -n_1 E_{\perp} \cos\theta_1, & H_y &= n_1 E_{\parallel}, & H_z &= n_1 E_{\perp} \sin\theta_1 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

То же напишем для отраженной волны:

$$\begin{aligned} E_{rx} &= -E_{r\parallel} \cos\theta_1 & E_{ry} &= E_{r\perp} & E_{rz} &= -E_{r\parallel} \sin\theta_1 \\ H_{rx} &= n_1 E_{r\perp} \cos\theta_1 & H_{ry} &= n_1 E_{r\parallel} & H_{rz} &= n_1 E_{r\perp} \sin\theta_1 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Для прошедшей волны имеем аналогично:

$$\begin{aligned} E_{tx} &= E_{t\parallel} \cos\theta_2 & E_{ty} &= E_{t\perp} & E_{tz} &= E_{t\parallel} \sin\theta_2 \\ H_{tx} &= -n_2 E_{t\perp} \cos\theta_2 & H_{ty} &= n_2 E_{t\parallel} & H_{tz} &= n_2 E_{t\perp} \sin\theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Исходя из (3.1.1), имеем 4 независимые граничные условия:

$$\begin{aligned} E_x + E_{rx} &= E_{tx} & E_y + E_{ry} &= E_{ty} \\ H_x + H_{rx} &= H_{tx} & H_y + H_{ry} &= H_{ty} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Подставим в эти уравнения выражения для компонент E и H , тогда имеем:

$$(E_{\parallel} - E_{r\parallel}) \cos\theta_1 = E_{t\parallel} \cos\theta_2 \quad (3.2.7)$$

$$E_{\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp} \quad (3.2.8)$$

$$n_1 (E_{\perp} - E_{r\perp}) \cos\theta_1 = n_2 E_{t\perp} \cos\theta_2 \quad (3.2.9)$$

$$n_1 (E_{\parallel} + E_{r\parallel}) = n_2 E_{t\parallel} \quad (3.2.10)$$

Эта система уравнений позволяет определить параллельные и перпендикулярные компоненты отраженной и прошедшей волн через компоненты падающей волны.

Вначале используем уравнения (3.2.7) и (3.2.10) и исключаем компоненту прошедшей волны:

$$\frac{(E_{\parallel} - E_{r\parallel}) \cos\theta_1}{n_1 (E_{\parallel} + E_{r\parallel})} = \frac{\cos\theta_2}{n_2}$$

Отсюда выражаем параллельную компоненту отраженной волны:

$$E_{r\parallel} = E_{\parallel} \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1} = E_{\parallel} \frac{n \cos\theta_1 - \cos\theta_2}{n \cos\theta_1 + \cos\theta_2}, \quad (3.2.11)$$

где ввели относительный показатель преломления $n = n_2/n_1$. Воспользуемся законом преломления Снеллиуса (3.1.13) и тогда формулу (3.2.11) можно переписать, избавившись от показателей преломления:

$$\begin{aligned}
E_{r\parallel} &= E_{\parallel} \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_1 - \sin\theta_2 \cos\theta_2}{\sin\theta_2 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_1} = E_{\parallel} \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2} = \\
&= E_{\parallel} \frac{2\cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} = E_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Найдем параллельную компоненту для пройденной волны. Подставим (3.2.11) в (3.2.10):

$$E_{t\parallel} = \frac{n_1}{n_2} \left(E_{\parallel} + E_{\parallel} \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \right) = E_{\parallel} \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \tag{3.2.13}$$

Вновь воспользуемся законом преломления Снеллиуса (3.1.13):

$$E_{t\parallel} = E_{\parallel} \frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_2 + \cos\theta_1 \frac{n_2}{n_1}} = E_{\parallel} \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\cos\theta_1 \sin\theta_1 + \cos\theta_2 \sin\theta_2} = E_{\parallel} \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Аналогично находятся перпендикулярные компоненты $E_{t\perp}$ и $E_{r\perp}$ из соотношений (3.2.8) и (3.2.9). С показателями преломления эти формулы выглядят следующим образом:

$$E_{r\perp} = E_{\perp} \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \tag{3.2.14}$$

$$E_{t\perp} = E_{\perp} \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \tag{3.2.15}$$

Все эти соотношения (3.2.11)-(3.2.15) называются формулами Френеля (1821г.) для компонент отраженной и преломленной волн. Их все можно записать, по подобию (3.2.12), исключив показатели преломления:

$$E_{r\parallel} = E_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}; \quad E_{r\perp} = -E_{\perp} \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \tag{3.2.16}$$

$$E_{t\parallel} = E_{\parallel} \frac{2\sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}; \quad E_{t\perp} = E_{\perp} \frac{2\sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \tag{3.2.17}$$

Отношения амплитуд $r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{\parallel}}$, $r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{\perp}}$ и другие называются

коэффициентами Френеля.

В определение степени поляризации (3.2.1) входят интенсивности света. Приборы также реагируют на интенсивность. Поэтому, определяя энергетические коэффициенты отражения R и прохождения T , нужно рассматривать отношение плотности потоков энергии отраженной и пройденной волн к плотности потока падающей волны (т.е. записывать через вектор Пойнтинга).

3.2.3. Поляризация при отражении.

Для определения коэффициента отражения отношение плотностей потока можно заменить отношением интенсивностей, поскольку падающая и отраженная волны распространяются в одной среде и скорости распространения одинаковы. Таким образом, *энергетический коэффициент отражения* равен:

$$R = \frac{I'}{I} \quad (3.2.18)$$

Рассматривая формулы Френеля (3.2.16-17), для отраженной волны заметим следующее:

- 1) перпендикулярная компонента $E_{r\perp}$ при любых углах падения θ_1 не обращается в 0,
- 2) параллельная компонента обращается в нуль $E_{r\parallel} = 0$ при угле падения, когда

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty.$$

То есть компонента параллельная плоскости падения электромагнитной волны не отражается при угле падения равным $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$. Это *угол Брюстера* θ_B , который можно записать через показатели преломления, исходя из закона преломления:

$$\operatorname{Cos}\theta_1 = \operatorname{Sin}\theta_2 = \frac{1}{n} \operatorname{Sin}\theta_1$$

или иначе:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_B = n = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.2.19)$$

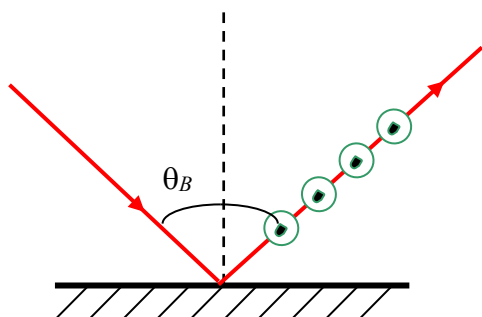


Рис. 2.2.

Итак, если естественный свет (неполяризованный или линейно поляризованный, но не в плоскости падения) падает под углом Брюстера $\theta_1 = \theta_B$, то $E_{r\parallel} = 0$ и отраженный свет оказывается линейно поляризованным (см рис. 2.2). Причем свет поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения.

Таким образом, отражение света под углом Брюстера – простейший способ получения поляризованного света. Основным недостатком этого метода является малая интенсивность отраженного света под углом Брюстера. Для увеличения интенсивности отраженного света на практике используется стопа Столетова (см ниже).

Построим зависимость энергетических коэффициентов отражения $R_{\parallel} = (E_{r\parallel}/E_{\parallel})^2$ и $R_{\perp} = (E_{r\perp}/E_{\perp})^2$ от угла падения θ_1 :

$$R_{\parallel} = \left(\frac{n \cos \theta_1 - \cos \theta_2}{n \cos \theta_1 + \cos \theta_2} \right)^2 \quad (3.2.20)$$

$$R_{\perp} = \left(\frac{\cos \theta_1 - n \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + n \cos \theta_2} \right)^2. \quad (3.2.21)$$

Качественная зависимость энергетических коэффициентов отражения от угла падения приведена на рис. 2.3. При касательном падении $\theta_1 = \pi/2$

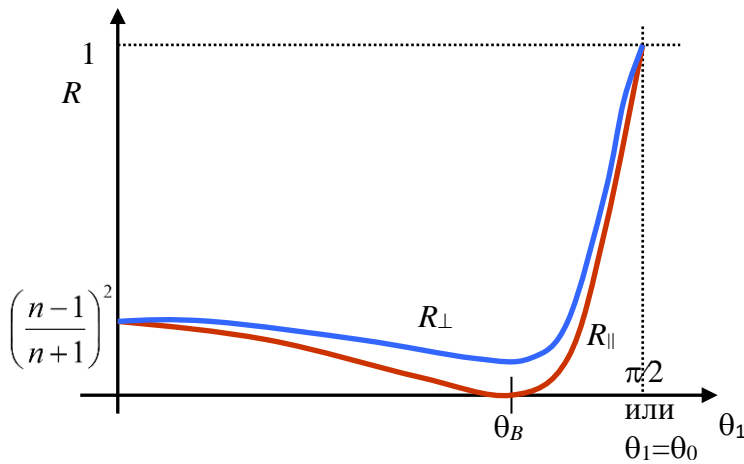


Рис. 2.3.

коэффициент отражения равен 1. Однако, в случае отражения от оптически менее плотной среды $n < 1$ коэффициент R равен 1 уже при предельном угле $\theta_1 = \theta_0$, когда возникает явление полного внутреннего отражения.

При уменьшении угла падения θ_1 коэффициент отражения быстро падает и принимает минимальное значение при угле Брюстера. Затем медленно растет с

уменьшением угла падения (рис. 2.3).

Рассмотрим (3.2.20) и (3.2.21) при нормальном падении света $\theta_1 = 0$. Учитывая, что при малых углах

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \approx \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} = n,$$

получаем одинаковые значения энергетических коэффициентов отражения:

$$R_{\parallel} \approx \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2 \quad (3.2.22)$$

$$R_{\perp} \approx \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 \quad (3.2.23)$$

Тогда полный коэффициент отражения при нормальном падении равен тому же:

$$R = \frac{R_{\perp} I_{\perp} + R_{\parallel} I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}} = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 \quad (3.2.24)$$

Например, для стекла ($n = 1.5$) при нормальном падении света коэффициент отражения $R = 0.04$; для воды ($n = 1.33$) получаем – $R = 0.02$.

*Примечание 1. Дэвид Брюстер, шотландский физик, 1781–1868;
Александр Григорьевич Столетов, русский физик, 1839–1896.*

3.2.4. Поляризация при преломлении.

Энергетический коэффициент пропускания (прозрачности) определяется через отношение потоков энергии прошедшей волны и падающей волны. Так поток энергии через площадку $\Delta\vec{s}$ определяется через поток вектора Пойнтинга

$$\vec{S} \cdot \Delta\vec{s} = S \cdot \Delta s \cdot \cos\theta,$$

где θ – угол падения или угол преломления для прошедшей волны. Следовательно, поток энергии через единицу площадки пропорционален:

$$\vec{S} \cdot \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta s} = S \cos\theta \sim \left[\vec{E}, \vec{H} \right] \cos\theta \approx nE^2 \cos\theta.$$

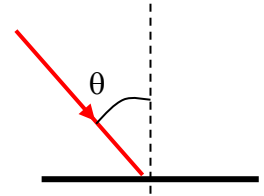


Рис. 2.4.

Тогда энергетический коэффициент пропускания для параллельной компоненты определяется отношением следующих потоков:

$$T_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_2 E_{\parallel}^2}{n_1 \cos\theta_1 E_{\parallel}^2} = n \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \left(\frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \right)^2 = \frac{4n \cos\theta_1 \cos\theta_2}{(n \cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2} \quad (3.2.25)$$

Аналогично имеем для перпендикулярной компоненты:

$$T_{\perp} = \frac{n_2 \cos\theta_2 E_{\perp}^2}{n_1 \cos\theta_1 E_{\perp}^2} = n \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \left(\frac{2 \cos\theta_1}{\cos\theta_1 + n \cos\theta_2} \right)^2 = \frac{4n \cos\theta_1 \cos\theta_2}{(\cos\theta_1 + n \cos\theta_2)^2} \quad (3.2.26)$$

Легко увидеть, что

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad \text{и} \quad R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad (3.2.27)$$

как и должно быть согласно закону сохранения энергии.

Для нормального падения $\theta_1=0$ и тогда получаем равенство энергетических коэффициентов прохождения:

$$T_{\perp} = T_{\parallel} = T = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad (3.2.28)$$

Если взять отношение коэффициентов для параллельной и перпендикулярной составляющих для произвольного угла падения, то получаем:

$$\begin{aligned} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} &= \left(\frac{\cos\theta_1 + n\cos\theta_2}{n\cos\theta_1 + \cos\theta_2} \right)^2 = \left(\frac{\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta_1 \sin\theta_1 + \sin\theta_2 \cos\theta_2} \right)^2 = \frac{4\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{(\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2)^2} = \\ &= \frac{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{1}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Во всех случаях (кроме нормального падения, когда $\theta_1 = \theta_2 = 0$) косинус меньше единицы, следовательно, имеем:

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} > 1 \quad (3.2.30)$$

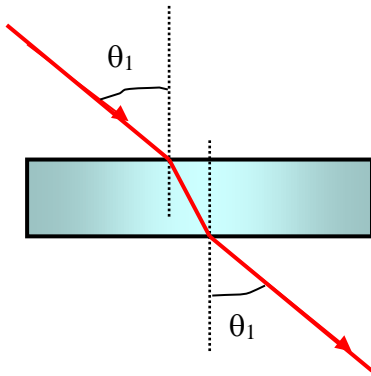


Рис. 2.5.

При прохождении через одну границу раздела непроводящих сред интенсивность параллельной компоненты возрастет в $1/\cos^2(\theta_1 - \theta_2)$ раз. Если свет пропускаем через пластинку (рис.2.5), то волна пересекает 2 границы раздела и отношение квадратов коэффициентов будет равно:

$$\left(\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right)^2 = \frac{1}{\cos^4(\theta_1 - \theta_2)} \quad (3.2.31)$$

Если построить график зависимости коэффициентов отражения и прохождения (на рис. 2.6 показано поведение энергетических коэффициентов для параллельной компоненты) от угла падения, то видно, что энергетически выгоднее применять в качестве поляризаторов не отражательное устройство, в котором интенсивность отраженного света мала, а устройство на пропускание. Видно также, что максимум пройденной интенсивности – при угле Брюстера. Тогда рассмотрим отношение интенсивностей пройденного света при $\theta_1 = \theta_B$, когда параллельная компонента пройденного света не теряется. В этом случае получаем:

$$\theta_B + \theta_2 = \pi/2 \quad \text{и} \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_B$$

$$\cos^4\left(\theta_B - \frac{\pi}{2} + \theta_B\right) = \sin^4(2\theta_B)$$

Выражая угол Брюстера из (3.2.19) $\theta_B = \arctg n$ и пользуясь тригонометрическими соотношениями

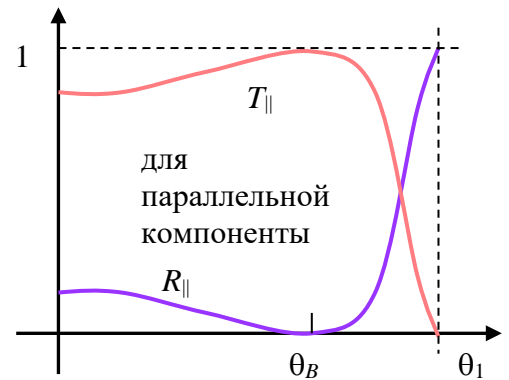


Рис. 2.6.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

запишем синус двойного угла Брюстера через показатели преломления

$$\sin(2\theta_B) = \sin(2 \operatorname{arctg} n) = 2 \sin(\operatorname{arctg} n) \cdot \cos(\operatorname{arctg} n) = 2 \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{2n}{1+n^2}$$

Сосчитаем отношение квадратов коэффициентов прохождения (3.2.31):

$$\left(\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right)^2 = \left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^{-4} = \left(\frac{n^2+1}{2n}\right)^4 \quad (3.2.32)$$

Если излучение проходит через N пластин под углом Брюстера, то квадрат отношения компонент энергетических коэффициентов прохождения, т.е. интенсивностей двух компонент, равен:

$$\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \left(\frac{n^2+1}{2n}\right)^{4N} \quad (3.2.33)$$

Насколько выгодно рассматривать пропускание естественного света через пластинки для получения поляризованного излучения, зависит от поставленных задач и точности измерений. При пропускании через пластинки мы выигрываем в интенсивности света, но проигрываем в степени поляризации пройденного пучка.

В качестве примера рассмотрим стеклянные пластинки, находящиеся в воздухе. Для границы стекло – воздух относительный показатель преломления: $\frac{n_{cm}}{n_{возд}} = n = 1.5$, а угол Брюстера: $\theta_B = \operatorname{arctg} 1.5 = 56.3^\circ$. Если имеем

одну пластинку под углом Брюстера, то отношение интенсивностей:

$$\frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} = \left(\frac{2 \cdot 1.5}{1 + 2.25}\right)^4 = 0.726. \quad \text{Если возьмем две пластинки под углом Брюстера, то}$$

$$I_{\perp}/I_{\parallel} = (0.726)^2 = 0.527. \quad \text{В то же время 10 пластин дают: } I_{\perp}/I_{\parallel} = 0.041.$$

Очевидно, что выгоднее для получения поляризованного света брать пластинки с большим показателем преломления n . Для германия в воздухе относительный показатель преломления $n = 4$, поэтому даже после одной пластинки получаем отношение интенсивностей $I_{\perp}/I_{\parallel} = 0.049$.

3.2.5. Фазовые соотношения.

Углы падения θ_1 и преломления θ_2 вещественны (здесь не рассматриваем случай полного внутреннего отражения) и отсюда следует, что отражение и преломление не сопровождается изменением фаз, кроме как на π . Таким

образом, фазы у прошедшей волны и отраженной волны либо совпадают с соответствующей компонентой у падающей волны, либо отличаются на π .

Для прошедшей волны E_{\parallel}, E_{\perp} видно, что знаки комплексных амплитуд падающей и преломленной волны одинаковы при всех θ_1 и θ_2 . То есть *прошедшая волна синфазна падающей волне*, и нет скачка фазы на границе.

Фазовые соотношения между *падающей волной и отраженной волной зависят от показателей преломления n и углов θ_1 и θ_2* . Вначале разберемся в том, когда скачка фазы отраженной волны не происходит. Отдельно для каждой из компонент волны проводим следующие соображения.

- 1) Скачка фазы нет у параллельной составляющей отраженной волны, когда проекции E_{\parallel} и $E_{r\parallel}$ на ось x имеют **разные знаки**. Качественно это можно понять из рис. 2.7, если проследить за изменением колебаний вектора электрического поля при отражении.

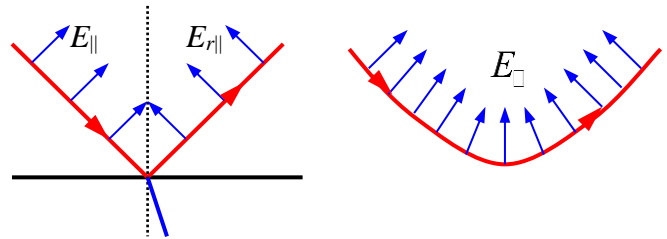


Рис. 2.7.

- 2) Скачка фазы нет у перпендикулярной составляющей отраженной волны, когда E_{\perp} и $E_{r\perp}$ имеют **одинаковые знаки** (см рис. 2.8).

Рассмотрим отдельно 2 случая: отражение от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$) и оптически менее плотной среды ($n_2 < n_1$).

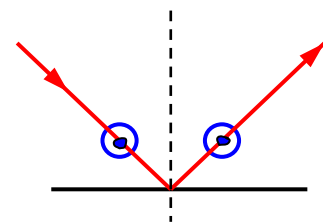


Рис. 2.8.

- 1). Отражение от оптически более плотной среды $n_2 > n_1$. При этом получаем, что $\theta_1 > \theta_2$.

Сначала рассмотрим параллельную компоненту исходя из соотношения (3.2.12) или (3.2.16):

$$\frac{E_{r\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.2.34)$$

- а) Пусть углы падения θ_1 меньше угла Брюстера $\theta_1 < \theta_B$, т.е. такие, что $(\theta_1 + \theta_2) < \pi/2$. Тогда для тангенсов и отношения (3.2.34) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) > 0 \\ \operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{E_{r\parallel}}{E_{\parallel}} > 0 \quad (3.2.35)$$

То есть параллельные компоненты поля в отраженной и падающей волне имеют одинаковые знаки. Следовательно, *получаем скачок фазы на π* .

- б) Пусть углы падения θ_1 больше угла Брюстера $\theta_1 > \theta_B$, т.е. такие, что $(\theta_1 + \theta_2) > \pi/2$. Тогда для тангенсов и отношения (3.2.34) имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) > 0 \\ \operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{E_{r\parallel}}{E_{\parallel}} < 0 \quad (3.2.36)$$

То есть параллельные компоненты поля в отраженной и падающей волне имеют разные знаки. Следовательно, **скачка фазы не происходит**. Зависимость скачка фазы от угла падения для параллельной составляющей показана на рис. 2.9 А.

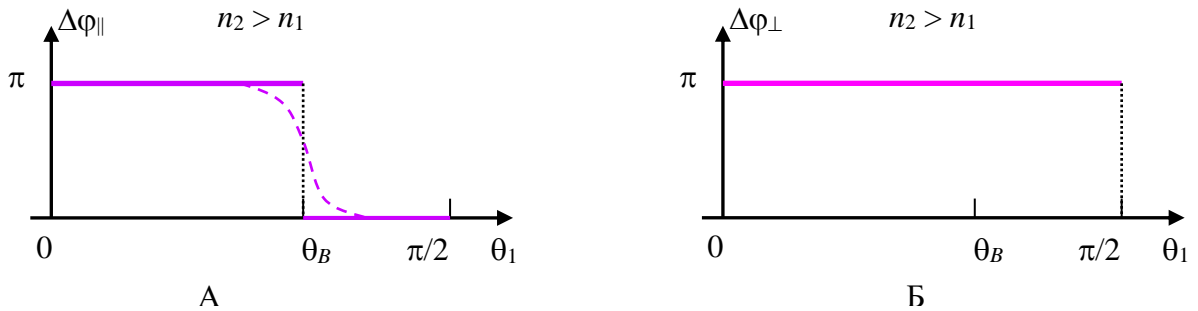


Рис. 2.9.

Теперь рассмотрим перпендикулярную компоненту падающей и отраженной волн исходя из соотношения (3.2.16) – их отношение всегда меньше нуля при всех θ_1 и θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$):

$$\frac{E_{r\perp}}{E_{\perp}} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} < 0 \quad (3.2.37)$$

Следовательно, для **перпендикулярных компонент всегда имеется скачок фазы на π** (см рис. 2.9 Б).

Итак, при отражении от оптически более плотной среды при всех углах падения $\theta_1 < \theta_B$ происходит потеря фазы на угол π , т.е. происходит потеря полуволны. При углах падения $\theta_1 > \theta_B$ волна с параллельной поляризацией отражается без потери полуволны, а волна с перпендикулярной поляризацией отражается по-прежнему с потерей полуволны.

Б). Отражение от оптически менее плотной среды $n_2 < n_1$. При этом получаем, что $\theta_1 < \theta_2$. Рассматриваем аналогично исходя из соотношений (3.2.16). Сначала для параллельной составляющей электрического вектора.

а) $\theta_1 < \theta_B$, $\frac{E_{r\parallel}}{E_{\parallel}} < 0$ параллельные составляющие волн синфазны.

б) $\theta_1 > \theta_B$, $\frac{E_{r\parallel}}{E_{\parallel}} > 0$ параллельные составляющие волн противофазны.

Зависимость изменения фазы для параллельной составляющей изображена на рис. 2.10 А.

Для перпендикулярной составляющей поля $\frac{E_{r\perp}}{E_{\perp}} > 0$ при любых углах падения, т.е. перпендикулярные составляющие волн синфазны, что показано на рис. 2.10 Б.

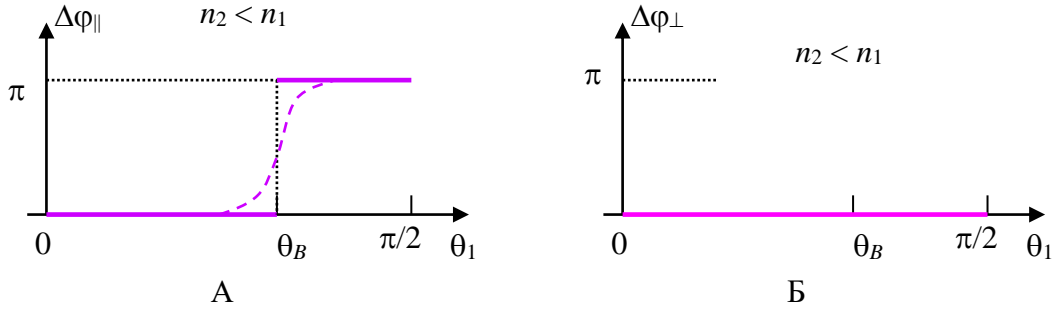


Рис. 2.10.

Итак, при отражении от оптически менее плотной среды при всех углах падения $\theta_1 < \theta_B$ отражение волны происходит без потери полуволны. При углах падения $\theta_1 > \theta_B$ волна с перпендикулярной поляризацией отражается по-прежнему без потери полуволны, а волна с параллельной поляризацией отражается с потерей полуволны.

3.3. Полное внутреннее отражение.

3.3.1. Прошедшая волна.

Рассмотрим отражение электромагнитных волн от границы 2-х сред в случае, когда показатель преломления второй среды меньше показателя преломления первой $n_2 < n_1$. В этом случае угол преломления θ_2 оказывается больше угла падения θ_1 (рис.3.1.). Полное внутреннее отражение наступает тогда, когда $\theta_2 = \pi/2$ (см соотношения (3.1.13)-(3.1.14)). При этом имеем для угла падения:

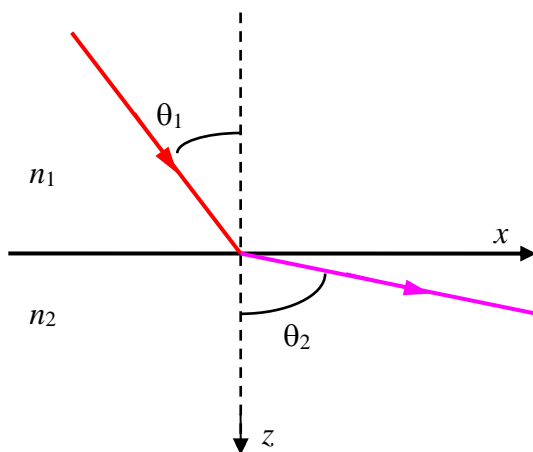


Рис. 3.1.

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_0 = \frac{n_2}{n_1} = n \tag{3.3.1}$$

где θ_0 – предельный угол падения. Вопрос состоит в том, что происходит с электрическим вектором

электромагнитной волны при явлении полного внутреннего отражения: как он меняется на границе сред и проникает ли он во вторую среду.

Определим электромагнитное поле во второй среде. Обычно прошедшая волна записывается в виде:

$$E_t = E_{0t} \exp[-i(\omega t - \vec{k}_t \vec{r}_t)], \quad (3.3.2)$$

где как обычно имеем

$$\begin{aligned} |\vec{k}_t| &= \frac{\omega}{v_t}, & \vec{r}_t &= x\vec{e}_x + z\vec{e}_z, & y &= 0 \\ \vec{k}_t \vec{r}_t &= x(\vec{e}_x, \vec{k}_t) + z(\vec{e}_z, \vec{k}_t) = xk \sin \theta_2 + zk \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Итак, пройденная волна записывается:

$$E_t = E_{0t} \exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega}{v_2}(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)\right)\right] \quad (3.3.4)$$

Закон преломления справедлив в любом случае, поскольку он получается из фундаментального и независимого граничного условия (см §3.1). В соответствии с ним имеем:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n}, \quad \cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}} \quad (3.3.5)$$

При наступлении полного внутреннего отражения ($\theta_1 \geq \theta_0$) получаем:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n} \geq 1, \quad \cos \theta_2 = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{n^2} - 1} \quad (3.3.6)$$

Подставим (3.3.6) в прошедшую волну (3.3.4):

$$E_t = E_{0t} \exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega x \sin \theta_1}{v_2 n}\right)\right] \exp\left(-\frac{\omega z}{v_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{n^2} - 1}\right) \quad (3.3.7)$$

Из физических соображений знак $\cos \theta_2$ в выражении (3.3.6) выбран положительный, т.е. такой, чтобы волна затухала с ростом координаты z . Таким образом, получаем, что электрический вектор пройденной волны есть периодическая функция координаты x и времени t , и, следовательно, по оси x имеем нормальную бегущую волну. По оси z (>0), т.е. при погружении во вторую среду, получаем затухающую волну.

$$E_t = E_{0t} e^{-\frac{\omega z}{v_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{n^2} - 1}} \exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega x \sin \theta_1}{v_2 n}\right)\right] \quad (3.3.8)$$

Естественный вопрос: какова глубина проникновения электромагнитной волны вглубь среды с $n_2 < n_1$? Рассмотрим отдельно затухающую экспоненту в (3.3.8):

$$\exp\left(-\frac{z}{z_0}\right), \quad \text{где } z_0 = \frac{v_2}{\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{n^2} - 1}}$$

и сделаем оценку глубины проникновения z_0 , исходя, как обычно, из равенства показателя экспоненты единице $z = z_0$. Итак, амплитуда прошедшей волны падает в e раз (см рис. 3.2) на глубине проникновения:

$$z_0 = \frac{v_2 n}{\omega \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}} = \frac{n \lambda_2}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}, \quad (3.3.9)$$

где λ_2 – длина волны в среде 2, а $\lambda_1 = n\lambda_2$ – длина волны в первой среде. То есть глубина проникновения прошедшей волны во вторую среду **при полном внутреннем отражении пропорциональна длине волны λ** .

Обычно можно считать, что знаменатель в (3.3.9) $2\pi \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2} \sim 1$, тогда глубина проникновения z_0 по порядку величины равна длине волны λ .

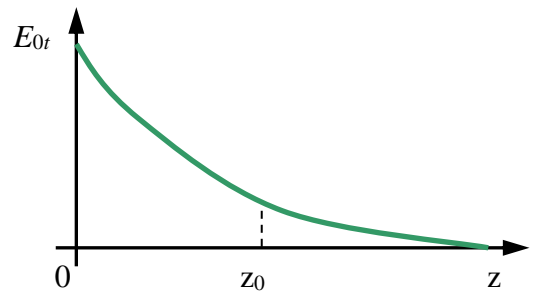


Рис. 3.2.

3.3.2. Эксперименты с пройденной волной.

Для экспериментального исследования прошедшей волны при явлении полного внутреннего отражения необходимо во второй среде "подхватить" ее интенсивность на расстояниях порядка длины волны падающего света, т.е. там, где амплитуда волны заметно отлична от нуля. В большинстве экспериментов это реализуется созданием пространственной "полоски" из второй среды, переменной толщины, через которую волна "туннелирует" и проникает в последующую среду, где она распространяется и фиксируется обычным образом. Рассмотрим несколько таких экспериментов.

а). Волна падает под углом больше предельного угла $\theta_1 \geq \theta_0$ на границу первой среды с воздушным зазором, за которым находится пластинка со свойствами первой среды. Схема опыта изображена на рис. 3.3. Когда воздушный зазор невелик $d \sim \lambda$, тогда во второй пластинке появляется световая волна, несмотря на условия полного внутреннего отражения на первой границе. В оптических опытах, проводимых Г. Квинке, такая

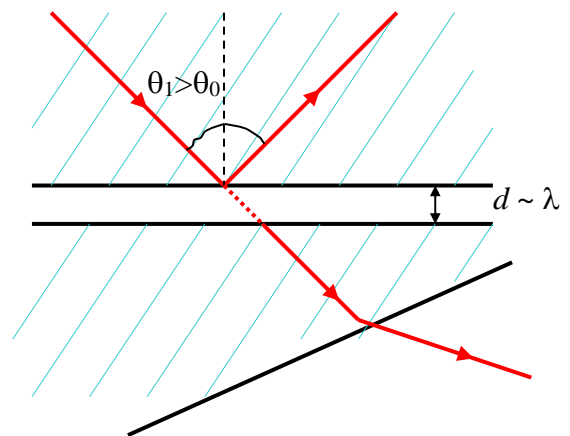


Рис. 3.3.

проходящая волна регистрировалась при различных величинах зазора d . Чем меньше зазор d , тем больше интенсивность пройденной волны во второй пластинке.

На основе изменения интенсивности пройденной волны от величины зазора в фирме К. Цейсса был запатентован световой телефон. Зазор между пластинками менялся под действием звуковой волны, и яркость пройденного света через мембрану модулировалась изменением толщины зазора.

б). К плоской призме прижималась призма сферической формы (см рис. 3.4). Свет распространялся из плоской призмы к границе с воздухом вблизи точки соприкосновения призм под углом падения большим угла полного внутреннего отражения. Свет проходил во вторую призму в окрестности точки непосредственного соприкосновения практически без изменения интенсивности. Кроме того, свет проникал во вторую сферическую призму и в других точках, где не было прямого соприкосновения поверхностей линз. Интенсивность пройденного света падала по мере удаления от точки соприкосновения.

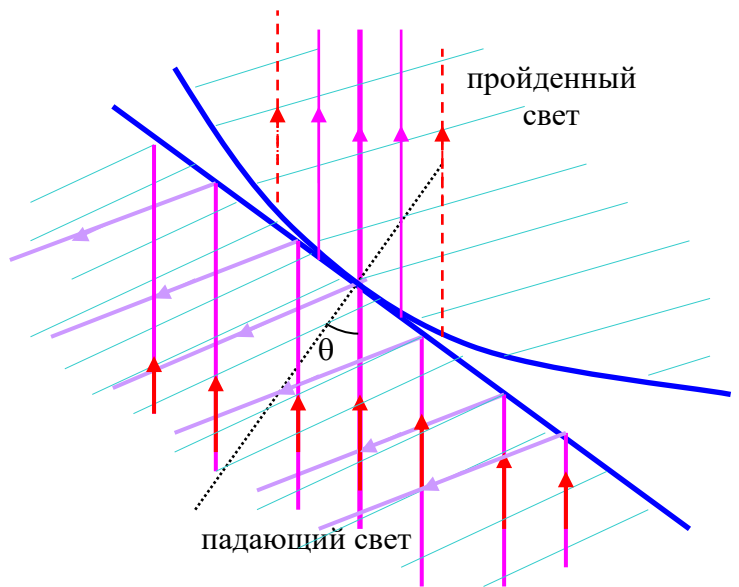


Рис. 3.4.

Если освещать линзу белым светом, то края пучка пройденного света приобретают красноватый оттенок. Это связано с тем, что длина волны красного света наибольшая в области видимого диапазона и эта волна проникает через зазор большего размера.

в). В раствор флюоресцирующего вещества помещена призма (см рис. 3.5). Свет при попадании в раствор вызывал его свечение. Свет падающий извне на призму из воздуха (например, при нормальном падении на грань призмы) испытывал полное внутреннее отражение на границе «призма – жидкость». Свечение тонкого слоя раствора на границе раздела «призма – жидкость» показывало, что свет проникает за границу раздела на некоторую глубину, а затем испытывает полное отражение (рис.3.5).

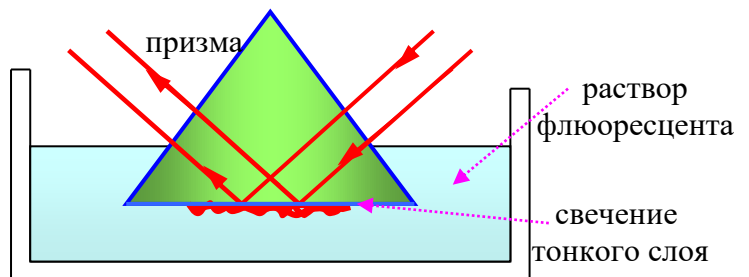


Рис. 3.5.

г). Типичный и практически важный пример использования явления полного внутреннего отражения – *световоды*. Именно за счет этого явления свет распространяется практически без потерь внутри световода, полностью отражаясь от ограничивающих его стенок.

3.3.3. Отраженная волна.

При исследовании отраженной волны снова воспользуемся формулами Френеля.

Из формул (3.2.12)–(3.2.16) получаем следующее выражение для амплитудных коэффициентов отражения для параллельной компоненты:

$$\frac{E_{r\parallel}}{E_{\parallel}} = r_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2} = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2} = \frac{n \cos \theta_1 - \cos \theta_2}{n \cos \theta_1 + \cos \theta_2}$$

Здесь $n = n_2/n_1$, $\sin \theta_1 = n \sin \theta_2$. Подставляя сюда выражение для косинуса при явлении полного внутреннего отражения с соответствующим знаком:

$$\cos \theta_2 = -i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{n^2} - 1}, \quad (3.3.10)$$

получаем:

$$r_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \theta_1 + i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}} \quad (3.3.11)$$

Для перпендикулярной компоненты отраженной волны получаем аналогично:

$$\frac{E_{r\perp}}{E_{\perp}} = r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = -\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1} = -\frac{\cos \theta_1 + i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}} \quad (3.3.12)$$

При углах падения $\theta_1 \geq \theta_0$ для энергетических коэффициентов отражения получаем (возводим в квадрат по модулю (3.3.11) и (3.3.12)):

$$|r_{\parallel}|^2 = |r_{\perp}|^2 = 1 \quad (3.3.13)$$

Полученные результаты можно суммировать следующим образом. Действительно, при полном внутреннем отражении вся энергия отражается в первую среду – в среду с большим показателем преломления n . Следовательно, энергия не уходит во вторую среду, если не считать ее проникновения на наибольшие расстояния от границы. Падающая волна и соответствующая доля энергии волны проникают через границу раздела во вторую среду лишь на глубину z_0 , порядка длины волны λ , распространяется вдоль поверхности раздела и затем возвращается в первую среду. Действительно, места входа энергии во вторую среду и ее возвращения в первую несколько смещены друг относительно друга. Это смещение выхода

отраженного луча по отношению к точке падения наблюдается экспериментально.

В качестве примера проявления полного внутреннего отражения в природе можно привести наблюдение миражей. При определенных условиях световые лучи, идущие от удаленных объектов, в воздушном пространстве испытывают полное внутреннее отражение и создают зрительное впечатление непосредственной близости этих объектов.

В качестве другого примера рассмотрим границу стекло-воздух. Для этой границы имеем относительный показатель преломления $n = 1/1.5 = 0.67$. Энергетический коэффициент отражения при нормальном падении определяется соотношениями (3.2.22-24):

$$R(\theta_1 = 0) = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = \left(\frac{0.5}{2.5} \right)^2 = 0.04$$

Предельный угол равен: $\theta_0 = \arcsin 0.67 = 41.8^\circ$, а угол Брюстера равен — $\theta_B = \arctg 0.67 = 33.7^\circ$. График зависимости коэффициентов отражения от угла падения представлен на рисунке 3.6.

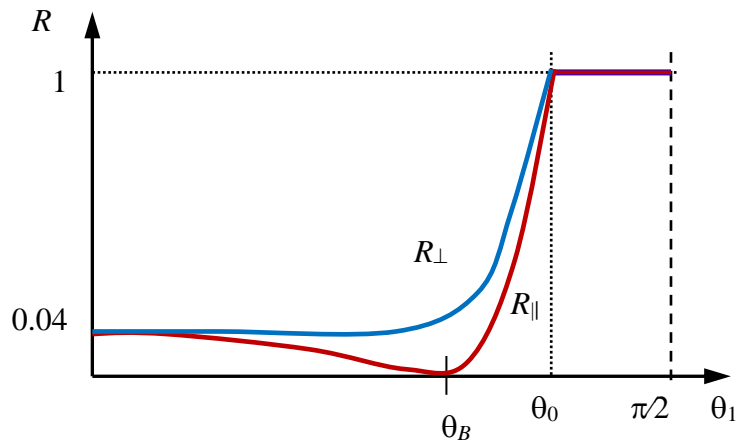


Рис. 3.6.

Рассмотрим фазовые соотношения в отраженной волне. В общем случае

полного внутреннего отражения плоско-поляризованная волна превращается в эллиптически поляризованную волну. В самом деле, амплитудные коэффициенты отражения комплексны, и их можно представить в виде:

$$z = \frac{a - ib}{a + ib}$$

Перепишем это комплексное число через его модуль и фазу:

$$|z| = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{b}{a}.$$

Тогда из формул (3.3.11) и (3.3.12) для параллельной и перпендикулярной компонент отраженной волны имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= |z| \cdot e^{i\delta_{\parallel}} = e^{i\delta_{\parallel}}, & r_{\perp} &= |z| \cdot e^{i\delta_{\perp}} = e^{i\delta_{\perp}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1}, & \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1} \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Из этих формул видно, что фазы отраженных волн различны $\delta_{\parallel} \neq \delta_{\perp}$.

Следовательно, если волна, падающая на границу двух сред, плоско-поляризованная, то при полном внутреннем отражении отраженная волна имеет эллиптическую поляризацию.

Введем разность фаз $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ между колебаниями параллельной и перпендикулярной составляющими отраженной волны и считаем, воспользовавшись соотношениями (3.3.14) тангенс разности фаз $\delta/2$:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} - \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2}} = \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2} \quad (3.3.15)$$

1). Если $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = 0$ – нет эллиптической поляризации. Однако, как видно из формулы (3.3.15), это может быть при угле падения, равном либо предельному углу $\theta_1 = \theta_0$ (при этом $\sin^2 \theta_1 = n^2$), либо при угле $\theta_1 = \pi/2$ (скользящий луч).

2). Во всех остальных случаях имеем эллиптическую поляризацию в отраженном луче.

Максимальное значение разности фаз δ между взаимно перпендикулярными компонентами можно получить из равенства нулю производной $\frac{d}{d\theta_1} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right) = 0$. Откуда максимальное значение δ получаем при углах падения:

$$\sin^2 \theta_{1\max} = \frac{2n^2}{1+n^2} \quad \text{или} \quad \cos^2 \theta_{1\max} = \frac{1-n^2}{1+n^2}.$$

Значение максимальной разности фаз между колебаниями параллельной и перпендикулярной компонентами отраженной волны равно:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1-n^2}{2n} \right) \quad (3.3.16)$$

В итоге, при полном внутреннем отражении получаем эллиптически поляризованный свет.

Примечание 1. *Георг Герман Квинке, немецкий физик, 1834–1924;*

Карл Фридрих Цейс, немецкий инженер производитель оптики, 1816–1888

3.4. Элементы оптики проводящих сред.

3.4.1. Телеграфные уравнения.

Уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн в проводящих средах (металлах), по сравнению с соответствующими уравнениями в диэлектриках включают теперь проводимость σ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{c \partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{c \partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho \end{aligned} \quad \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H}, \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Эти уравнения написаны для случая изотропных металлов. В металлах имеются свободные и связанные электроны. Первые колеблются под воздействием электромагнитной волны и обеспечивают поглощение излучения вследствие возбуждения тока (плотности тока \vec{j}), при этом колебания электронов происходят в фазе с колебаниями электрических векторов внешнего поля. Связанные электроны колеблются со сдвигом фазы на $\pi/2$ и не дают вклада в поглощение (при условии, если частота электромагнитных волн не слишком велика).

В курсе электромагнетизма [3] (§3.1 Глава 3) было показано, что если в металлах появляется избыточный заряд, или даже электрическое поле, отличное от нуля, то и заряд и поле исчезают за так называемое Максвелловское время релаксации. Это время, за которое плотность заряда или амплитуда электрического поля падает в e раз и которое может быть записано в виде:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad (3.4.2)$$

В отличие от рассмотренного ранее выражения для времени релаксации (выражение (3.1.17) в [3]) здесь учитывается диэлектрическая постоянная среды ε . Диэлектрическая проницаемость появилась в выражении для времени релаксации из-за связи вектора электрической индукции и вектора напряженности электрического поля $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

Напомним, что проводимость σ может быть выражена через заряды e носителей e , их плотность n и их подвижность $\mu_{\text{под}}$:

$$\sigma = ne\mu_{\text{под}}$$

В системе СИ удельная проводимость типичных металлов заключается в диапазоне $\sigma \approx 10^4 - 10^6 \text{ См/м}$ (Сименс/метр), а время релаксации записывается как (здесь и далее $\sigma \equiv \sigma_R$)

$$\tau = \varepsilon_0 \varepsilon / \sigma_R .$$

Подставляя значение $\varepsilon_0 \approx 1/(4\pi k) \approx 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) \approx 10^{-11}$ ($\Phi/м$) (см формулу (1.2.2) из [3]), получаем оценку времени релаксации:

$$\tau \approx \frac{10^{-11}}{10^4} \sim 10^{-15} c$$

Следовательно, в типичных металлах время существования электромагнитного поля порядка периода волны в оптическом диапазоне. Значит, глубина проникновения электромагнитной волны в оптическом диапазоне составляет величину

$$cT \sim (10^{-4} - 10^{-5}) \text{ см.}$$

Это так называемый *скин-эффект*. Надо отметить, что глубина скин-слоя существенно зависит от частоты падающего света (из-за зависимости проводимости от частоты) и состояния поверхности.

Уравнение, подобное волновому, для электромагнитного поля в проводящих средах получается из системы уравнений Максвелла (3.4.1) аналогичным путем как в диэлектриках. Положим, что в среде отсутствуют сторонние заряды, т.е. их плотность $\rho = 0$ и, соответственно, $\text{div} \vec{E} = 0$. Подействуем оператором *rot* на уравнение, описывающее закон электромагнитной индукции, воспользовавшись опять векторным тождеством для левой части уравнения:

$$\text{rot rot} \vec{E} \equiv [\nabla[\nabla, \vec{E}]] = \nabla(\nabla, \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{c \partial t} \quad (3.4.3)$$

Воспользуемся сначала, что $\text{div} \vec{E} = 0$, а затем учитывая, что ε, μ не зависят от координат для однородной среды, в правой части (3.4.3) меняем порядок дифференцирования по координатам и времени и вместо *rot H* подставляем выражение из первого уравнения системы (3.4.1). В отличие от диэлектрической среды в проводящих средах сохраняем слагаемое с плотностью тока $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ и окончательно преобразуем правую часть уравнения к виду:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\mu \partial}{c \partial t} \text{rot} \vec{H} = -\frac{\mu \partial}{c \partial t} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{c \partial t} \right) = -\frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.4.4)$$

В результате получаем уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в проводящих средах и называемые иногда *телеграфными*:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla^2 \vec{H} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Если проводимость сред равна нулю, то телеграфные уравнения переходят в обычные волновые уравнения для изотропной диэлектрической среды.

3.4.2. Основные особенности решений телеграфных уравнений.

Основное отличие полученных уравнений (3.4.5) от волновых уравнений (1.1.1) состоит в дополнительных слагаемых в правой части. Присутствие членов с первыми производными по времени означает *наличие затухания электромагнитной волны*. Ранее мы уже рассматривали уравнение, описывающее затухающие колебания (§4.4. в [1]), в которое входила первая производная смещения по времени.

Телеграфные уравнения не совпадают с волновыми уравнениями, поэтому обычные плоские волны не являются их решениями. Однако уравнения (3.4.5) можно привести к волновым уравнениям обычного типа для гармонической волны, вводя комплексную диэлектрическую проницаемость.

Рассмотрим гармоническую волну:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \quad (3.4.6)$$

Тогда можно вместо первой производной по времени в уравнении (3.4.5) ввести величину $\partial \vec{E} / \partial t = i\omega \vec{E}$, т.е. записать

$$\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{4\pi\sigma\mu}{\omega c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Введем *комплексную диэлектрическую проницаемость*:

$$\varepsilon^* = \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (3.4.7)$$

При этом телеграфные уравнения принимают вид обычных волновых уравнений, в которые входят комплексные коэффициенты:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \frac{\varepsilon^* \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{H} = \frac{\varepsilon^* \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Рассмотрим комплексную диэлектрическую проницаемость и комплексный показатель преломления:

$$\varepsilon^* = (n^*)^2 = (n - i\eta)^2 \equiv \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (3.4.9)$$

где n – *главный показатель преломления*, а η – *главный показатель поглощения*.

Примечание 1. Иногда в некоторых учебниках вводят другое обозначение для комплексной диэлектрической проницаемости: $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$.

Можно также ввести *комплексное волновое число*

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon^*) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \quad (3.4.10)$$

Вводя комплексный показатель преломления n^* и комплексную диэлектрическую проницаемость ε^* , любые следствия и соотношения оптики прозрачных сред могут быть формально перенесены в оптику металлов и других поглощающих сред путем простой замены ε на комплексную величину ε^* . Найдем связь между n , η и измеряемыми величинами ε и σ :

$$n^2 - 2in\eta - \eta^2 = \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

Откуда приравнявая реальные и мнимые части, получаем:

$$\begin{cases} n^2 - \eta^2 = \varepsilon \\ n\eta = \frac{2\pi\sigma}{\omega} = \frac{\sigma}{\nu} \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Здесь мы помимо круговой частоты ω ввели обычную частоту ν . Решая эту систему относительно n и η (в промежутке $n^4 - \varepsilon n^2 - (\sigma/\nu)^2 = 0$), получаем уравнения для определения главных показателей преломления и поглощения:

$$\begin{cases} n^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4 \left(\frac{\sigma}{\nu} \right)^2} \right) \\ \eta^2 = \frac{1}{2} \left(-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4 \left(\frac{\sigma}{\nu} \right)^2} \right) \end{cases} \quad (3.4.12)$$

Здесь σ – высокочастотная проводимость, включающая не только перемещение свободных электронов, но также и связанных (т.е. учитывает явление поляризации). Различие между металлами и неметаллами состоит в том, что в проводниках электромагнитное излучение поглощают свободные электроны.

Примечание 2. Вообще говоря, показатель преломления металлов n зависит от угла падения электромагнитной волны $n_{\theta_1} = \text{Sin}\theta_1 / \text{Sin}\theta_2$. Поэтому то, что мы получили выше, строго говоря, относится к нормальному падению света.

3.4.3. Пройденная и отраженная волны.

Рассмотрим простейшие решения телеграфных уравнений. Пусть имеем нормальное падение света – падает плоская монохроматическая волна по оси z из вакуума на поверхность металла (рис. 4.1). Пусть колебания вектора \vec{E} происходят вдоль оси x . Общее выражение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси z :

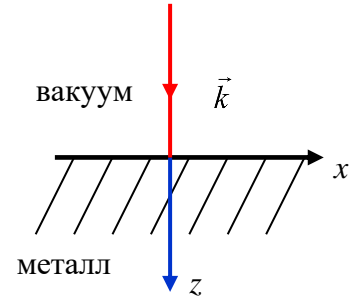


Рис. 4.1.

$$E = E_{x0} \exp[i(\omega t - kz)] = E_{x0} e^{i\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)} \quad (3.4.13)$$

Теперь подставим комплексный показатель преломления вместо $n \rightarrow n^*$:

$$\begin{aligned} E &= E_{x0} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}(n - i\eta)\right)\right] = \\ &= E_{x0} \exp\left[-\frac{\omega\eta}{c}z\right] \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}n\right)\right] \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Последнее выражение описывает электромагнитную волну с затухающей амплитудой (затухающая волна):

$$E(z) = E_0 \exp\left(-\frac{\omega\eta}{c}z\right) \quad (3.4.15)$$

Интенсивность волны, прошедшей в проводящую среду, как функцию координаты z можно получить, записав сначала долю интенсивности, потерянную на расстоянии dz (см рис. 4.2):

$$dI = -\alpha I dz$$

Здесь α – коэффициент поглощения (размерность – $1/\text{см}$). Откуда, получаем интенсивность волны как функцию пройденного расстояния:

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \quad (3.4.16)$$

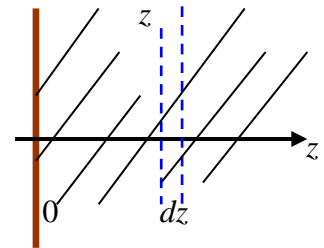


Рис. 4.2.

Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то возводя уравнение (3.4.15) в квадрат и сравнивая с (3.4.16), получаем выражение для коэффициента поглощения:

$$\alpha = \frac{2\omega\eta}{c} \quad (3.4.17)$$

Закон Снеллиуса следует из граничных условий для электрической и магнитной составляющих полей, поэтому он должен выполняться для любых показателей преломления, включая комплексные n :

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n^* \quad (3.4.18)$$

где показатель определяется из (3.4.9): $n^* = n - i\eta$. То есть углы преломления тоже будут комплексными при любом угле падения θ_1 (а не только при $\theta_1 \geq \theta_0$ – полном внутреннем отражении). Наличие комплексного угла θ_2 приводит к тому, что амплитуды отраженного и преломленного света комплексные.

Таким образом, если падающий свет линейно поляризован, то и отраженная, и преломленная волны – эллиптически поляризованы.

Исследование преломленной волны в металлах довольно сложно. Поэтому обычно исследуют отраженную волну, и такой способ является основным методом исследования оптических характеристик металла. Как и ранее, можно пользоваться формулами Френеля для амплитуд (3.2.16):

$$r_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 e^{i\delta_{\parallel}} \quad \text{и} \quad r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_2 e^{i\delta_{\perp}} \quad (3.4.19)$$

В общем случае $\delta_{\parallel} \neq \delta_{\perp}$ и получаем эллиптическую поляризацию. Вычисление разности фаз ($\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$) происходит таким же способом как в случае полного внутреннего отражения.

Для нормального падения $\theta_1 = 0$, и тогда коэффициенты одинаковы и равны:

$$r = \frac{n^* - 1}{n^* + 1} = \frac{n - i\eta - 1}{n - i\eta + 1} \quad (3.4.20)$$

Энергетические коэффициенты отражения получаем равными:

$$R = |r|^2 = \frac{(n-1)^2 + \eta^2}{(n+1)^2 + \eta^2} \quad (3.4.21)$$

Если проводимость металлов большая $\sigma \rightarrow \infty$, то компоненты показателя преломления также велики $n \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow \infty$, и тогда из (3.4.21) следует, что коэффициент отражения стремится к единице $R \Rightarrow 1$, т.е. для идеального проводника вся энергия отражается.

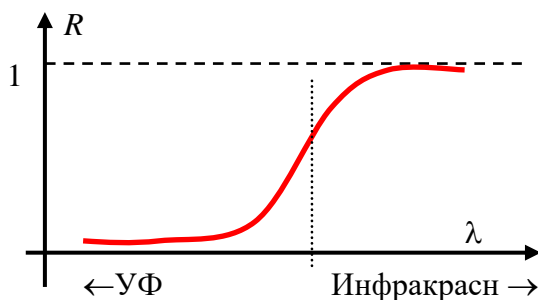


Рис. 4.3.

Реально коэффициент отражения зависит от длины волны электромагнитного излучения. Например, для серебра Ag примерная зависимость изображена на рис. 4.3. Пауль Друде разработал методику определения оптических постоянных металлов путем изучения их свойств по отражению света. В таблице

представлены оптические константы для длины волны $\lambda = 5893 \text{ \AA}$.

Металл	η	n	R (%)
Натрий	2.61	0.05	99.8
Серебро	3.64	0.18	95.0
Золото	2.82	0.37	85.1
Никель	3.32	1.79	62.0
Железо	1.63	1.51	32.6

Сравнение данных этой таблицы, точнее пересчитанные из нее значения электропроводности σ_ω , как правило, не совпадают с измеренными значениями электропроводности σ_0 на постоянном токе $\sigma_0 \neq \sigma_\omega$. Это объясняется влиянием связанных электронов. По мере уменьшения частоты $\sigma_\omega \rightarrow \sigma_0$.

Примечание 3. Пауль Карл Людвиг Друде, немецкий физик, 1863–1906

3.5. Распространение света в кристаллах.

3.5.1. Двойное лучепреломление.

Кристаллы – оптически анизотропные объекты, т.е. их оптические свойства неодинаковы в различных направлениях. Яркий пример проявления анизотропных свойств – *эффект двойного лучепреломления* при распространении света в кристаллах.

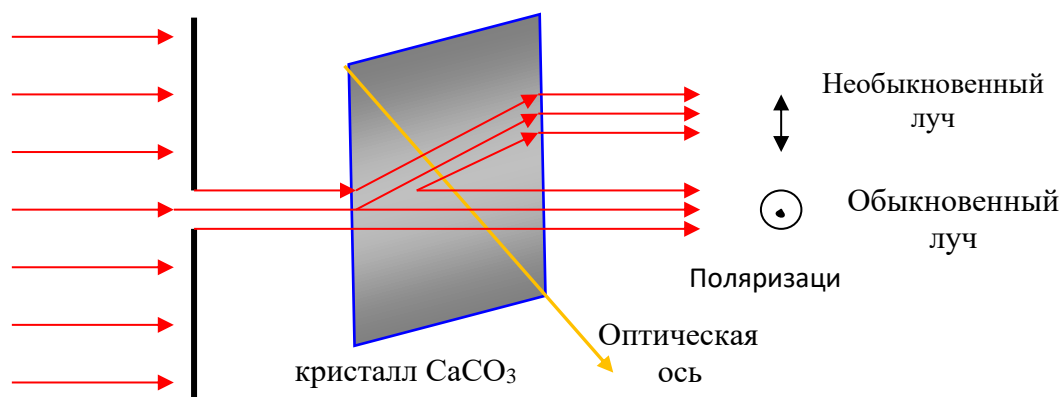


Рис. 5.1.

В 1669 году Эразм Бартолин наблюдал свойство двойного лучепреломления при прохождении света через кристаллы **исландского шпата** CaCO_3 . В чем суть этого явления? При прохождении света через эти кристаллы

наблюдается 2 луча, которые пространственно разделены и линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 5.1). Величина пространственного разделения зависела от взаимного расположения кристалла и направления распространения света, причем в одном направлении распространения света двойного лучепреломления не наблюдалось.

Для дальнейшего анализа экспериментальных фактов дадим основные определения и введем понятие оптической оси. *Оптическая ось* – это такое направление или ось в кристалле, вдоль которого свет, распространяясь, не испытывает двойного лучепреломления. *Главная оптическая плоскость* проходит через оптическую ось кристалла и волновую нормаль падающего света (далее по тексту единичный вектор \vec{N}). На рисунке 5.1 главная оптическая плоскость – это плоскость самого рисунка. *Обыкновенный луч* характеризуется вектором \vec{E}_o и поляризован перпендикулярно главной оптической оси. *Необыкновенный луч* также поляризован и характеризуется вектором \vec{E}_e , лежащим в главной плоскости. При падении на кристалл естественного света интенсивность обыкновенного и необыкновенного луча одинакова.

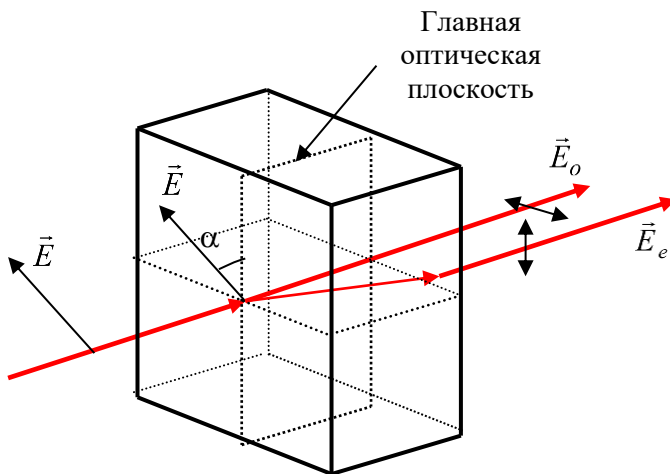


Рис. 5.2.

Если один из лучей после первого кристалла (линейно поляризованный свет) бросить на 2-ой кристалл, то снова получаем 2 луча: обыкновенный и необыкновенный (рис. 5.2). Их интенсивность зависит от угла α между плоскостью колебаний в падающем луче и главной оптической плоскостью 2-го кристалла. Если разложить амплитуду падающей волны A_0 по направлениям вдоль и поперек главной оси

$$\begin{cases} E_o = A_0 \sin \alpha \\ E_e = A_0 \cos \alpha \end{cases}, \quad (3.5.1)$$

то получаем интенсивность обыкновенного и необыкновенного лучей:

$$I_o = I_0 \sin^2 \alpha, \quad I_e = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (3.5.2)$$

Тогда отношение интенсивностей для обыкновенного и необыкновенного лучей равно:

$$\frac{I_o}{I_e} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (3.5.3)$$

Соотношения (3.5.2) - (3.5.3) носят название *закона Малюса*.

Причина необычного поведения света – различные показатели преломления кристалла для распространения обыкновенного (света одной поляризации) и необыкновенного (света другой поляризации) лучей. Показатель преломления кристалла зависит от направления поляризации распространяющегося света. Так, для исландского шпата имеем: для обыкновенного луча $n_o = 1.658$, а для необыкновенного луча показатель преломления не постоянен и меняется в диапазоне – $1.486 < n_e < 1.658$.

Вообще все кристаллы делятся на *отрицательные* кристаллы (исландский шпат), у которых $n_e \leq n_o$, и *положительные* кристаллы, у которых $n_e \geq n_o$ (кварц).

*Примечание 1. Эразм Бартолин, датский физик, 1625–1698;
Этьен Луи Малюс, французский физик, 1775–1812*

3.5.2. Оптические свойства кристаллов.

В анизотропных средах связь между векторами электрической индукции и напряженностью электрического поля усложняется (см в [3] Электромагнетизм, Глава 2)

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.5.4)$$

где ε_{ij} – тензор диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (3.5.5)$$

Из закона сохранения энергии следует, что тензор диэлектрической проницаемости симметричный, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, и из 9-ти компонент тензора – 6 независимых. Симметричность тензора позволяет привести выражения для плотности электрической энергии к такой форме, в которую будут входить лишь квадраты компонент поля (подробнее см А.Н.Матвеев «Оптика» §39):

$$w = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right) \quad (3.5.6)$$

Таким образом, существует такая система координат, связанная с кристаллом, в которой материальные уравнения и выражения для плотности электрической энергии приобретают простую форму:

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z \quad (3.5.7)$$

В этой системе координат тензор диэлектрической проницаемости диагонален, при этом величины ε_x , ε_y , ε_z называются *главными диэлектрическими проницаемостями*.

Из (3.5.7) следует важный вывод, что вектора \vec{D} и \vec{E} не коллинеарны. Исключение составляет случай, когда вектор напряженности \vec{E} совпадает с

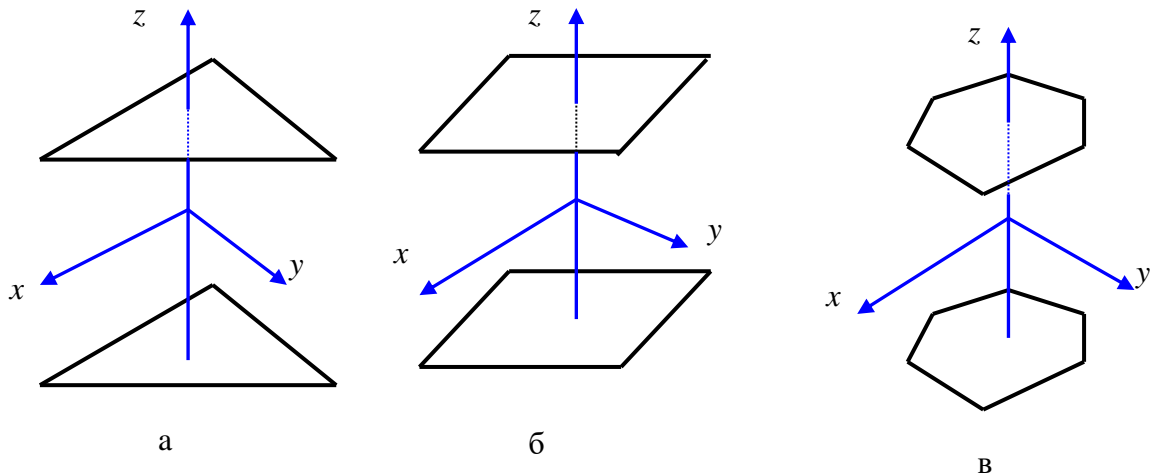


Рис. 5.3.

одной из главных осей или когда $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ (изотропная среда).

В изотропных средах диэлектрическая проницаемость ε является функцией частоты (явление дисперсии), особенно резко она меняется вблизи полос поглощения. В оптически анизотропных средах компоненты ε_{ij} тоже меняются от частоты ω . Следовательно, с частотой падающего света меняются направления вектора \vec{D} , а также значения главных диэлектрических проницаемостей и направления осей ε_x , ε_y , ε_z . Это явление называется *дисперсией осей*.

По своим оптическим свойствам кристаллы делятся на **3 основные группы**.

I-ая группа. Кубические кристаллы – кубическая система, когда все три выбранных взаимно-перпендикулярных направления эквивалентны: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$. При этом вектора индукции и напряженности электрического поля параллельны:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Кристаллы оптически изотропные и по оптическим свойствам эквивалентны аморфному телу.

II-ая группа. Кристаллы, в которых можно выбрать 2 или более кристаллографически эквивалентных направлений, лежащих в одной

плоскости. Это кристаллы (см рис. 5.3) *тригональной* (а), *тетрагональной* (б) и *гексагональной* (в) систем. Эти плоскости перпендикулярны к оси симметрии третьего, четвертого и 6-го порядков, при этом выполняется $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Группы I и II – одноосные кристаллы.

III группа. Кристаллы, в которых невозможно выбрать 2 кристаллографически эквивалентных направления. Это кристаллы *ромбической*, *моноклинной* и *триклинной* систем: $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Это оптически двуосные кристаллы.

3.5.3. Объяснение явления двойного лучепреломления.

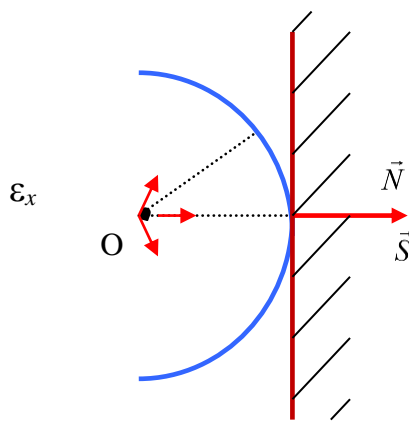


Рис. 5.4.

Пусть точка O является источником сферических электромагнитных волн.

А) В изотропной среде волновая поверхность представляет собой сферу (см рис. 5.4), поскольку $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$. Так как в каждой точке фронт волны задается плоскостью, касательной к волновой поверхности. Причем нормаль к этой поверхности определяет направление распространения волны, т.е. фазовую скорость. Для изотропной среды нормаль \vec{N} к волновой поверхности совпадает с направлением луча, т.е. с направлением распространения энергии \vec{S} (вектор Пойнтинга) электромагнитной волны.

Б) В анизотропной среде скорость распространения зависит от направления и в этом случае волновая поверхность не является сферой (см рис.

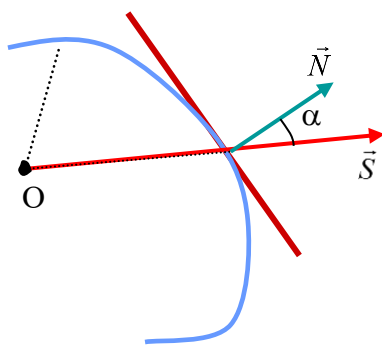


Рис.5.5.

5.5). Следовательно, нормаль к волновой поверхности \vec{N} , т.е. единичный вектор, определяющий направление распространения постоянной фазы, и вектор Пойнтинга $\vec{S} = c/4\pi [\vec{E}, \vec{H}]$, определяющий направление распространения энергии (направление групповой скорости или, иначе, луч света), не совпадают по направлению. Если угол между ними равен α , то скорость распространения энергии по нормали равна $v_N = v_S \cos \alpha$.

Покажем из уравнений Максвелла, что в анизотропных средах распространяются две волны. Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну:

$$\vec{E}=\vec{E}_0 \exp [i(\omega t-\vec{k} \vec{r})]; \quad \vec{D}=\vec{D}_0 \exp [i(\omega t-\vec{k} \vec{r})]; \quad (3.5.8)$$

$$\vec{B}=\vec{B}_0 \exp [i(\omega t-\vec{k} \vec{r})]; \quad \vec{H}=\vec{H}_0 \exp [i(\omega t-\vec{k} \vec{r})] \quad (3.5.9)$$

Запишем систему уравнений Максвелла для немагнитного диэлектрика (плотность тока \vec{j} равна нулю):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{c \partial t}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{c \partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Отметим, что задачу решаем в системе главных диэлектрических осей, при этом $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$, т.к. вектор \vec{E} не коллинеарен вектору \vec{D} (см рис. 5.6). Подставим плоскую волну (3.5.8) и (3.5.9) в уравнения (3.5.10), при этом произведение волнового вектора на радиус-вектор равно:

$$\vec{k} \vec{r} = \omega \frac{n}{c} \vec{r} \vec{N},$$

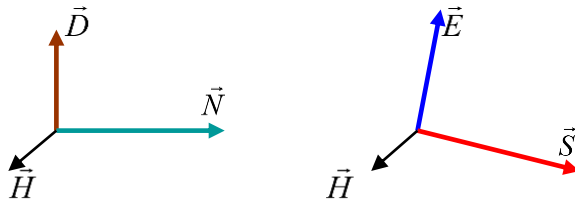


Рис. 5.6.

где c/n – фазовая скорость в направлении нормали. Заметим, что производные по времени и пространственным координатам от плоской волны могут быть заменены на следующие множители:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\Rightarrow i\omega; & \frac{\partial}{\partial x} &\Rightarrow -i\omega \frac{n}{c} N_x; \\ \frac{\partial}{\partial y} &\Rightarrow -i\omega \frac{n}{c} N_y; & \frac{\partial}{\partial z} &\Rightarrow -i\omega \frac{n}{c} N_z \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Тогда, полагая $\vec{B}=\vec{H}$ для немагнитного диэлектрика, из первых двух уравнений (3.5.9) получаем, соответственно:

$$\vec{D}=-n[\vec{N}, \vec{H}], \quad \vec{H}=n[\vec{N}, \vec{E}] \quad (3.5.12)$$

Из этих соотношений видно, что нормаль к волновой поверхности перпендикулярна векторам напряженности магнитного поля и электрической

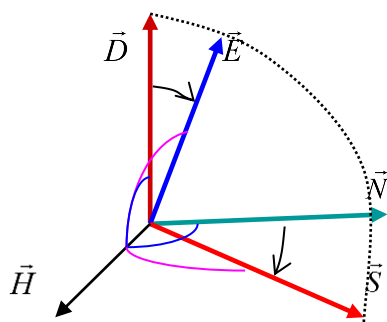


Рис.5.7.

индукции: $\vec{N} \perp \vec{H}, \vec{D}$. Вектор Пойнтинга $\vec{S} = c/4\pi [\vec{E}, \vec{H}]$, задающий направление луча, перпендикулярен к векторам напряженности магнитного поля \vec{H} и напряженности электрического поля \vec{E} . Поскольку в анизотропной среде \vec{E} и \vec{D} не коллинеарны, то вектор Пойнтинга не совпадает по направлению с вектором нормали \vec{N} к волновой поверхности (см рис.5.6 и 5.7).

Итак, при распространении электромагнитной волны в анизотропной среде фазовая скорость \vec{v}_N , которая направлена по вектору \vec{N} , и групповая скорость \vec{v}_S , направленная по вектору \vec{S} , не совпадают по направлению между собой. Следовательно, имеем, как обычно, $\vec{E} \perp \vec{H}$, но при этом вектор \vec{E} **не перпендикулярен** вектору \vec{N} . Строго говоря, в анизотропной среде электромагнитная волна **не является поперечной**, т.к. существует ненулевая проекция вектора \vec{E} на направление распространения фазы \vec{N} и ненулевая проекция \vec{D} на вектор Пойнтинга \vec{S} . Вектор \vec{E} коллинеарен \vec{D} , если волна распространяется вдоль одного из главных направлений в кристалле.

Итак, комбинируя уравнения (3.5.12) (подставляя второе в первое), получаем:

$$\vec{D} = n[\vec{H}, \vec{N}] = n^2[[\vec{N}, \vec{E}], \vec{N}] = n^2(\vec{E} - \vec{N}(\vec{E}, \vec{N})) \quad (3.5.13)$$

Умножим последнее равенство скалярно на \vec{D} и, учитывая, что $\vec{D}\vec{N} = 0$, имеем:

$$D^2 = n^2(\vec{E}, \vec{D}) \quad (3.5.14)$$

Далее, вспоминая $n = c/v$, получаем для фазовой скорости:

$$v^2 = c^2 \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{D^2} \quad (3.5.15)$$

При этом выясняется важная особенность: *скорость распространения электромагнитных волн v зависит от направления их распространения и поляризации.*

Рассматривая совместно уравнения Максвелла, свойства волн в кристаллах и связь между векторами \vec{D} и \vec{E} , можно получить формулы Френеля для анизотропной среды. В общем случае эти вопросы выходят за рамки курса общей физики и мы здесь их не будем рассматривать.

3.5.4. Оптически одноосные кристаллы.

Наибольшее практическое значение имеют оптически одноосные кристаллы, структура которых симметрична относительно оси вращения. Разложим вектора \vec{D} и \vec{E} на составляющие вдоль оптической оси \vec{D}_{\parallel} и \vec{E}_{\parallel} и перпендикулярные к оптической оси \vec{D}_{\perp} и \vec{E}_{\perp} . Тогда можно записать

$$\vec{D}_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} \quad (3.5.16)$$

$$\vec{D}_{\perp} = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{\perp} \quad (3.5.17)$$

где ε_{\parallel} и ε_{\perp} – *продольная* и *поперечная* диэлектрические проницаемости.

Рассмотрим сначала частные случаи.

А) Пусть вектор \vec{D} перпендикулярен главной плоскости кристалла (плоскость, в которой лежат вектор \vec{N} и оптическая ось). Тогда $\vec{D} = \vec{D}_\perp$ и для связи векторов электрической индукции и напряженности поля мы имеем только уравнение (3.5.17): $\vec{D} = \epsilon_\perp \vec{E}$. В этом случае кристалл ведет себя как изотропная среда с диэлектрической проницаемостью ϵ_\perp . Из (3.5.15) получаем выражение для скорости распространения световых волн:

$$v^2 = c^2 \frac{\vec{D}\vec{E}}{D^2} = \frac{c^2}{\epsilon_\perp}$$

$$v = v_\perp \equiv v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_\perp}} \quad (3.5.18)$$

Это – *скорость распространения обыкновенного луча*. Таким образом, если электрический вектор распространяющейся волны перпендикулярен к главной плоскости кристалла, то скорость волны не зависит от направления ее распространения. Такая волна составляет суть обыкновенной световой волны.

Б) Пусть вектор \vec{D} лежит в главной плоскости. Тогда вектор \vec{E} тоже лежит в главной плоскости и характеризует (по определению) *необыкновенную волну*. Вектор \vec{E} можно разложить на две составляющие – вдоль вектора \vec{D} и вдоль вектора нормали (рис.5.7 и 5.8):

$$\vec{E} = \vec{E}_N + \vec{E}_D \quad (3.5.19)$$

Умножая (3.5.19) скалярно на \vec{D} и учитывая, что $\vec{D}\vec{N} = 0$, получаем следующее очевидное равенство:

$$\vec{D}\vec{E} = \vec{D}\vec{E}_N + \vec{D}\vec{E}_D = DE_D$$

$$E_D = \frac{\vec{D}\vec{E}}{D} \quad (3.5.20)$$

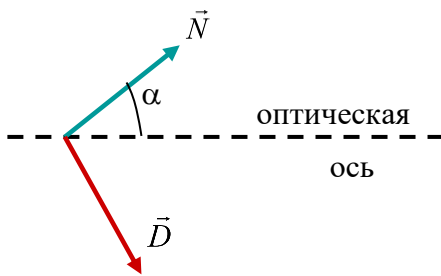


Рис. 5.8.

Пользуясь разложением (3.5.16) и (3.5.17), преобразуем скалярное произведение (\vec{E}, \vec{D}) :

$$E_D = \frac{\vec{E}\vec{D}}{D} = \frac{E_{\parallel}D_{\parallel} + E_{\perp}D_{\perp}}{D} = \frac{1}{D} \left(\frac{D_{\parallel}^2}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{D_{\perp}^2}{\epsilon_{\perp}} \right) \quad (3.5.21)$$

Вводя угол α между оптической осью и волновой нормалью (см рис.5.8), получаем:

$$E_D = D \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon_{\perp}} \right) = D \left(\frac{N_{\perp}^2}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{N_{\parallel}^2}{\epsilon_{\perp}} \right) \quad (3.5.22)$$

Введем диэлектрическую проницаемость

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{N_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{N_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}} \quad (3.5.23)$$

Тогда можно (3.5.22) переписать:

$$D = \varepsilon E_D \quad (3.5.24)$$

Из общих соотношений (3.5.12), рассмотрев равенства по модулю, получаем:

$$\varepsilon E_D = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E_D$$

Откуда фазовая скорость (скорость волны по нормали к фронту волны):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c \sqrt{\frac{N_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{N_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}}} = v_e = v_{\parallel} \quad (3.5.25)$$

Эта скорость изменяется с изменением направления нормали \vec{N} к фронту волны. По этой причине возникает необыкновенная волна. Зависимость ее скорости v_{\parallel} от направления распространения обусловлена тем, что с изменением направления волновой нормали \vec{N} меняется угол между вектором \vec{E} и оптической осью кристалла.

1) Когда $N_{\perp} = 0$, то необыкновенная волна распространяется вдоль оптической оси, то из (3.5.25) следует, что фазовая скорость равна

$$v_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = v_{\perp} \equiv v_0 \quad (3.5.26)$$

Т.е. в этом случае нет различия между обыкновенной и необыкновенной волной за исключением возможно разной поляризации волн.

2) Если $N_{\parallel} = 0$, то фазовая скорость равна:

$$v_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \quad (3.5.27)$$

Это скорость необыкновенной волны, максимально отличающаяся от скорости обыкновенного луча.

Итак, в общем случае, волна, попадающая в кристалл из изотропной среды, разделяется внутри кристалла на две линейно поляризованные волны:

а) обыкновенную, вектор электрической индукции \vec{D} которой перпендикулярен главной плоскости, и

б) необыкновенную с вектором индукции, лежащим в главной плоскости. Для различных направлений распространения необыкновенной волны – различные скорости. Законы преломления справедливы, но не для лучей, а для волновых нормалей.

3.5.5. О построении лучей.

Итак, в обыкновенном луче колебания электрического вектора \vec{E} происходят в направлении, перпендикулярном к главной плоскости кристалла.

Построим на рис. 5.9 диаграмму скоростей для одноосных кристаллов. Пусть плоскость листа – главная плоскость кристалла. Окружность, или точнее сфера, характеризуется ϵ_{\perp} или скоростью обыкновенного луча, которая постоянна для одноосных кристаллов во всех направлениях распространения. Поляризация этого луча, обозначенная на рисунке 5.9 точками, перпендикулярна плоскости листа.

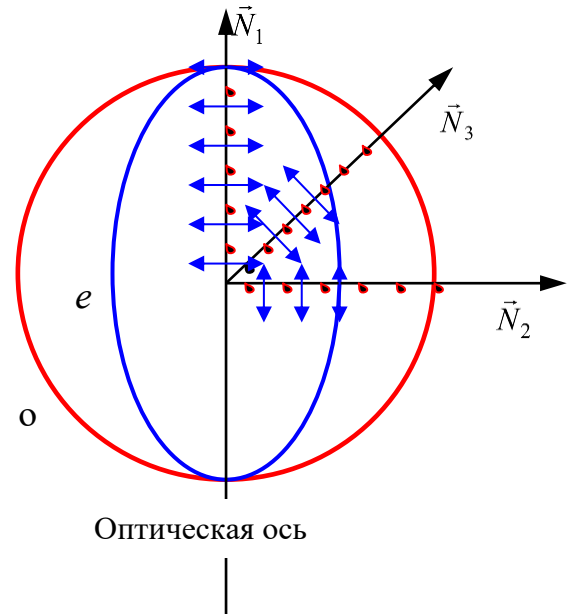


Рис.5.9.

Эллипс скоростей, точнее для одноосных кристаллов в пространстве *эллипсоид вращения*, характеризует скорость распространения необыкновенного луча. Его скорость определяется соотношением (3.5.25) и меняется в зависимости от направления распространения \vec{N} ($N_{\perp} = \sin \alpha$ и $N_{\parallel} = \cos \alpha$) относительно оптической оси. На рисунке 5.9 поляризация необыкновенного луча обозначена обоюднострелкой, т.к. она параллельна главной плоскости.

Рассмотрим 3 луча по направлениям $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$, в качестве примера.

А). Направление \vec{N}_1 : угол $\alpha = 0$, тогда лучи движутся, не расщепляясь, с одинаковой скоростью

$$v_0 = v_e = c/\sqrt{\epsilon_{\perp}}.$$

Б) Направление \vec{N}_2 : угол $\alpha = \pi/2$, тогда обыкновенный и необыкновенный лучи движутся в одном направлении, но с разной скоростью

$$v_0 = c/\sqrt{\epsilon_{\perp}} \quad \text{и} \quad v_e = c/\sqrt{\epsilon_{\parallel}}.$$

В) Направление \vec{N}_3 : угол α произвольный, тогда обыкновенный и необыкновенный лучи движутся, расщепляясь, с разной скоростью.

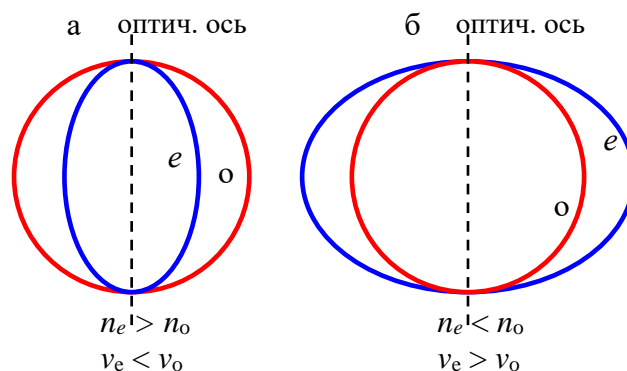


Рис.5.10.

В общем случае, как уже упоминалось в этом параграфе выше, существуют кристаллы положительные ($n_e > n_o$) и отрицательные ($n_e < n_o$), соответствующие диаграммы скоростей которых изображены на рисунке 5.10 а и б.

Полученные диаграммы скоростей позволяют построить волновые фронты разделяющихся лучей. Покажем построение волновых фронтов на нескольких примерах. Для определенности рассмотрим положительный кристалл и нормальное падение света на его поверхность. Рассмотрим три направления распространения фронта волны \vec{N} относительно оптической оси кристалла, соответствующие случаям А) \vec{N}_1 , Б) \vec{N}_2 , В) \vec{N}_3 , изображенным на рис.5.11-12.

Случай А): при таком нормальном падении, когда оптическая ось кристалла расположена перпендикулярно поверхности и совпадает по направлению с \vec{N} , обыкновенный и необыкновенный лучи идут с одинаковой скоростью в одном направлении, т.е. лучи не разделяются (рис. 5.11 А).

Случай Б): при таком нормальном падении, когда оптическая ось

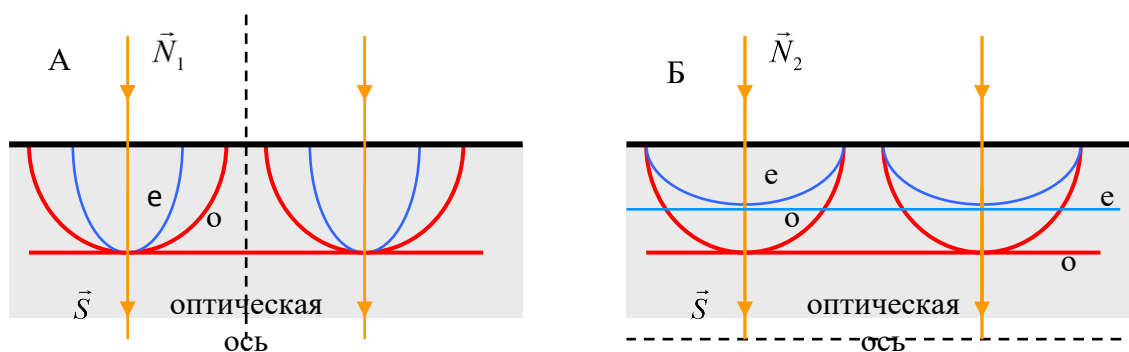


Рис. 5.11.

кристалла расположена параллельно поверхности и перпендикулярна направлению \vec{N} , обыкновенный и необыкновенный лучи идут опять не разделяясь, в одном направлении, но идут с различной скоростью. Для положительного кристалла необыкновенный луч идет медленнее (рис.5.11.Б).

Итак, в случаях А и Б лучи не разделяются, т.к. \vec{N} совпадает с направлением \vec{S} .

Случай В): при таком нормальном падении, когда оптическая ось кристалла расположена под некоторым углом к поверхности и не совпадает по направлению с \vec{N} , обыкновенный и необыкновенный лучи идут с различной фазовой скоростью, при этом происходит пространственное разделение лучей. На рисунке 5.12 необыкновенный луч идет под углом к нормали, в то время как обыкновенный проходит не преломляясь.

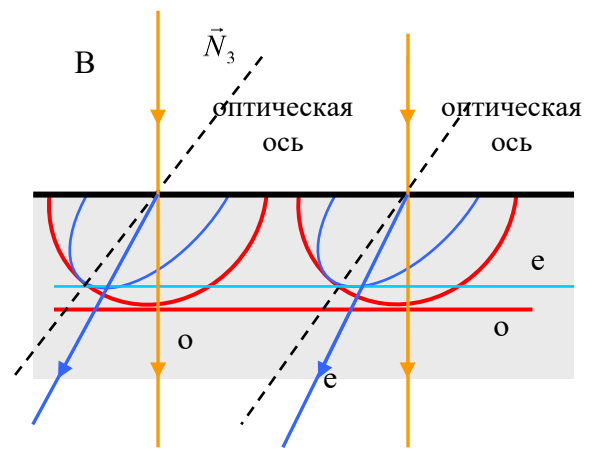


Рис. 5.12.

Еще один пример построения фронта волны и лучей приведен на рис. 5.13, где рассмотрено падение световой волны под некоторым углом к нормали и при произвольном направлении оптической оси кристалла. Опять-таки для положительного кристалла на границе сред строим диаграмму скоростей в точке 2, с радиусом равным расстоянию, которое лучи успевают пройти внутри за время, когда световая волна достигнет точки 1. Затем строим касательные из точки 1 к окружности (для обыкновенного луча) и эллипсу (для необыкновенного луча) диаграммы. Перпендикуляры к касательным дают направление распространения фронта этих волн, а направления распространяющихся в кристалле лучей определяются линиями, проходящими через точки касания и точку 2 (рис. 5.13).

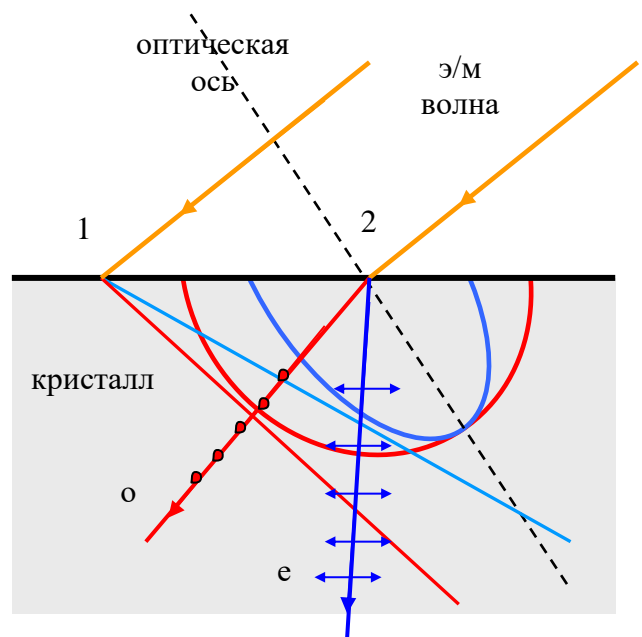


Рис. 5.13.

3.5.6. Поляризаторы и оптические пластинки.

1). *Призма Николя*. Призма изготавливается из 2-х кусков исландского шпата, вырезанных и отшлифованных под определенными углами к угловым ребрам и оптической оси. Оба эти кусочка склеивают канадским бальзамом. Показатель преломления канадского бальзама ($n = 1.55$) занимает промежуточное значение между обыкновенным ($n_o = 1.658$) и необыкновенным ($n_e = 1.486$) показателями преломления исландского шпата. Все углы и показатели рассчитаны так, что обыкновенный луч испытывает полное внутренне отражение на границе шпата с канадским бальзамом и на выходе поглощается зачерненной поверхностью, а необыкновенный луч проходит через слой с бальзамом. В результате на выходе имеем линейно поляризованный свет в плоскости, параллельной главной плоскости падения.

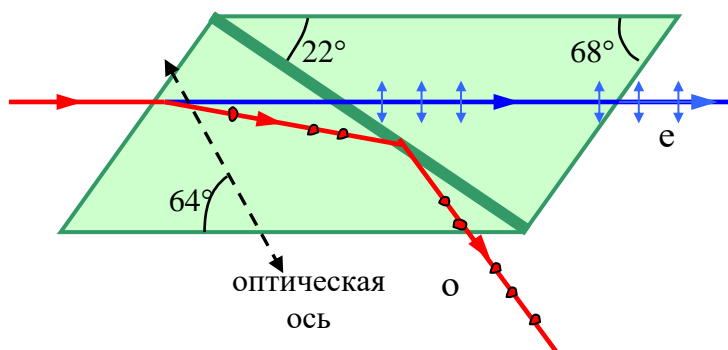


Рис. 5.14.

2). *Призма Фуко*. Эта призма сделана по подобию призмы Николя, в которой канадский бальзам заменен слоем воздуха. Для осуществления полного внутреннего отражения изменены значения углов, под которыми вырезаются кристаллы. Призма Фуко может также использоваться для ультрафиолетового излучения. Существует большое разнообразие призм, основанных на тех же принципах и предназначенных для получения поляризованного света.

3). *Поляроиды* (турмалин), дихроичные пластинки. К ним относятся кристаллы и приборы, у которых поглощение зависит от направления колебаний электрического вектора \vec{E} .

Для анализа поляризованного света и изменения его поляризации часто используются оптические пластинки. Например, как отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу? С помощью поляризаторов это не удастся. Чтобы отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу, используют *четвертьволновую оптическую пластинку* $\lambda/4$.

Кристаллическая пластинка вырезана из одноосного кристалла параллельно оптической оси. Тогда необыкновенный (e) и обыкновенный (o) лучи не разделяются пространственно, а имеют различные скорости. Тогда пластинка в $\lambda/4$ дает между лучами e и o разность фаз, равную $\pi/2$. Разность хода лучей:

$$d(n_e - n_o) = \pm \lambda/4 \quad \text{и} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o) = \pm \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (3.5.28)$$

Если на входе падает плоско поляризованная волна, то на выходе волны из пластинки получаем циркулярно-поляризованную волну. И, наоборот, из циркулярно-поляризованной волны при пропускании через пластинку $\lambda/4$ получаем на выходе плоско поляризованную волну. При пропускании естественного света через эту пластинку ничего не происходит с естественным светом – он остается неполяризованным. При пропускании циркулярно-поляризованного света через пластинку $\lambda/4$ получаем плоско поляризованный свет, а затем его можно пропустить через поляризатор. Поляризатор покажет линейно поляризованный свет: максимум интенсивности при одном угле поворота и нулевое значение интенсивности пройденного света при повороте на угол $\pi/2$. Для естественного света при различных углах поворота поляризатора интенсивность пройденного света остается постоянной.

Для поворота плоскости линейной поляризации на некоторый угол можно использовать пластинку $\lambda/2$, которая дает следующую оптическую разность хода и фаз:

$$d(n_e - n_o) = \pm \lambda/2 \quad \text{и} \quad \Delta\varphi = \pm \pi/2 \quad (3.5.29)$$

Если линейная поляризация перед пластинкой $\lambda/2$ имела угол α по отношению к оптической оси кристалла, то на выходе получим поворот плоскости поляризации на угол 2α (см рис.5.15).

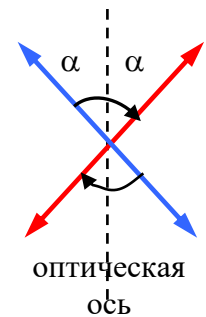


Рис. 5.15.

*Примечание 2. Уильям Николь, шотландский физик, 1768–1851;
Жан Бернар Леон Фуко, французский физик, 1819–1868*

3.6. Классическая теория дисперсии света

3.6.1. Дисперсия.

Дисперсия – зависимость показателя преломления n и, следовательно, скорости распространения электромагнитных волн v от длины волны. Влияние дисперсии проявляется лишь в распространении некогерентных волн. Дисперсия является следствием зависимости поляризуемости атомов и молекул от частоты падающего излучения.

Ранее мы получали формулу Релея (Глава 1, §1.8), дающую связь между групповой и фазовой скоростями:

$$v_{gp} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (3.6.1)$$

где фазовая скорость равна $v = \omega/k = c/n$, а групповая – $v_{gp} = d\omega/dk$.

1) Если $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, то $v_{ep} = v$ и в среде нет дисперсии.

2) Если $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, то $v_{ep} < v$, при этом получаем

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = -\frac{c}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \quad \text{и} \quad \frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0.$$

Это *нормальная дисперсия*: с ростом длины волны показатель преломления уменьшается. Примерная зависимость показателя преломления от длины волны λ и частоты ω изображена на рис. 6.1 (а,б).

3) Если $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, то получаем

$$v_{ep} > v, \quad \text{и} \quad \frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$$

Это *аномальная дисперсия*. При этом с ростом длины волны показатель преломления растет или с ростом частоты падает (рис. 6.1в).

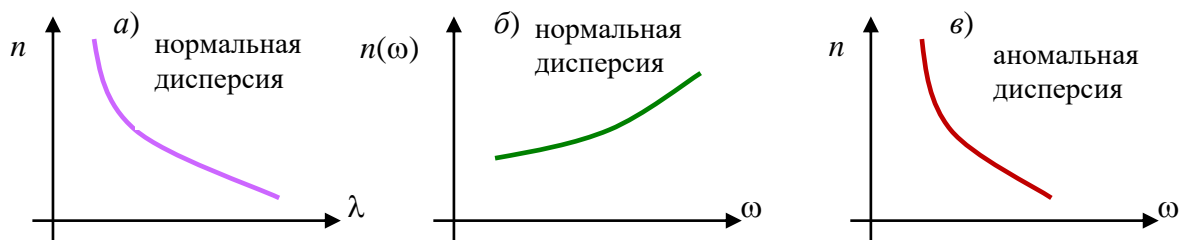


Рис. 6.1.

Все среды, за исключением абсолютного вакуума, обладают дисперсией. Даже в межзвездном пространстве обнаружена дисперсия.

Теория Максвелла не содержит атомных констант и поэтому не дает объяснения дисперсии, т.е. она не описывает зависимость диэлектрической проницаемости от длины волны $\epsilon = \epsilon(\lambda)$. Дисперсия света возникает в результате *вынужденных колебаний электронов и ионов* под воздействием переменного поля электромагнитной волны. Поэтому для объяснения дисперсии необходимо, хотя бы в рамках модельного рассмотрения, ввести представления о структуре атомов или молекул.

3.6.2. Классическая теория дисперсии.

Рассмотрим классическую теорию дисперсии, построенную Х.А. Лоренцом на основании уравнений Ньютона. Она справедлива в основном для газовых сред, где можно не учитывать сложное взаимодействие между атомами и электронами.

В простейшем случае, когда взаимодействием между атомами или молекулами можно пренебречь (разреженные среды, например, газы) и

считать, что поле, действующее на отдельный атом, совпадает со средним полем волны. При этом достаточно учесть действие поля волны на изолированный атом, который упрощенно в этой модели рассматривается как гармонический осциллятор (т.е. рассматриваются упруго связанные электроны).

Очевидно, что применение к описанию движения электрона законов классической физики с точки зрения современной физики совершенно не оправдано. Правильную теорию атома дает квантовая механика. Поэтому и последовательная теория дисперсии, использующая реалистическую модель среды, должна быть квантовой. Использование здесь упрощенной модели атома как гармонического осциллятора основано лишь на том замечательном факте, что квантовая теория дисперсии приводит к практически тем же результатам, что и классическая, хотя и с некоторыми особенностями.

Все электроны в атоме можно разделить на *внешние* (оптические) и *внутренние* электроны, т.е. электроны внутренних оболочек. Для разных длин волн разные электроны атома дают вклад в дисперсию. В оптическом диапазоне вклад дают только внешние электроны. В классической теории дисперсии оптический электрон (электрон внешней оболочки атома) в атоме рассматривается как затухающий гармонический осциллятор, характеризуемый определенной собственной частотой ω_0 и постоянной затухания γ . Запишем уравнение Ньютона, для движения электрона в поле электромагнитной волны, пренебрегая магнитной силой Лоренца $\frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - g\dot{\vec{r}} + e\vec{E}' \quad (3.6.2)$$

Здесь \vec{r} – смещение электрона из положения равновесия, “ $-k\vec{r}$ ” – квазиупругая сила; “ $g\dot{\vec{r}}$ ” – аналог силы трения (учитывает, что свет может поглощаться); \vec{E}' – напряженность электрического поля, действующего на электрон. Вообще говоря, поле \vec{E}' отличается от среднего макроскопического поля \vec{E} , входящего в уравнения Максвелла, однако в случае достаточно разреженных газов этим различием можно пренебречь. Тогда уравнение движения оптического электрона в поле $\vec{E}(t)$ световой волны имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}(t), \quad (3.6.3)$$

где входящие параметры определены как обычно в теории колебаний ([1], Глава 4 “Колебания”):

$$2\gamma = \frac{g}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (3.6.4)$$

Постоянная затухания γ , характеризующая силу “сопротивления”, пропорциональную скорости электрона, содержит вклад, обусловленный

радиационным затуханием: согласно классической теории электрон обязательно излучает электромагнитные волны. Другие причины затухания (взаимодействие с другими атомами и неупругие соударения) связаны с *диссипацией* энергии электромагнитного поля, т.е. в конечном итоге превращением её в теплоту. Диссипативное затухание можно считать истинным поглощением и включить его вклад в константу γ .

Относительная роль отдельных членов уравнения зависит от рассматриваемой области частот. Например, при частотах ω падающей электромагнитной волны, далеких от собственной частоты ω_0 осциллятора, затуханием, как правило, можно пренебречь. Собственную частоту ω_0 атомного электрона будем рассматривать как формально введенную постоянную, которая определяет частоту линии поглощения в спектре исследуемого вещества. Эти постоянные γ и ω_0 не могут быть получены из классической физики, здесь они вводятся как параметры.

Пусть падает плоская монохроматическая волна, т.е. поле $\vec{E}(t)$, действующее на осциллятор, изменяется со временем по гармоническому закону. Запишем падающую волну в комплексной форме:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (3.6.5)$$

Заметим, E_0 можно считать постоянной (т.е. не зависящей от координат), если амплитуда колебаний электрона мала по сравнению с длиной волны. Нас интересует частное решение уравнения (3.6.3), описывающее *установившиеся* вынужденные колебания осциллятора (напомним, при больших временах общее решение однородного уравнения исчезает – см [1]). Эти колебания, совершаемые под действием гармонической (синусоидальной) силы, также будут гармоническими, а их частота совпадает с частотой вынуждающей силы. Поэтому решение уравнения для смещения $\vec{r}(t)$ в случае установившихся колебаний будем искать в виде $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$.

В результате получаем следующее решение:

$$\vec{r}(t) = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E}(t). \quad (3.6.6)$$

Так как электрон смещается относительно ядра, то атом приобретает дипольный момент. Индуцируемый электрическим полем дипольный момент атома пропорционален напряженности поля $\vec{p}(t) = e\vec{r} = \beta\vec{E}$ и, следовательно, можно записать:

$$\vec{p}(t) = \beta\vec{E} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E}(t). \quad (3.6.7)$$

Зависящий от частоты ω коэффициент пропорциональности между векторами \vec{p} и \vec{E} называется *атомной поляризуемостью* $\beta(\omega)$:

$$\vec{p} = \beta(\omega)\vec{E}.$$

Если N – концентрация атомов вещества, то вектор поляризации определяется $\vec{P} = N\vec{p}$, тогда для диэлектрической *восприимчивости* можно записать

$$\alpha(\omega) = N\beta(\omega) = \frac{N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.8)$$

Диэлектрическая проницаемость связана с восприимчивостью соотношением $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$. Таким образом, для разреженной среды, содержащей N осцилляторов в 1 см^3 , получаем *диэлектрическую проницаемость как функцию частоты*:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.9)$$

Иногда для упрощения записи вводят константу ω_p , имеющую размерность частоты и называемую *плазменной* или *Ленгмюровской частотой*

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}. \quad (3.6.10)$$

Тогда диэлектрическую проницаемость можно записать в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.11)$$

Вследствие затухания атомных осцилляторов диэлектрическая проницаемость оказывается комплексной величиной. Выделяя вещественную и мнимую часть, можно получить выражения для зависящих от частоты *показателя преломления* $n(\omega)$ и *показателя затухания* $\eta(\omega)$. Вводим, как и ранее в §3.4, эти показатели следующим образом:

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\eta \quad (3.6.12)$$

Тогда, подставив (3.6.12) в (3.6.11) и приравняв отдельно реальные и мнимые части, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} n^2 - \eta^2 &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \\ n\eta &= \frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Из (3.6.13) можно получить показатели преломления и затухания, однако, в общем виде выражения для показателей преломления $n(\omega)$ и затухания $\eta(\omega)$

весьма громоздки, поэтому анализ физических результатов электронной теории дисперсии имеет смысл провести для сравнительно простых частных случаев.

Примечание 1. *Хенрик Антон Лоренц, нидерландский физик-теоретик, 1853–1928, Нобелевская премия 1902 г. за разработку теории эффекта Зеемана;*
Ирвинг Ленгмюр, американский физик, 1881–1957, Нобелевская премия 1932 г. по химии.

3.6.3. Нормальная и аномальная дисперсии.

1). *Нормальная дисперсия.* При частотах, далеких от собственной частоты ω_0 атомных осцилляторов, выполняется условие

$$2\omega\gamma \ll |\omega_0^2 - \omega^2|, \quad (3.6.14)$$

поэтому мнимой частью, ответственной за поглощение, в выражении для дисперсии можно пренебречь. Тогда зависимость показателя преломления от частоты принимает вид:

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.6.15)$$

Для разреженных сред второй член этого выражения мал по сравнению с первым, поэтому можем приближенно записать (вспоминая разложение в ряд $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ при $x \ll 1$):

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.6.16)$$

При тех частотах, где полученная формула применима (т.е. частотах вдали от ω_0), показатель преломления возрастает с увеличением частоты. Такой характер зависимости $n(\omega)$ называют *нормальной дисперсией*. На рисунке 6.2 показана зависимость $n(\omega)-1$ от частоты электромагнитной волны.

Для низких частот ($\omega < \omega_0$) показатель преломления $n(\omega)$ больше единицы, т.е. фазовая скорость c/n волны в среде меньше скорости света в пустоте. Это значит, что измененная средой волна отстает от падающей волны по фазе.

Если же частота электромагнитной волны больше собственной частоты осцилляторов ($\omega > \omega_0$), то $n < 1$ и фазовая скорость волны в среде оказывается больше скорости света в вакууме, т.е. измененная волна опережает по фазе падающую. Напомним, что фазовая скорость может быть больше скорости света, и это не противоречит релятивистской теории, утверждающей, что скорости материальных тел и электромагнитного сигнала не могут превышать c . Понятие показателя преломления применимо к *монохроматической волне*, имеющей бесконечную протяженность в пространстве и во времени, т.е. к установившимся вынужденным колебаниям осцилляторов среды. А монохроматическая волна не может служить для передачи сигнала.

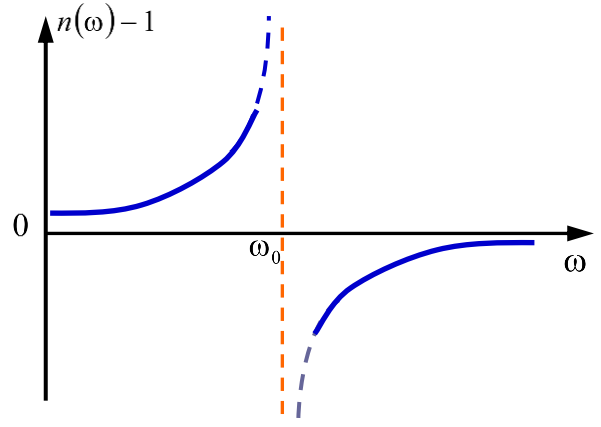


Рис. 6.2.

На рисунке 6.2 показана зависимость (3.6.16), однако надо иметь в виду, что область частот около собственной частоты колебаний $\omega \approx \omega_0$ здесь схвачена неточно.

Зависимость показателя преломления от частоты была получена для разреженной среды, т.е. предполагалось, что действующее на отдельный атом поле совпадает со средним макроскопическим полем \vec{E} . В плотном веществе (жидкости, твердые тела) это предположение несправедливо.

2). *Аномальная дисперсия*. Обратимся опять к выражению (3.6.9), описывающему диэлектрическую проницаемость разреженной среды, и исследуем дисперсию *вблизи собственной частоты* ω_0 атомного осциллятора. В этом случае диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon(\omega)$ и показатель преломления $\sqrt{\epsilon(\omega)} = n - i\eta$ являются комплексными величинами.

Найдем вещественную n и мнимую η части показателя преломления из выражений (3.6.13). При частотах, близких к собственной частоте осциллятора в полученных выражениях возможны упрощения. При частотах $\omega \approx \omega_0$ везде, кроме разности $\omega_0^2 - \omega^2$, частоту ω можно заменить на ω_0 , а разность квадратов частот можно преобразовать следующим образом:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0 \Delta\omega,$$

где $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$. Теперь для первого уравнения из (3.6.13) получаем:

$$n^2 - \eta^2 \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}$$

и аналогично для второго уравнения

$$n\eta \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (3.6.17)$$

Зависимости $n(\omega)-1$ и $\eta(\omega)$ от частоты в окрестности $\omega \approx \omega_0$ представлены на рисунке 6.3.

Зависимость показателя затухания от частоты характеризует *спектральный контур линии поглощения* (максимум в $\eta(\omega)$ на рис. 6.3). В рассматриваемой модели среды, как системы неподвижных затухающих атомных осцилляторов, этот контур имеет *лоренцевскую* форму с максимумом при $\Delta\omega \approx 0$, т.е. при $\omega \approx \omega_0$. Ширина максимума на половине высоты равна 2γ и растет с увеличением постоянной затухания.

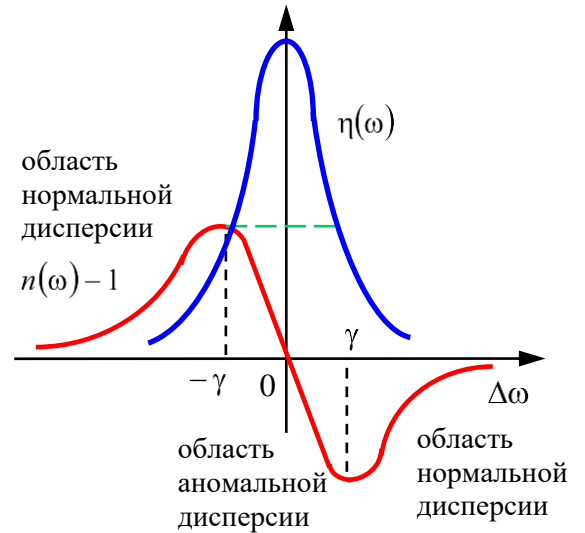


Рис. 6.3.

Уменьшение показателя преломления с частотой, которое происходит в пределах ширины спектрального контура линии поглощения (рис. 6.3), называют *аномальной дисперсией*. Экспериментально она была открыта Ф.Леру в 1860 г. в опытах по преломлению белого света призмой, наполненной парами йода. Оказалось, что синие лучи преломляются меньше красных, т.е. показатель преломления убывает с частотой.

При получении (3.6.17) и при построении графика на рис. 6.3 использовалось примерное равенство $\omega \approx \omega_0$, хотя, строго говоря, резонансная частота $\omega_{рез}$ отличается от ω_0 . Сдвиг резонансной частоты от ω_0 происходит при наличии затухания и вынуждающей силы – (см Глава 4 "Колебания" в [1]). Поэтому максимум в показателе затухания происходит примерно при частоте ω_0 только при небольших значениях постоянной затухания γ .

Если в атомах имеются другие электроны с другими собственными частотами ω_k , то диэлектрическая проницаемость принимает вид:

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{4\pi N_k e_k^2 / m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\gamma_k \omega} \quad (3.6.18)$$

Примерная зависимость диэлектрической проницаемости ε от частоты распространяющегося излучения представлена на рис. 6.4.

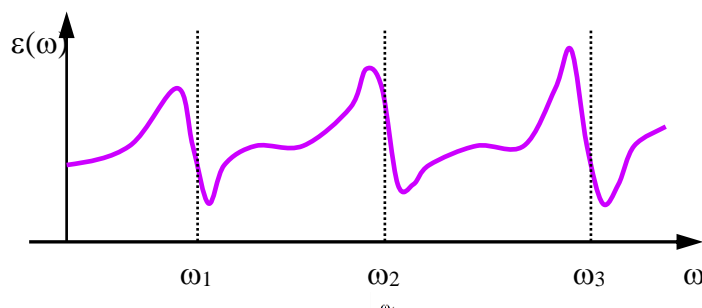


Рис. 6.4.

По мере возрастания частоты и ее приближения к собственным частотам поведение дисперсии соответствует нормальной дисперсии. В окрестности полосы поглощения диэлектрическая проницаемость ε уменьшается с частотой – область аномальной дисперсии (см рис. 6.4).

Примечание 2. Помимо дисперсии, связанной с вынужденными колебаниями электронов и ионов, существует другой вид дисперсии в средах с полярными молекулами. Меняется “ориентационная” поляризация и обусловленная ей диэлектрическая проницаемость. При облучении светом частоты ω появляется вынужденное вращение (колебание) молекул с той же частотой, а амплитуда вращений зависит от частоты ω или длины волны света λ . У полярных диэлектриков дисперсия проявляется начиная с сантиметрового диапазона и показатель преломления убывает с ростом частоты – аномальная дисперсия.

Примечание 3. В области радиоволн ($\lambda > 1\text{ см}$) существенна только одна собственная частота $\omega_0 = 0$, которой обладают свободные электроны. Тогда получаем:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2 / m}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Если нет свободных электронов, то нет и дисперсии для радиоволн.

Примечание 4. Франсуа Пьер Леру, французский физик, 1832–1907

3.7. Вращение плоскости поляризации

3.7.1. Естественная оптическая активность.

При пропускании линейно поляризованного света через плоско параллельный слой некоторых веществ плоскость поляризации света оказывается повернутой относительно своего исходного положения. Это явление называется *вращением плоскости поляризации* или *оптической активностью*. Различают *естественную оптическую активность*, когда поворот плоскости поляризации происходит при прохождении в среде в отсутствии внешних полей, и *искусственную оптическую активность*, когда поворот плоскости поляризации происходит во внешнем магнитном поле.

В 1811 г. Д. Араго наблюдал поворот плоскости поляризации при пропускании света через пластинки кварца. Свет был поляризован линейно, а пластинки кварца вырезаны перпендикулярно к оптической оси.

Экспериментально Ж. Био установил, что угол поворота плоскости поляризации зависит от длины d пути в кристаллической пластинке и от длины волны света λ :

$$\varphi = \alpha d, \quad (3.7.1)$$

где коэффициент пропорциональности α называется *вращательной способностью*. Вращательная способность зависит от длины волны λ . Так для кристаллов кварца имеем $\alpha = 15^\circ/\text{мм}$ – для красной волны, $\alpha = 27^\circ/\text{мм}$ – для зеленого света, $\alpha = 51^\circ/\text{мм}$ – для фиолетового света.

Сейчас известно очень много кристаллических и аморфных веществ, которые вращают плоскость поляризации. Эти вещества содержат оптически активные молекулы. Имеются *право и левовращающие* вещества (направление вращения обычно рассматривают по отношению к наблюдателю, к которому приближается свет).

Наблюдение происходит по следующей схеме: свет пропускается через

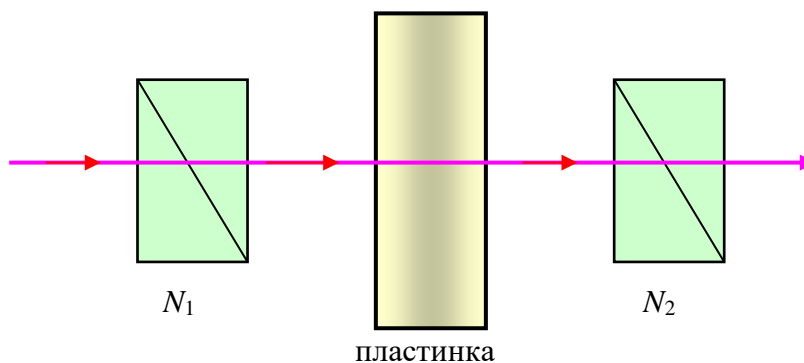


Рис. 7.1.

два скрещенных николя и вещество, помещенное между ними (см рис. 7.1).

Френель доказал экспериментально, что при вступлении в оптически активную среду луч света испытывает *двойное круговое лучепреломление*: лучи, *поляризованные по правому и левому кругу, идут внутри оптически активной среды с различными скоростями*. Если падающий свет был поляризован линейно, то при выходе из такой среды эти волны складываются вновь в линейно поляризованную волну, но с повернутой на некоторый угол плоскостью поляризации.

Пусть свет распространяется вдоль оси z . Тогда линейно поляризованный свет можно разбить на две компоненты по осям x и y :

$$E_x = A \cos \chi \cos(\omega t - kz), \quad E_y = A \sin \chi \cos(\omega t - kz) \quad (3.7.2)$$

Угол χ – угол между направлением вектора напряженности электрического поля и осью x . Этот угол зависит от z , поэтому можно записать:

$$\chi = -\alpha z \quad (3.7.3)$$

Если $\alpha > 0$, то поворот плоскости поляризации происходит по часовой стрелке, а если $\alpha < 0$, то поворот плоскости поляризации – против часовой стрелки. Разложим произведения в (3.7.2) в суммы с помощью тригонометрических формул:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{A}{2} \cos(\omega t - kz + \alpha z) + \frac{A}{2} \cos(\omega t - kz - \alpha z) \\ E_y &= \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - kz + \alpha z + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - kz - \alpha z - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Таким образом, суммарную волну можно представить в виде суммы двух волн: правой \vec{E}^r и левой \vec{E}^l циркулярно-поляризованных волн:

$$\vec{E} = \vec{E}^r + \vec{E}^l \quad (3.7.5)$$

Компоненты этих волн равны:

$$\begin{cases} E_x^r = \frac{A}{2} \cos(\omega t - k^r z) \\ E_y^r = \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - k^r z + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} E_x^l = \frac{A}{2} \cos(\omega t - k^l z) \\ E_y^l = \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - k^l z - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (3.7.6)$$

Здесь эффективные волновые числа равны:

$$k^r = k - \alpha, \quad k^l = k + \alpha \quad (3.7.7)$$

Скорости этих циркулярно-поляризованных волн определяются соответственно:

$$v^r = \frac{\omega}{k - \alpha}, \quad v^l = \frac{\omega}{k + \alpha} \quad (3.7.8)$$

Отсюда получаем разность показателей преломления

$$n^l - n^r = \frac{2c}{\omega} \alpha, \quad \alpha = \frac{\omega}{2c} (n^l - n^r) \quad (3.7.9)$$

Плоскость поляризации вращается в ту же сторону, что и электрический вектор поляризованной по кругу волны с меньшим показателем преломления, т.е. с большей фазовой скоростью. Например, если $n^l - n^r > 0$ и $\alpha > 0$ – вращение происходит вправо, т.е. по часовой стрелке.

Поляризованные по кругу волны с различным направлением вращения вектора \vec{E} могут отличаться не только скоростями распространения, но и коэффициентами поглощения. При этом если падающий свет был поляризован линейно, то на выходе амплитуды лево и право циркулярно-поляризованных

волн будут различны и выходящий свет будет поляризован эллиптически. Это явление называется *круговым дихроизмом*.

3.7.2. Искусственная оптическая активность.

Оптически неактивные вещества в магнитном поле становятся оптически активными и вращают плоскость поляризации света, распространяющегося вдоль силовых линий магнитного поля. Это явление суть *эффекта Фарадея* (1846 г.). Наблюдение производится по схеме, изображенной на рисунке 7.2, где П – поляризатор, а А – анализатор.

Угол поворота определяется соотношением:

$$\varphi = VBl \quad (3.7.10)$$

где B – индукция магнитного поля, l – путь, пройденный светом в магнитном поле. V – *постоянная Верде* или *магнитная вращательная способность*, которая зависит от рода вещества, длины волны, физического состояния вещества. В отличие от естественной оптической активности, где вращение плоскости поляризации зависит от направления распространения света, в

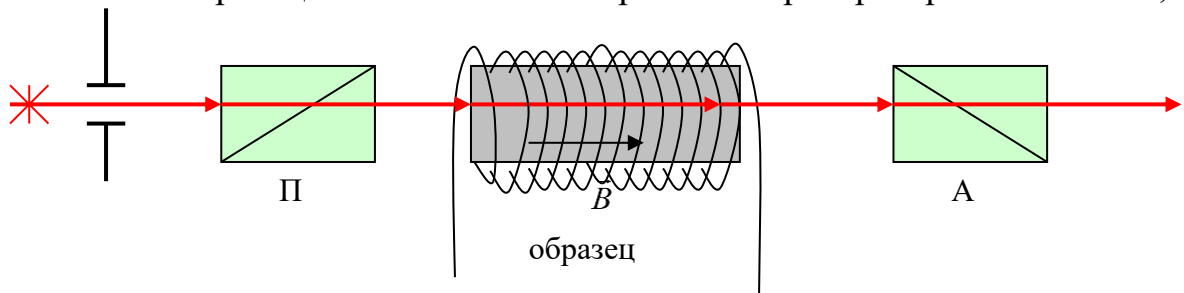


Рис. 7.2.

эффекте Фарадея поворот плоскости поляризации не зависит от направления распространения света, а зависит только от направления магнитного поля \vec{B} .

Физическая причина поворота плоскости поляризации состоит в следующем. В магнитном поле электронные орбиты прецессируют с частотой ларморовской прецессии Ω . Эта частота складывается и вычитается из частоты распространяемого света ω . Таким образом, циркулярно поляризованный свет имеет две частоты (левый или правый зависит от направления магнитного поля):

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \omega_0 + \Omega \\ \omega_- &= \omega_0 - \Omega \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

В силу дисперсии скорости этих волн различны, что приводит к возникновению сдвига фаз между право и лево циркулярно поляризованным светом, и при сложении этих волн после прохождения образца получаем линейно поляризованный свет с повернутой плоскостью поляризации. Угол

поворота плоскости поляризации определяется из формулы аналогичной (3.6.9):

$$\varphi = \frac{\omega l}{2c}(n_- - n_+) = \frac{\pi l}{\lambda}(n_- - n_+) \quad (3.7.12)$$

где через n_- и n_+ обозначены показатели преломления для волн с собственными частотами ω_- и ω_+ . Заметим, что эффект Фарадея тесно связан с эффектом Зеемана – расщеплением уровней энергии атома в магнитном поле.

Примечание 1. *Доменик Франсуа Араго, французский ученый, 1786–1853;*
Жан Батист Био, французский физик, 1774–1862;
Мишель Эмиль Верде, французский физик, 1824–1866

3.8. Искусственная анизотропия

3.8.1. Фотоупругость.

Пьезооптический эффект – возникновение оптической анизотропии в первоначально изотропных веществах под воздействием механических напряжений. При этом среды проявляют свойства одноосных кристаллов. Исследователи: немецкий ученый Т. Зеебек (1813г.) и английский ученый Д. Брюстер (1816г.).

Этот эффект – следствие зависимости диэлектрической проницаемости от деформации и проявляется в виде двойного лучепреломления или *дихроизма* (см §3.7). Разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей пропорциональна механическому напряжению $\sigma = F/S$, вызывающему деформацию:

$$n_e - n_o = b\sigma \quad (3.8.1)$$

где b – константа, характеризующая свойства вещества.

3.8.2. Эффект Керра

Дж. Керр (1875г.) исследовал связь между оптическими и электрическими явлениями и установил, что оптически изотропное вещество в электрическом поле приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, коллинеарной вектору напряженности электрического поля \vec{E} .

Устанавливается следующее отношение между показателями преломления необыкновенного и обыкновенного лучей:

$$n_e - n_o = V\lambda E^2 \quad (3.8.2)$$

где B – постоянная Керра, λ – длина световой волны. При прохождении пути l разность оптического хода обыкновенного и необыкновенного лучей равна:

$$\Delta = B\lambda E^2 l \quad (3.8.3)$$

и разность фаз

$$\delta\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} B\lambda E^2 l = 2\pi B E^2 l \quad (3.8.4)$$

Эффект Керра – проявление анизотропии у самой молекулы. Количественная теория для газов была развита Ланжевенем в 1910 г. Неполлярные молекулы приобретают дипольные моменты и ориентируются в электрическом поле. Полярные молекулы просто ориентируются. Эффект зависит от концентрации молекул. Принципиальная схема наблюдения эффекта Керра изображена на рис. 8.1.

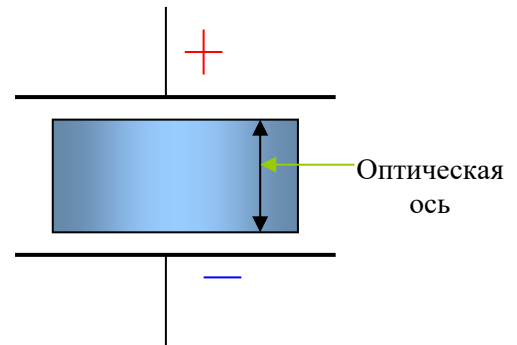


Рис. 8.1.

Малая инерционность эффекта Керра ($\sim 10^{-10}$ с) позволяет широко использовать это явление. В частности, ячейки Керра используются как модуляторы.

3.8.3. Эффект Коттона – Мутона (1910г.).

Эффект Коттона–Мутона – аналог эффекта Керра в магнитном поле. Если молекулы обладают анизотропией и постоянными магнитными моментами, то в магнитном поле такие молекулы могут получить преимущественную пространственную ориентацию. Напомним, что вещества, обладающие собственными магнитными моментами, называются парамагнетиками. В достаточно сильных магнитных полях в парамагнетиках возникает анизотропия, и вследствие чего при прохождении электромагнитного излучения появляется двойное лучепреломление. В этом случае среда ведет себя как оптически одноосный кристалл. Схема эксперимента изображена на рисунке 8.2.

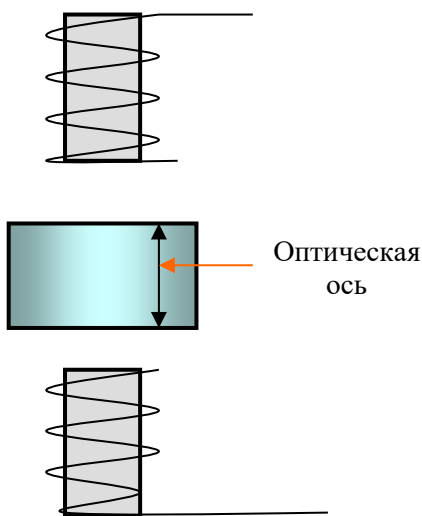


Рис. 8.2.

записывается:

Зависимость разности показателей преломления ($n_e - n_o$) от индукции магнитного поля B при распространении света перпендикулярно к оптической оси

$$n_e - n_o = C\lambda B^2 \quad (3.8.5)$$

где C – постоянная, зависящая от свойств среды и ее физического состояния.

В отличие от эффекта Фарадея в эффекте Коттона–Мутона наблюдается квадратичная зависимость разности показателей преломления от величины магнитного поля.

3.8.4. Линейный электрооптический эффект Погкельса.

Электрооптический эффект Погкельса (1893г.) – линейный электрооптический эффект, состоящий в изменении показателей преломления света в кристаллах под действием внешнего электрического поля. В отличие от эффекта Керра электрооптический эффект Погкельса пропорционален первой степени напряженности электрического поля:

$$n_e - n_o = \alpha E \quad (3.8.6)$$

Следствием этого эффекта в кристаллах является двойное лучепреломление или изменение двойного лучепреломления вещества из-за смещения собственной частоты во внешнем электрическом поле. Эффект наблюдается только в кристаллах, не обладающих центром симметрии, например, в кристаллах ниобата лития и арсенида галлия. В силу безинерционности (быстродействие порядка 10^{-10} с) эффект Погкельса широко применяется при создании различных устройств управления оптическим излучением, таких, как модуляторы света, дефлекторы, переключатели оптических каналов.

Примечание 1. *Томас Иоганн Зебек, немецкий физик, 1770–1831;*
Дэвид Брюстер, шотландский физик, 1781–1868;
Джон Керр, шотландский физик, 1824–1907;
Эжени (Эме) Коттон, французский физик, 1881–1967;
Фридрих Карл Погкельс, немецкий физик, 1865–1913

3.9. Рассеяние света

3.9.1. Природа рассеяния.

Изменение какой-либо характеристики потока оптического излучения при его взаимодействии с веществом называют *рассеянием света*.

Процесс рассеяния света (электромагнитных волн, см рис. 9.1) состоит в заимствовании молекулой или частицей энергии у распространяющейся в среде электромагнитной волны и излучении этой энергии в телесный угол, вершиной которого является рассматриваемая частица. Молекула или частица

физически одинаково рассеивает свет, однако механизм этого рассеяния зависит от размеров частицы.

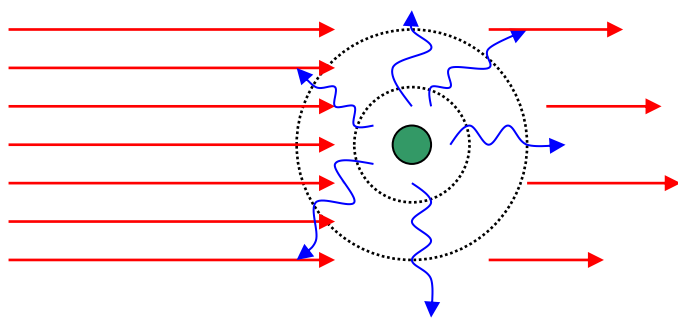


Рис. 9.1.

Во многих случаях оказывается достаточным описание рассеяния света в рамках волновой теории излучения. С точки зрения этой теории электрическое поле распространяющейся в веществе световой волны раскачивает входящие в состав атомов и молекул электроны, и

они становятся центрами вторичных сферических волн, излучаемых во все стороны. Поэтому распространение света в веществе должно, казалось бы, всегда сопровождаться рассеянием. Однако в прозрачной однородной среде плоская волна распространяется только в одном направлении, не испытывая рассеяния в стороны. Такой результат сложения всех вторичных волн обусловлен их *когерентностью*.

С макроскопической точки зрения рассеяние света может быть обусловлено только *неоднородностями* среды. При слабых нарушениях однородности рассеянный в стороны свет составляет лишь малую долю первичного пучка. Параллельный пучок света в высококачественном стекле или тщательно очищенной воде почти не виден при наблюдении сбоку, т.е. свет почти не рассеивается в стороны. В то же время пучок света отчетливо виден со всех сторон, если в воде содержатся мельчайшие пузырьки воздуха или капельки другой нерастворимой жидкости, находящиеся во взвешенном состоянии. Рассеяние света происходит и тогда, когда сами частицы имеют размеры, меньшие длинны волны видимого света. Такие среды называют мутными. Основные закономерности рассеяния света в мутных средах были впервые экспериментально исследованы Дж. Тиндалем в 1869 г.

В качестве примера рассмотрим легко доступный для воспроизведения опыт. В стеклянную кювету, заполненную водой, добавляют несколько капель молока. При наблюдении сбоку рассеянный свет имеет более голубой оттенок, чем свет источника; напротив, свет, прошедший сквозь кювету, имеет при достаточной её толщине красноватый оттенок.

Если среда может рассматриваться как непрерывная, то рассеяние будет происходить на её оптических неоднородностях. В этом случае диэлектрическая проницаемость среды (показатель преломления) является функцией координат $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ или $n = n(\vec{r})$. Тогда электромагнитная волна в среде будет определяться суперпозицией падающей и рассеянной волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad \text{и} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'.$$

Для сплошной среды рассеяние по своему физическому содержанию сводится к дифракции волн на неоднородностях среды.

Опыт показывает, что рассеяние света происходит не только в мутных средах, но и тщательно очищенных от посторонних примесей или включений жидкостях и газах. Рассеяние в чистом веществе, как правило, слабое, но, тем не менее, оно представляется принципиально важным явлением. Физическая причина оптической неоднородности в идеально чистых средах была указана польским физиком М. Смолуховским в 1908 г. Из-за хаотического характера теплового движения молекул в среде возникают *флуктуации плотности* и, следовательно, флуктуации показателя преломления. Такой тип рассеяния света называют *молекулярным*.

Упругое рассеяние – это рассеяние, при котором рассеянный свет характеризуется той же частотой, что и падающее излучение. Различают несколько типов рассеяния, при этом характер рассеяния зависит от соотношения между длиной волны света λ и линейным размером частиц a .

1) *Рэлеевское рассеяние* – размеры частиц малы по сравнению с длиной волны: $a \leq \lambda/15$. Рассеяние света частицами происходит когерентно. Это обычно рассеяние в мутных средах.

2) Если $a > \frac{1}{15}\lambda$ – *рассеяние Ми*. При таком рассеянии имеет значение размер частиц, поскольку разные части частиц не находятся в эквивалентных электромагнитных полях.

3) Много различных случаев рассеяния света происходит при появлении в среде оптических неоднородностей. Такие процессы часто сопровождаются изменением частоты падающего излучения. Среди них, например, важный случай рассеяния на оптических неоднородностях, которые создаются звуковой волной. Под воздействием последней возникает гармоническое распределение плотности среды и в результате наблюдается дифракция света на звуковой волне, происходящая при этом с изменением частоты дифрагированного света. Это – явление Мандельштама - Бриллюэна – напоминает (и является следствием) доплеровского изменения частоты при отражении от акустической волны.

4) Специфическое рассеяние – *комбинационное рассеяние* или *Рамановское рассеяние*, характеризуется изменением частоты рассеянного света по сравнению с частотой падающего. Это рассеяние носит квантовый характер.

5) Можно выделить *многократное рассеяние* – рассеяние в каждом из последовательных актов осуществляется по законам однократного рассеяния. Результат рассматривается как сумма результатов однократных рассеяний с учетом статистических характеристик их следования друг за другом.

Примечание 1. Джон Тиндаль, английский физик, 1820–1893;
 Мариан Смолуховский, польский физик, 1872–1917;
 Густав Адольф Ми, немецкий физик, 1868–1957;
 Леонид Исаакович Мандельштам, советский физик, 1879–1944;
 Леон Бриллюэн, французский физик, 1889–1969;
 Чандрасекхара Венката Раман, индийский физик, 1888–1970

3.9.2. Элементарный рассеиватель.

Элементарным рассеивателем является квазиупругий электрон в поле электромагнитной волны. В §3.6 мы уже рассматривали его поведение и получили для смещения электрона под действием электрического поля следующую формулу (3.6.6):

$$\vec{r}(t) = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E}(t) \quad (3.9.1)$$

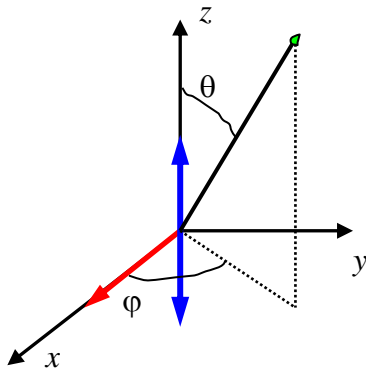


Рис. 9.2.

Для простоты введем следующую систему координат: плоская линейно-поляризованная волна распространяется вдоль оси x , а колебания \vec{E} происходят в плоскости (x, z) . Эта схема представлена на рис. 9.2. Предполагая, что затухание мало $\gamma \approx 0$, получим тогда для отклонения электрона от положения равновесия:

$$z = \frac{e/m \cdot E_0 \cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \approx \frac{e/m \cdot E_0 \cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.9.2)$$

Электрон входит в состав атома, т.е. электрически нейтральной системы. Колебания электрона происходят относительно ядра, которое можно считать неподвижным. Следовательно, мы имеем изменяющийся во времени наведенный дипольный момент:

$$p_z(t) = ez = \frac{e^2}{m} \cdot E_0 \cos\omega t \quad (3.9.3)$$

Колеблющийся электрон излучает. Таким образом, моделью элементарного классического рассеивателя света является элементарный электрический диполь, находящийся в поле электромагнитной волны.

Ранее в параграфе §1.10 Главы 1 рассматривали излучение, создаваемое ускоренно движущимся зарядом. Напомним, что мы получали для электрического поля излучения следующее соотношение (см формулу (1.10.5)):

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = -\frac{q\vec{a}_{\perp}(t')}{c^2 r}, \quad (3.9.4)$$

где $t' = t - r/c$, \vec{a}_{\perp} – компонента вектора ускорения на направление, перпендикулярное к радиус-вектору. Там же получили, что вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) равен:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E}, \left[\frac{\vec{r}}{r}, \vec{E} \right] \right] = \frac{c}{4\pi} E^2 \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q^2}{c^3} (a_{\perp}(t'))^2 \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \quad (3.9.5)$$

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$ и $\vec{H} = \vec{B} = \left[\frac{\vec{r}}{r}, \vec{E} \right]$. Средняя мощность излучения, проходящая через площадку $d\vec{s}$, есть интенсивность, для которой можно получить выражение (см (1.10.14) и Рис. 10.5 в §1.10):

$$dP(\vec{r}, t) = (\vec{S}, d\vec{s}) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \sin^2 \vartheta(t') \frac{ds}{4\pi r^2} \quad (3.9.6)$$

Поскольку для электрического диполя имеем стандартное выражение $p(t') = qz(t')$, при этом $z(t') = z_0 \cos \omega t'$ и $a(t') = \ddot{z} = -\omega^2 z(t')$, то тогда получаем мощность, излучаемую в телесный угол $d\Omega = ds/r^2$:

$$dP = \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta(t')}{4\pi c^3} p^2(t') d\Omega \quad (3.9.7)$$

Воспользуемся (3.9.3) и усредним квадрат дипольного момента по периоду:

$$\langle p^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2 E_0^2 \quad (3.9.8)$$

Определим интенсивность рассеяния $I(\vartheta, \varphi)$ как поток энергии, отнесенной к телесному углу $d\Omega$:

$$I(\vartheta, \varphi) \equiv \frac{dP}{d\Omega} = \frac{2\pi^3 c \sin^2 \vartheta}{\lambda^4} \left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 E_0^2 \quad (3.9.9)$$

Здесь мы воспользовались $\omega = 2\pi c/\lambda$.

Если ввести среднее значение плотности потока падающей волны:

$$\langle |\vec{S}_0| \rangle \equiv \langle S_0 \rangle = \frac{c}{8\pi} \langle E^2 \rangle \quad (3.9.10)$$

то интенсивность рассеянного света записывается:

$$I(\vartheta, \varphi) = \frac{16\pi^4 \sin^2 \vartheta}{\lambda^4} \left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 \langle S_0 \rangle = \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{c^4} \left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 \langle S_0 \rangle \quad (3.9.11)$$

Полученное выражение (3.9.11) определяет плотность потока рассеянной энергии в единицу телесного угла от одного элементарного излучателя.

3.9.3. Рэлеевское рассеяние.

Рассмотрим рассеивающую частицу малой по сравнению с длиной волны: $a < 0.03\lambda$. Пусть в частице N_0 рассеивателей, все они излучают когерентно, тогда интенсивность излучения от одной частицы равна:

$$I_1 = N_0^2 I(\vartheta, \varphi) \quad (3.9.12)$$

Если в среде N частиц в единице объема (здесь N – концентрация), они рассеивают некогерентно, тогда интенсивность рассеяния в единице объема

$$I_{V=1} = NN_0^2 I(\vartheta, \varphi) \quad (3.9.13)$$

Воспользуемся (3.6.15) и (3.6.10) из параграфа о дисперсии и выразим дисперсионный множитель через показатель преломления

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi NN_0 e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.9.14)$$

Здесь NN_0 – полное число рассеивателей в единице объема. Тогда интенсивность рассеяния **на одну частицу** равна:

$$I_1 = \frac{\pi^2 \text{Sin}^2 \vartheta}{N^2 \lambda^4} (n^2 - 1)^2 \langle S_0 \rangle \quad (3.9.15)$$

Для изотропных сред (неполярные диэлектрики, газы, кубические кристаллы и другие) более точной является формула Лоренц - Лоренца, которая связывает показатель преломления с электронной поляризуемостью составляющих его частиц (см также [3] Глава 2 §2.8):

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{N \cdot N_0 e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.9.16)$$

Тогда для интенсивности рассеяния имеем:

$$I_1(\vartheta, \varphi) = \frac{9\pi^2 \text{Sin}^2 \vartheta}{N^2 \lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \langle S_0 \rangle \quad (3.9.17)$$

Полная интенсивность (во все стороны) определяется из интегрирования по телесному углу:

$$I_{1,tot} = \int I_1(\vartheta, \varphi) d\Omega = \frac{24\pi^3}{N^2 \lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \langle S_0 \rangle \quad (3.9.18)$$

В результате получили известный закон Рэля, что интенсивность рассеяния света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны:

$$I_{1,tot} \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

Можно привести наглядный пример, характеризующий зависимость интенсивности рассеяния от длины волны: цвет неба днем голубой, поскольку в атмосфере Земли в приходящем от Солнца белом свете сильнее рассеивается синий свет как свет с меньшей длиной волны. Однако вечером диск солнца приобретает красноватый оттенок, поскольку у горизонта толщина слоя воздуха увеличивается, а синий свет сильнее поглощается, увеличивая концентрацию света с более длинными волнами.

3.9.4. Угловое распределение рассеянного света.

Угловое распределение рассеянного света от отдельной молекулы или малой частицы определяется формулами (3.9.11), (3.9.15), (3.9.17). Они определяют важную характеристику рассеяния света – *индикатриссу рассеяния*, которая дает графическое изображение зависимости интенсивности рассеянного света $I(\vartheta)$ от угла рассеяния ϑ .

А) Пусть падает поляризованная волна и пусть, как и ранее, вектор \vec{k} направлен вдоль оси x , а вектор \vec{E} направлен вдоль оси z . На рисунке 9.3 показана индикатрисса рассеяния. Видно, что максимальное рассеяние наблюдается в плоскости, перпендикулярной направлению колебаний вектора \vec{E} падающей волны.

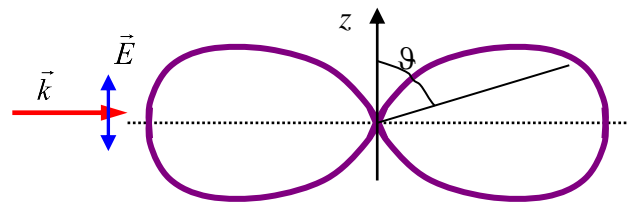


Рис. 9.3.

Б) Если падает неполяризованный свет, то электрический вектор можно разложить на 2 взаимно перпендикулярных вектора:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

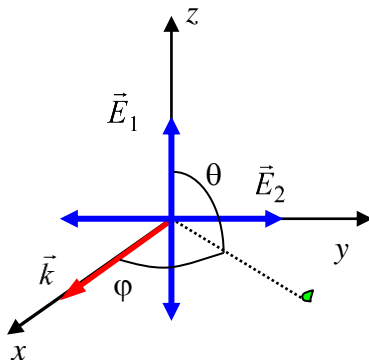


Рис. 9.4.

вдоль оси z и оси y , соответственно, см рис. 9.4. При этом получаем плотность потока энергии падающей волны как сумму потоков, т.к. рассеяние неполяризованного света должно быть аксиально симметрично относительно направления луча:

$$\langle S_0 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle \quad (3.9.19)$$

Найдем интенсивность в плоскости (xy) и полученное распределение можно "вращать" относительно оси x (в силу симметрии), чтобы получить пространственное распределение. Поскольку мы рассматриваем в плоскости (xy) , то для вектора \vec{E}_1 угол $\vartheta = \pi/2$, а для вектора \vec{E}_2 в качестве оси z служит ось y и, следовательно, угол $\vartheta \rightarrow (\pi/2 - \varphi)$. Тогда

$$I = \frac{9\pi^2}{N^2\lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \left(\langle S_1 \rangle \sin^2 \frac{\pi}{2} + \langle S_2 \rangle \cos^2 \varphi \right) \quad (3.9.20)$$

Для падающего естественного света имеем $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle S_0 \rangle$, поэтому для углового распределения неполяризованного света в плоскости, проходящей через направление первичного пучка, получаем следующее соотношение – индикатрису (см также изображение углового распределения на рис. 9.5):

$$I(\varphi) = \frac{9\pi^2}{2N^2\lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 (1 + \cos^2 \varphi) \langle S_0 \rangle \quad (3.9.21)$$

Для естественного падающего света индикатрисса рассеяния симметрична относительно оси первичного пучка и относительно перпендикулярной ему плоскости.

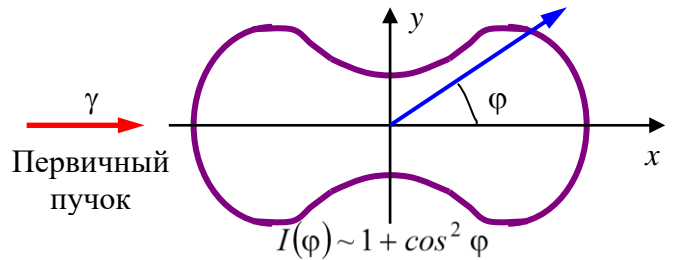


Рис. 9.5.

Можно подсчитать степень поляризации рассеянного света под разными углами. Проведем плоскость наблюдения через падающий луч и точку наблюдения. Тогда запишем:

$$P = \frac{I_{\perp}(\varphi) - I_{\parallel}(\varphi)}{I_{\perp}(\varphi) + I_{\parallel}(\varphi)} = \frac{\sin^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \quad (3.9.22)$$

где $I_{\perp}(\varphi)$ – интенсивность рассеянного света с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости наблюдения, а $I_{\parallel}(\varphi)$ – интенсивность рассеянного света с электрическим вектором, лежащим в плоскости наблюдения. Лишь при углах $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ получаем полностью неполяризованный свет. При угле $\varphi = \pi/2$ степень поляризации $P = 1$ – свет линейно поляризован.

Пример: солнечный свет, рассеянный атмосферой в плоскости Земля-Солнце, поляризован перпендикулярно к ней.

3.9.5. Томсоновское поперечное сечение для электрона.

Томсоновское рассеяние рассматривается как частный случай рэлеевского рассеяния. Рассматривается свободный электрон (без ядра), у которого собственная частота колебаний равна нулю: $\omega_0 = 0$. Тогда уравнение колебаний электрона принимает простой вид:

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} E_0 \cos \omega t \quad (3.9.23)$$

При этом выражение для интенсивности или мощности рассеяния (3.9.11) также упрощается:

$$I(\vartheta, \varphi) = \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{c^4} \left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 \langle S_0 \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \sin^2 \vartheta \langle S_0 \rangle \quad (3.9.24)$$

Интегрируя по всем углам рассеяния, получаем полную мощность рассеяния:

$$P = \int dP = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_0 \rangle \int \sin^2 \vartheta d\Omega = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_0 \rangle \quad (3.9.25)$$

Полное поперечное сечение рассеяния электромагнитных волн на электроне определяется как отношение рассеянной интенсивности к падающей плотности потока:

$$\sigma = \frac{P}{\langle S_0 \rangle} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ см} = 0.665 \text{ барн} \quad (3.9.26)$$

Видно, что полное сечение рассеяния света на электроне определяется фундаментальными постоянными. Обычно это сечение записывают в следующем виде:

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_e^2, \quad (3.9.27)$$

где r_e – *классический* или *Томсоновский радиус электрона*:

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.818 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (3.9.28)$$

Отметим, что сечение Томсоновского рассеяния не зависит от частоты падающего излучения и симметрично относительно поперечной плоскости, что справедливо при классическом рассмотрении процесса рассеяния, когда $\hbar\omega \ll mc^2$.

Примечание 2. Джозеф Джон Томсон, английский физик, 1856–1940, Нобелевская премия 1906 г. за открытие электрона

3.9.6. Рассеяние Ми.

Рассеяние Рэлея хорошо описывает не только рассеяние на молекулах. Но и на достаточно малых частицах, размеры которых $a < 0.03\lambda$. Если размеры рассеивающих частиц становятся сравнимыми с длиной волны, зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны становится менее заметной. Преобладающим становится рассеяние вперед, и индикатрисса сохраняет симметрию лишь относительно направления первичного пучка. Теория рассеяния света на сферических частицах, размеры которых могут быть порядка или больше длины волны, была впервые разработана Г. Ми в 1908 г. Рассеяние Ми можно рассматривать как дифракцию плоской волны на однородных одинаковых сферах, хаотически распределенных в однородной среде и находящихся друг от друга на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны.

Математическое решение задачи Ми – решение системы уравнений Максвелла с граничными условиями на поверхности сферической частицы произвольного радиуса, характеризуемой ϵ , μ и σ . Решение находится в виде рядов, в которых малым параметром служит $\alpha = ka = 2\pi a/\lambda$, где a – радиус сферической частицы. При параметре $\alpha < 0.2$ рассеяние становится *рэлеевским*.

В чем состоит отличие рассеяния Ми от рэлеевского рассеяния?

1) При рассеянии Ми необходимо учитывать влияние переизлучения первичной волны элементарными рассеивателями частицы, которые, вообще говоря, находятся не в одинаковых электромагнитных полях. Т.е. коэффициенты преломления n в объеме частицы $n \neq 1$. Это необходимо учитывать при решении уравнений Максвелла.

2) В рассеянии Рэлея излучение элементарных рассеивателей одной и той же частицы (молекулы) интерферируют при одинаковой разности фаз независимо от направления. Для рассеяния Ми необходимо учитывать различие в фазах излучения элементарных рассеивателей и разность фаз, вносимую в наблюдаемое излучение конечным расстоянием между элементарными рассеивателями. Отсюда получаем существенную зависимость интенсивности от направления излучения.

Основные результаты состоят в следующем:

1) С ростом параметра a/λ появляется асимметрия рассеяния вперед и назад – превалирует рассеяние вперед. При размерах рассеивателя $a \approx \lambda/4$ индикатрисса примерно выглядит как она изображена на рисунке 9.6 – появляется асимметрия вперед-назад. С ростом размеров рассеивателя a появляется много вторичных максимумов в угловом распределении интенсивности рассеяния (см рис. 9.7).

2) Слабая зависимость M_i рассеяния от длины волны при размерах частиц $a \gg \lambda$.

3) Наблюдается частичная поляризация рассеянного света.

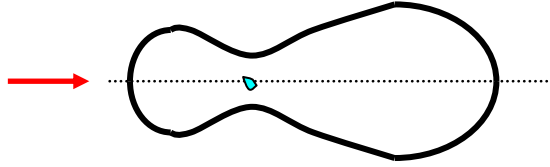


Рис. 9.6.

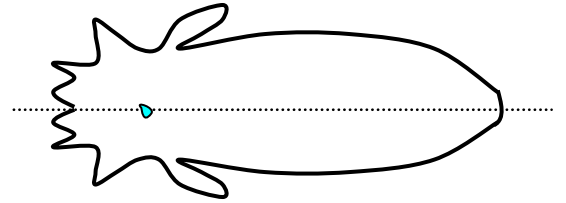


Рис.9.7.

4) Если частицы сложные (с разными диэлектрическими проницаемостями по объему), то появляется резкая зависимость от длины волны и условия появления максимумов различны при разных длинах волн, отсюда разные цвета лучей.

Приведем ряд примеров проявления рассеяния M_i :

- (1) облака белые за счет рассеяния M_i ,
- (2) небо голубое в зените и сереет к горизонту,
- (3) ослабление света от солнца при заходе и восходе у горизонта.

Примечание 3. *Рассеяние света большими частицами.* Рассеяние света большими частицами ($r \gg \lambda$) рассматривают на основе законов геометрической оптики с учетом интерференции лучей, отраженных и преломленных на поверхностях частиц. Важной особенностью этого случая является периодический по углу характер индикатриссы рассеяния и периодическая зависимость сечения рассеяния от параметра r/λ . Рассеяние света на крупных частицах обуславливает ореолы, гало и другие явления, наблюдаемые в аэрозолях, туманах и т.д.

Примечание 4. *Рассеяние света средами.* Рассеяние света средами, состоящими из большого числа частиц, существенно отличается от рассеяния света отдельными частицами. Это связано, во-первых, с интерференцией волн, рассеянных отдельными частицами между собой и с падающей волной; во-вторых, во многих случаях важны эффекты многократного рассеяния (переизлучения), когда свет, рассеянный одной частицей, вновь рассеивается другими; в-третьих, взаимодействие частиц между собой не позволяет считать их движения независимыми.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Энергия и поток энергии электромагнитного поля.

Другой вариант рассмотрения пункта 1.2.1. (более частное рассмотрение).

Если принять, что энергия электромагнитного поля может быть локализована в пространстве, то её объемная плотность в произвольном месте поля определяется выражением

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}) = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2).$$

Рассмотрим теперь изменение во времени энергии поля W , заключенной в объеме V , ограниченном неподвижной поверхностью s .

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}) dV \right\} = \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV.$$

Если характеристики среды ε и μ не меняются со временем, то

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Подставляя сюда из уравнений Максвелла $\partial \vec{D} / \partial t = c \cdot \text{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j}$ и $\partial \vec{B} / \partial t = -c \cdot \text{rot} \vec{E}$, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j}\vec{E} + \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E}),$$

или в силу векторного тождества $\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} = -\text{div} [\vec{E}, \vec{H}]$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j}\vec{E} - \frac{c}{4\pi} \text{div} [\vec{E}, \vec{H}].$$

Пусть среда неподвижна, и мы пренебрегаем теплом, уходящим из среды вследствие теплопроводности (положив последнюю равной нулю). Тогда изменение внутренней энергии u единицы объема среды происходит за счет изменения энергии электромагнитного поля и работы, совершаемой электрическим полем \vec{E} над токами проводимости \vec{j}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{j}\vec{E}.$$

Введем обозначение $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = 0.$$

Для понимания физической смысла этого уравнения сравним его с уравнением непрерывности – законом сохранения заряда $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$. Использование формальной аналогии позволяет сделать вывод, что энергия течет в пространстве подобно некоторой жидкости, причем вектор \vec{S} приобретает смысл *плотности потока электромагнитной энергии*. В интегральной форме это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \oint \vec{S} d\vec{s} = 0,$$

где U – внутренняя энергия объема, ограниченного поверхностью s (рис. П.1). В такой форме уравнение означает, что приращение внутренней энергии U в объеме V происходит за счет электромагнитной энергии, "втекающей" в этот объем из окружающего пространства через поверхность s .

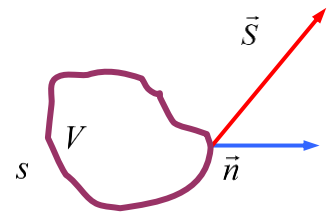


Рис. П.1.

Представление о течении энергии сохраняется также при учете теплопроводности, но к плотности потока электромагнитной энергии в этом случае следует добавить *плотность потока тепла*. Таким образом, уравнение $\partial u/\partial t + \text{div} \vec{S} = 0$ *выражает закон сохранения энергии в электродинамике* и носит название *теоремы Умова – Пойнтинга*.

Приложение 2. О временной когерентности.

Пусть спектральный интервал шириной $\delta\omega$ **равномерно** заполнен отдельными монохроматическими компонентами излучаемых волн. Мысленно разделим этот интервал на множество пар бесконечно узких (монохроматических) спектральных линий, отстоящих друг от друга по частоте на величину $\delta\omega/2$, или по шкале ($k = \omega/c$) волновых чисел на $\delta k/2$. Будем считать, что спектральные линии имеют одинаковую интенсивность. Тогда полная интенсивность при наложении интерференционных картин от каждой пары монохроматических компонент, отстоящих на $\delta k/2$, определяется выражением (исходя из соотношения (2.1.17)):

$$I(\Delta) = I_1(\Delta) + I_2(\Delta) = 2I_0(1 + \cos k_1\Delta) + 2I_0(1 + \cos k_2\Delta) = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\delta k}{2} \frac{\Delta}{2} \right) \cos k\Delta \right],$$

где $k = (k_1 + k_2)/2$ – среднее значение волнового числа, $\delta k/2$ – разность волновых чисел спектральных линий. Полосы в такой картине пропадают при такой оптической разности хода $\Delta_{\max} = l_{\text{ког}}$, когда аргумент первого косинуса становится равным $\pi/2$:

$$\frac{\delta k}{2} \frac{l_{\text{ког}}}{2} = \frac{\pi}{2},$$

т.е. получаем длину когерентности:

$$l_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\delta k} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}.$$

Условие исчезновения полос для всех пар монохроматических компонент, на которые был разделен интервал $\delta\omega$, одинаково. Поэтому при разности хода $\Delta = l_{\text{ког}}$ происходит полное размывание суммарной интерференционной картины. Время когерентности определяется:

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{l_{\text{ког}}}{c} = \frac{\lambda^2}{c\delta\lambda}.$$

Длине когерентности соответствует максимально возможный (предельный наблюдаемый) порядок интерференции (см (2.1.19)), равный:

$$m_{\max} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega}.$$

Полученный результат (2.2.6) можно использовать для оценки длины когерентности и в случае более сложной формы контура спектральной линии квазимонохроматического света.

Таким образом, для наблюдения интерференции волн необходимо, чтобы выполнялось условие $\Delta < l$, где $l = c\tau$ – протяженность волнового цуга в пространстве, τ – длительность волнового цуга, т.е. разность хода складываемых волн должна быть меньше длины цуга, поэтому длина когерентности – это и есть длина волнового цуга.

Для белого света (солнце, лампа накаливания и т.д.) и его визуального наблюдения диапазон длин волн $\delta\lambda$ простирается приблизительно от 400 до 700 нм, $\delta\lambda$ порядка λ . В этом случае $m \sim 1$ и интерференционные полосы, казалось бы, наблюдаться не должны. Действительно, приемник излучения, обладающий примерно одинаковой чувствительностью на всех участках спектра, например, термоэлемент, покажет при перемещении в поле зрения поперек полос почти равномерное распределение освещенности. Но глаз представляет собой селективный приемник с сильно изменяющейся чувствительностью в зависимости от длины волны, что дает некоторым длинам волн преимущество перед другими. Визуальное наблюдение полос в белом свете облегчается и благодаря способности нашего зрения различать не только интенсивность света, **но и его цвет**. Поэтому в белом свете глаз различает около десятка окрашенных интерференционных полос. При равной нулю разности хода, т.е. в тех местах, куда обе интерферирующие волны приходят в одинаковых фазах, условие максимума выполняется для всех длин волн. В этом месте получается ахроматическая (неокрашенная) светлая полоса. По обе стороны от нее находятся окрашенные максимумы и минимумы, а за ними поле зрения представляется глазу равномерно освещенным белым светом. Таково происхождение красивых интерференционных цветов в тонких пленках масла или бензина на поверхности воды.

Приложение 3. О пространственной когерентности.

Рассмотрим сначала источник, состоящий из двух одинаковых некогерентных светящихся точек S' и S'' , расположенных на расстоянии D друг от друга. Пусть в интерференционном опыте свет от каждого из этих источников попадает в точку наблюдения, проходя по двум различным путям. Например, в опыте Юнга эти лучи идут в направлении отверстий S_1 и S_2 , являющихся вторичными источниками. Пусть луч, идущий от источника S' по пути I , образует с соединяющей источники линией $S'S''$ угол β_1 , а луч, идущий по пути II – угол β_2 . Если расстояние между источниками S' и S'' мало ($D \ll L$, где L –

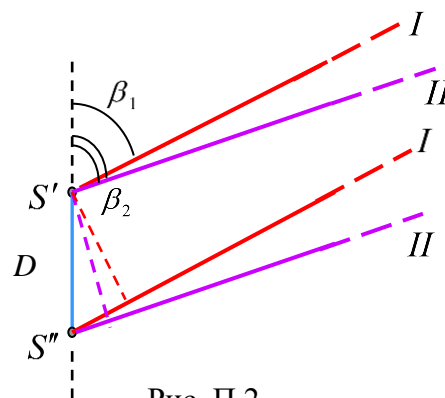


Рис. П.2.

расстояние до точечных отверстий S_1 и S_2), то можно считать, что световые колебания, распространяющиеся от источника S'' , образуют с линией $S'S''$ такие же углы β_1 и β_2 . Оптическая разность хода лучей, приходящих в точку наблюдения P от источников S' и S'' по первому пути, равна $S''(I) - S'(I) = D \cos \beta_1$. Аналогичное выражение можно написать для лучей, приходящих в точку наблюдения P по второму пути:

$S''(II) - S'(II) = D \cos \beta_2$. Вычитая эти равенства и перегруппировывая слагаемые в левой части, получаем

$$[S''(I) - S''(II)] - [S'(I) - S'(II)] = D(\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

В этом выражении в первой скобке записана разность хода колебаний Δ'' , приходящих по двум различным путям в точку наблюдения от источника S'' . Именно значение Δ'' определяет качество интерференционной картины, создаваемой в точке наблюдения P источником S'' . Во второй скобке стоит разность хода Δ' лучей, приходящих в точку наблюдения от источника S' . Разность этих величин определяет сдвиг интерференционных картин, создаваемых источниками S' и S'' :

$$\Delta'' - \Delta' = D(\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

Если $\Delta'' - \Delta' = 0$ (или $|\Delta'' - \Delta'| \ll \lambda$), максимумы обеих картин совпадают, что обеспечивает максимальную контрастность наблюдаемой (суммарной) интерференционной картины. С увеличением $|\Delta'' - \Delta'|$ качество картины ухудшается, и при

$$|\Delta'' - \Delta'| = \lambda/2, \text{ или } D|\cos \beta_1 - \cos \beta_2| = \lambda/2.$$

наблюдается равномерная освещенность экрана, т.к. светлые полосы, получаемые от одного источника, совмещаются с темными полосами от другого. При дальнейшем возрастании $|\Delta'' - \Delta'|$ интерференционная картина появляется вновь, причем её качество периодически изменяется. Когда выполняется условие $|\Delta'' - \Delta'| = m\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$) картина будет максимально контрастной.

В результате сложения интерференционных картин, создаваемых колебаниями, приходящими от одного источника, получаем

$$I = 2I_0(1 + \cos k\Delta') + 2I_0(1 + \cos k\Delta'') = 4I_0 \left[1 + \cos \left(k \frac{\Delta'' - \Delta'}{2} \right) \cos \left(k \frac{\Delta'' + \Delta'}{2} \right) \right].$$

Интенсивность в максимумах и минимумах определяется первым множителем и равна

$$I_{\text{экстр}} = 4I_0 \left[1 \pm \cos \left(k \frac{\Delta'' - \Delta'}{2} \right) \right].$$

Изменение интенсивности при перемещении точки наблюдения P вдоль экрана определяется быстро осциллирующим вторым множителем. Светлые и темные полосы интерференционной картины расположены в тех местах, где $\cos \left(k \frac{\Delta'' + \Delta'}{2} \right) = \pm 1$.

Рассматривая более общий случай, можно представить протяженный источник (полоска или щель шириной D) состоящим из элементарных взаимно некогерентно излучающих полосок, расположенных перпендикулярно линии, соединяющей точки S' и S'' . Разделим мысленно весь источник на множество пар одинаковых элементов так, чтобы расстояние между элементами в любой паре было равно половине ширины полоски (источника), т.е. $D/2$. Если положение светлых полос от одного элемента пары совпадает с положением темных полос от другого элемента той же пары, то интерференционная картина от всего источника наблюдаться не будет, так как условия совпадения одинаковы для всех пар элементов. Это условие получаем из (2.2.10), заменив D на $D/2$ – расстояние между элементами одной пары протяженного источника, т.е.

$$D|\cos \beta_1 - \cos \beta_2| = \lambda.$$

Последующие исчезновения интерференционных полос произойдут, если ширину источника увеличить в любое целое число раз.

При промежуточных значениях ширины источника на равномерном светлом фоне, создаваемом участком щели, на ширине которого укладывается целое число значений D ,

будут снова появляться интерференционные полосы от оставшейся меньшей части источника. По этой причине полосы будут видны слабо. В качестве условия хорошего наблюдения интерференционной картины от протяженного источника можно принять неравенство

$$D|\cos\beta_1 - \cos\beta_2| \leq \lambda/2.$$

Для источника, размеры которого много больше длины световой волны, геометрия эксперимента должна быть такой, чтобы интерферирующие лучи выходили из источника под малым углом друг другу. Тогда имеем:

$$\beta_2 \approx \beta_1 = \beta \approx \frac{\pi}{2} \text{ и } \cos\beta_1 - \cos\beta_2 \approx \sin\beta(\beta_2 - \beta_1) \approx \beta_2 - \beta_1 = \delta\beta.$$

Условие (2.2.13) можно теперь записать в виде:

$$D \cdot \delta\beta \leq \lambda/2.$$

В опыте Юнга $\delta\beta \approx d/L$, поэтому *поперечный* D и *угловой* $\vartheta = D/L$ размеры источника должны удовлетворять условиям: $D \leq \lambda L/2d$ и $\vartheta \leq \lambda/2d$.

Свяжем наложение интерференционных картин, создаваемых отдельными элементами протяженного источника, с понятием *пространственной когерентности колебаний* в пучке света от протяженного источника. Для определенности обратимся опять к схеме опыта Юнга. Пусть теперь экран A с отверстием S отсутствует, а пучок света падает непосредственно на экран B с точечными отверстиями S_1 и S_2 . Эти отверстия можно принять за вторичные источники, посылающие световые волны на экран C , где наблюдается интерференционная картина.

Если первичный источник точечный, то колебания в отверстиях S_1 и S_2 когерентны и на экране наблюдается контрастная интерференционная картина. Для протяженного источника качество картины будет ухудшаться. При заданном расстоянии d между отверстиями S_1 и S_2 контрастность картины зависит от отношения поперечного размера источника D к расстоянию L между источником и экраном B , т.е. от *углового размера источника* $\vartheta = D/L$. Если $\vartheta \leq \lambda/2d$, то полосы видны отчетливо. С увеличением углового размера источника контрастность полос уменьшается, и при $\vartheta = \lambda/d$ полосы пропадают совсем. Поэтому *пространственную когерентность* можно понимать как характеристику способности световых колебаний в пространственно удаленных точках S_1 и S_2 поперечного сечения светового пучка к созданию стационарной интерференционной картины при их сведении каким-либо образом в точку наблюдения.

Колебания, приходящие от точечного источника, в точках S_1 и S_2 полностью когерентны, и контрастность интерференционной картины максимальна. Контрастность интерференционной картины, создаваемой колебаниями, приходящими от протяженного источника, зависит от расстояния d между точками S_1 и S_2 и углового размера источника ϑ . При $\vartheta \cdot d \geq \lambda$ колебания в точках S_1 и S_2 *некогерентны* и при наложении волн, приходящих из этих точек, наблюдается простое сложение интенсивностей, т.е. интерференция отсутствует.

Пока расстояние d между точками S_1 и S_2 мало ($d \ll \lambda/\vartheta$) колебания в этих точках когерентны. При возрастании d качество интерференционной картины ухудшается, и картина полностью исчезает при $d = \lambda/\vartheta$. С дальнейшим ростом d контрастность интерференционных полос осциллирует с постепенно убывающей амплитудой, не превышая 20% от максимального значения. Поэтому в качестве размера области когерентности (т.е. поперечного сечения пучка, в пределах которого световые колебания в

любой паре точек частично когерентны) можно принять $d_{\text{ког}} \approx \lambda/\vartheta$. Поскольку $\vartheta = D/L$, то размер области когерентности возрастает пропорционально расстоянию L от источника.

Если источник имеет равномерно светящуюся поверхность в форме прямоугольника, то размеры области когерентности обратно пропорциональны соответствующим сторонам источника: $d_1 = \lambda/\vartheta_1$, $d_2 = \lambda/\vartheta_2$. В практически важном случае источника в форме равномерно светящегося диска с угловым размером (диаметром) ϑ область когерентности представляет собой круг диаметром $d \approx 1,22\lambda/\vartheta$.

Солнечный диск виден с Земли под углом $\vartheta \approx 30' \approx 10^{-2} \text{ рад}$. Пренебрегая изменением яркости его поверхности, получаем диаметр области когерентности $d \approx 0,06 \text{ мм}$ (для $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$). Если щели в опыте Юнга расположить на расстоянии, меньшем $0,06 \text{ мм}$, то интерференцию можно наблюдать без вспомогательного экрана A при непосредственном освещении щелей S_1 и S_2 лучами Солнца.

Подход к описанию качества интерференционной картины, основанный на понятии пространственной когерентности, отличается от разобранных выше тем, на каком этапе производится суммирование действий различных участков источника. В первом подходе это суммирование производилось на последнем этапе, т.е. в интерференционной картине, а во втором – на промежуточном этапе, т.е. в той плоскости, где расположены отверстия S_1 и S_2 .

Для получения интерференционных полос от двух источников (пятен) света недостаточно, чтобы эти источники состояли из попарно когерентных точечных источников. Даже в случае строго монохроматического света необходимо, размеры источников не превосходили определенного предела, зависящего от их взаимного расположения и расстояния между ними, а также от положения экрана.

Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяют наблюдать интерференционные полосы, называют *пространственно когерентными*.

Заключая сказанное о *временной и пространственной когерентности* источников, отметим следующее. Поскольку $k = \omega/c$ (в среде с показателем преломления n : $k = \omega/v = n\omega/c$), то частотному интервалу $\delta\omega$ соответствует интервал значений волнового числа k . Мы установили, что временная когерентность определяется величиной $\delta\omega$. Следовательно, временную когерентность можно связать с разбросом значений модуля волнового вектора \vec{k} . Аналогично, пространственная когерентность связана с разбросом направлений вектора \vec{k} .

Иванов Вадим Константинович,

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано к печати 30.01.2023. Формат 60x84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 13.0. Тираж 80 экз. Заказ 0352.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 550-77-17; 550-40-14