Глава 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

4.1. Движущиеся проводники в магнитном поле.

4.1.1. Работа магнитного поля при перемещении контура с током.

На элементы контура с током, находящегося во внешнем магнитном поле, действуют силы Ампера. Поэтому при перемещении контура или его элементов эти силы будут совершать работу. Определим эту работу.

А). Вначале рассмотрим частный случай: движение перемычки с током в поперечном магнитном поле (рис. 1.1).

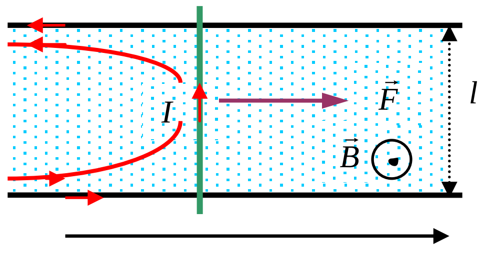

Рис. 1.1.

Пусть контур с подвижной перемычкой длиной l находится в однородном магнитном поле $\vec{B} = const$, перпендикулярном плоскости контура (на рис.1.1 вектор индукции $\vec{B}$ направлен из плоскости рисунка на нас). В контуре и по перемычке течет постоянный электрический ток I = *const*. Рассмотрим движение перемычки в поперечном магнитном поле $\vec{B}$. Сила Ампера, действующая на перемычку с током, направлена вдоль оси x (рис. 1.1 и 1.2) и согласно формулам (3.4.14) и (3.4.15), равна:

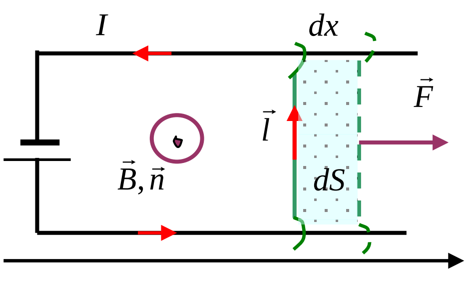

Рис. 1.2.

$$\vec{F} = \int \frac{I}{c}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$$

$$F = \frac{I}{c} Bl \qquad (4.1.1).$$

При перемещении перемычки на расстояние dx сила Ампера совершает работу:

$$\delta A = F dx = \frac{I}{c} Bl dx = \frac{I}{c} BdS, \qquad (4.1.2)$$

где dS – приращение площади контура (см рис. 1.2). Выберем нормаль $\vec{n}$ к плоскости контура так, чтобы она образовывала правовинтовую систему с направлением тока I. Тогда, $d\vec{S} = dS\vec{n}$ и вводя поток вектора магнитной индукции

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS,$$

получаем, что работа, совершаемая магнитным полем равна изменению магнитного потока, умноженному на ток:

$$\delta A = \frac{I}{c} d\Phi \,. \qquad (4.1.3)$$

Для конечного перемещения перемычки имеем:

$$A = \frac{I}{c}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right). \qquad (4.1.4)$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки через замкнутый контур в начальном и конечном положениях перемычки.

Этот результат легко распространяется на случай произвольного направления магнитного поля $\vec{B}$. Представим вектор $\vec{B}$ в виде суммы векторов $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_l + \vec{B}_x$, где компоненты вектора магнитной индукции $\vec{B}_l$ и $\vec{B}_x$ направлены вдоль перемычки и направления перемещения, соответственно. Составляющая магнитной индукции $\vec{B}_l$ параллельна току и поэтому не дает вклада в силу Ампера. Составляющая $\vec{B}_x$ определяет компоненту вектора силы Ампера, перпендикулярную перемещению, которая не совершает работы. Таким образом, работа по перемещению перемычки определяется только перпендикулярной составляющей вектора магнитной индукции $\vec{B}_n$, и мы снова получаем формулу (4.1.3), описывающую элементарную работу силы Ампера:

$$\delta A = \frac{I}{c} d\Phi \,.$$

Б). Рассмотрим общий случай перемещения контура с током в магнитном поле (см рис. 1.3). Пусть произвольной формы контур с током совершает в неоднородном постоянном магнитном поле некоторое перемещение, в процессе которого контур может деформироваться. Мысленно разобьем такой контур на бесконечно малые элементы тока $Id\vec{l}$ и рассмотрим их бесконечно малые перемещения $d\vec{r}$. Магнитное поле, в котором перемещается каждый элемент контура $d\vec{l}$, можно считать однородным на протяжении малого перемещения $d\vec{r}$. Работа силы Ампера по перемещению каждого элемента тока равна:

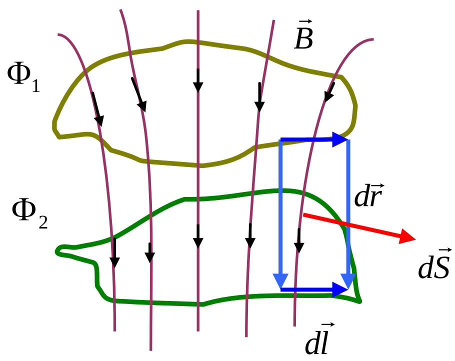

Рис. 1.3.

$$\delta^2 A = d\vec{r}\, d\vec{F} = \frac{I}{c} d^2\Phi \,,$$

где под элементом потока $d^2\Phi$ следует понимать вклад в приращение магнитного потока через весь контур от перемещения элемента контура $d\vec{l}$

на $d\vec{r}$. В самом деле, это видно из нижеследующего вывода. Сложив элементарные работы для всех элементов контура, снова получаем

$$\delta A = d\vec{r}\vec{F} = d\vec{r}\left(\frac{I}{c}\oint\left[d\vec{l},\vec{B}\right]\right) = \frac{I}{c}\oint d\vec{r}\left[d\vec{l},\vec{B}\right] = \frac{I}{c}\oint\vec{B}\left[d\vec{r},d\vec{l}\right] = \frac{I}{c}\oint\vec{B}d\vec{S} = \frac{I}{c}\oint d^2\Phi = \frac{I}{c}d\Phi, \qquad (4.1.5)$$

где $d\Phi$ – полное изменение магнитного потока, пронизывающего контур, при перемещении контура на $d\vec{r}$. dS – элемент площади, пересекаемой контуром при этом перемещении.

Чтобы найти работу силы Ампера при перемещении контура с током во внешнем магнитном поле от начального 1 до конечного положения 2, следует проинтегрировать полученное выражение:

$$A = \frac{1}{c}\int_1^2 Id\Phi. \qquad (4.1.6)$$

Если при этом перемещении ток поддерживать постоянным $I = const$, то работа сил Ампера равна:

$$A = \frac{I}{c}(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (4.1.7)$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки через контур в начальном и конечном положениях контура.

Таким образом, *работа сил Ампера равна произведению силы тока на приращение магнитного потока через контур*. Полученное выражение дает не только величину, но и знак совершаемой работы. Если поток магнитного поля через контур увеличивается, то силы Ампера совершают положительную работу.

4.1.2. Индукция токов.

В замкнутом проводнике, движущемся в магнитном поле, возникает *индукционный ток*. Индукция токов открыта М. Фарадеем в 1831 г., и это открытие является одним из *самых фундаментальных открытий* в электродинамике. Природа индукционного тока – сила Лоренца.

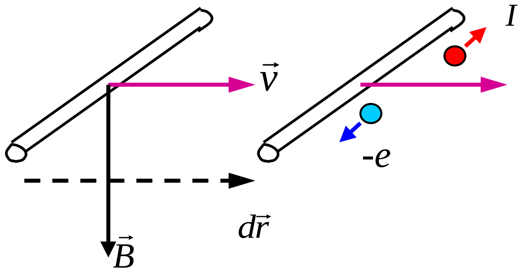

Рис. 1.4.

Пусть прямой участок проводника движется в магнитном поле индукции $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$ (рис. 1.4). Полная скорость электронов проводимости складывается из скорости теплового движения $\vec{v}_t$ и скорости направленного движения проводника $\vec{v}$:

$$\vec{v}_{tot} = \vec{v} + \vec{v}_t \qquad (4.1.8)$$

Часть силы Лоренца, связанная с тепловой скоростью движения электронов

$$\vec{F}_1 = \frac{e}{c}\left[\vec{v}_t, \vec{B}\right],$$

только искривляет траекторию движения электрона. А часть силы, связанная со скоростью направленного движения

$$\vec{F}_2 = \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right],$$

заставляет заряды смещаться вдоль проводника (рис. 1.4). За счет последней силы и возникает индукционный ток.

Если проводник не замкнут, то возникает разность потенциалов на его концах. Ток идет до тех пор, пока возникающая в проводнике напряженность электрического поля не скомпенсирует силу Лоренца:

$$\begin{gathered} \vec{F} = e\vec{E}_i = -\frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \\ \vec{E}_i = -\frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \end{gathered} \qquad (4.1.9)$$

Здесь сила Лоренца играет роль сторонней силы с соответствующей напряженностью электрического поля $\vec{E}_i$. Знак “минус” в (4.1.9) показывает, что напряженность индукционного поля направлена против смещающей положительные заряды силы.

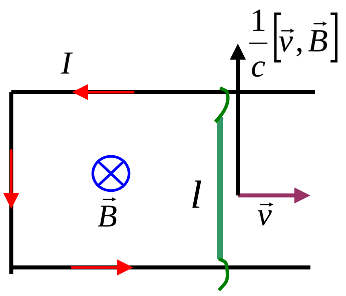

Рис. 1.5.

Если проводник замкнут (на рис. 1.5 магнитное поле направлено перпендикулярно рисунку от читателя), то в проводнике течет индукционный ток I. Магнитная сила $\vec{F}$ играет роль сторонней силы, заставляющая двигаться заряды. В замкнутом контуре возникает *Электродвижущая Сила* $\mathcal{E}$ (иначе ЭДС) – работа по перенесению единичного заряда по замкнутому контуру. ЭДС, создаваемая полем $\vec{E}_i$, называется *электродвижущей силой индукции* $\mathcal{E}_i$:

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{q} \qquad (4.1.10)$$

Работа по замкнутому контуру, отнесенная к единичному заряду, $\mathcal{E}_i$ равна циркуляции вектора напряженности электрического поля по этому контуру

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_i d\vec{l} = -\frac{1}{c}\oint_L \left[\vec{v}, \vec{B}\right] d\vec{l} = -\frac{1}{c}\oint_L \vec{B}\left[d\vec{l}, \vec{v}\right] \qquad (4.1.11)$$

Скорость перемещения элемента контура определяется $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, а вектор элемента площадки равен

$$d^2\vec{S} = \left[d\vec{l}, d\vec{r}\right].$$

При этом направление вектора $d^2\vec{S}$ определяется направлением обхода контура по правилу «буравчика» (на рис. 1.5 вектор $d^2\vec{S}$ направлен от читателя). Таким образом, получаем *закон электромагнитной индукции*:

$$\mathsf{E}_i = -\frac{1}{c}\oint \vec{B}\left[d\vec{l}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\oint \vec{B}\left[d\vec{l}, d\vec{r}\right]}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{\oint \vec{B} d^2\vec{S}}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$
$$\mathsf{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \qquad (4.1.12)$$

Выше мы рассматривали движение одного элемента контура $d\vec{l}$ или $\vec{l}$. Если изменяются все участки замкнутого провода, то закон (4.1.12) также справедлив для контура в целом, где $\frac{d\Phi}{dt}$ скорость изменения потока через весь контур. Так, если для малого кусочка провода $d\vec{l}$, имеем:

$$d\mathsf{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Delta\Phi}{dt}, \qquad (4.1.13)$$

то, суммируя по всему контуру с током, получаем

$$\mathsf{E}_i = -\frac{1}{c}\oint \frac{d(\Delta\Phi)}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint \Delta\Phi = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \qquad (4.1.14)$$

Закон электромагнитной индукции (4.1.12) - (4.1.14) справедлив при произвольных движениях и любых деформациях замкнутого контура.

Итак, возбуждение ЭДС индукции при движении контура в постоянном магнитном поле объясняется действием магнитной составляющей силы Лоренца, которая возникает при перемещении проводника и пропорциональна произведению $\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$. Величина ЭДС индукции зависит от скорости изменения магнитного потока, проходящего через контур. Однако Фарадей обобщил это утверждение и показал, что ЭДС индукции возникает даже в неподвижном контуре.

Примечание 1. *Майкл Фарадей, выдающийся английский физик, 1791–1867*

Примечание 2. В системе СИ формулы для работы сил Ампера (4.1.3) и (4.1.7) записываются: $\delta A = I d\Phi$ и $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$

а для ЭДС индукции (4.1.14) в виде: $\mathsf{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$

4.2. Закон электромагнитной индукции.

4.2.1. Закон Фарадея.

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает *электродвижущая сила* (ЭДС) *индукции* $\mathcal{E}_i$. Напомним, что ЭДС – работа по перенесению единичного заряда по замкнутому контуру. Самым замечательным фактом является то, что значение ЭДС $\mathcal{E}_i$ совершенно не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока Φ, и определяется лишь скоростью его изменения, т.е. величиной $d\Phi/dt$. Изменение знака производной $d\Phi/dt$ приводит к изменению знака ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$. К этому выводу Фарадей пришел из своих экспериментальных измерений, в которых он использовал проводящую рамку, замкнутую на гальванометр G, и магнитное поле катушки с током. В реальности Фарадей заменил гальванометр, который имел слишком большое сопротивление и инерционность, на маленькую катушку с магнитной стрелкой.

В результате своих опытов он обнаружил, что индукционный ток можно вызвать двумя различными способами (экспериментами).

1-й способ: перемещение проводящей рамки в магнитном поле неподвижной катушки.

2-й способ: изменение магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого катушкой, за счет ее движения или вследствие изменения силы тока I в ней (или того и другого вместе). Рамка при этом остается неподвижной.

В обоих этих случаях гальванометр G будет показывать наличие индукционного тока в рамке, за счет индуцируемой ЭДС:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \qquad (4.2.1)$$

По внешнему виду (4.2.1) есть то же самое, что формула (4.1.12), полученная в предыдущем параграфе, однако их содержание различное. Природа ЭДС из (4.1.12) – сила Лоренца, действующая на движущийся заряд в магнитном поле, и соответствует первому эксперименту как упомянуто выше. Во втором эксперименте силы Лоренца нет, т.к. проводник неподвижен. Поэтому Фарадей сформулировал новый закон.

Закон Фарадея: *всякое изменяющееся магнитное поле порождает в замкнутом проводнике ЭДС, т.е. электрическое поле.* Таким образом, электрическое поле порождается не только зарядами, но изменяющимся магнитным полем.

Направление индукционного тока и, соответственно, знак ЭДС индукции E_i определяются правилом Ленца (1831г.): *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Другими словами, индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающему ЭДС индукции. Правило Ленца выражает важное физическое свойство – стремление системы противодействовать изменению ее состояния. Это свойство называют *электромагнитной инерцией*.

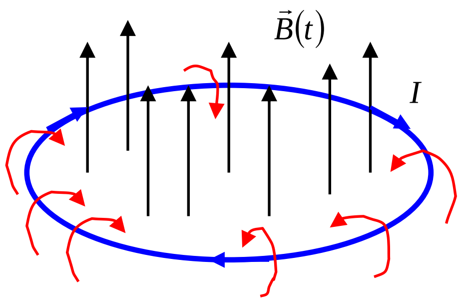

Рис. 2.1.

Рассмотрим следующий пример: замкнутый проводящий контур и изменяющееся магнитное поле. Пусть магнитное поле, направленное как показано на рисунке 2.1, возрастает, то есть возрастает магнитный поток через контур. Появляющийся в контуре индукционный ток направлен таким образом, чтобы его собственное магнитное поле (красные стрелки на рисунке 2.1) ослабляло внешнее поле $\vec{B}$.

Суть явления электромагнитной индукции состоит в сохранении магнитного потока, проходящего через контур. Всякое изменение потока вызывает противодействие его изменению. Это свойство имеет как паразитное влияние, особенно при включении высоких напряжений в цепи с катушками индуктивности, так и полезное применение в электротехнике. Например, используется в генераторах переменного тока, в устройствах с изменением напряжения переменного тока.

4.2.2. Формулировка Максвелла.

Итак, существует две причины возникновения индукционного тока и ЭДС индукции:

а) магнитное поле постоянно, контур изменяется,

б) контур постоянен, магнитное поле меняется.

Наблюдаемое на опыте (б) возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что и в этом случае в контуре появляются сторонние силы, которые теперь связаны с изменяющимся во времени магнитным полем. Какова же их природа? Ответ на этот вопрос был дан Дж. Максвеллом. Поскольку проводник покоится, то скорость упорядоченного движения электрических зарядов $\vec{v} = 0$ и, следовательно, магнитная сила, пропорциональная $[\vec{v}, \vec{B}]$, также равна нулю и уже не может привести заряды в движение. Однако кроме магнитной силы на электрический заряд может действовать только сила со стороны электрического поля, равная $q\vec{E}$. Поэтому остается заключить, что *индукционный ток обусловлен электрическим полем $\vec{E}$, возникающим при изменении во времени внешнего магнитного поля*. Именно это электрическое поле и ответственно за появление ЭДС индукции в неподвижном контуре.

Согласно Максвеллу, всякое *изменяющееся во времени магнитное поле порождает в окружающем пространстве электрическое поле*. Возникновение электрического поля не связано с наличием проводящего контура, который лишь позволяет обнаружить существование этого поля по возникновению в нем индукционного тока. Появление электрического поля можно обнаружить и по другим его действиям. Например, по поляризации диэлектрика, пробою конденсатора, ускорению и торможению заряженных частиц и т.п.

Формулировка закона электромагнитной индукции, данная Максвеллом, является более общей, чем формулировка Фарадея. Она принадлежит к числу наиболее важных обобщений электродинамики.

Д. Максвелл: *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле*.

Отличие от формулировки М.Фарадея состоит в том, что никаких проводников не нужно для обнаружения электрического поля. Математическая формулировка закона электромагнитной индукции в понимании Максвелла звучит следующим образом: *циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ этого поля по любому неподвижному замкнутому контуру L определяется выражением*

$$\mathsf{E}_i = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}, \qquad (4.2.2)$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий выбранный замкнутый контур L. Поток вектора индукции магнитного поля вычисляется через поверхность, опирающуюся на контур L. Уравнение (4.2.2) входит в систему интегральных уравнений Максвелла.

Далее, мы введем частную производную по времени, считая, что выбранный контур в пространстве не меняется. Меняя порядок дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности и используя теорему Стокса $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}d\vec{S}$, получаем:

$$\int_S rot\vec{E}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \qquad (4.2.3)$$

Учитывая, что последнее соотношение справедливо для любой произвольной поверхности S, получаем закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме:

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4.2.4)$$

Это одно из уравнений системы дифференциальных уравнений Максвелла.

Тот факт, что циркуляция электрического поля, возбуждаемого переменным во времени магнитным полем, отлична от нуля $rot\vec{E} \neq 0$, означает, что рассматриваемое электрическое поле *не потенциальное*. Оно, как и магнитное поле, является *вихревым*, его силовые линии – замкнуты.

В общем случае электрическое поле $\vec{E}$ представляет собой векторную сумму двух полей: потенциального (поля статических электрических зарядов, циркуляция которого равна нулю) и вихревого (поля, обусловленного изменяющимся во времени магнитным полем). В основе рассмотренных явлений, объясняющих закон электромагнитной индукции, не просматривается общего принципа, позволяющего установить общность их физической природы. Поэтому эти явления следует рассматривать как независимые, а закон электромагнитной индукции – как результат их совместного действия. Тем более удивительным оказывается тот факт, что ЭДС индукции в контуре всегда равна скорости изменения магнитного потока, проходящего через контур. В тех случаях, когда меняется и магнитное поле $\vec{B}$, и расположение или конфигурация контура в поле, ЭДС индукции следует рассчитывать по формуле (4.2.1)

$$\mathsf{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt},$$

а закон электромагнитной индукции можно представить в виде:

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c}\oint_L \left[\vec{v},\vec{B}\right]d\vec{l}\ . \qquad (4.2.5)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, представляет собой полную производную по времени от магнитного потока $-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$. Первое слагаемое связано с изменением магнитного поля во времени, второе – с движением контура.

Можно сказать, что во всех случаях индукционный ток вызывается полной силой Лоренца

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]\right). \qquad (4.2.6)$$

Какая часть индукционного тока вызывается электрической составляющей, а какая магнитной составляющей силы Лоренца, зависит от *выбора системы отсчета*. Итак, все эти явления говорят о том, что мы имеем дело с *единым электромагнитным полем*.

Необходимый комментарий. Из самого определения работы следует, что сила, действующая в магнитном поле на электрический заряд и перпендикулярная его скорости, не может совершать работы. Однако при движении проводника с током, увлекающего за собой заряды, сила Ампера все же работу совершает. Наглядным подтверждением этого служат электромоторы.

Это противоречие исчезает, если принять во внимание, что движение проводника в магнитном поле неизбежно сопровождается явлением электромагнитной индукции. Поэтому наряду с силой Ампера работу над электрическими зарядами совершает и возникающая в проводнике электродвижущая сила индукции. Таким образом, полная работа сил магнитного поля складывается из механической работы, обусловленной силой Ампера, и работы ЭДС, индуцируемой при движении проводника. Обе работы равны по модулю и противоположны по знаку, поэтому их сумма равна нулю. Действительно, работа силы Ампера при элементарном перемещении проводника с током в магнитном поле равна $\delta A_A = Id\Phi/c$, за это же время ЭДС индукции совершает работу

$$\delta A_i = \mathrm{E}_i Idt = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} Idt = -\frac{1}{c} Id\Phi .$$

Тогда полная работа равна нулю: $\delta A_A + \delta A_i = 0$. Силы Ампера совершают работу не за счет энергии внешнего магнитного поля, которое может оставаться постоянным, а за счет источника ЭДС, поддерживающего ток в контуре.

Примечание 1. В системе *СИ* запись уравнения (4.2.4) имеет вид: $rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Примечание 2. *Эмилий Христианович Ленц, русский физик, 1804–1865*
Джеймс Клерк Максвелл, великий английский физик, 1831-1879 гг.

4.3. Взаимная индукция и самоиндукция.

4.3.1. Взаимная индукция.

Введем понятие потенциальной функции тока во внешнем магнитном поле. Работа магнитного поля пропорциональна изменению магнитного потока (см § 4.1):

$$\delta A = \frac{I}{c}\delta\Phi \qquad (4.3.1)$$

Если запишем, что $\delta A = -(dU)_I$, то физически это означает, что механическая работа сил магнитного поля равна убыли функции U, которая играет роль *потенциальной или силовой функции* тока в магнитном поле. Подстрочный индекс “I” означает, что приращение потенциальной функции следует определять при постоянной силе тока. Сама силовая функция равна:

$$dU = -\delta A = -\frac{I}{c}d\Phi, \qquad U = -\frac{I}{c}\Phi \qquad (4.3.2)$$

Потенциальную функцию U не следует отождествлять с потенциальной энергией магнитного поля, поскольку, как нам известно, изменение энергии магнитного поля нельзя определить только по механической работе сил магнитного поля при перемещении проводника. Тем не менее, введение такой функции, безусловно, удобно и полезно. В частности, легко убедиться, что устойчивое равновесие контура постоянного тока в магнитном поле соответствует минимуму потенциальной функции U, или, соответственно, максимуму магнитного потока Φ.

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток через контур. При этом совершенно не важно, чем вызвано это изменение потока. Если в некотором контуре течет изменяющийся во времени ток, то магнитное поле этого тока также будет изменяться.

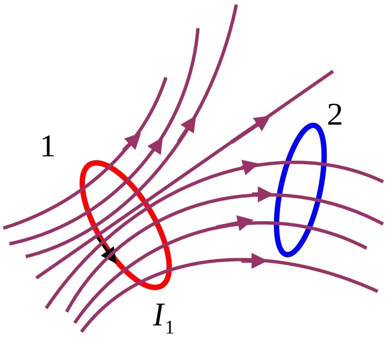

Рис. 3.1.

Пусть контуры 1 и 2 расположены достаточно близко друг к другу (рис. 3.1). Между контурами существует магнитная связь, наличие которой проявляется в том, что при всяком изменении тока в одном из контуров в другом контуре изменяется пронизывающий его магнитный поток и возникает ЭДС индукции. Это явление называют *взаимной индукцией*.

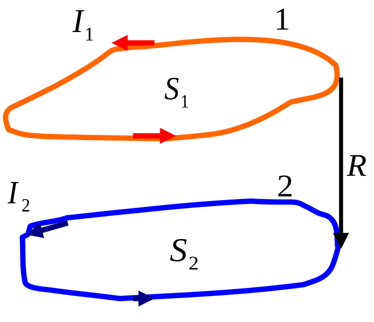

Рис. 3.2.

Рассмотрим взаимодействие 2-х замкнутых токов I_1 и I_2 (рис. 3.2). Пусть $\vec{B}_1$, $\vec{A}_1$ и $\vec{B}_2$, $\vec{A}_2$ – вектора индукции и векторные потенциалы магнитных полей, создаваемых токами I_1 и I_2, текущими в контурах 1 и 2, соответственно. Тогда магнитный поток поля $\vec{B}_1$ тока I_1 через контур 2 определяется:

$$\Phi_{12} = \int\limits_{S_2}\vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \int\limits_{S_2} rot\vec{A}_1 d\vec{S}_2 = \oint\limits_{L_2}\vec{A}_1 d\vec{l}_2\,, \qquad (4.3.3)$$

где S_2 поверхность, опирающаяся на контур 2, длиной L_2, $d\vec{l}_2$ – элемент этого контура. Вспомним, что вектор-потенциал линейного тока равен (см §3.7 формула (3.7.16)):

$$\vec{A}_1 = \frac{I_1}{c}\oint\limits_{L_1}\frac{d\vec{l}_1}{R},$$

где $d\vec{l}_1$ – элемент первого контура, а R – расстояние от рассматриваемого элемента контура до точки наблюдения (см также рис. 3.2). Тогда для магнитного потока через второй контур имеем:

$$\Phi_{12} = \oint\limits_{L_2}\vec{A}_1 d\vec{l}_2 = \oint\limits_{L_2}\left[\frac{I_1}{c}\oint\limits_{L_1}\frac{d\vec{l}_1}{R}\right]d\vec{l}_2 = \frac{I_1}{c}\oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}, \tag{4.3.4}$$

где интегрирование идет по обоим контурам, $R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ – относительное расстояние между двумя элементами с током. Совершенно аналогично получаем магнитный поток, создаваемый током контура 2 через контур 1:

$$\Phi_{21} = \frac{I_2}{c}\oint\limits_{L_2}\oint\limits_{L_1}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R} \tag{4.3.5}$$

Перепишем полученные выражения в виде:

$$\Phi_{12} = \frac{I_1}{c}L_{12}, \quad \Phi_{21} = \frac{I_2}{c}L_{21} \tag{4.3.6}$$

где L_{12} и L_{21} – *коэффициенты взаимной индукции*. Из полученных нами выражений следует, что они равны:

$$L_{21} = L_{12} = \oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}. \tag{4.3.7}$$

Если токи I_1 и I_2 нельзя считать линейными, т.е. поле одного из токов заметно меняется на протяжении сечения другого тока, то следует перейти к объемным токам. Для объемных элементов тока $I d\vec{l} = \vec{j}dV$ получаем:

$$L_{21} = L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2}\int\limits_{V_1}\int\limits_{V_2}\frac{\vec{j}_1\vec{j}_2 dV_1 dV_2}{R} \tag{4.3.8}$$

где V_1 и V_2 – полные объемы контуров с токами.

То замечательное свойство взаимной индукции контуров, что (в отсутствие ферромагнетиков) коэффициенты взаимной индукции одинаковы $L_{21} = L_{12}$, называют *теоремой взаимности*. Благодаря этой теореме можно не делать различия между коэффициентами L_{12} и L_{21}, а говорить просто о взаимной индуктивности контуров.

Используя данное выше определение, можем записать потенциальную функцию тока I_2 в поле тока I_1 через коэффициенты взаимной индукции:

$$U_{12} = -\frac{I_2}{c}\Phi_{12} = -\frac{1}{c^2}L_{12}I_1I_2; \tag{4.3.9}$$

Таким же образом выражается потенциальная функция тока I_1 в поле тока I_2:

$$U_{21} = -\frac{I_1}{c}\Phi_{21} = -\frac{1}{c^2}L_{21}I_1I_2. \tag{4.3.10}$$

Величина $U_{12} = U_{21}$ играет роль *взаимной потенциальной энергии токов* I_1 и I_2 в том смысле, что механическая работа сил взаимодействия этих токов при перемещении одного из них или обоих одновременно равна убыли потенциальной функции U_{12}.

Если много взаимодействующих контуров, то взаимная потенциальная энергия равна сумме:

$$U = -\frac{1}{2c^2}\sum_{i,j} L_{ij}I_iI_j \tag{4.3.11}$$

Коэффициенты взаимной индукции (взаимные индуктивности) являются величинами алгебраическими. При перемене направления одного из токов и сохранении направления другого знак коэффициента взаимной индукции изменяется на обратный. Взаимная индукция лежит в основе действия трансформаторов.

4.3.2. Самоиндукция.

Электрический ток в любом контуре создает магнитный поток $\Phi = \int \vec{B}d\vec{S}$, пронизывающий этот контур. Рассмотрим единичный контур с током I, величина которого может меняться во времени (рис. 3.3). Изменение тока I в контуре влечет за собой изменение магнитного потока Φ через контур, а при изменении потока в контуре возникает ЭДС индукции. Это явление носит название *явление самоиндукции*.

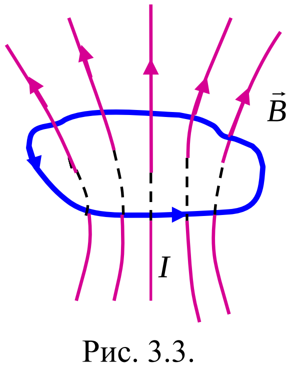

Рис. 3.3.

Так же, как и при рассмотрении взаимной индукции, формально запишем магнитный поток:

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S} = \oint_L \vec{A}d\vec{l}_1 = \frac{I_1}{c}\oint_L\oint_L \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_1'}{R}. \tag{4.3.12}$$

Здесь $d\vec{l}_1, d\vec{l}_1'$ – элементы рассматриваемого контура L, а R – расстояние между этими элементами.

Однако, рассматривая взаимодействие смежных элементов тока рассматриваемого контура, мы уже не можем считать этот ток линейным, поэтому перейдем к объемным токам

$$\vec{A} = \frac{I_1}{c}\oint_L \frac{d\vec{l}_1}{R} = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{j}_1 dV}{R} \qquad (4.3.13)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S} = \oint_L \vec{A}d\vec{l} = \frac{1}{c}\oint_L\int_V \frac{\vec{j}_1 dV}{R}d\vec{l}_1 = \frac{1}{cI_1}\int_V\int_V \frac{\vec{j}_1\vec{j}_1' dVdV'}{R} = \frac{1}{c}I_1 L_{11}, \qquad (4.3.14)$$

где ввели коэффициент

$$L_{11} = \frac{1}{I_1^2}\int_V\int_V \frac{\vec{j}_1\vec{j}_1' dVdV'}{R}. \qquad (4.3.15)$$

Итак, опуская значки, получаем выражение для магнитного потока

$$\Phi = \frac{1}{c}I_1 L_{11} = \frac{1}{c}LI. \qquad (4.3.16)$$

Здесь введенный коэффициент L – *индуктивность* рассматриваемого контура. Коэффициент L зависит от размеров и формы контура и от магнитных свойств среды, в которой находится контур. Если в пространстве нет ферромагнетиков, то индуктивность L не зависит от силы тока в контуре.

Потенциальная функция U_{11} сил взаимодействия элементов одного и того же тока I_1 равна:

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2}\int_V\int_V \frac{\vec{j}\vec{j}' dVdV'}{R} = -\frac{1}{2c^2}L_{11}I_1^2. \qquad (4.3.17)$$

Множитель $1/2$ появляется в связи с тем, чтобы взаимодействие каждой пары элементов тока $\vec{j}_1 dV$ и $\vec{j}_1' dV'$ в приведенном интеграле не учитывалось дважды; R – расстояние между элементами объема dV и dV'.

Изменение силы тока в контуре вызывает изменение магнитного потока в нем и приводит к возникновению в контуре *ЭДС самоиндукции*. ЭДС самоиндукции, следуя общему правилу, равна:

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial(LI)}{\partial t}, \qquad (4.3.18)$$

Если $L = const$, то получаем:

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c^2}L\frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (4.3.19)$$

Правило Ленца. *ЭДС самоиндукции всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока, которое ее вызывает*.

ЭДС самоиндукции стремится сохранить ток неизменным: она противодействует току, когда он увеличивается, и поддерживает ток, когда он уменьшается, т.е. здесь ток проявляет “инерционные” свойства. Эффекты индукции стремятся сохранить постоянным магнитный поток через контур точно так же, как механическая инерция стремится сохранить неизменной скорость тела.

Рассмотрим пример. Рассчитаем индуктивность длинного соленоида. Выберем контур как показано на рисунке 3.4. По теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$ можем записать (см Глава 3, §3.6, формула (3.6.13) и рис.6.8):

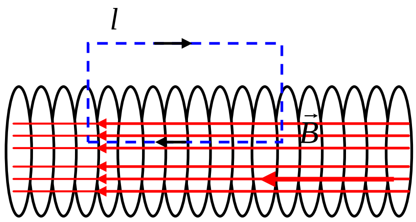

Рис. 3.4.

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = Hl = \frac{4\pi}{c} IN = \frac{4\pi}{c} Inl, \qquad (4.3.20)$$

где I – ток через соленоид; N и n – число и плотность витков соленоида, соответственно, l – длина выбранного контура интегрирования. Если μ – магнитная проницаемость материала, заполняющего объем соленоида, то $B = \mu H$ и тогда магнитная индукция внутри соленоида равна

$$B = \frac{4\pi\mu}{c} In.$$

Магнитный поток, пронизывающий соленоид равен:

$$\Phi = BSnl = \frac{4\pi\mu}{c} InSnl = \frac{4\pi\mu}{c} n^2 IV, \qquad (4.3.21)$$

Здесь V – объем соленоида. С другой стороны, $\Phi = \frac{1}{c} LI$. Приравнивая потоки, получаем индуктивность длинного соленоида:

$$L = 4\pi\mu n^2 V. \qquad (4.3.22)$$

Важно отметить, что индуктивность пропорциональна объему и квадрату плотности витков соленоида.

4.3.3. Еще о потенциальной энергии и единицах измерения

Возвращаясь к случаю системы двух токов, заметим, что общая потенциальная “энергия” U этой системы равна сумме их взаимной “энергии” $U_{12} (= U_{21})$ и собственных потенциальных “энергий” U_{11} и U_{22} каждого из них:

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2\right). \qquad (4.3.23)$$

Учитывая, что $L_{12} = L_{21}$, можно записать

$$U = -\frac{1}{2c^2}\left(L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1 + L_{22}I_2^2\right) = -\frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k. \qquad (4.3.24)$$

Последнее выражение применимо к системе произвольного числа токов (контуров), если производить суммирование по всем возможным парам индексов i и k $(i,k = 1,2,...,n)$.

Примечание 1. В системе СИ взаимная и собственная потенциальные “энергии” токов записываются, соответственно, как: $U_{12} = -L_{12}I_1I_2$ и $U_{11} = -\frac{1}{2}L_{11}I_1^2$

В *гауссовой системе единиц индуктивность* измеряется в сантиметрах: $[L] =$ *см*. При этом 1 сантиметр – это индуктивность такого витка, в котором ток силою 1 ед.$CGSM$ (1 ед. тока $CGSM$ = $1/c$ ед.$CGSE$) создает магнитный поток 1 Максвелл (*Мкс*). В самом деле, из закона Био - Савара

$$d\vec{B} = \frac{I}{c}\frac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$$

имеем следующую размерность для индукции магнитного поля (см пункт 3.5.4 в §3.5):

$$[B] = 1Гс = \frac{[I][l]}{[l^2][c]} = \frac{CGSE_I \cdot c}{см \cdot см} = \frac{CGSE_q}{см^2}$$

Отсюда для единицы потока магнитной индукции $\Phi = \int \vec{B}d\vec{S}$ получаем:

$$[\Phi] = [B][l^2] = CGSE_q = 1Мкс,$$

Из формулы $\Phi = \frac{1}{c}LI$ (4.3.16) имеем для потока

$$[\Phi] = 1Мкс = \left[\frac{IL}{c}\right] = \frac{CGSE_q}{см}[L] = CGSE_q.$$

Из последнего получается, что индуктивность в системе Гаусса измеряется в сантиметрах

$$[L] = см \qquad (4.3.25)$$

В *системе СИ* соотношения для потока и ЭДС самоиндукции имеют вид:

$$\Phi = LI; \qquad \mathrm{E}_S = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L\frac{\partial I}{\partial t}; \qquad (4.3.26)$$

$$\mathrm{E}(Вольт) = -\frac{d\Phi(Вебер)}{dt}$$

Вебер – такая единица магнитного потока, при изменении которого на 1 Вебер за 1 секунду в контуре возбуждается ЭДС в 1 Вольт:

$$[\Phi]=1Вб=1В\cdot 1с\,.$$

Индуктивность измеряется в единицах Генри: $[L]$ = 1 Генри = 1 *Гн*. 1 Генри – это индуктивность такого витка, в котором ток силой 1 Ампер создает магнитный поток 1 Вебер (*Вб*):

$$1Гн=\frac{1Вб}{1А}$$

Найдем связь между единицами потока в гауссовой и СИ системах. Связь между *Вб* и *Мкс* единицами можно получить из следующего *численного* равенства, вспоминая, что единица потенциала в СИ в 300 раз меньше единиц потенциала в Гауссовой системе единиц: $1В=300\;CGSE_V$:

$$\mathsf{E}(Вольт)=-\frac{d\Phi(Вебер)}{dt}=300\cdot\mathsf{E}(CGSE_V)=-\frac{300}{c}\frac{d\Phi(Мкс)}{dt}\approx-10^{-8}\frac{d\Phi(Мкс)}{dt} \qquad (4.3.27)$$

Из (4.3.27) следует соотношение между единицами потока вектора индукции магнитного поля:

$$1Вб=10^8\,Мкс\,.$$

Тогда можно получить соотношение единиц индуктивности:

$$1Гн=\frac{1Вб}{1А}=\frac{10^8\,Мкс}{\frac{1}{10}CGSM_I}=10^9\,см \qquad (4.3.28)$$

В системе *СИ* индуктивность длинного соленоида записывается

$$L=\mu\mu_0 n^2 V\,,$$

где n – число витков на единицу длины. Отсюда получаем размерность для постоянной магнитной величины

$$[\mu_0]=\frac{Гн}{м},$$

которая упоминалась выше в §3.5 при записи закона Био-Савара.

4.4. Энергия магнитного поля.

4.4.1. Об энергии взаимодействующих токов.

Ранее мы показали, что при изменении любого потока через контур с током магнитное поле совершает работу

$$dA=\frac{I}{c}d\Phi \qquad (4.4.1)$$

Это соотношение было получено при деформации или движении контура с током. Можно получить, *что эта же работа совершается сторонними силами* (ЭДС источника) *при появлении тока и магнитного потока в контуре*, т.е. энергия передается магнитному полю.

Найдем работу, совершаемую источником ЭДС для увеличения тока от 0 до значения I, и тем самым получим энергию магнитного поля, связанного с этим током. Наращиваем ток в контуре каким-либо образом, при этом возрастает и магнитный поток Ф. Возникнет ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{4.4.2}$$

Тогда элементарная работа, которую должен совершить внешний источник ЭДС против ЭДС самоиндукции, чтобы увеличить ток, определяется (опять напомним, что ЭДС равна работе по перетаскиванию единицы заряда по замкнутому контуру):

$$dA = -\mathcal{E}_S dq = -\mathcal{E}_S I dt \tag{4.4.3}$$

Подставляя (4.4.2), получаем формулу (4.4.1), что и требовалось доказать.

На что идет эта работа? Рассмотрим, что изменилось после изменения тока в контуре:

(1) стало выделяться тепло (на это идет работа внешней ЭДС в стационарном режиме);

(2) появилось магнитное поле контура (его появлению «сопротивлялось» ЭДС самоиндукции). Здесь в переходном режиме работа ЭДС самоиндукции идет на увеличение энергии магнитного поля

$$dW = \frac{I}{c} d\Phi \tag{4.4.4}$$

Итак, если имеем один контур, который обладает индуктивностью L, то запасенная энергия магнитного поля контура равна:

$$W = \frac{L}{c^2}\int I dI = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{I\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L} \tag{4.4.5}$$

На случай N витков имеем потенциальную энергию токов, взаимодействующих по закону Ампера (см (4.3.11)):

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \tag{4.4.6}$$

где L_{ik} при $i = k$ индуктивность i -го контура, при $i \neq k$ взаимная индуктивность i -го и k -го контуров. Эти формулы выражают магнитную энергию через токи I и магнитные потоки. Это потенциальная энергия токов, взаимодействующих по закону Ампера. Более подробное рассмотрение этого вопроса см в Дополнениях 1 и 2 в конце курса лекций.

4.4.2. Энергия магнитного поля соленоида.

Энергию магнитного взаимодействия можно выразить через напряженность и индукцию магнитного поля. Для начала разберем пример длинного соленоида. Запишем энергию соленоида с током по общей формуле (4.4.4). Напряженность магнитного поля длинного соленоида была определена ранее (см Глава 3, §3.6, а также (4.3.20) в §4.3):

$$H = \frac{4\pi}{c} nI \tag{4.4.7}$$

Тогда изменение энергии в соленоиде, учитывая, что приращение магнитного потока через виток определяется $d\Phi = SdB$, равно:

$$dW = \frac{I}{c} d\Phi \cdot N = \frac{cH}{4\pi nc} d\Phi \cdot nl = \frac{HSl \cdot dB}{4\pi} = \frac{V}{4\pi} HdB$$

$$dW = \frac{V}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right) \tag{4.4.8}$$

Здесь V – объем соленоида. Тогда дифференциал объемной плотности магнитной энергии:

$$dw = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{4\pi} \vec{H} d\vec{B} \tag{4.4.9}$$

Таким образом, *плотность энергии магнитного поля* записывается через интеграл:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} d\vec{B} \tag{4.4.10}$$

В частности, если магнитная среда изотропна и магнитная проницаемость постоянна, имеем $\vec{B} = \mu \vec{H}$, то плотность энергии имеет вид:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int \mu H dH = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\vec{H}\vec{B}}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \tag{4.4.11}$$

Полная энергия магнитного поля определяется интегрированием по всему пространству, где имеется магнитное поле:

$$W = \int_V w dV \tag{4.4.12}$$

Итак, получили, что магнитная энергия локализована в пространстве с объемной плотностью w. Это представление теории поля, аналогичное тому, какое получали ранее в электростатике (см §2.6).

4.4.3. Энергия магнитного поля

Можно показать в общем случае справедливость формул (4.4.9) - (4.4.12) для энергии магнитного поля

$$dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right), \quad w = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} d\vec{B}, \quad W = \int w dV . \tag{4.4.13}$$

Ограничимся одним неподвижным витком, тогда:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad d\Phi = \int_S d\vec{B} d\vec{S},$$

где интегрирование ведется по произвольной поверхности, натянутой на контур с током. Приращение энергии равно:

$$dW = \frac{I}{c} d\Phi = \frac{I}{c} \int_S d\vec{B} d\vec{S}$$

Введем векторный потенциал: $\vec{B} = rot\vec{A}$, который определяется распределением объемных токов

$$\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_q) dV_q}{r_{aq}},$$

где $r_{aq} = |\vec{r}_a - \vec{r}_q|$. Тогда приращение магнитной индукции можно записать $d\vec{B} = d(rot\vec{A}) = rot(d\vec{A})$, поскольку дифференциал берется по внутренним переменным (r_q), а ротор по внешним (r_a). Таким образом для приращения энергии получаем:

$$dW = \frac{I}{c} \int_S rot(d\vec{A}) d\vec{S} = \frac{I}{c} \oint_L d\vec{A} d\vec{l}, \tag{4.4.14}$$

Здесь воспользовались теоремой Стокса, а интегрирование проводится по контуру с током. Заменим линейный элемент тока на объемный элемент, а интегрирование по объему распространим на все пространство (это можно сделать, т.к. там, где плотность токов равна нулю, вклад в интеграл также равен нулю):

$$dW = \frac{1}{c} \int_V (d\vec{A}, \vec{j}) dV \tag{4.4.15}$$

Воспользуемся $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, тогда

$$dW = \frac{1}{4\pi} \int_V (d\vec{A}, rot\vec{H}) dV. \tag{4.4.16}$$

Из векторного анализа известно следующее соотношение:

$$\vec{A} rot\vec{H} = \vec{H} rot\vec{A} + div[\vec{H}, \vec{A}] = \vec{H}\vec{B} + div[\vec{H}, \vec{A}]. \tag{4.4.17}$$

Подставляя полученное выражение в интеграл (4.4.16) и используя теорему Гаусса, получаем:

$$dW = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} rot(d\vec{A}) dV - \frac{1}{4\pi} \int div[d\vec{A}, \vec{H}] dV = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} d\vec{B} dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S [d\vec{A}, \vec{H}] d\vec{S}, \tag{4.4.18}$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$rot(d\vec{A}) = d(rot\vec{A}) = d\vec{B}$$

опять же из-за того, что дифференциал и производные берутся по разным переменным (r_q) и (r_a), а также теоремой Гаусса для второго интеграла.

Интегрирование в (4.4.18) распространено на все пространство, охватывающее все взаимодействующие токи и поле этих токов. В качестве поверхности интегрирования для второго интеграла можно взять бесконечно удаленную поверхность. Если все токи текут в конечной области пространства, то магнитное поле будет убывать на бесконечности достаточно быстро и рассматриваемый интеграл обратится в нуль. Тогда приращение энергии поля равно

$$dW = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B}dV \,. \tag{4.4.19}$$

Или иначе:

$$W = \int_V wdV \,, \tag{4.4.20}$$

где ввели плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B} \tag{4.4.21}$$

Эти же соотношения и энергия двух взаимодействующих токов получены в Дополнениях к этому параграфу в конце курса лекций.

Приложение 1. Сравним формулы, обсуждаемые в этом параграфе, в системе СИ и в системе единиц Гаусса:

	Система единиц СИ	Система единиц Гаусса
Элементарная работа	$\delta A = Id\Phi$	$dA = \frac{I}{c}d\Phi$
ЭДС самоиндукции	$\mathcal{E}_S = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$	$\mathcal{E}_S = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$
Энергия магнитного поля	$W = \frac{1}{2}\int \vec{H}\vec{B}dV$	$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV$
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}$	$w = \frac{\vec{H}\vec{B}}{8\pi}$, $w = \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}d\vec{B}$
Плотность энергии в изотропной среде	$w = \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu}$
Собственная энергия тока	$W_{11} == \frac{1}{2}L_{11}I_1^2$	$W_{11} = -\frac{1}{2c^2}L_{11}I_1^2$

Взаимная энергия токов	$W_{12}=L_{12}I_1I_2$	$W_{12}=U_{12}=-\frac{1}{c^2}L_{12}I_1I_2$

4.5. Ток смещения.

4.5.1. Противоречие с законом сохранения заряда.

Уравнение непрерывности, выражающее фундаментальный закон – *закон сохранения электрического заряда*, – имеет вид (см формулу (3.1.13) в §3.1):

$$div\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\ . \tag{4.5.1}$$

где ρ – плотность электрического заряда, $\vec{j}$ – плотность тока. Для стационарных, т.е. независящих от времени, токов имеем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,\quad div\vec{j}=0\,. \tag{4.5.2}$$

Иначе, для стационарных токов все линии плотности тока $\vec{j}$ оказываются замкнутыми – у них нет источников.

Если обратимся к переменным токам и переменным (т.е. к изменяющимся во времени) электромагнитным полям, то возникает противоречие между законом сохранения заряда (4.5.1) и с одним из уравнений системы уравнений Максвелла. Выясняется, что уравнение непрерывности оказывается несовместимым с уравнением магнитного поля стационарных токов

$$rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,. \tag{4.5.3}$$

Действительно, согласно последнему уравнению, плотность тока пропорциональна вихрю (ротору) вектора $\vec{H}$, но дивергенция вихря всегда тождественно равна нулю, т.е.

$$div\vec{j}=\frac{c}{4\pi}div\,rot\vec{H}\equiv 0\,. \tag{4.5.4}$$

Получаем, что дивергенция вектора плотности тока всегда должна быть равной нулю. Таким образом, возникает очевидное противоречие, поскольку дивергенция плотности тока не равна нулю из закона сохранения заряда (4.5.1), когда в нестационарных процессах плотность заряда может изменяться во времени.

Иначе эту проблему можно проиллюстрировать на примере разряда предварительно заряженного плоского конденсатора через некоторое внешнее сопротивление (рис. 5.1). Ток проводимости терпит разрыв на обкладках конденсатора.

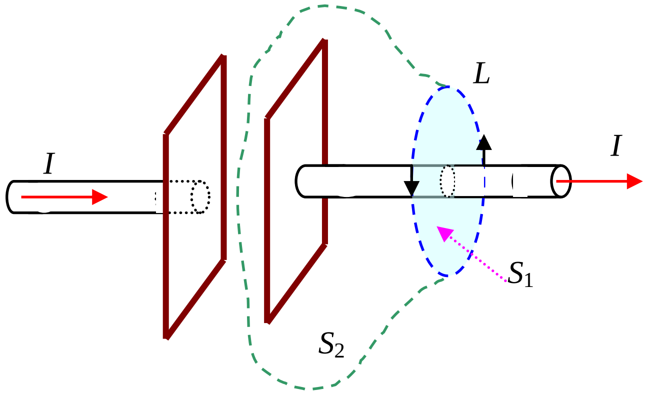

Рис. 5.1.

В самом деле, рассмотрим поверхности S_1 и S_2, опирающиеся на один и тот же контур L, который охватывает провод с током (рис. 5.1). Очевидно, что поверхность S_1 пересекает провод и через нее течет ток $I = \int \vec{j} d\vec{S}$.

Поверхность S_2 проходит в области между обкладками конденсатора и поэтому через нее ток не течет. Тогда записывая уравнение Максвелла в интегральной форме, а именно циркуляцию вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру *L*, имеем в правой части 2 противоположных результата для двух выбранных поверхностей

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \begin{cases} \int\limits_{S_1} rot\vec{H} d\vec{S} = \dfrac{4\pi}{c} \int\limits_{S_1} \vec{j} d\vec{S} \neq 0 \\ \int\limits_{S_2} rot\vec{H} d\vec{S} = \dfrac{4\pi}{c} \int\limits_{S_2} \vec{j} d\vec{S} = 0 \end{cases} \tag{4.5.5}$$

Поэтому получается, что циркуляция вектора $\vec{H}$ будет зависеть от выбора поверхности, чего явно не должно быть и что не происходило в случае постоянных токов. Сомневаться в законе сохранения заряда трудно, это *фундаментальный закон*, и он проверен экспериментально с большой точностью. Вопрос состоит в том, как выйти из этого противоречия?

4.5.2. Ток смещения.

Максвелл предположил, что уравнение $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ справедливо только для стационарных токов, когда плотность зарядов ρ постоянна и $div\vec{j} = 0$. Для переменных электрических токов картина, по-видимому, должна быть иной. Максвелл ввел дополнительное слагаемое – *ток смещения*. Приведем рассуждение, приводящее к необходимости введения этого тока для разрешения противоречия между уравнениями для магнитного поля и законом сохранения заряда.

Из электростатики имеем, что источником вектора индукции являются сторонние заряды:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho\,.$$

Если распределение зарядов может изменяться во времени, то можно записать:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\vec{D}\right) = \frac{1}{4\pi}div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right). \qquad (4.5.6)$$

Основываясь на справедливости уравнения непрерывности, найдем поправку, позволяющую устранить указанное выше противоречие. Запишем уравнение, определяющее закон сохранения заряда, и подставим результат (4.5.6):

$$div\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = div\vec{j} + \frac{1}{4\pi}div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = div\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = div\left(\vec{j} + \vec{j}_{CM}\right) = div\vec{j}_n = 0, \qquad (4.5.7)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \vec{j}_{CM} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,. \\ \vec{j}_n &= \vec{j} + \vec{j}_{CM} \end{aligned} \qquad (4.5.8)$$

Иными словами, предполагается, что наряду с токами проводимости $\vec{j}$, представляющими собой движение электрических зарядов по проводам, существуют еще и токи $\vec{j}_{CM}$ иного рода, которые Максвелл назвал *токами смещения*. Сумму тока проводимости и тока смещения $\vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_{CM}$ называют *полным током*.

Согласно уравнению

$$div\vec{j}_n = div\left(\vec{j} + \vec{j}_{CM}\right) = 0 \qquad (4.5.9)$$

линии *полного тока всегда являются непрерывными и замкнутыми* в отличие от линий тока проводимости. Токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения. При этом выражение для ротора (вихря) вектора $\vec{H}$ принимает вид:

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_n = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_{CM}\right),$$

то есть

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right). \qquad (4.5.10)$$

Применяя дивергенцию к обеим частям (4.5.10), получаем 0 в обеих частях, тем самым снимаем противоречие. Полученный результат – это не вывод, а лишь устранение противоречия. Доказательством существования токов смещения служит опыт.

Другими словами, в магнитном отношении токи смещения эквивалентны токам проводимости, они также *возбуждают магнитное поле по тем же законам, что и токи проводимости*. И эксперимент подтверждает этот факт, что ток смещения создает такое же магнитное поле, что и ток проводимости. Очевидно, что ток проводимости, ток смещения и полный ток измеряются в одних и тех же единицах.

Однако на этом аналогия между двумя компонентами полного тока исчерпывается. Самое существенное отличие заключается в том, что токи проводимости соответствуют движению электрических зарядов, тогда как "чистый" ток смещения – ток смещения в вакууме – соответствует лишь изменению напряженности электрического поля и никаким движением электрических зарядов или любых других частиц вещества не сопровождается. *Токи смещения не переносят заряд или массу*.

В вакууме имеем:

$$\vec{D} = \vec{E} \qquad \text{и} \qquad \vec{j}_{CM} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{4.5.11}$$

При наличии диэлектрика получаем:

$$\vec{j}_{CM} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right). \tag{4.5.12}$$

В последнем случае ток смещения складывается из "чистого" тока смещения, не связанного с движением зарядов, и тока поляризации $4\pi\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, обусловленного движением (смещением) связанных зарядов.

Токи смещения, в отличие от токов проводимости, не сопровождаются выделением Джоулева тепла. Для вакуума это утверждение очевидно, в диэлектриках же токи смещения сопровождаются тепловыми эффектами, что особенно заметно для высокочастотных процессов. Однако это процесс подчиняется совершенно иным закономерностям, чем выделение Джоулева тепла в проводниках.

Открытие рассмотренного в этом параграфе явления – порождения переменным электрическим полем магнитного – вполне аналогично открытию явления электромагнитной индукции и явилось решающим шагом, сделанным Максвеллом к построению теории электромагнитного поля. Итак, ток смещения появляется там, где существует переменное электрическое поле (заряды не переносятся). Отсюда следует фундаментальный вывод: *переменное электрическое поле порождает магнитное поле*. В заключение отметим, что *открытие Максвеллом тока смещения – открытия первостепенной важности* – чисто теоретическое открытие.

Примечание 1. В системе *СИ* получаем $\vec{j}_{см} = \dfrac{\partial D}{\partial t}$, $\quad rot\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

4.6. Система уравнений Максвелла.

4.6.1. Система уравнений Максвелла.

До сих пор мы рассматривали отдельные части созданной Максвеллом единой теории электрических и магнитных явлений. Теперь полученные результаты могут быть сведены в *полную систему уравнений электромагнитного поля*. Если эта система действительно полна и верна, то из нее должны однозначно следовать все свойства поля – как уже изученные, так и новые, предсказываемые теорией.

Система дифференциальных уравнений классической электродинамики носит название *системы уравнений Максвелла*, который впервые сформулировал эти уравнения в шестидесятых годах 19-го столетия и раскрыл их физический смысл. Заметим, что общепринятая ныне формулировка уравнений электродинамики принадлежит Г. Герцу.

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

$$\begin{aligned} rot\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (a), \qquad div\vec{D} = 4\pi\rho \quad (б), \\ rot\vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \quad (в), \qquad div\vec{B} = 0 \quad (г) \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Верхняя пара уравнений (*а, б*) указывает на то, что есть две причины возникновения электрического поля.

Во-первых, его источником являются электрические заряды (закон Кулона), как сторонние, так и связанные:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad div\vec{P} = -\rho', \text{ т.е. } div\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho'). \tag{4.6.2}$$

Во-вторых, электрическое поле $\vec{E}$ появляется всегда, когда меняется во времени магнитное поле (закон электромагнитной индукции – уравнение (*а*)).

Вторая пара уравнений (*в, г*) показывает, что магнитное поле возбуждается как движущимися зарядами (электрические токи), так и переменными электрическими полями. Однако магнитных зарядов нет – о чем говорит уравнение (*г*). Напомним связь между векторами магнитного поля в веществе

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}, \quad rot\vec{J} = \frac{1}{c}\vec{j}_m,$$

$$\text{т.е.}\quad rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_m + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right), \qquad (4.6.3)$$

где $\vec{j}_m$ – плотность тока намагничивания, $\partial\vec{P}/\partial t$ – плотность тока поляризации. Первые три тока, входящие в это выражение, связаны с движением электрических зарядов, последний ток – с изменяющимся во времени электрическим полем.

Система уравнений Максвелла в интегральной форме.

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \quad (a), \qquad \oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi\int_V \rho dV\,, \quad (б)$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S} \quad (в), \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0\,. \quad (c) \qquad (4.6.4)$$

Содержание этих уравнений заключается в следующем:

(a) Циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру, т.е. работа по перенесению единичного заряда, с точностью до коэффициента $1/c$ равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. Под электрическим вектором $\vec{E}$ понимается как вихревое электрическое поле, так и электростатическое поле, циркуляция которого равна нулю. Это *закон электромагнитной индукции*.

(*б*) Поток вектора $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность с точностью до коэффициента 4π равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью. Это *закон Кулона*.

(*в*) Циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру с точностью до коэффициента $4\pi/c$ равна полному току (сумма токов проводимости и смещения) через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром. Вихревое *магнитное поле возбуждается движущимися зарядами и переменным электрическим полем*.

(c) Поток вектора $\vec{B}$ через произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю. Это – свидетельство отсутствия *магнитных зарядов*.

Уравнения Максвелла, записанные в дифференциальной форме, предполагают, что входящие в них величины, а также постоянные, характеризующие среду, в пространстве и времени изменяются непрерывно и всюду конечны. Однако существуют поверхности разрыва, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно. Поэтому, чтобы система уравнений была полной, т.е. давала возможность определить характеристику поля по начальным условиям, эту систему дифференциальных уравнений необходимо дополнить *граничными условиями*, которым должны удовлетворять векторы электромагнитного поля на границе раздела сред:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \qquad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad [\vec{n}, \vec{H}_2] - [\vec{n}, \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}, \qquad (4.6.5)$$

где σ – поверхностная плотность сторонних зарядов, $\vec{i}$ – поверхностная плотность тока проводимости на границе раздела сред.

Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и в тех случаях, когда существуют поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, т.е. в уравнениях, записанные в интегральной форме, автоматически учтены граничные условия.

Однако, если электрическое и магнитное поля стационарны, т.е. не зависят от времени ($\vec{E} = const$ и $\vec{B} = const$), то система уравнений Максвелла распадается на две группы *независимых* уравнений, что позволяет рассматривать электрическое и магнитное поля как независимые друг от друга субстанции, например в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0, \qquad \oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi\int_V \rho dV, \qquad (4.6.6)$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}d\vec{S}, \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (4.6.7)$$

Эта возможность и была использована нами, когда вначале курса электромагнетизма мы отдельно могли изучать законы электростатики и магнитостатики.

Когда электрическое и магнитное поля меняются во времени, тогда из уравнений Максвелла следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые друг от друга физические величины или характеристики: изменение во времени одной из них приводит к появлению другой. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, составляющая *единое электромагнитное поле*.

Уравнения поля линейны, что обеспечивает принцип суперпозиции. В число фундаментальных уравнений не включено уравнение непрерывности – закон сохранения заряда, т.к. последний включен уже в систему уравнений Максвелла (получается из уравнений (*б*) и (*в*) в (4.6.1) и (4.6.4)).

Всего получили 8 уравнений (2 векторных и 2 скалярных), но при этом имеем 16 переменных: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}$ и ρ.

Наиболее общая постановка задачи в электромагнетизме – определение всех полей в пространстве и во времени при первоначально заданных значениях $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Часто постановка задачи в электродинамике выглядит еще и следующим образом: необходимо найти электрические и магнитные поля при заданном распределении зарядов ρ (сторонних) и токов $\vec{j}$

(проводимости). Таким образом, надо найти 12 переменных величин при 8 уравнениях. Видно, что число определяемых переменных больше числа уравнений. Означает ли это, что система не доопределена? Чтобы разрешить подобные задачи необходимо включить связь между векторами $\vec{E}, D, \vec{B}, \vec{H}$.

4.6.2. Материальные уравнения.

Систему уравнений Максвелла необходимо дополнить соотношениями, в которые входят величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называются *материальными уравнениями*. Вообще говоря, эти уравнения достаточно сложны и не обладают той общностью и фундаментальностью, которые присущи уравнениям Максвелла. Материальные уравнения наиболее просты в случае достаточно слабых и сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени электромагнитных полей. Если при этом среда изотропна и не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, то материальные уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \tag{4.6.8}$$

где ε, μ, σ – диэлектрическая и магнитная проницаемости и электропроводность среды, соответственно. Вычисление этих величин – трудная задача, поэтому обычно эти постоянные определяются феноменологически. Поле $\vec{E}$ включает в себя, в том числе, и поле сторонних сил, обусловленных химическими или тепловыми процессами.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме совместно с граничными условиями и материальными уравнениями составляют *полную* систему, позволяющую по заданным начальным значениям $\vec{E}$ и $\vec{B}$ *однозначно* определить электромагнитное поле в любой точке пространства и в любой момент времени.

С помощью материальных уравнений из системы уравнений можно исключить величины $\vec{j}, \vec{D}, \vec{H}$. Таким образом, остается только 6 неизвестных $\vec{E}$ и $\vec{B}$, если считать известным распределение электрического заряда $\rho(t)$. Получаем 6 неизвестных и 8 уравнений, однако система получается не переполненной. Это связано с тем, что из дифференциальных уравнений (4.6.1 *б*,*в*) и (4.6.1 *а*,*г*) следуют одинаковые дифференциальные следствия.

Полная система уравнений вместе с уравнением движения заряженных частиц под действием силы Лоренца составляют фундаментальную систему уравнений. Эта система в принципе достаточна для описания всех электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые эффекты.

Рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям Максвелла, ни в коем случае нельзя рассматривать как их доказательство или вывод. Эти уравнения, полученные путем обобщения опытных фактов, являются основными аксиомами, или постулатами электродинамики. Они играют в электродинамике такую же роль, как законы Ньютона в классической механике или начала термодинамики в молекулярной физике.

4.6.3. О магнитном заряде. Магнитный монополь.

Законы природы обнаруживают большую степень подобия между электрическими и магнитными полями. Имеется, однако, одно большое различие. Частицы с положительными и отрицательными электрическими зарядами постоянно наблюдаются в природе, создавая в окружающем пространстве кулоновское электрическое поле. Магнитные же заряды, ни положительные, ни отрицательные, никогда не наблюдались по отдельности. Магнит всегда имеет два разнесенных на концы равных по величине полюса – положительный и отрицательный. Магнитное поле вокруг магнита есть результирующее поле обоих полюсов.

После высказанной Ампером гипотезы о существовании внутримолекулярных токов и ее подтверждении казалось, идея магнитного заряда была благополучно “похоронена” и могла рассматриваться лишь в качестве вспомогательной. Из уравнений Максвелла для электромагнитного поля вытекает фундаментальная *асимметрия* между магнитными $\vec{H},\vec{B}$ и электрическими $\vec{E},\vec{D}$ величинами, особенно наглядная, если эти уравнения переписать в виде

$$\begin{aligned} &div\vec{D} = 4\pi\rho, \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ &div\vec{B} = 0, \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot\vec{E} = 0 \end{aligned}, \tag{4.6.9}$$

Еще нагляднее это проявляется, если рассмотреть эти уравнения для вакуума

$$\begin{aligned} &div\vec{E} = 4\pi\rho, \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e \\ &div\vec{B} = 0, \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot\vec{E} = 0 \end{aligned} \tag{4.6.10}$$

Эта асимметрия проявляется в отсутствии магнитных зарядов и их токов. Магнитное поле в этом смысле является вторичным эффектом электричества, возникая лишь при движении электрических зарядов. Если же отказаться от идеи “первородства” электричества, то из простых соображений симметрии можно было бы предположить существование магнитных зарядов и соответствующих им токов. Тогда в правых частях нижней пары уравнений Максвелла стояли бы не нули, а, соответственно, следующие величины:

$4\pi\rho_m$, $\qquad \rho_m$ – плотность магнитных зарядов и

$$\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m, \qquad j_m \text{ – плотность магнитных токов.}$$

Такое смелое предположение в 1931 г. и сделал П. Дирак, который высказал: “Было бы удивительно, если бы природа не использовала эту возможность”, а позже развил идею о существовании магнитного монополя (единичного магнитного полюса). Логических возражений против такой гипотезы нет, т.е. классическая физика допускает существование таких частиц. Однако сохраняется неясность: многие уравнения получаются из вариационных принципов, но до сих пор не придумано и не сформулировано такого вариационного принципа, в котором бы наряду с системой уравнений Максвелла появлялись бы электрический и магнитный заряды одновременно и равноправно. Возможно, что отсюда следует запрет на существование магнитных зарядов. Кроме того, многочисленные попытки экспериментального обнаружения магнитных монополей пока к успеху не привели.

В квантовой механике имеем другую ситуацию. Там монополь возникает как некоторая сингулярность в теории электромагнитного поля. Основной вывод Дирака: магнитный заряд магнитного монополя g должен быть связан с электрическим зарядом и квантован:

$$g = n\frac{\hbar c}{2e}, \tag{4.6.11}$$

где n – любое целое число. Эту связь можно получить многими способами, но везде нужно привлекать квантовую механику. Получим заряд монополя Дирака, используя мысленный эксперимент Эфингера (1969).

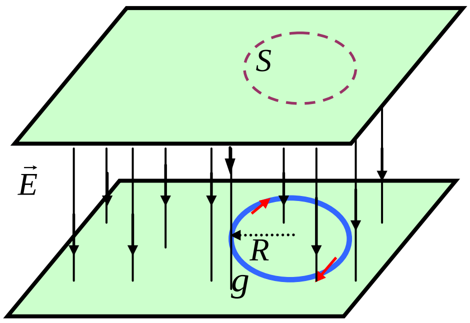

Рис. 6.1.

Рассмотрим конденсатор, в котором создано однородное электрическое поле (рис. 6.1). В таком поле магнитный монополь с зарядом g будет двигаться по круговой орбите, т.е. его поведение будет аналогично тому, как будет вести себя электрон, помещенный в однородное магнитное поле (диамагнетизм свободных электронов Ландау). Сила Лоренца, действующая со стороны электрического поля на монополь, равна

$$\vec{F}_E = \frac{g}{c}\left[\vec{v}, \vec{E}\right], \tag{4.6.12}$$

или

$$F_E = g\left|\vec{E}\right|\frac{v}{c},$$

и будет сообщать ему центростремительное ускорение

$$F_E = M\frac{v^2}{R}, \tag{4.6.13}$$

где *M*, *v* и *R* – масса, скорость и радиус траектории монополя, соответственно. Из равенства (4.6.12) и (4.6.13) получаем:

$$\left|\vec{E}\right| = E = \frac{Mvc}{Rg} \tag{4.6.14}$$

Л.Д. Ландау показал, что орбитальное движение электронов в магнитном поле квантуется. Поэтому момент импульса электрического заряда в однородном магнитном поле относительно оси вращения может быть записан как

$$L_z = (2n+1)\hbar, \tag{4.6.15}$$

$n = 0, 1, 2,\ldots$, где член с $n = 0$ описывает, так называемое, нулевое движение. Распространяя этот результат на орбитальное движение монополя в однородном электрическом поле, запишем

$$L_z = MvR = (2n+1)\hbar \tag{4.6.16}$$

Тогда напряженность электрического поля, в котором движется монополь, может быть выражена как

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\hbar c}{gR^2}(2n+1) = \frac{2\hbar c}{gR^2}\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{4.6.17}$$

С другой стороны, по теореме Гаусса поле в конденсаторе (см рис. 6.1):

$$E\cdot\pi R^2 = 4\pi\sigma\cdot\pi R^2,$$

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q_{охв}}{\pi R^2} = \frac{4q_{охв}}{R^2}, \tag{4.6.18}$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на пластине конденсатора, $q_{охв} = \sigma\cdot\pi R^2$ – заряд на пластине конденсатора, охватываемый проекцией орбиты магнитного монополя на плоскость пластины. Приравнивая (4.6.17) и (4.6.18), получаем

$$\frac{4q_{охв}}{R^2} = \frac{2\hbar c}{gR^2}\left(n+\frac{1}{2}\right), \text{ или } q_{охв} = \frac{\hbar c}{2g}\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{4.6.19}$$

При $n = 0$ остается конечный заряд, связанный с нулевым движением монополя (эффект физического вакуума). Вычитая эффект вакуума, получаем

$$q_{набл} = n\frac{\hbar c}{2g}, \quad n = 1, 2,\ldots \tag{4.6.20}$$

При $n = 1$ получаем $e = \dfrac{\hbar c}{2g}_{\min}$ – наименьший электрический заряд, откуда

$$g_{\min} = \frac{\hbar c}{2e} \quad \text{или} \quad g = n\frac{\hbar c}{2e},$$

т.е. получаем условие квантования гипотетического магнитного заряда, записанное выше (4.6.11).

Условие квантования возникает из-за того, что частицы проявляют волновые свойства, вследствие чего появляются интерференционные эффекты в движении частиц одного типа под влиянием частиц другого типа. Если магнитный монополь с магнитным зарядом g существует, то формула

$$eg = \frac{1}{2}n\hbar c \tag{4.6.21}$$

равносильна требованию, чтобы все заряженные частицы в окрестности монополя имели заряд e, равный целому кратному величины $\frac{\hbar c}{2g}$. Таким образом, электрические заряды должны быть квантованы. А именно кратность всех наблюдаемых зарядов заряду электрона является одним из фундаментальных законов природы. Поэтому, если бы существовал монополь Дирака, то этот закон имел бы естественное объяснение. Никакого другого объяснения квантования электрического заряда не известно.

Принимая, что e – заряд электрона, величина которого определяется соотношением $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ (α– постоянная тонкой структуры) и используя условие квантования, можно получить наименьший магнитный заряд, определяемый равенством $\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{137}{4}$. Откуда $\frac{g^2}{e^2} = \left(\frac{137}{2}\right)^2$ и получаем

$$g = \frac{137}{2}e = 68{,}5e, \tag{4.6.22}$$

т.е. наименьший магнитный заряд много больше заряда электрона.

Магнитный монополь – стабильная частица и не может исчезнуть, пока не встретится с другим монополем, имеющим равный по величине и противоположный по знаку магнитный заряд. Таким образом, монополи, если они существуют, должны, как и электроны с позитронами рождаться и аннигилировать парами: плюс - монополь и минус - монополь. Масса монополя $\sim 2{,}5m_p$.

Выводы Дирака.

1. Магнитный монополь, если он существует, вносит симметрию в уравнения для магнитных и электрических полей.
2. Нет физических законов, запрещающих существование магнитного монополя.

3. Имеет место взаимное квантование электрического и магнитного зарядов.

Как можно обнаружить монополь? Степень ионизации, производимой монополем, должна быть велика $(g = 68{,}5e)$, поэтому его трек в камере Вильсона или пузырьковой камере должен очень сильно выделяться на фоне треков других частиц. Однако поиски пока не дали результатов.

Существуют ограничения сверху, которые необходимо учитывать при попытках обнаружить магнитный монополь, например:

1. В составе космических лучей вплоть до энергий ~ 3 10^{19} *эВ* не обнаружена высокопроникающая компонента монополей.
2. Космическими лучами создаются не более 2^{x} монополей в секунду по всей поверхности Земли.

Примечание 1. *Поль Андриен Морис Дирак, английский физик-теоретик, 1902–1984*

4.7. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля.

4.7.1. Зависящие от времени потенциалы поля.

Записав систему уравнений Максвелла, теперь следует найти способ их решения. Для стационарного электромагнитного поля эта задача существенно облегчается введением вспомогательных величин – потенциалов φ и $\vec{A}$. Оказывается, что, видоизменив надлежащим образом определение скалярного и векторного потенциалов, можно воспользоваться ими и для решения уравнений Максвелла в общем случае переменного электромагнитного поля.

Будем считать, что диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости одинаковы на всем протяжении поля и поверхностных зарядов и токов в поле нет. При этих условиях векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и их первые производные всюду остаются непрерывными, что существенно упрощает решение поставленной задачи. Полученные далее результаты могут быть легко обобщены на случай наличия скачкообразного изменения ε и μ на отдельных поверхностях раздела различных сред, в то время как задача решения уравнений Максвелла при произвольной зависимости ε и μ от координат точки чрезвычайно усложняется.

Ранее в электростатике ввели скалярный потенциал φ. При этом электрическое поле $\vec{E}$ было потенциально $(rot\vec{E} = 0)$ и определялось из равенства

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \tag{4.7.1}$$

Но теперь в переменных во времени полях появилась не потенциальная часть электрического поля:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{c\partial t}. \qquad (4.7.2)$$

Поскольку магнитных зарядов нет, то, как и ранее, имеем $div\vec{B} = 0$ и, как и ранее, можно ввести векторный потенциал $\vec{A}$ (см Глава 2, §7):

$$\vec{B} = rot\vec{A}. \qquad (4.7.3)$$

Поскольку теперь рассматриваем электрическое и магнитное поля зависящими от времени, то, следовательно, и потенциалы скалярный $\varphi(\vec{r},t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r},t)$ также зависят от времени и координат. Подставим (4.7.3) в уравнение (4.7.2) и поменяем порядок дифференцирования:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial}{c\partial t} rot\vec{A} = -\frac{1}{c} rot \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad (4.7.4)$$

Тогда последнее выражение можно переписать в виде

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{c\partial t}\right) = 0, \qquad (4.7.5)$$

Иначе говоря, вектор в круглых скобках является *потенциальным вектором*. И именно этот вектор можно представить в виде градиента от скалярного потенциала $\varphi(\vec{r},t)$:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \qquad (4.7.6)$$

Итак, в случае *переменных полей электрическое поле выражается через векторный и скалярный потенциалы*:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t} - \nabla\varphi(t,\vec{r}) \qquad (4.7.7)$$

Первое слагаемое в (4.7.7) определяет электрическое поле, появляющееся вследствие электромагнитной индукции, второе – от зарядов. *Магнитное поле определяется по-прежнему*:

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = rot\vec{A}(t,\vec{r}). \qquad (4.7.8)$$

Как и в случае стационарных полей потенциалы $\varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A}(\vec{r},t)$ определены неоднозначно, т.е. одно и то же электромагнитное поле может быть представлено различными потенциалами. Это связано с тем, что скалярный и векторный потенциалы поля являются лишь вспомогательными функциями, а непосредственный физический смысл имеют только напряженность $\vec{E}$ электрического и индукция $\vec{B}$ магнитного полей. Именно эти характеристики поля однозначно определяют энергию поля, силы, действующие со стороны поля на заряженные частицы, плотность токов и т.д. Поэтому любые два поля, описываемые одними и теми же значениями $\vec{E}$ и $\vec{B}$, но разными значениями потенциалов φ и $\vec{A}$, физически тождественны.

Неоднозначность потенциалов позволяет производить *калибровочное преобразование*. В самом деле, имеем:

$$\begin{cases} \vec{B} = rot\vec{A} \\ \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \end{cases} \tag{4.7.9}$$

Пусть имеется произвольная функция $\chi(\vec{r},t)$. Тогда легко увидеть, что новые потенциалы, определенные как

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + grad\chi \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases} \tag{4.7.10}$$

опять описывают те же магнитное и электрическое поля. В самом деле, имеем для индукции магнитного поля:

$$\vec{B}' = rot\vec{A}' = rot\vec{A} + rot(grad\chi) = rot\vec{A} = \vec{B},$$

так как $rot(grad\chi) = [\nabla, \nabla\chi] \equiv 0$, и для напряженности электрического поля

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{\partial}{c\partial t}\nabla\chi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Преобразования (4.7.10) называются *калибровочными преобразованиями*. Инвариантность поля по отношению к этому классу преобразований потенциалов называется *калибровочной* или *градиентной инвариантностью*. Требование калибровочной инвариантности уравнений теоретической физики, т.е. требование, чтобы физическое содержание этих уравнений зависело только от напряженности и индукции электромагнитного поля и оставалось неизменным при всех преобразованиях потенциалов поля, играет важную роль в физических теориях. Решение отдельных конкретных задач часто облегчается специальной, целесообразной для данной задачи, калибровкой потенциалов.

4.7.2. Уравнения для потенциалов.

Получим дифференциальные уравнения для зависящих от времени потенциалов электромагнитного поля. Пусть для простоты *рассматриваем изотропную среду*

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

и $\varepsilon, \mu = const$ на всем протяжении поля. Тогда перепишем уравнение системы уравнений Максвелла в виде:

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

или, умножая на магнитную проницаемость, имеем:

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \qquad (4.7.11)$$

Подставим выражения $\vec{B} = rot\vec{A}$ и $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ в последнее уравнение:

$$rot\left(rot\vec{A}\right) = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right);$$

Воспользуемся известным соотношением из векторной алгебры:

$$rot\left(rot\vec{A}\right) \equiv \left[\nabla,\left[\nabla,\vec{A}\right]\right] = grad\left(div\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}$$

(напомним, двойное векторное произведение раскладывается по правилу "БАЦ–ЦАБ" – $\left[\nabla\left[\nabla,\vec{A}\right]\right] = \nabla\left(\nabla,\vec{A}\right) - (\nabla,\nabla)\vec{A}$). Тогда получаем:

$$grad\left(div\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} - \vec{\nabla}\left(\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2},$$

или далее

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + grad\left(div\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (4.7.12)$$

Воспользовавшись неоднозначностью определения потенциалов φ и $\vec{A}$, можем наложить некоторое условие, определяющее их взаимосвязь, в частности, так называемое, условие – *калибровка* Лоренца:

$$div\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \qquad (4.7.13)$$

Иначе говоря, мы можем выбрать такие калибровочные преобразования, т.е. такие $\chi(\vec{r},t)$, чтобы выполнялось (4.7.13). Тогда уравнение для векторного потенциала $\vec{A}$ в калибровке Лоренца приобретает вид:

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \qquad (4.7.14)$$

Это уравнение носит название *уравнения Даламбера*. Заметим, что в случае стационарных, не зависящих от времени полей, второе слагаемое $\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$ равно нулю и мы приходим к уравнению (3.7.12) – к уравнениям Пуассона для компонент векторного потенциала.

Вводя условие Лоренца (4.7.13), которое упрощает запись уравнения для векторного потенциала, это условие должно сохраняться при калибровочных преобразованиях. Мы, таким образом, накладываем ограничения на вид скалярной функции $\chi(t,\vec{r})$, исходя из следующего равенства:

$$div\vec{A}' + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = div\left(\vec{A} + grad\chi\right) + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = div\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\Delta\chi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right).$$

Итак, условие Лоренца оказывается инвариантным лишь когда выражение в круглых скобках равно нулю, т.е. при калибровочных преобразованиях с функцией χ, удовлетворяющей уравнению:

$$\Delta\chi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 . \qquad (4.7.15)$$

Воспользовавшись уравнением Максвелла для вектора электрической индукции $div\vec{D} = 4\pi\rho$, найдем теперь дифференциальное уравнение для скалярного потенциала φ.

$$div\vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$div\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

или далее получаем

$$-\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Из условия Лоренца (4.7.13) выражаем дивергенцию векторного потенциала $div\vec{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и подставляем в последнее уравнение, тогда получаем:

$$-\Delta\varphi + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

или окончательно имеем:

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \qquad (4.7.16)$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения для определения векторного (4.7.14) и скалярного (4.7.16) потенциалов. Полученные уравнения носят название *уравнений Даламбера*. Эти уравнения вместе с *условием Лоренца* позволяют определить значения потенциалов электромагнитного поля по заданному распределению зарядов и токов проводимости. Зная φ и $\vec{A}$, можно с помощью уравнений $\vec{B} = rot\vec{A}$ и $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ найти векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$.

Отметим, что хотя скалярный потенциал φ, как и в случае стационарных полей, зависит лишь от распределения зарядов, а векторный потенциал $\vec{A}$ – от распределения токов проводимости, напряженность же электрического поля зависит не только от градиента скалярного потенциала, но и от производной по времени векторного потенциала. В этом обстоятельстве проявляется закон электромагнитной индукции.

Для стационарного поля все производные по времени обращаются в нуль, и все уравнения, как и следовало ожидать, сводятся к полученным ранее в параграфе 3.7 уравнениям, описывающим стационарное поле.

Пока остается открытым вопрос о физическом смысле коэффициента $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}$. Ответ на него мы получим в следующем параграфе.

4.8. Волновое уравнение.

4.8.1. Волновое уравнение.

Рассмотрим непроводящую, изотропную и однородную среду, характеризуемую диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Пусть в этой среде отсутствуют свободные заряды и токи проводимости, т.е. имеем $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$. Тогда, если в рассматриваемой области нет ферромагнетиков, можно записать стандартные уравнения для полей в среде:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \tag{4.8.1}$$

Система уравнений Максвелла (4.6.1) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \\ div\vec{D} = 0, \qquad\qquad div\vec{B} = 0 \end{gathered} \tag{4.8.2}$$

Продифференцируем первое уравнение из (4.8.2) по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H} = rot\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{4.8.3}$$

Применяя операцию rot ко второму уравнению системы (4.8.2) и подставляя результат (4.8.3), полученный из первого уравнения, находим:

$$rot\left(rot\vec{E}\right) = -\frac{\mu}{c} rot\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Из векторного анализа вспомним правило "БАЦ-ЦАБ", тогда имеем

$$rot\left(rot\vec{E}\right)=\left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=grad\left(div\vec{E}\right)-\Delta\vec{E},$$

где оператор Лапласа равен как обычно сумме вторых частных производных

$$\Delta\equiv\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

И так как $grad\left(div\vec{E}\right)=0$ из-за условия $div\vec{D}=0$, получаем:

$$rot\left(rot\vec{E}\right)=-\Delta\vec{E} \qquad (4.8.4)$$

Таким образом, окончательно для вектора напряженности электрического поля имеем:

$$\Delta\vec{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0. \qquad (4.8.5)$$

Аналогично для $\vec{H}$ или $\vec{B}$ получаем:

$$\Delta\vec{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0. \qquad (4.8.6)$$

С такими уравнениями мы с вами встречались при изучении распространения колебаний в курсе классической механики (Глава 4, §4.7, уравнение (4.7.14)). В общем случае уравнение вида

$$\Delta\Phi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \qquad (4.8.7)$$

называется *волновым уравнением*. Здесь в качестве функции $\Phi=\Phi(\vec{r},t)$ могут быть функции векторных полей $\vec{E},\vec{H},\vec{B}$ и их проекций.

Рассмотрим одномерный случай, когда процесс распространения происходит вдоль оси x. Тогда уравнение (4.8.7) запишется:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0. \qquad (4.8.8)$$

Решением этого уравнения является функция вида

$$\Phi=\Phi\left(t\pm\frac{x}{v}\right). \qquad (4.8.9)$$

Это легко проверить, если вычислим производные от (4.8.9) по координате:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\pm\frac{1}{v}\Phi'; \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\Phi''$$

и по времени:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\Phi'; \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\Phi''.$$

В самом деле, подставляя эти производные в волновое уравнение (4.8.8), получаем равенство нулю левой части уравнения.

Смысл приведенного решения (4.8.9) прост: оно описывает распространяющееся возмущение (т.е. значение функции Ф в одной точке) или бегущую волну. Функция $\Phi = \Phi(t - x/v)$ представляет уравнение волны, распространяющейся вдоль оси x со скоростью v. Функция $\Phi = \Phi(t + x/v)$ описывает волну, распространяющуюся против оси x со скоростью v. Действительно, следующее равенство, определяющее постоянное значение функции Ф

$$t - \frac{x}{v} = t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{v} \tag{4.8.10}$$

выполняется, если

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}, \text{ или } v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

т.е. v имеет смысл скорости, т.е. скорости распространения постоянного значения функции Ф.

При фиксированных значениях x и t значение функции $\Phi = \Phi(t \pm x/v)$ постоянно на всей плоскости, перпендикулярной x. Поэтому такие волны называются *плоскими*. Аргумент функции Φ, т.е. $\varphi(x,t) = t - x/v$, называется *фазой волны*. Уравнение поверхности постоянной фазы, иначе *волновой поверхности*, имеет вид:

$$t - \frac{x}{v} = const. \tag{4.8.11}$$

Дифференцируем это уравнение по времени: $1 - \frac{1}{v}\frac{dx}{dt} = 0$, получаем *фазовую скорость*:

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{4.8.12}$$

Фазовая скорость – это скорость, с которой поверхность с фиксированным значением фазы (волновая поверхность) перемещается вдоль оси x.

Возвращаясь к уравнениям для потенциалов электромагнитного поля (см §4.7) и уравнениям для векторов электромагнитного поля (4.8.5) - (4.8.6), находим, что

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{v^2}.$$

Таким образом, электромагнитное поле распространяется от места возбуждения с конечной скоростью, определяемой соотношением:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (4.8.13)$$

Скорость распространения электромагнитных волн (скорость света) в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) равна коэффициенту, введенному в системе единиц Гаусса:

$$v_{вакуум} = c \qquad (4.8.14)$$

Отметим, что скорость света в среде меньше, чем в вакууме, т.к. произведение $\varepsilon\mu \geq 1$.

Примечание 1, В системе *СИ* скорость света в вакууме $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, а в среде $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}}$.

Резюмируя сказанное, отметим, *что из уравнений Максвелла следует вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно, т.е. отдельно от электрических зарядов и токов. Изменение состояния электромагнитного поля носит волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами.*

Дополнения.

К Главе 4 §4.4

Дополнение 1. Энергия магнитного взаимодействия токов

(И.Е.Тамм “Основы теории электричества” §79).

Рассмотрим индукционное взаимодействие переменных токов I_1 и I_2 с энергетической точки зрения. Очевидно, что приращение энергии в системе будет определяться вкладами от различных механизмов, которые можно рассматривать как аддитивные. При этом необходимо учесть следующие превращения энергии:

1) выделение Джоулева тепла Q в цепи токов, 2) работу P сторонних электродвижущих сил, 3) механическую работу A, совершаемую при перемещении контуров тока, и, наконец, 4) энергию магнитного взаимодействия токов W.

Итак, рассмотрим изменение всех этих видов энергии за бесконечно малый элемент времени dt. За это время должно иметь место увеличение механической энергии (например, кинетической энергии движения проводников) на величину δA (и оно равно убыли потенциальной функции этих токов (4.3.28)):

$$\delta A = -d(U)_I = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}I_1^2 dL_{11} + I_1 I_2 dL_{12} + \frac{1}{2}I_2^2 dL_{22}\right). \tag{4.4.д1}$$

Промежуток времени dt выбирается настолько малым, что силы токов могут считаться практически постоянными в течение этого промежутка. За время dt в обоих контурах выделяется количество Джоулева тепла, равное:

$$Qdt = \left(I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2\right)dt, \tag{4.4.д2}$$

а сторонние электродвижущие силы $\mathrm{E}^{стр}$ совершат за это же время (например, за счет химической энергии включенных в цепь контуров гальванических элементов) в обоих контурах работу

$$Pdt = \left(I_1 \mathrm{E}_1^{стр} + I_2 \mathrm{E}_2^{стр}\right)dt. \tag{4.4.д3}$$

Здесь Q и P – тепловая мощность и мощность сторонних сил, соответственно; $R_{1,2}$ – электрические сопротивления контуров.

Итак, за время dt должно иметь место увеличение механической энергии, увеличение тепловой энергии и уменьшение энергии источников электродвижущих сил (химической энергии аккумуляторов). Таким образом, общее увеличение всех видов энергии равно

$$\Delta = \delta A + (Q - P)dt \tag{4.4.д4}$$

Вычисляем разность мощностей отдельно:

$$Q - P = I_1\left(I_1 R_1 - \mathrm{E}_1^{стр}\right) + I_2\left(I_2 R_2 - \mathrm{E}_2^{стр}\right) = I_1 \mathrm{E}_1^{ind} + I_2 \mathrm{E}_2^{ind} \tag{4.4.д5}$$

Здесь мы воспользовались разделением полной электродвижущей силы на ЭДС сторонних сил и ЭДС индукции

$$IR = \mathrm{E}^{стр} + \mathrm{E}^{ind}. \tag{4.4.д6}$$

Теперь пользуясь определением потоков через первый и второй контуры, соответственно:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c}L_{11}I_1 + \frac{1}{c}L_{12}I_2 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \frac{1}{c}L_{21}I_1 + \frac{1}{c}L_{22}I_2, \tag{4.4.д7}$$

можно записать ЭДС индукции в первом контуре в виде:

$$\mathsf{E}_1^{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt} + I_1\frac{dL_{11}}{dt} + I_2\frac{dL_{12}}{dt} \right) \qquad (4.4.д8)$$

Аналогично для второго контура. Тогда имеем:

$$(Q-P)dt = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}I_1dI_1 + L_{12}I_1dI_2 + L_{12}I_2dI_1 + L_{22}I_2dI_2 \right) \qquad (4.4.д9)$$

Общее увеличение всех этих видов энергии равно

$$\Delta = -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}IdI_1 + \frac{1}{2}I_1^2dL_{11} + L_{12}I_1dI_2 + L_{12}I_2dI_1 + I_1I_2dL_{12} + L_{22}I_2dI_2 + \frac{1}{2}I_2^2dL_{22} \right), \quad (4.4.д10)$$

или далее

$$\Delta = -\frac{1}{c^2}d\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 \right). \qquad (4.4.д11)$$

Таким образом, всякое изменение конфигурации контуров и силы токов в них приводит к увеличению суммы механической, тепловой и химической энергии этой системы контуров на величину Δ.

Из закона сохранения энергии следует, что эти процессы должны сопровождаться эквивалентным уменьшением некоторого другого вида энергии. Чтобы определить этот вид энергии, следует заметить, что помимо уже учтенных нами процессов с перемещением проводников и изменением токов в них неразрывно связаны лишь силы магнитного взаимодействия этих токов. Поэтому магнитному взаимодействию токов необходимо приписать определенную магнитную энергию W, за счет эквивалентного изменения dW которой и происходит приращение всех прочих видов энергии.

$$dW = -\Delta = +\frac{1}{c^2}d\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 \right). \qquad (4.4.д12)$$

Следовательно, имеем:

$$W = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 \right). \qquad (4.4.д13)$$

Аддитивную постоянную, появляющуюся при интегрировании, кладут равной нулю для того, чтобы в отсутствие токов $(I_1 = I_2 = 0)$ магнитная энергия оказалась равной нулю. Это выражение (4.4.д13) можно записать следующим образом

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k. \qquad (4.4.д14)$$

Эта же формула справедлива и для произвольного n числа контуров, при этом индексы i и k будут пробегать все значения от 1 до n.

Сравнивая полученные выражения, получаем $W = -U$. Подчеркнем, что смысл величин W и U совершенно различен. Действительно, убыль потенциальной функции $-(dU)_I$ равна механической работе A, совершаемой силами магнитного поля (силу тока полагаем постоянной). Между тем убыль магнитной энергии $-dW$ равна сумме приращений всех видов энергии, а не только энергии механической (учитываем и изменение силы тока). Поэтому, в частности, трудно было ожидать столь простого соотношения между величинами W и U, которое мы получили.

В случае постоянных токов в неподвижных проводниках равны нулю механическая работа A, изменение магнитной энергии dW и ЭДС индукции E^{ind}. Поэтому $Q = P$, т.е. работа сторонних сил целиком переходит в тепло.

При перемещении проводников совершается механическая работа и появляется ЭДС индукции, поэтому баланс между выделенной теплотой и работой сторонних сил нарушается. "Избыточная" затрата энергии сторонних сил расходуется не только на совершение механической работы, но и идет на увеличение магнитной энергии системы проводников.

Дополнение 2. Энергия магнитного поля.

Полученное нами выражение для энергии магнитного взаимодействия токов в отсутствие ферромагнетиков

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \qquad (4.4.д15)$$

по своей форме аналогично выражению энергии взаимодействия покоящихся электрических зарядов

$$W_э = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{q_i q_k}{r_{ik}} \qquad (i \neq k).$$

Поэтому, выражая магнитную энергию токов в виде интеграла по всему объему, мы получаем возможность интерпретировать энергию W как энергию поля.

$$W = -U = \frac{1}{2c}\int \vec{A}\vec{j}dV\,. \qquad (4.4.д16)$$

Учитывая, что $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{A}rot\vec{H}dV\,. \qquad (4.4.д17)$$

Из векторного анализа имеем $\vec{A}rot\vec{H} = \vec{H}rot\vec{A} + div\left[\vec{H},\vec{A}\right] = \vec{H}\vec{B} + div\left[\vec{H},\vec{A}\right]$.

Подставляя полученное выражение в интеграл (4.4.д17) и используя теорему Гаусса, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV + \frac{1}{8\pi}\int div\left[\vec{H},\vec{A}\right]dV = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV + \frac{1}{8\pi}\oint_S \left[\vec{H},\vec{A}\right]_n dS\,, \qquad (4.4.д18)$$

где интегрирование распространено на все пространство, охватывающее все взаимодействующие токи и поле этих токов. В качестве поверхности интегрирования для второго интеграла можно взять бесконечно удаленную поверхность. Если все токи текут в конечной области пространства, то магнитное поле будет убывать на бесконечности достаточно быстро и рассматриваемый интеграл обратится в нуль. Тогда

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{H}\vec{B}dV\,. \qquad (4.4.д19)$$

Полученное выражение может быть интерпретирована следующим образом: магнитная энергия локализована в поле и распределена по его объему с плотностью, равной

$$w = \frac{1}{8\pi}\vec{H}\vec{B}\,. \qquad (4.4.д20)$$

Полученные результаты справедливы при отсутствии в поле ферромагнетиков. Для изотропных магнетиков справедливо соотношение $\vec{B} = \mu\vec{H}$, поэтому можем записать:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2 dV\,; \qquad w = \frac{1}{8\pi}\mu H^2\,. \qquad (4.4.д21)$$

Таким образом, при заданной напряженности магнитного поля энергия единицы его объема пропорциональна магнитной проницаемости среды.

В вакууме $\mu = 1$ и для энергии получаем:

$$w = \frac{1}{8\pi}H^2 = \frac{1}{8\pi}B^2\,. \qquad (4.4.д22)$$

Определим энергию магнитного поля $\vec{H}$ двух токов, находящихся в произвольной слабомагнитной среде. Если $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ напряженности полей, создаваемых каждым током в отдельности, то

$$H^2 = \left(\vec{H}_1 + \vec{H}_2\right)^2 = H_1^2 + 2\vec{H}_1\vec{H}_2 + H_2^2\,, \qquad (4.4.д23)$$

и общая энергия поля токов равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2 dV = \frac{1}{8\pi}\int \mu H_1^2 dV + \frac{1}{4\pi}\int \mu H_1 H_2 dV + \frac{1}{8\pi}\int \mu H_2^2 dV = W_{11} + W_{12} + W_{22}\,. \qquad (4.4.д24)$$

Первый и последний члены этого равенства могут быть названы *собственной энергией* каждого из токов I_1 и I_2, а второй член – *взаимной энергией* этих токов. Сравнивая это выражение с выражением для энергии системы токов (4.4.д13)

$$W = \frac{1}{2c^2}\left(L_{11}I_1^2 + 2L_{12}I_1I_2 + L_{22}I_2^2\right),$$

получаем для произвольной слабомагнитной среды:

$$W_{11} = \frac{1}{8\pi}\int \mu H_1^2 dV = \frac{1}{2c^2}L_{11}I_1^2\,;$$

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \mu \vec{H}_1\vec{H}_2 dV = \frac{1}{c^2}L_{12}I_1I_2\,. \qquad (4.4.д25)$$

Полученные уравнения (4.4.д25) представляют собой наиболее общее (справедливое и при $\mu \neq const$) определение коэффициентов индукции. Из этого определения следует, что при заданной силе тока коэффициенты индукции можно рассматривать как меру энергии магнитного поля токов.

Иванов Вадим Константинович

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано к печати 29.12.2021. Формат 60x84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 16.75. Тираж 70 экз. Заказ 6410.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.