

Глава 4. КОЛЕБАНИЯ.

4.1. Малые отклонения от положения равновесия. Гармонические колебания.

4.1.1 Малые отклонения от положения равновесия.

Колебательные процессы играют очень важную роль в природе и во всей нашей жизни. С колебаниями встречаемся везде: маятники, пружины, струны, упругие тела в различных средах, строительные конструкции, переменный ток, электромагнитные колебания в контурах и т.д.

Система или тело, находящееся в положении устойчивого равновесия при небольших отклонениях возвращается назад. Устойчивое равновесие отражается в минимуме потенциальной энергии. О такой системе говорят, как об *осцилляторе*.

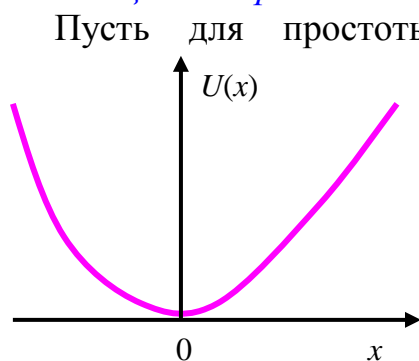


Рис. 1.1.

Пусть для простоты имеем одномерное движение в поле с потенциальной энергией $U(x)$ (рис. 1.1). Устойчивое равновесие соответствует минимуму потенциальной энергии. Пусть минимум находится в точке $x = 0$ и пусть отсчет потенциальной энергии $U(x)$ происходит от минимального значения $U(0) = 0$. Тогда вблизи точки $x = 0$ потенциальную энергию $U(x)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням x – отклонения от положения

равновесия:

$$U(x) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} \cdot x^2 + \dots \quad (4.1.1)$$

Рассматривая малые отклонения от положения равновесия, пренебрегаем высшими степенями x^3, x^4, \dots . Поскольку в точке $x = 0$ имеем минимум потенциальной энергии, то при этом получаем:

$$U(0) = 0, \quad \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

Отметим, если $U(0) \neq 0$, то можно всегда ввести потенциальную энергию, отсчитываемую от точки $x = 0$: $U_1(x) = U(x) - U(0)$. Так как имеем минимум функции $U(x)$, то вторая производная больше 0: $d^2U/dx^2|_{x=0} > 0$. Введем следующее обозначение для значения второй производной в нуле:

$$k \equiv \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} \quad (4.1.2)$$

Коэффициент k носит название *коэффициента упругости*. Тогда потенциальная энергия вблизи положения равновесия имеет вид:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.1.3)$$

Это потенциальная энергия *элементарного* или *гармонического осциллятора*.

Таким образом, пренебрегая высшими порядками разложения потенциальной энергии вблизи ее минимума, мы получаем движение в поле гармонического осциллятора. Как известно (см Глава 1 §1.9), сила определяется как градиент потенциальной энергии, и для одномерного движения имеем:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{e}_x = -k\vec{x} \quad (4.1.4)$$

Это сила носит название *упругой* или *квазиупругой* силы независимо от ее природы. Знак минус показывает, что эта сила направлена всегда к положению равновесия, т.е. к точке $x = 0$.

Примечание 1. Изначально можно рассматривать силу и раскладывать ее вблизи точки устойчивого минимума:

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2}F''(0) + \frac{x^3}{3!}F'''(0) + \dots \quad (4.1.5)$$

при этом $F(0) = 0$ (в равновесии сила равна нулю), а первая производная от силы в положении равновесия $F'(0) \equiv dF/dx|_{x=0} = -d^2U/dx^2|_{x=0} = -k$ определяет коэффициент упругости k .

Рассмотрим некоторые примеры колебательного движения.

- 1) Груз на гладком столе (нет трения) прикреплен к невесомой пружине, закрепленной другим концом к неподвижной стенке (рис. 1.2). Возвращающая сила равна:

$$F = -k\Delta x$$

где $\Delta x = (x - x_0)$, k – жесткость пружины. При отклонении от положения равновесия x_0 на величину Δx запасенная потенциальная энергия равна

$$U(\Delta x) = k(\Delta x)^2/2.$$

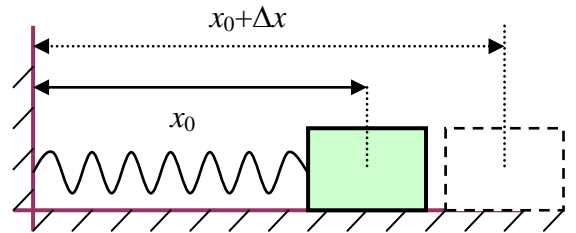


Рис. 1.2.

- 2) Рассмотрим малые отклонения маятника от положения равновесия (рис. 1.3), здесь переменной является угол отклонения φ , отсчитываемый от вертикального направления. Возвращающая сила при малых углах отклонения от положения равновесия равна:

$$F = mg\sin\varphi \approx mg\varphi \quad (4.1.6)$$

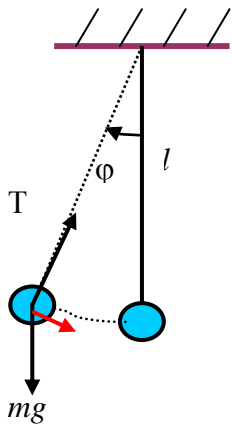


Рис. 1.3.

Возвращающий момент силы (вектор момента силы направлен из плоскости рисунка на нас) равен:

$$\vec{M} = [\vec{l}, m\vec{g}]$$

$$M = mgl \sin \varphi \approx mgl \varphi = k\varphi, \quad (4.1.7)$$

где коэффициентом упругости является величина $k = mgl$. Приращение потенциальной энергии и ее запас при отклонении маятника на угол φ равны:

$$dU = -M d\varphi$$

$$U = k\varphi^2 / 2$$

- 3) Следующий пример: катание шарика без трения на выемке (без проскальзывания). При этом шарик (рис. 1.4) совершает поступательное и вращательное движения, что необходимо учитывать при решении задачи. Сила, под действием которой совершаются малые колебания около положения равновесия, равна:

$$F = -mg \sin \alpha \approx -mg\alpha$$

где угол α – угол между горизонтальным направлением и касательной к поверхности выемки.

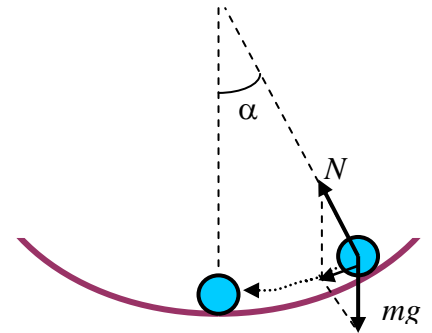


Рис. 1.4.

4.1.2. Гармонические колебания.

Ограничиваясь потенциальной энергией вида (4.1.3) или силой (4.1.4), можно записать одномерное уравнение Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (4.1.8)$$

В механике часто производные по времени от координат обозначают точками над переменной, тогда (4.1.18) перепишем его в виде:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.1.9)$$

Окончательно уравнение для нахождения функции $x(t)$ удобно представить в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.1.10)$$

где вводится обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0 \quad (4.1.11)$$

Колебания, описываемые уравнением (4.1.10), называются *гармоническими*, а система, осуществляющая эти колебания, называется *линейным* или *гармоническим осциллятором*.

Уравнение (4.1.10) – линейное дифференциальное уравнение II порядка. Найдем его решение. В математике общий способ решения линейных уравнений состоит в подстановке и поиске решения в виде

$$x(t) = \exp(\lambda t), \quad (4.1.12)$$

где λ – неизвестная постоянная. Для подстановки в уравнение (4.1.10) находим производные по времени:

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Подставляя вторую производную в уравнение (4.1.10), получаем так называемое *характеристическое* уравнение для нахождения λ :

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (4.1.13)$$

Отсюда находим 2 корня: $\lambda = \pm i\omega_0$, где i – мнимая единица $i = \sqrt{-1}$. Поскольку оба корня удовлетворяют уравнению (4.1.10), то полное решение уравнения (4.1.10) представляется в виде суперпозиции двух частных решений:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (4.1.14)$$

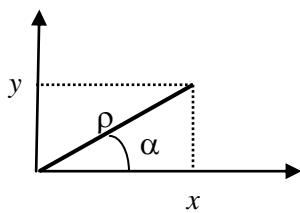
где C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные. Поскольку функция $x(t)$ вещественная, то можно записать

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) \\ C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} &= C_1^* e^{-i\omega_0 t} + C_2^* e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Отсюда следует, что

$$C_1 = C_2^*, \quad C_2 = C_1^* \quad (4.1.16)$$

Примечание 2. Комплексное число состоит из 2-х вещественных чисел x и y , поэтому удобно ввести геометрическую интерпретацию числа: изображать его точкой на плоскости (x, y) . Поэтому всякое комплексное число можно записать в двух формах:



$$x + iy = \rho \cdot e^{i\alpha}. \quad (4.1.17)$$

Модуль комплексного числа ρ и его аргумент α равны, соответственно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x \quad (4.1.18)$$

Представим коэффициенты C_1 и C_2 в соответствии с (4.1.17) в виде:

$$C_1 = C_2^* = \frac{A}{2} e^{i\alpha}, \quad C_2 = C_1^* = \frac{A}{2} e^{-i\alpha} \quad (4.1.19)$$

Тогда решение (4.1.14) преобразуется:

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + \frac{A}{2} e^{-i(\omega_0 t + \alpha)} = \frac{A}{2} \left(e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + e^{-i(\omega_0 t + \alpha)} \right) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Итак, общее решение уравнения (4.1.10) может быть записано в виде:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (4.1.20)$$

где A и α – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

Вообще решение уравнения гармонических колебаний представляется в различных формах, которые можно использовать в зависимости от удобства применения:

1) $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ или, что то же самое, $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, где A , α и φ – произвольные постоянные.

2) $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, где A и B произвольные постоянные.

3) Комплексная форма

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_1^* e^{-i\omega_0 t} = A e^{i(\omega_0 t + \alpha)} = A [\cos(\omega_0 t + \alpha) + i \sin(\omega_0 t + \alpha)],$$

где C_1 , A и α – произвольные постоянные. Комплексную форму иногда очень удобно использовать в вычислениях, а затем можно брать реальную или мнимую часть от полученного в конце вычислений выражения, поскольку конечный ответ – вещественная величина

$$\operatorname{Re} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \operatorname{Im} x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

Решение (4.1.20) представлено графически на рисунке 1.5. Получаем гармоническое колебание – движение, которое продолжается по времени от “минус бесконечности” до “плюс бесконечности”. Наибольшее отклонение от положения равновесия – A – называется *амплитудой колебаний*. Полный угол $(\omega_0 t + \alpha)$, стоящий под косинусом (синусом, или в экспоненте), называется *фазой колебаний* (фаза зависит от времени). Угол α – *начальная фаза*

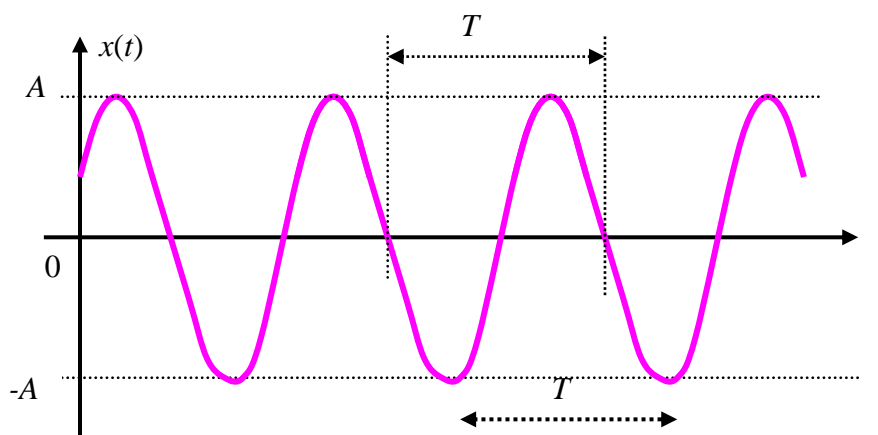


Рис. 1.5.

фаза колебаний, ω_0 – *частота гармонических колебаний*. Время одного полного колебания называется *периодом колебаний*. За время, равное периоду, система возвращается в начальное состояние, т.е. в решении происходит изменение фазы на 2π :

$$\omega_0(t + T) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi$$

$$\omega_0 T = 2\pi$$

Поэтому период колебаний связан с частотой соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (4.1.21)$$

Можно проследить четкую аналогию гармонических колебаний с равномерным вращением по окружности с постоянной угловой скоростью ω_0 . В самом деле, при равномерном вращении по окружности изменение во времени одной координаты x (или y) описывается теми же уравнениями, что и при гармоническом колебании. Поэтому ω_0 часто называют *круговой частотой колебаний*. Круговая частота колебаний ω_0 измеряется в единицах в $\text{Рад}/\text{с}$, в отличие от обычной частоты колебаний ν , определяемой как число колебаний в единицу времени:

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (4.1.22)$$

Частота ν измеряется в Герцах: 1 Герц соответствует одному колебанию в секунду: $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

4.2. Собственные колебания.

4.2.1. Начальные условия колебаний.

Собственными называются колебания системы – *осциллятора* – под действием лишь внутренних сил без внешних воздействий. Гармонические колебания, рассмотренные в §4.1, представляют собой собственные колебания линейного осциллятора. Однако, в принципе, собственные колебания могут быть и не гармоническими. Но при достаточно малых отклонениях от положения равновесия (без внешних сил) они сводятся к гармоническим колебаниям. Здесь рассмотрим несколько примеров гармонических собственных колебаний и их характер в зависимости от начальных условий.

Пусть колебания совершаются пружинным маятником как в примере 1 §4.1. Однако в отличие от предыдущего параграфа будем отсчитывать координату смещения от положения равновесия груза массы m (см рис. 2.1), а не от места прикрепления (т.е. совершим замену Δx в рис. 1.2 на x). Тогда возвращающая сила имеет вид:

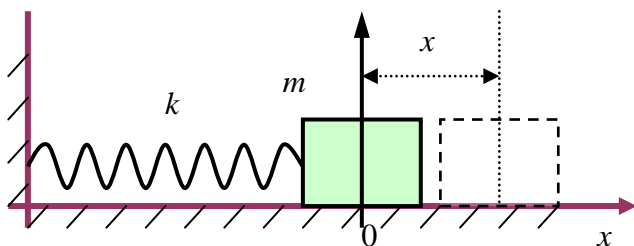


Рис. 2.1.

$$F = -kx, \quad (4.2.1)$$

где k – жесткость пружины, и имеем уравнение (4.1.10) в том же виде, как и ранее

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.2.2)$$

При этом частота и период колебаний равны согласно (4.1.11) и (4.1.21), соответственно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.2.3)$$

Решение уравнения (4.2.2) представим в виде (4.1.20):

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (4.2.4)$$

Теперь задача состоит в том, чтобы определить константы A и α . Эти константы определяются из *начальных условий* задачи. Пусть в какой-то момент времени (начальный момент) известны отклонение от положения равновесия и скорость тела. Найдем производную по времени от (4.2.4) и получим выражение для колебаний скорости маятника:

$$\dot{x}(t) \equiv v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (4.2.5)$$

Рассмотрим два крайних случая возникновения колебаний.

1) Груз отклонили из положения равновесия на расстояние x_0 и затем отпустили. Математически эти начальные условия запишутся следующим образом. В момент времени $t = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \text{координата } x(t) &= x(0) = x_0, \\ \text{а скорость } v &= \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Подставляя начальные условия в (4.2.4) и (4.2.5), получаем уравнения для определения констант:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = A \cos \alpha \\ \dot{x}(0) &= 0 = -A\omega_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

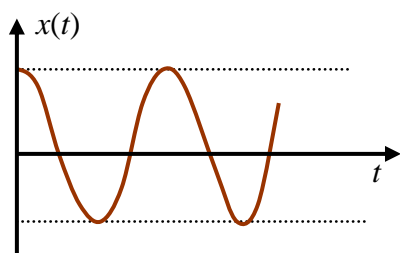


Рис. 2.2.

Из последнего равенства (4.2.7) имеем $\alpha = 0 + \pi n$, где n – целое число. Тогда из верхнего (4.2.7) получаем $A = x_0$. Окончательно решение (4.2.4) имеет вид:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad (4.2.8)$$

Это решение представлено на рис. 2.2.

2) Пусть в момент времени $t = 0$ телу сообщили (внезапно "ударил" - сообщили импульс) скорость v_0 , тогда начальные условия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0 \text{ имеем: координата } x &= 0, \\ \text{а скорость } v &= \dot{x} = v_0 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Подставляя начальные условия (4.2.9) в (4.2.4) и (4.2.5), получаем уравнения для определения констант:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 = A \cos \alpha \\ \dot{x}(0) &= v_0 = -A\omega_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

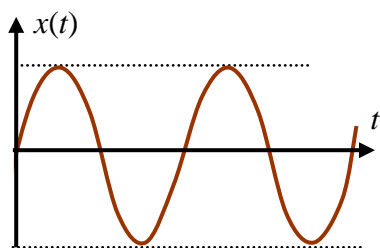


Рис. 2.3.

Из первого равенства (4.2.10) получаем $\alpha = \pi/2$ (амплитуду A бессмысленно полагать равной нулю – нет решения), тогда амплитуда из второго уравнения (4.2.10) равна $A = -v_0/\omega_0$. Окончательно решение (4.2.4) имеет вид:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (4.2.11)$$

Графически это решение представлено на рис. 2.3.

Если начальные условия носят более общий характер, чем в рассмотренных выше случаях, то в начальный момент задается промежуточные координата (между x_0 и 0) и скорость тела.

4.2.2. Математический и физический маятники.

Математический маятник – идеализированная система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити, на которой подвешена материальная точка массы m (рис. 2.4). Пусть вектор \vec{l} направлен от точки подвеса маятника (начало координат) к материальной точке. Маятник отклоняется от

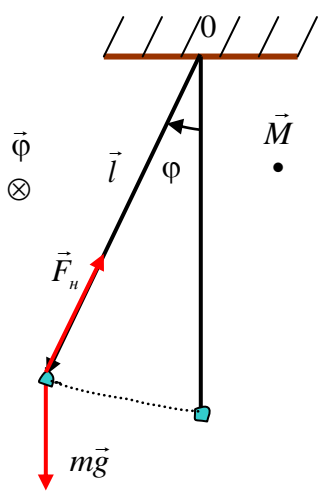


Рис. 2.4.

положения равновесия на угол φ . В случае плоской траектории движения маятника вектор $\vec{\varphi}$ направлен за плоскость рисунка 2.4 (направление по правилу буравчика обозначено крестом в кружочке). Возвращающий момент силы по определению равен:

$$\vec{M} = [\vec{l}, m\vec{g}]$$

и направлен перпендикулярно плоскости чертежа из плоскости на нас, т.е. в противоположную сторону от направления вектора угла $\vec{\varphi}$. Поэтому, если направление, уходящее за плоскость рисунка, принять за положительное, то проекция момента силы отрицательна (по аналогии с возвращающей силой) и равна:

$$M = -lmg \sin \varphi \quad (4.2.12)$$

Тогда уравнение моментов запишется:

$$I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi \quad (4.2.13)$$

где I – момент инерции маятника относительно точки подвеса, $I = ml^2$.

Рассмотрим достаточно малые углы отклонения φ , когда синус угла можно заменить значением угла φ , тогда уравнение имеет вид уравнения гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} &\approx -mgl\varphi \\ \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

где квадрат частоты собственных колебаний математического маятника и период соответственно равны:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (4.2.15)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.2.16)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника зависит только от длины подвеса и силы тяжести.

Физический маятник – это колебательная система, когда колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку. Колебания возникают тогда, когда точка подвеса не совпадает с точкой центра масс (см пример на рис. 2.5). Возвращающий момент записывается в этом случае точно так же, как и для математического маятника – (4.2.12), да и уравнение колебаний при малых углах отклонения совпадает с уравнением (4.2.14):

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (4.2.17)$$

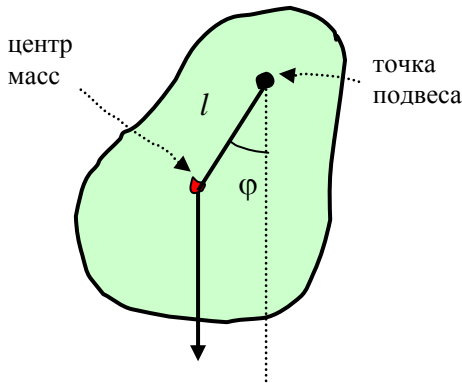


Рис. 2.5.

Отличие состоит только в том, что момент инерции I не записывается так просто как для математического маятника, а его нужно вычислять для каждой точки подвеса, поскольку для каждой точки отсчета он различен, и поэтому частота собственных колебаний и период записываются соответственно:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I} \quad (4.2.18)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (4.2.19)$$

Здесь l – расстояние от точки подвеса до центра масс. Из уравнения (4.2.19) видно, что в общем период колебаний физического маятника зависит от точки подвеса.

4.2.3. Энергия гармонических колебаний.

При колебаниях энергия системы определяется как кинетической энергией движения, так и потенциальной энергией. Кинетическая энергия вычисляется обычным образом как кинетическая энергия движущегося тела со скоростью v :

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad (4.2.20)$$

Подставляя сюда скорость (4.2.5), получаем выражение для кинетической энергии:

$$E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\text{Sin}^2(\omega_0t + \alpha) \quad (4.2.21)$$

Из сравнения (4.2.4) и (4.2.21) видно, что кинетическая энергия меняется от максимального значения до 0 с частотой в 2 раза большей обычных амплитудных колебаний. На рис. 2.6 показаны в сравнении графики

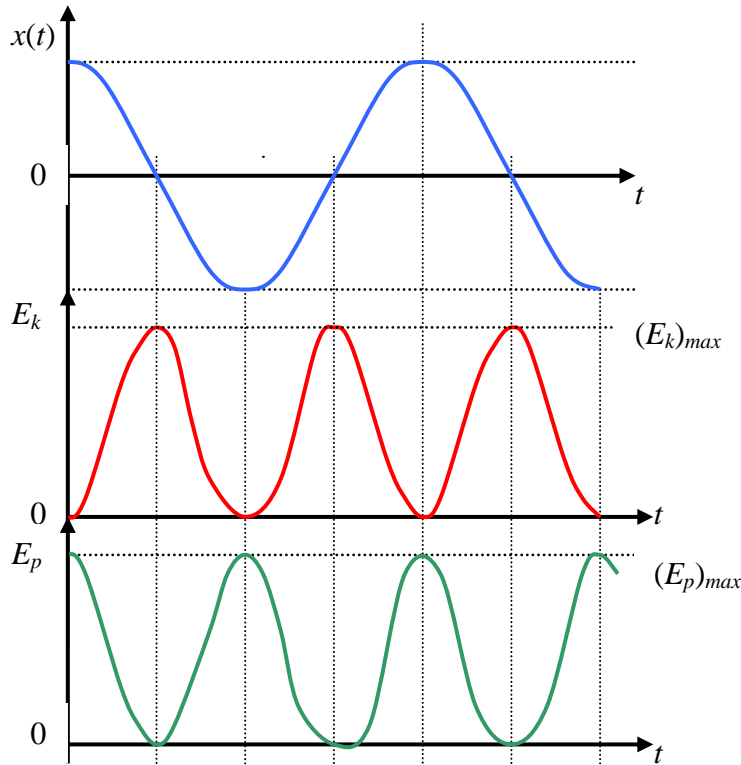


Рис. 2.6.

смещения, кинетической и потенциальной энергий в зависимости от времени – колебания построены при начальной фазе равной нулю ($\alpha = 0$). Максимальное значение кинетической энергии равно

$$(E_k)_{max} = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \quad (4.2.22)$$

и достигается это значение, когда система проходит через положение равновесия $x(t) = 0$. Наоборот, когда отклонение от положения равновесия максимально $x(t) = A$, кинетическая энергия равна нулю.

Примечание 1. Вообще при вычислении кинетической энергии в колебаниях x и m могут иметь совершенно другой смысл, как, например, в электрических колебаниях вместо них имеем q – заряд и L – индуктивность.

Потенциальная энергия осциллятора вычисляется по работе упругой силы:

$$E_p = -\int F dx + Const = \frac{kx^2}{2} + C \quad (4.2.23)$$

Будем отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия, т.е. при $x = 0$ имеем $E_p = 0$ и постоянная также равна нулю $C = 0$. Подставляя (4.2.4) в (4.2.23) и коэффициент жесткости из (4.2.3), получаем потенциальную энергию

$$E_p = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (4.2.24)$$

Максимальное значение потенциальной энергии совпадает с максимальным значением кинетической энергии по величине:

$$(E_p)_{max} = \frac{kA^2}{2} = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \quad (4.2.25)$$

Однако во времени колебания потенциальной энергии происходят в противофазе по отношению к колебаниям кинетической энергии (см рис.2.6).

Складывая кинетическую и потенциальную энергии, получаем, что выполняется закон сохранения энергии:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 [\sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \cos^2(\omega_0 t + \alpha)] = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 = const \quad (4.2.26)$$

Итак, имеем следующие утверждения:

1. Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий совпадают, но достигают эти значения в разные моменты времени.
2. Полная энергия осциллятора остается постоянной и равной амплитудному значению кинетической или потенциальной энергий. Во время колебаний происходит «перекачка» кинетической энергии в потенциальную и наоборот.
3. Средняя кинетическая энергия осциллятора равна среднему значению потенциальной энергии. В самом деле, среднее значение энергии за период равно:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_k(t) dt = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \alpha) dt \quad (4.2.27)$$

Так как

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \alpha) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \alpha) dt = \frac{1}{2}$$

Получаем, таким образом, что:

$$\langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4} mA^2 \omega_0^2 \quad (4.2.28)$$

В этом параграфе мы рассматривали одномерное движение или движение с одной степенью свободы – *одномерный осциллятор*. Удобно изображать одномерный осциллятор на плоскости, образованной импульсом p и координатой x . Вообще пространство, образованное координатами (x, y, z) и импульсами (p_x, p_y, p_z) частицы, носит название *фазового пространства*. Такое пространство часто используется для анализа движения частицы или системы тел. Элемент объема фазового пространства дает положение частицы и значение ее скорости: $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z$ с той точностью, с которой определяются линейные размеры этого объема.

Для одномерного осциллятора мы имеем дело с движением в двумерном фазовом пространстве (x, p) . При этом полная энергия может быть представлена в следующем виде:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = const \quad (4.2.29)$$

Здесь координата записывается как обычно

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

и соответственно импульс в виде

$$p = m\dot{x} = mA\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Разделив обе части уравнения на полную энергию, приведем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} + \frac{x^2}{(\sqrt{2E/m\omega_0^2})^2} = 1 \quad (4.2.30)$$

Уравнение (4.2.30) есть не что иное, как уравнение эллипса в фазовом пространстве (x, p)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

со следующими полуосями (см рис. 2.7):

$$a = x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \text{ и } b = p_{max} = \sqrt{2mE} \quad (4.2.31)$$

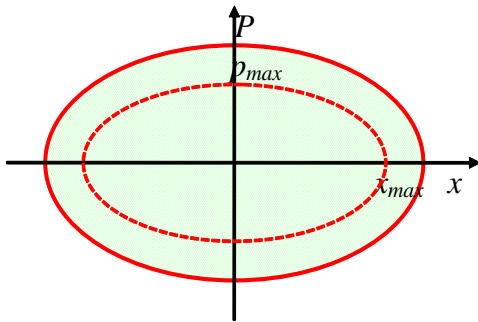


Рис. 2.7.

Траектория в этом пространстве, определяемая функцией $H(p, x) = E = const$ – *фазовая траектория*. *Элемент фазового «объема»* в этом двумерном фазовом пространстве равен $\Delta V = \Delta p \cdot \Delta x$. Полный фазовый «объем» равен площади эллипса:

$$S = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \cdot \sqrt{2mE} = 2\pi \frac{E}{\omega_0} = ET \quad (4.2.32)$$

Отметим здесь важный момент: при медленном изменении параметров колеблющейся системы (например, величины k) площадь остается постоянной

$$ET = const \text{ или } E = const \cdot \omega_0 \quad (4.2.33)$$

При этом получаем так называемые *адиабатические инварианты* для гармонического осциллятора (см 1-ый том Д.В. Сивухина, с.223). *Адиабатический инвариант* – *физическая величина*, которая не меняется при плавном, «адиабатическом», изменении некоторых параметров *физической системы*. Адиабатичность изменения параметра означает, что характерное время этого изменения гораздо больше характерного времени процессов, происходящих в самой системе.

Смысл этих инвариантов (4.2.33) состоит в следующем: при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте.

4.2.4. Ангармоничные колебания.

Если в разложении для силы (4.1.5) из § 4.1. наряду с линейным членом $x F'(0)$ существенен также и следующий член, например

$$\frac{1}{2} x^2 F''(0) = \alpha x^2.$$

Тогда вместо уравнения гармонических колебаний получим следующее уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -kx + \alpha x^2,$$

которое удобно записывать в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0^2 x^2 \quad (4.2.34)$$

Здесь параметры уравнения записываются

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \varepsilon = \frac{F''(0)}{2m\omega_0^2} = -\frac{F''(0)}{2F'(0)}.$$

Появление дополнительных членов в уравнение колебания приводит к *негармоничности* колебаний (*ангармоничность*). В частности, слагаемое, пропорциональное $\sim x^2$, приводит к появлению в колебаниях члена с удвоенной частотой $2\omega_0$, называемого второй гармоникой. Обычно ε является малой добавкой и представляет собой параметр малости, по которому можно провести разложение. Если учитывать следующие малые поправки, то в решении получаются более высокие гармоники ($n\omega_0$). Появление высших гармоник и есть ангармоничность колебаний.

4.3. Сложение колебаний.

4.3.1. Векторная диаграмма. Сложение колебаний одинаковой частоты.

Удобно использовать наглядное изображение колебаний с помощью *векторных диаграмм*. Введем ось x и отложим вектор \vec{A} , определяющий амплитуду колебаний, из точки 0 под углом α , в соответствие с записью гармонических колебаний (рис. 3.1):

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (4.3.1)$$

При этом можно считать, что зависимость от времени проявляется в том, что фаза $(\omega_0 t + \alpha)$ растет линейно со временем, а соответственно вектор \vec{A} вращается с угловой скоростью ω_0 . Тогда зависимость проекции \vec{A} на ось x от времени t определяется формулой (4.3.1). Это рассмотрение аналогично представлению комплексных чисел на плоскости, когда реальная часть комплексного числа определяется точкой на оси x .

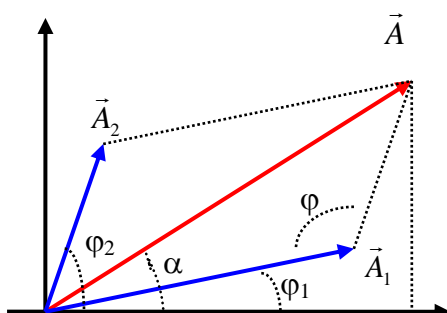


Рис. 3.2.

Рассмотрим сложение 2-х гармонических колебаний одинаковой частоты ω_0 и одного направления:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Используя геометрическую интерпретацию

колебаний, изображенных на рис. 3.2, удобно получить суммарное колебание как сложение векторных амплитуд отдельных колебаний $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ и их проекций на ось x : $x = x_1 + x_2$. Из теоремы косинусов имеем:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\varphi = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.3.3)$$

Итак, в результате сложения этих колебаний имеем для полного колебания следующее выражение:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.3.4)$$

где амплитуда и начальная фаза определяются:

$$\begin{cases} A = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1))^{1/2} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Эти же формулы можно было получить из простых тригонометрических преобразований, складывая уравнения (4.3.2). Отметим, *максимальная амплитуда* получается при *равных* начальных фазах колебаний $\varphi_1 = \varphi_2$:

$$A = A_1 + A_2,$$

то есть при синфазных колебаниях, в то время как *минимальная амплитуда* – при разности начальных фаз $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm\pi$:

$$A = A_1 - A_2,$$

когда колебания происходят в противофазе.

Итак, получаем следующий вывод: *суммой гармонических колебаний одинаковой частоты является гармоническое колебание с той же частотой*, а амплитудой и фазой, определяемыми формулами (4.3.4) – (4.3.5).

4.3.2. Сложение гармонических колебаний с близкими частотами. Биения.

Рассмотрим два колебания одного направления, частоты которых ω_1 и ω_2 различны. Как следует из векторной диаграммы на рис. 3.2, поскольку \vec{A}_1 и \vec{A}_2 вращаются с разной угловой скоростью, то при их сложении в результирующем колебании возникают зависимости амплитуды и частоты от времени. Получаем в результате сложения *негармоническое колебание*, для которого, строго говоря, уже нельзя вводить понятия амплитуды и частоты.

Наибольший интерес вызывает случай, когда разность частот складывающихся колебаний $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ мала:

$$\Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2 \quad (4.3.6)$$

Итак, рассмотрим два колебания:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Пусть для определенности $A_1 > A_2$ и система координат вращается вместе с вектором \vec{A}_1 с угловой скоростью ω_1 . Тогда в некоторый момент времени

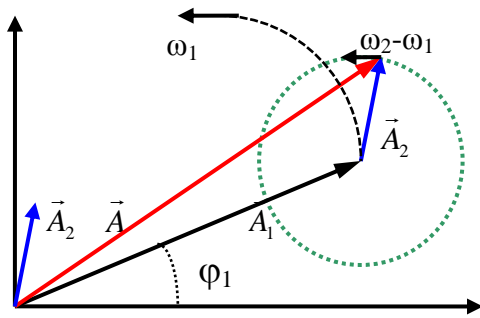


Рис. 3.3.

имеем следующую картину, представленную на рис. 3.3: \vec{A}_1 находится под углом φ_1 к горизонтальной оси. Тогда относительно вектора \vec{A}_1 вектор \vec{A}_2 вращается вокруг конца вектора \vec{A}_1 с угловой скоростью $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, то есть достаточно медленно по сравнению с частотами ω_1, ω_2 .

Для упрощения задачи пусть амплитуды складываемых колебаний равны $A_1 = A_2$, и начало отсчета введем в момент времени t , когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (всегда можно перенести начало отсчета времени). Таким образом, будем складывать следующие колебания:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \omega_1 t \\ x_2(t) &= A \cos(\omega_1 + \Delta\omega)t \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Сложим (4.3.8):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A [\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t] = \\ &= 2A \cos \frac{(\omega + \Delta\omega)t - \omega t}{2} \cos \frac{(\omega + \Delta\omega)t + \omega t}{2} \end{aligned}$$

и, так как разность частот мала $\Delta\omega \ll \omega$, получаем окончательно:

$$x(t) \approx 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \omega t \quad (4.3.9)$$

Фаза ωt меняется со временем значительно быстрее, чем фаза $\Delta\omega t/2$, и поэтому медленно меняющийся со временем косинус $\cos(\Delta\omega t/2)$ можно отнести к амплитуде $2A$. Таким образом, получаем амплитуду, пульсирующую во времени:

$$a(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad (4.3.10)$$

Эта амплитуда “вырезает” область на оси x (пунктирные линии на рис. 3.4), которая ограничивает колебания с частотой близкой к ω . Такие колебания называются *биениями* (см рис. 3.4). Для складываемых колебаний с равными амплитудами $A_1 = A_2$ максимальное значение амплитуды биений равно $2A$, минимальное – 0. Частота биений Ω – медленная частота – определяется соотношением:

$$\Omega = |\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega \quad (4.3.11)$$

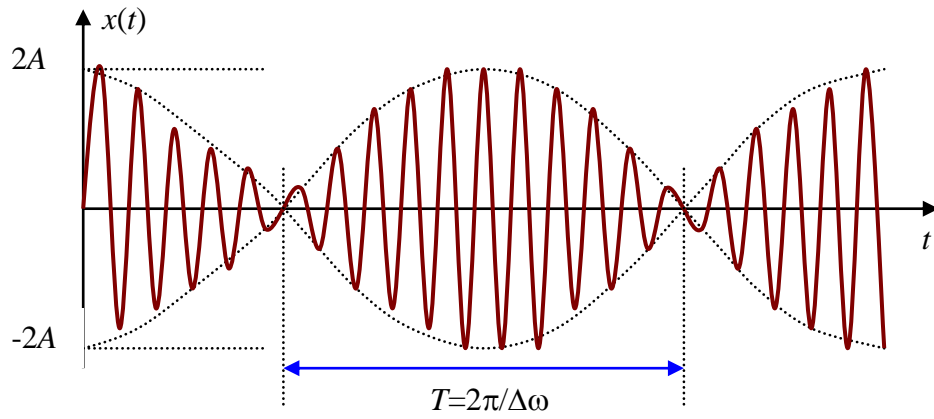


Рис. 3.4.

Частота Ω в 2 раза больше, чем следует из (4.3.10), так как области заполнения появляются на каждый полупериод. Период биений также в 2 раза меньше времени полного колебания из (4.3.10) и равен

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (4.3.12)$$

Если амплитуды складываемых колебаний не одинаковы, т.е. $A_2 \neq A_1$, тогда амплитуда биений не обращается в 0 (см рис. 3.5), а достигает своего минимального $|A_2 - A_1|$ и максимального $|A_2 + A_1|$ значений. Огибающая биений

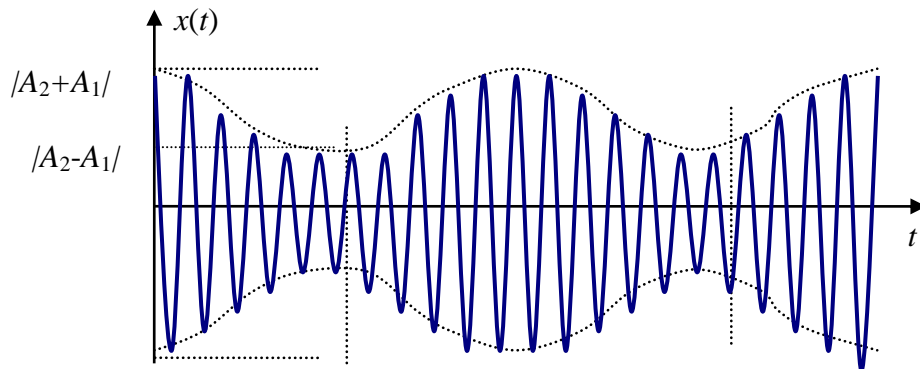


Рис. 3.5.

периодически изменяется со временем с той же частотой Ω , определяемой (4.3.11).

4.3.3. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний.

Рассмотрим сложение 2-х колебаний, направленных вдоль осей x и y . Результирующая траектория конца вектора результирующего колебания – плоская кривая, ее форма зависит от частот складываемых колебаний и от разности их фаз $\Delta\varphi$.

1) Рассмотрим сначала случай одинаковых частот $\omega_1 = \omega_2$.

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.3.13)$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Чтобы получить траекторию движения материальной точки, определяемую уравнениями (4.3.13), исключим из них время t . Из первого уравнения (4.3.13) имеем:

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}, \quad \sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

и подставим во второе уравнение для y , предварительно разложив косинус суммы углов:

$$y = B(\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi) = B \left(\frac{x}{A} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot \sin \varphi \right)$$

Преобразуем последнее равенство к виду:

$$\frac{x}{A} \cos \varphi - \frac{y}{B} = \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

Возводя в квадрат, получаем окончательно:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (4.3.14)$$

Это *уравнение эллипса*, оси которого произвольно ориентированы относительно осей x и y .

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.3.14) и определим для них траектории движения колеблющейся материальной точки.

А). Пусть разность фаз $\varphi = 0$, тогда для траектории колеблющегося тела получаем прямую линию, проходящую через начало координат (рис. 3.6 а)

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0, \quad y = \frac{B}{A} x, \quad (4.3.15)$$

Таким образом, получаем гармоническое колебание с амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Б). Пусть разность фаз $\varphi = \pm\pi$, тогда получаем тоже прямую линию и гармоническое колебание с той же амплитудой, но только прямая проходит через другие квадранты (рис. 3.6 б):

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0, \quad y = -\frac{B}{A} x \quad (4.3.16)$$

В). Рассмотрим разность фаз равную $\varphi = \pm\pi/2$, тогда получаем эллипс, ориентированный по осям x и y (рис. 3.6 в):

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (4.3.17)$$

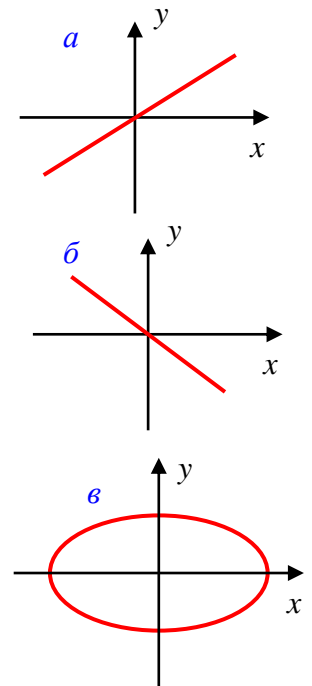


Рис. 3.6.

При этом движение колеблющегося тела (траектория маятника) совершается по часовой стрелке при разности фаз $\varphi = \pi/2$, и против часовой стрелки при разности фаз $\varphi = -\pi/2$.

При тех же разностях фаз и одинаковых амплитудах складывающихся взаимно перпендикулярных колебаний получаем равномерное движение по окружности.

2) Рассмотрим разные частоты складывающихся взаимно перпендикулярных колебаний ω_1 и ω_2 :

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos \omega_1 t \\y(t) &= B \cos(\omega_2 t + \varphi)\end{aligned}$$

А) Если частоты разные и их отношение не равно отношению целых чисел $\omega_1/\omega_2 \neq n/m$ (n, m – целые числа), то траектория результирующего колебания не является замкнутой кривой. Если при этом частоты ω_1 и ω_2 близки по величине $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_1, \omega_2$, то траектория колебаний меняется постепенно. В самом деле, сложим следующие колебания:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos \omega t \\y(t) &= B \cos(\omega t + (\Delta\omega t + \varphi))\end{aligned} \quad (4.3.18)$$

где разность фаз этих колебаний $\Delta\omega = (\Delta\omega t + \varphi)$ является медленно меняющейся величиной по сравнению с ω_1, ω_2 . При этом разность фаз колебаний проходит с небольшой скоростью все возможные значения, и, следовательно, траектория результирующих колебаний не является замкнутой, она меняется непрерывным образом и проходит все те частные случаи, о которых говорилось в предыдущем пункте 1) этого параграфа.

Б) Если частоты ω_1 и ω_2 – кратны

$$\omega_1 = n\omega_2 \quad \text{или} \quad \omega_2 = n\omega_1,$$

где n – целое число, то получаем замкнутые фигуры траектории, которые носят название *фигур Лиссажу*.

Рассмотрим в качестве примера соотношение частот, равное $\omega_1/\omega_2 = 1/2$, то есть по оси y колебания происходят чаще в 2 раза, чем по оси x . На

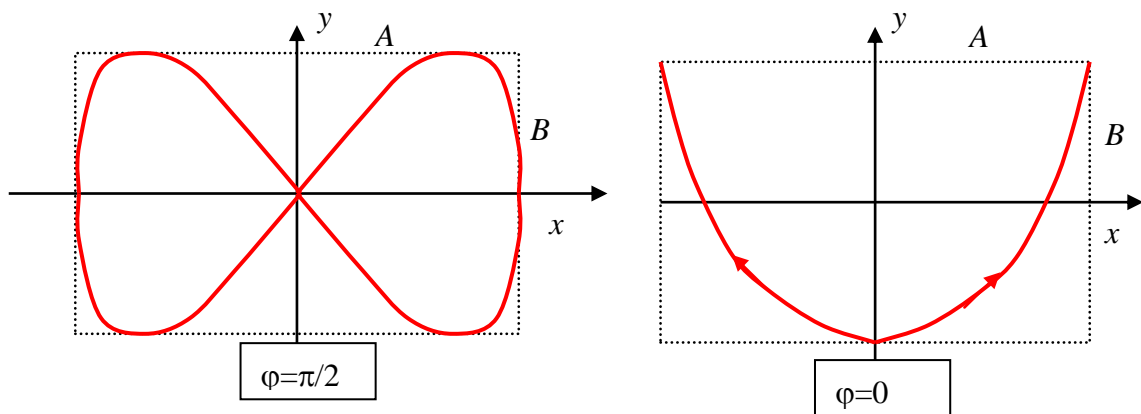


Рис. 3.7.

рисунках 3.7 приведены 2 траектории, соответствующие суммам перпендикулярных колебаний с разностями фаз $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 0$. При промежуточных разностях фаз складывающихся колебаний получаем замкнутые кривые, занимающие промежуточные траектории между этими двумя предельными случаями.

При других кратностях частот $\omega_1 = n\omega_2$ происходит движение по замкнутой траектории с многократными пересечениями осей в пределах пространства, ограниченного амплитудами A и B . Фигуры Лиссажу хорошо могут быть видны на осциллографе при подаче на вход x и y двух периодических сигналов, кратных по частоте.

Отметим, что в принципе замкнутые траектории получаются при любом рациональном отношении частот $\omega_1/\omega_2 = n/m$ (n, m – целые числа).

Примечание 1. *Жюль Антуан Лиссажу, французский физик, 1822–1880*

4.3.4. Разложение в спектр периодических функций.

Суммированием или, иначе, суперпозицией гармонических колебаний можно получить любую периодическую функцию времени. Верно и обратное, любое сложное колебание – периодическая функция времени – может быть разложено в ряд по гармоническим колебаниям различных частот. Такое разложение называется разложением в *ряд Фурье* и оно определяет *спектр сложного колебания*.

Если имеем дело с непериодической функцией времени, то оказывается, что и она может быть представлена в виде интеграла по периодическим функциям. Такое разложение называется разложением в *интеграл Фурье*. Возможность разложения в ряд Фурье или интеграл Фурье есть следствие общей математической теоремы о разложении любой функции в ряд или интеграл по полному набору ортонормированных функций.

Например, рассмотрим периодический сигнал, состоящий из прямоугольных импульсов (рис. 3.8), с периодом $T = 2\tau$. Разложение для подобного колебания выглядит следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega n t + b_n \sin \omega n t) \quad (4.3.19)$$

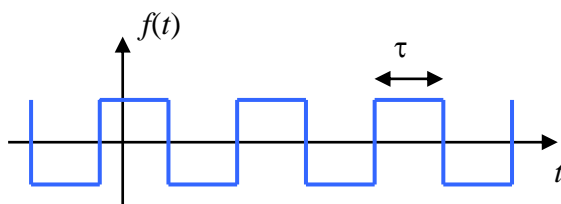


Рис. 3.8.

Здесь $\omega = 2\pi/T$, а a_n и b_n – амплитуды слагаемых гармонических колебаний, которые определяются как интегралы:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (4.3.20)$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt
 \end{aligned}
 \tag{4.3.21}$$

Из интегралов (4.3.21) - (4.3.22) получаем амплитуды a_n и b_n колебаний с соответствующими частотами $n\omega$. При этом говорят, что совокупность значений a_n и b_n составляет *спектр данного колебания* или сигнала. Для периодического сигнала спектр дискретный, кратный частоте ω .

Аналогичным образом получается спектр для непериодической функции времени. Только вместо бесконечного ряда Фурье (4.3.19) записывается интеграл Фурье по частоте, при этом амплитуды $a(\omega)$ и $b(\omega)$ являются непрерывными функциями частоты. Таким образом получаем непрерывный характер спектра разложения.

4.4. Затухающие колебания.

4.4.1. Уравнение и общее решение уравнения затухающих колебаний.

До сих пор рассматривали собственные колебания без воздействия внешних сил, поэтому это были незатухающие колебания, так как амплитуда и, следовательно, полная энергия колебаний не менялись. Однако в реальности амплитуда и энергия колебаний уменьшаются, так как существует трение (или сопротивление), на преодоление которого затрачивается работа, и колебания без внешней силы, поддерживающей эти колебания, затухают. Такие колебания называются затухающими.

Напишем уравнение движения при наличии силы трения. Наиболее распространенный вид трения, когда сила трения пропорциональна скорости движения $F_{тр} \sim v = \dot{x}$ (в этом случае иногда говорят о наличии жидкого трения). Итак, из 2-го закона Ньютона для одномерного движения имеем следующее уравнение движения:

$$m\ddot{x} = F_{упр} + F_{тр} = -kx - r\dot{x} \tag{4.4.1}$$

где r – коэффициент сопротивления или трения, а сила упругости как обычно равна $F_{упр} = -kx$. Переносим все слагаемые в одну сторону и разделив уравнение (4.4.1) на массу тела, получаем *уравнение затухающих колебаний*:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.4.2}$$

где ввели следующие обозначения: квадрат собственной частоты колебаний, как и ранее:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{4.4.3}$$

и *коэффициент затухания* γ :

$$\gamma = \frac{r}{2m}. \quad (4.4.4)$$

Как и ранее ищем решение уравнения (4.4.2) в виде: $x = e^{\lambda t}$. Вычислим первые и вторые производные по времени $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ и $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, подставим их в уравнение (4.4.2) и получим *характеристическое уравнение* для определения постоянной λ :

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (4.4.5)$$

Находим корни уравнения (4.4.5), которые равны:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (4.4.6)$$

Будем пока считать, что затухание мало (иначе вообще не будет колебаний, как мы увидим далее), т.е. $\gamma < \omega_0$, и введем частоту ω_1 – *частоту затухающих колебаний*:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (4.4.7)$$

Тогда корни характеристического уравнения записываются:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega_1 \quad (4.4.8)$$

Общее решение записываем, как и ранее, в виде:

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\gamma - i\omega_1)t} = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}) \quad (4.4.9)$$

Выражение в скобках (4.4.9), как и в § 4.1, можно представить в виде косинуса или синуса:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \text{Cos}(\omega_1 t + \alpha) \quad (4.4.10)$$

Уравнение (4.4.10) представляет собой общее решение уравнения затухающих колебаний. Здесь α – начальная фаза, A – начальная амплитуда, которые определяются из начальных условий. Решение (4.4.10) можно также представить в комплексной форме.

4.4.2. Свойства и характеристики затухающих колебаний.

В общем решении (4.4.10), когда ω_1 вещественно, присутствует “гармонический” множитель $\text{Cos}(\omega_1 t + \alpha)$, но при этом *полное колебание не является периодическим и гармоническим*. Это связано с тем, что имеется *затухающая амплитуда*:

$$A(t) = A \cdot \exp(-\gamma t) \quad (4.4.11)$$

Скорость затухания колебаний определяется коэффициентом затухания γ . Коэффициент затухания $\gamma = r/2m$ иногда называют *декрементом затухания*, а определяемую (4.4.7) частоту ω_1 – *частотой затухающих колебаний*. Период затухающих колебаний равен соответственно:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (4.4.12)$$

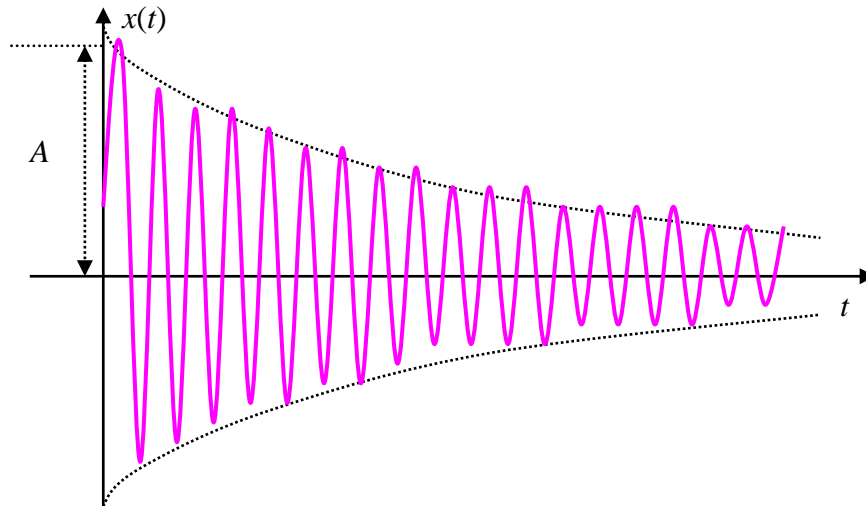


Рис. 4.1.

Пример затухающего колебания показан на рисунке 4.1.

Отметим еще одну особенность, отличающую затухающие колебания от гармонических. Так достигаемый в затухающих колебаниях максимум смещения не совпадает со значением амплитуды в этот момент времени (которая падает по экспоненте), что можно увидеть из рисунка 4.2.

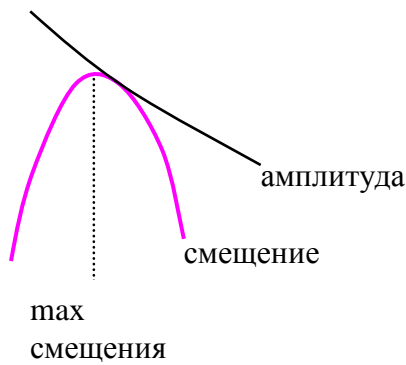


Рис. 4.2.

Часто декрементом затухания называют отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период:

$$D = e^{\gamma T} = \frac{A(t)}{A(t+T)} \quad (4.4.13)$$

Амплитуда колебаний уменьшается в e раз за время

$$\tau = 1/\gamma, \quad (4.4.14)$$

Это время τ называется *временем затухания*. *Логарифмический декремент затухания* λ определяется как логарифм отношения амплитуд за период:

$$\lambda = \gamma T = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} \quad (4.4.15)$$

За время затухания τ амплитуда падает в e раз, и система успевает совершить за это время

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\lambda} \quad (4.4.16)$$

колебаний. Тогда логарифм отношения амплитуд

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \ln e = 1 = \gamma \tau = \frac{\lambda}{T} \tau = \lambda N_e$$

$$\lambda = \frac{1}{N_e} \quad (4.4.17)$$

Откуда получаем, что логарифмический декремент затухания есть величина обратная числу колебаний N_e , за которое амплитуда падает в e раз. Это дает наглядное представление о логарифмическом декременте затухания. Пусть $\lambda = 0.01$, тогда колебания примерно затухают через 100 колебаний, т.е. их амплитуда упадет в e раз после такого количества колебаний. Иногда вводят понятие *добротности* колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\gamma T} = \pi N_e \quad (4.4.18)$$

Добротность обратно пропорциональна скорости затухания собственных колебаний в системе. Чем выше добротность колебательной системы, тем меньше потери энергии за каждый период и тем медленнее затухают колебания.

Все эти выше рассмотренные параметры характеризуют колебательную систему.

4.4.3. Апериодическое движение.

До сих пор рассматривали случаи, когда трение достаточно мало и следовательно $\gamma^2 < \omega_0^2$. Однако, при увеличении трения период колебаний системы увеличивается, а при достаточно большом трении движение вообще перестает быть колебательным.

Условие для прекращения колебаний есть равенство: $\gamma = \omega_0$. Последнее соотношение при учете (4.4.3) и (4.4.4) приводит к условию для коэффициента сопротивления, при котором колебания прекращаются:

$$r = 2\sqrt{km} \quad (4.4.19)$$

При $\gamma > \omega_0$ решение уравнения (4.4.2) имеет другой вид и описывает *апериодическое* движение системы. В самом деле, вместо условия (4.4.8) теперь имеем следующее:

$$\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \pm i\delta \quad \text{или} \quad \delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (4.4.20)$$

и общее решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma-\delta)t} + C_2 e^{(-\gamma+\delta)t} = C_1 e^{-(\gamma+\delta)t} + C_2 e^{(\delta-\gamma)t} \quad (4.4.21)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 находятся также из начальных условий для смещения и скорости.

Примеры решений (4.4.21) при различных коэффициентах C_1 и C_2 представлены на рисунках 4.3 (*A, B, B*). Решение имеет затухающий характер, колебаний не происходит. Более того система не возвращается в изначальное положение равновесия, обусловленное отсутствием трения. Более того система не возвращается в изначальное положение равновесия,

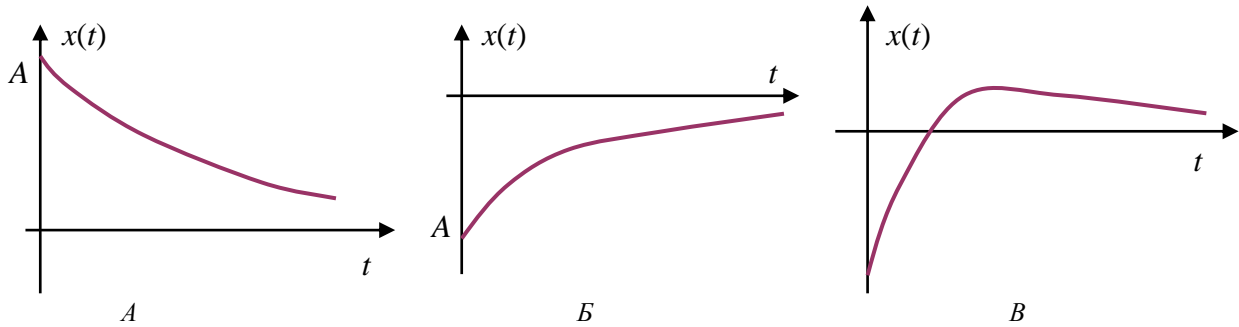


Рис. 4.3.

обусловленное отсутствием трения. Максимум, чего может достичь такая система, – это однократное прохождение через начальное положение равновесия

4.5. Вынужденные колебания.

4.5.1. Полное решение уравнения вынужденных колебаний.

Наряду с трением колебательная система – *линейный осциллятор* – может подвергаться воздействию внешней силы $F(t)$. Пусть внешняя сила $F(t)$ действует в направлении оси x . Тогда уравнение Ньютона записывается:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F(t) \quad (4.5.1)$$

Характер движения изменяется в зависимости от особенностей действующей силы.

Рассмотрим наиболее важный случай, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (4.5.2)$$

где F_0 – амплитуда силы, ω – частота вынуждающей силы. Колебания, совершаемые системой под действием внешней периодической силы, называются *вынужденными*, а уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = f_0 \cos \omega t, \quad (4.5.3)$$

где $f_0 \equiv F_0/m$. Получили неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Как решить это уравнение? В курсе математики доказывается теорема, что решение неоднородного дифференциального уравнения есть *сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения*.

Однородное уравнение, имеющее вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.5.4)$$

мы уже решали в § 4.4 (см уравнения (4.4.2) – (4.4.10)) и получили его общее решение в виде (4.4.10). Оно, как и ранее, описывает затухающие собственные колебания системы.

При учете воздействия внешней силы $F(t) = F_0 \cos \omega t$, логично предположить, что система будет также испытывать колебательное движение с частотой вынуждающей силы. Поэтому частное решение неоднородного уравнения (4.5.3) ищем в виде

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.5.5)$$

где ω – частота вынуждающей силы, A – амплитуда, φ – начальная фаза этих колебаний. Теперь задача состоит в том, чтобы определить параметры A и φ . Подставим (4.5.5) в уравнение (4.5.3), сосчитав производные:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -A\omega \sin(\omega t - \varphi), & \ddot{x} &= -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) \\ -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - 2\gamma A\omega \sin(\omega t - \varphi) + A\omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) &= f_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Преобразуем правую часть уравнения (4.5.6) и приведем ее к сумме членов с $\cos(\omega t - \varphi)$ и $\sin(\omega t - \varphi)$:

$$\cos \omega t = \cos(\omega t - \varphi + \varphi) = \cos(\omega t - \varphi) \cos \varphi - \sin(\omega t - \varphi) \sin \varphi \quad (4.5.7)$$

Подставим соотношение (4.5.7) в уравнение (4.5.6) и учтем, что полученное равенство должно быть справедливо в любой момент времени t . Функции $\cos(\omega t - \varphi)$ и $\sin(\omega t - \varphi)$ имеют разную зависимость от времени (или, как говорят, они независимы). Например, в момент времени, когда косинус равен нулю, синус равен единице. Это означает, что коэффициенты при слагаемых с $\cos(\omega t - \varphi)$ и $\sin(\omega t - \varphi)$ в правой и левой частях уравнения должны быть равны друг другу **отдельно**. Тогда получаем следующую систему уравнений для определения неизвестных параметров A и φ :

$$\begin{cases} -A\omega^2 + A\omega_0^2 = f_0 \cos \varphi \\ 2\gamma A\omega = f_0 \sin \varphi \end{cases} \quad (4.5.8)$$

Делим второе уравнение в (4.5.8) на первое и определяем начальную фазу φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.5.9)$$

Возводим первое и второе уравнения (4.5.8) в квадрат и затем сложим:

$$f_0^2 = A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 A^2 \omega^2$$

Откуда находим амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad (4.5.10)$$

После того, как определили коэффициенты частного решения, можно записать полное решение уравнения вынужденных колебаний (4.5.3) как

сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \alpha) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (4.5.11)$$

где A_0 и α произвольные постоянные, значения которых находятся из начальных условий так же, как это было в §§ 4.2, 4.4.

4.5.2. Переходной режим и установившиеся колебания.

Анализируя решение (4.5.11), можно ввести два временных отрезка при рассмотрении колебаний системы.

Переходной режим – процесс установления колебаний, при котором первое слагаемое дает еще существенный вклад в решение $x(t)$.

При больших временах t от момента начала колебаний имеем дело с *установившимися колебаниями*. В самом деле, при $t \rightarrow \infty$ первое слагаемое в (4.5.11) обращается в 0 и сохраняется только “гармоническое” колебание с частотой вынуждающей силы. Это колебание можно считать гармоническим, если можно пренебречь начальным периодом по сравнению с продолжительностью установившихся колебаний. Причем это установившееся колебание не зависит от начальных условий.

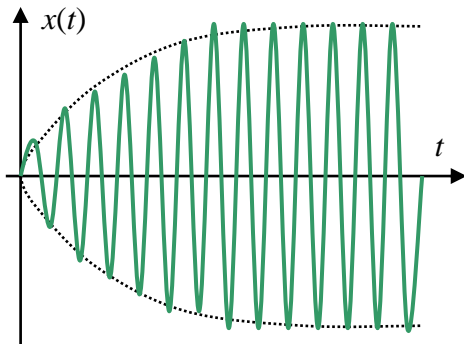


Рис. 5.1.

Типичный пример установления колебаний изображен на рисунке 5.1, где показано возникновение колебаний под действием внешней силы при условии, что в начальный момент колебания отсутствовали. Отметим, что до установления колебаний нельзя говорить об определенной частоте этих колебаний. Продолжительность переходного периода определяется временем затухания собственных колебаний:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \quad (4.5.12)$$

Установившиеся вынужденные колебания – колебания при достаточно больших временах t , когда собственные колебания в системе затухают $\exp(-\gamma t) \rightarrow 0$. Тогда получаем решение в виде:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.5.13a)$$

где амплитуда и фаза определяются соотношениями:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (4.5.136)$$

В итоге в установившемся режиме $t \gg \tau$ получаем гармоническое колебание с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

4.5.3. Амплитудно-частотная характеристика. Резонанс.

Проанализируем зависимость амплитуды вынужденных колебаний A от частоты вынуждающей силы. Кривая, описывающая зависимость амплитуды A вынужденных установившихся колебаний от частоты внешней силы, называется *амплитудно-частотной характеристикой*. На рис. 5.2 представлен ряд амплитудно-частотных характеристик при различных значениях коэффициента затухания γ .

При некоторой частоте амплитуда вынужденных колебаний (4.5.10) достигает максимума. Явление, при котором амплитуда колебаний резко возрастает, называется – *явление резонанса*. Максимум амплитуды (4.5.10) определяется минимумом знаменателя. Для определения резонансной

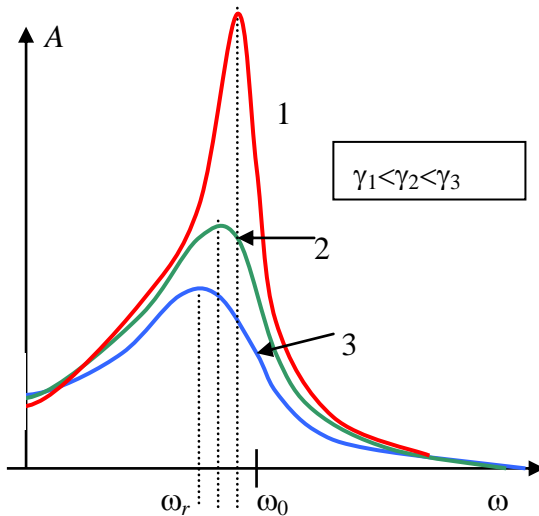


Рис. 5.2.

частоты ω_r вычисляем производную знаменателя по частоте ω и приравниваем ее 0:

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right] = 0 \quad (4.5.14)$$

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\gamma^2\omega = 0$$

Отсюда при вычислении ($\omega \neq 0$) получаем *резонансную частоту*, при которой амплитуда достигает максимального значения:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (4.5.15)$$

Рассчитаем амплитуду колебаний в максимуме:

$$A(\omega_r) = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} =$$

$$= \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_1} \quad (4.5.16)$$

Итак, получаем, чем меньше коэффициент затухания γ , тем ближе резонансная частота ω_r к частоте собственных колебаний ω_0 , тем выше значение амплитуды в максимуме. На рисунке 5.2 изображены резонансные кривые при различных значениях коэффициент затухания γ . Из рисунка можно определить как с уменьшением коэффициента затухания γ резонансная кривая становится более узкой, а величина максимума амплитуды выше. В принципе в системе без затухания ($\gamma = 0$) резонансная частота совпадает с собственной частотой колебаний ω_0 (при этом тоже $\omega_1 \rightarrow \omega_0$), а амплитуда колебаний в резонансе стремится к бесконечности.

Производная по времени от смещения (4.5.13) определяет колебания скорости линейного осциллятора. Скорость при некоторой частоте также достигает максимума – *резонанс скорости*. Колебания скорости определяются уравнением

$$v = \dot{x}(t) = -\frac{\omega \cdot F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \text{Sin}\left(\omega t - \text{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (4.5.17)$$

Найдем максимум амплитуды скорости. Для этого разделим числитель и знаменатель амплитуды на частоту и тогда видно, что максимум достигается при минимуме знаменателя следующего выражения:

$$\frac{\omega F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\gamma^2}}$$

Таким образом, *резонансная частота скорости* совпадает с частотой собственных колебаний:

$$\omega_{r,v} = \omega_0 \quad (4.5.18)$$

Вернемся к амплитудно-частотной характеристике. Энергия колебаний E пропорциональна квадрату амплитуды A^2 . Возведем (4.5.10) в квадрат и перейдем к записи амплитуды через резонансную частоту ω_r :

$$A^2 = \frac{F_0^2/m^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = \frac{F_0^2/m^2}{\omega^4 - 2\omega^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2) + \omega_0^4} = \frac{F_0^2/m^2}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}$$

Получаем выражение для квадрата амплитуды, описывающее поведение энергии линейного осциллятора в окрестности резонанса, поскольку энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Такую зависимость энергии в окрестности резонанса называют *резонансным контуром* или *контуром Лоренца*:

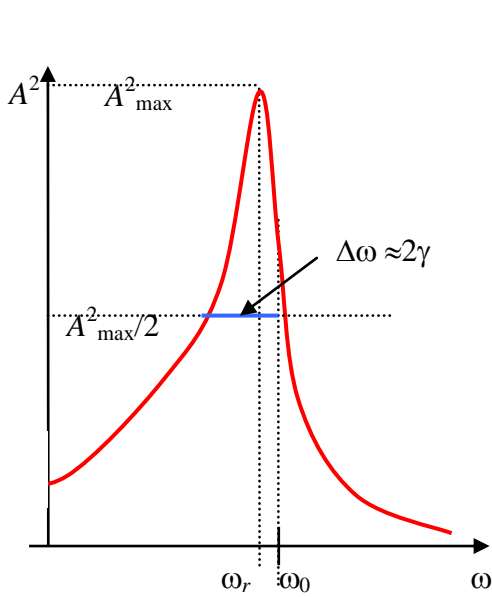


Рис. 5.3.

$$A^2 = \frac{F_0^2 / m^2}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_1^2} \quad (4.5.19)$$

Графически зависимость квадрата амплитуды от частоты внешней силы изображена на рис. 5.3. При $\omega_0 \gg \gamma$ (малое затухание) можно положить $\omega_r = \omega_0$:

$$A^2 = \frac{F_0^2 / m^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2} \quad (4.5.20)$$

Рассмотрим ширину контура резонанса по частоте $\Delta\omega$. *Ширина резонанса* определяется на полувысоте резонанса для квадрата амплитуды A^2 :

$$\frac{F_0^2 / m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0^2 / m^2}{4\gamma^2 (\omega_0^2 - \gamma^2)}$$

Решения этого уравнения определяются после простых алгебраических преобразований:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm 2\gamma\omega_1 = \omega_r^2 \pm 2\gamma\omega_1 \\ \omega_{лев}^2 &= \omega_r^2 - 2\gamma\omega_1, \quad \omega_{пр}^2 = \omega_r^2 + 2\gamma\omega_1 \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

Вычитая первое соотношение из второго в (4.5.21), имеем:

$$\omega_{пр}^2 - \omega_{лев}^2 = 4\gamma\omega_1$$

Наиболее важный случай, когда $\omega_0 \gg \gamma$, тогда получаем ширину, равную:

$$\begin{aligned} \omega_{пр}^2 - \omega_{лев}^2 &= (\omega_{пр} - \omega_{лев})(\omega_{пр} + \omega_{лев}) \approx 2\omega_1 \Delta\omega = 4\gamma\omega_1 \\ \Delta\omega &= 2\gamma \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

где $\Delta\omega$ – ширина резонанса, определяемая на полувысоте резонанса (см рис. 5.3). Видно, что ширина резонанса непосредственно связана с коэффициентом затухания. Чем больше γ , тем шире резонансный контур и менее выражено резонансное поведение. Кстати, отношение частоты к ширине резонанса непосредственно связано с добротностью колебательного контура

$$\frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\gamma T} = Q \quad (4.5.23)$$

где T – период вынужденных колебаний.

4.5.4. Фазово-частотная характеристика.

Уравнение для фазы (4.5.9) описывает соотношение фазы колебаний и фазы вынуждающей силы. Поскольку вынуждающая сила изменяется во времени по закону $F_0 \cos \omega t$, а фаза в решении для установившихся колебаний берется со знаком минус: “-φ”, то отсюда следует следующее.

1) Если $\varphi > 0$, получаем, что колебание системы запаздывает относительно колебания силы.

2) Если $\varphi < 0$, получаем, что система колеблется с опережением относительно колебания силы.

Построим кривую зависимости $\operatorname{tg} \varphi = 2\gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$ от частоты внешней силы. Для этого рассмотрим значения тангенса в предельных случаях:

$$\begin{aligned} \omega \ll \omega_0 & \quad \operatorname{tg} \varphi \rightarrow +0 \\ \omega \rightarrow \omega_0 - 0 & \quad \operatorname{tg} \varphi \rightarrow +\infty \\ \omega \rightarrow \omega_0 + 0 & \quad \operatorname{tg} \varphi \rightarrow -\infty \\ \omega \gg \omega_0 & \quad \operatorname{tg} \varphi \rightarrow -0 \end{aligned}$$

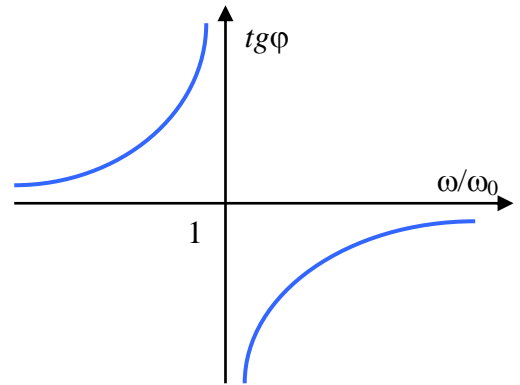


Рис. 5.4.

Эта примерная зависимость показана на рис. 5.4. Видно, что получаем разрыв тангенса фазы при $\omega = \omega_0$.

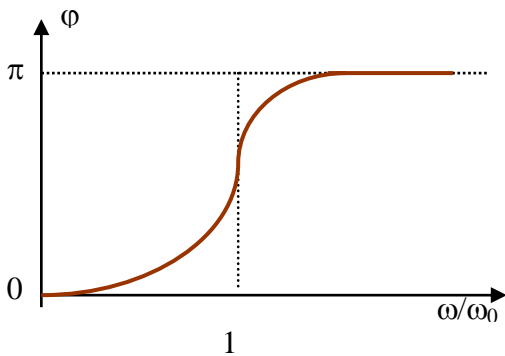


Рис. 5.5.

Если построить поведение самой фазы, то получаем изменение этой фазы на «пи» в области резонанса (рис. 5.5). Отметим, что скачок фазы на π – это характерная особенность прохождения области резонанса: всегда, когда в поведении фазы происходит изменение на «пи», это означает, что система (осциллятор) проходит область частот $\omega \sim \omega_0$, где наблюдается резонанс.

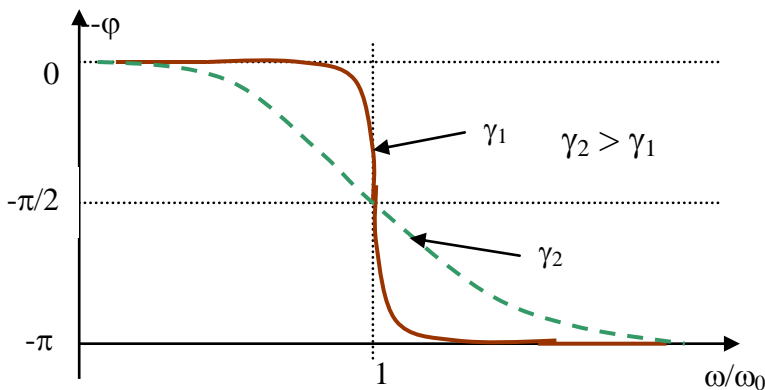


Рис. 5.6.

Часто откладывают фазу со знаком минус – «-φ» (см рис. 5.6), поскольку в решение (4.5.13а) она входит тоже со знаком “минус”. При малых частотах колебания происходят в фазе с вынуждающей силой ($\varphi = 0$), при больших частотах вынуждающей силы –

колебания системы происходят в противофазе ($\varphi = \pi$) с колебаниями силы. При частоте близкой к частоте резонанса $\omega \approx \omega_0$ имеем скачок тангенса и, соответственно, фазы на π .

Как получали ранее, ширина резонанса $\Delta\omega$ зависит от коэффициента затухания γ , поэтому область «скачка» фазы на π также зависит от коэффициент затухания γ . Как показано на рис. 5.6, чем больше затухание γ , тем более широкая и плавная область перехода фазы.

4.6. Автоколебания. Параметрические колебания.

4.6.1. Автоколебания.

Потеря энергии собственных колебаний приводит к затуханию. Можно использовать гармоническую подпитку энергией с помощью вынужденных колебаний. Но можно создать такое устройство, когда осциллятор сам регулирует подвод энергии, чтобы компенсировать ее потерю на трение. За период колебаний из внешнего источника энергия, приобретаемая осциллятором, равна энергии, затрачиваемой на преодоление сил трения. Отсюда, осциллятор совершает незатухающие колебания. Такие самоподдерживающиеся колебания называются *автоколебаниями*.

При малом трении автоколебания с большой точностью являются гармоническими и их частота очень близка к частоте собственных колебаний.

При большом трении за период подводится значительная часть полной энергии осциллятора, и поэтому колебания сильно отличаются от гармонических – период этих колебаний не совпадает с периодом собственных колебаний.

Рассмотрим несколько примеров автоколебаний.

- 1) Автоколебания маятника. Маятник со стержнем, подвешенный на оси во вращающейся втулке. Втулка вращается с постоянной угловой скоростью и передает часть энергии оси маятника за счет трения между осью и втулкой. Трение зависит от относительной скорости втулки и оси маятника: когда движение оси (маятника) происходит по направлению вращения втулки, то трение меньше и часть энергии передается в движение маятника; когда движение маятника против вращения втулки, то трение больше и движение замедляется. Полный результат за период зависит от характера зависимости сил трения от скорости относительного движения. Если трение не зависит от относительной скорости, то поддержки колебаний не происходит. Если трение растет со скоростью, то усиливается затухание. Если трение падает со скоростью, то амплитуда колебаний увеличивается.

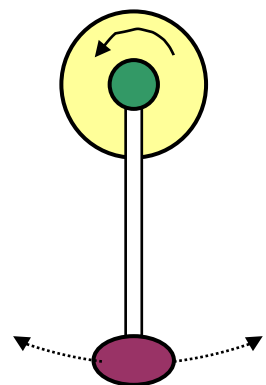


Рис. 6.1.

Установившиеся колебания получаются тогда, когда сила трения о воздух компенсирует переданную энергию.

- 2) Колебания маятника в часах ("ходики") поддерживаются "гирей", при этом происходит работа поля тяжести, или пружиной – работа сил упругости сжатой пружины.
- 3) В некоторых электрических колебаниях при уменьшении амплитуды автоматически включается электрическая подпитка – подсоединение к источнику тока или напряжения.

Релаксационные колебания – изменения в системе накапливаются постепенно, затем резко изменяется состояние системы, возвращающее ее к начальному состоянию, затем снова происходит постепенное накопление изменений до момента нового "срыва" и так далее. Примеры такой системы – сифон (см рис.6.2), гейзер.

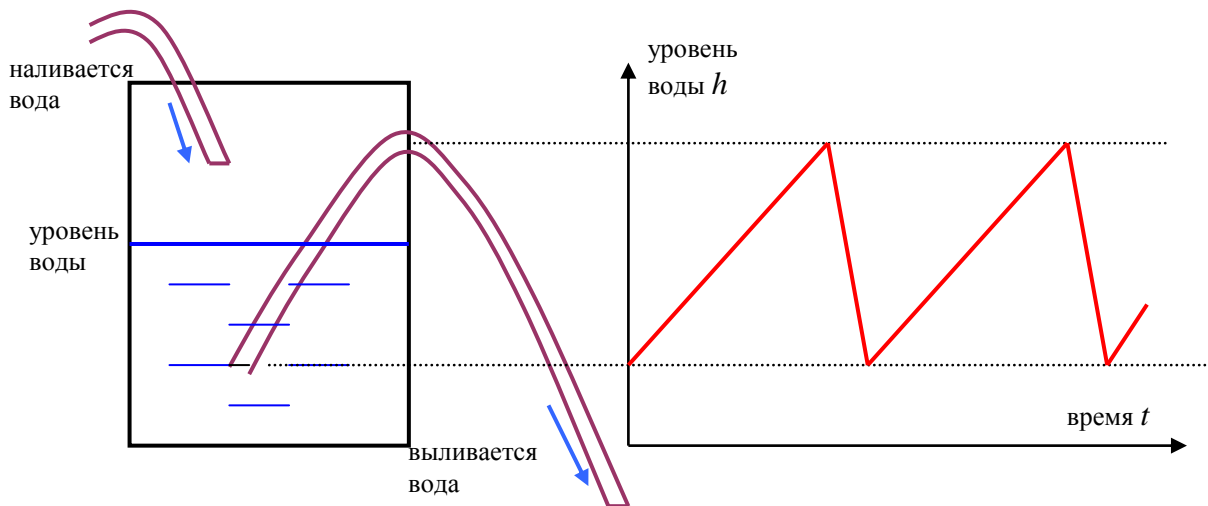


Рис. 6.2.

4.6.2. Параметрическое возбуждение колебаний.

Характеристики или свойства колебательных систем описываются величинами, называемыми *параметрами*. Так, математический маятник характеризуется одним параметром - длиной. Если изменять какой-либо параметр в определенном такте с колебаниями, то можно сообщить маятнику энергию и тем самым поддерживать колебания в незатухающем режиме. Такое возбуждение и поддержание колебаний называется *параметрическим*.

Примеры возбуждения параметрических колебаний:

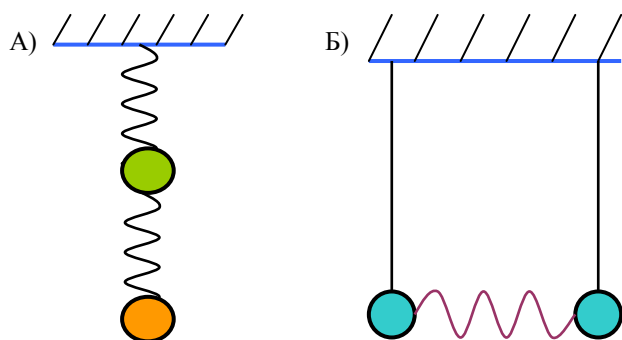
- 1). Качели. Колебания поддерживаются мускульной силой, изменяющей центр тяжести системы.
- 2). Маятник на нити, длину которой меняют в такт с колебаниями.

4.6.3. Колебания связанных систем.

Колебания могут быть со многими степенями свободы (даже простой маятник может совершать колебания по осям x и y). *Связанная система* –

система со многими степенями свободы, между которыми имеются связи, обеспечивающие возможность обмена энергией между различными степенями свободы.

Примеры колебательных систем со многими степенями свободы представлены на рисунке 6.3. Так в случае Б система имеет 4 степени свободы. Несмотря на сложность комбинированного движения связанных систем (двух связанных маятников Б на рис. 6.3) его всегда можно разложить на простейшие колебания, которые служат своеобразными ортами в пространстве колебаний и носят название *нормальных колебаний*. Число



нормальных частот равно числу степеней свободы. Так, например, движение системы Б (см также рис. 6.4 и 6.5) с 4-мя степенями свободы раскладывается на 4 независимых колебания со своими частотами.

Сначала рассмотрим движение шаров в плоскости перпендикулярной к плоскости рисунка (см вид на систему сверху на рисунке 6.4). Отклонения шара 1 (зеленая стрелка) и шара 2 (синяя стрелка) можно рассматривать как сумму 2х нормальных колебаний системы. А именно, система как целое отклоняется на смещение “ δ ” (оба как целое колеблются с частотой ω_1) и колебания шаров в разные стороны относительно центра масс системы “ a ” (с частотой ω_2) на один и тот же угол.

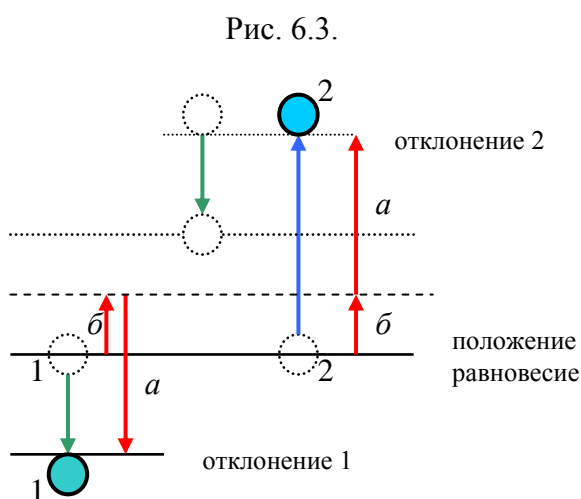


Рис. 6.4.

Естественно, что суммы a и b дают для каждого шара в отдельности их смещения относительно положения равновесия.

Аналогично можно рассмотреть колебания системы Б) в плоскости рисунка (см рисунок 6.5). Также имеем колебания вместе двух шаров как целой системы с частотой ω_3 и отклонения шаров в разные друг от друга стороны на одинаковые углы с частотой ω_4 .

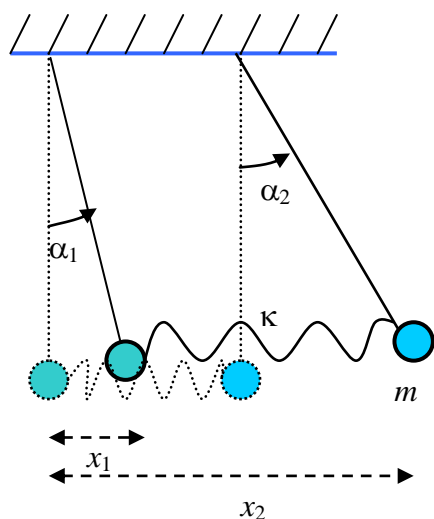


Рис. 6.5.

В принципе существует способ нахождения нормальных частот системы, однако, часто это довольно сложно. В

качестве примера рассмотрим для последнего случая колебаний, как находятся частоты ω_3 и ω_4 . Пусть шарики имеют одинаковую массу m , κ – жесткость пружины, а координаты шаров x_1 и x_2 отсчитываются от положения равновесия левого шара. Тогда, исходя из результатов параграфов 4.1 и 4.2 для пружинного и математического маятников, уравнения движения записываются:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{g}{l}x_1 + \frac{\kappa}{m}(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_2 - \frac{\kappa}{m}(x_2 - x_1)\end{aligned}\quad (4.6.1)$$

Сложим эти два уравнения и вычтем:

$$\begin{aligned}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -\frac{g}{l}(x_1 + x_2) \\ (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) &= -\frac{g}{l}(x_2 - x_1) - \frac{2\kappa}{m}(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

Рассматривая сумму координат и разность как две новых переменных, получаем уравнения колебаний:

$$\begin{aligned}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_1^2(x_1 + x_2) &= 0 \\ (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + \omega_2^2(x_2 - x_1) &= 0\end{aligned}\quad (4.6.2)$$

с частотами соответственно равными:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\kappa}{m}}\quad (4.6.3)$$

Тогда решения уравнений (4.6.2) записываются:

$$\begin{aligned}x_2 + x_1 &= A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 - x_1 &= B_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}\quad (4.6.4)$$

Эти решения и частоты совпадают с нормальными колебаниями сложного маятника в плоскости рисунка.

4.7. Распространение колебаний. Волны.

4.7.1. Плоские волны.

Рассмотрим гармоническое колебание точки:

$$\xi(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha)\quad (4.7.1)$$

Пусть для простоты колебания происходят в среде, в которой за счет связи между точками среды могут распространяться колебания. Для начала рассматриваем колебания в точке с координатами $(x = y = z = 0)$, затем пусть эти колебания распространяются со скоростью v вдоль оси x . Тогда эта же фаза колебаний, которая была в начале координат, достигнет точки с координатами $(x, y = z = 0)$ через время $t = x/v$, то есть фаза колебаний на

расстоянии x от точки возникновения колебаний запаздывает на это время t . Тогда колебания в точке x записываются

$$\xi(x,t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right] \quad (4.7.2)$$

Это и есть уравнение *плоской волны*, распространяющейся вдоль оси x . Название “плоская” происходит из-за того, что получаем одно и то же значение “смещения” $\xi(t)$ в плоскости (y, z) , или постоянство фазы в этой

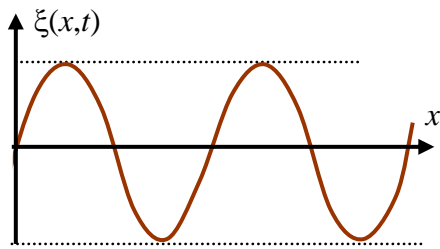


Рис. 7.1.

плоскости. Скорость v – *фазовая скорость* волны вдоль оси x . Это скорость распространения постоянной фазы. Вводят *волновое число*

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (4.7.3)$$

Тогда уравнение плоской волны можно записать:

$$\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (4.7.4)$$

Часто начальную фазу опускают ($\alpha = 0$), поскольку всегда можно изменить начало отсчета. На рис. 7.1 показано распределение “смещения” $\xi(x,t)$ по координате x в определенный момент времени t . Если в среде затухания нет, то амплитуда колебаний во всех точках x и, как показано на рис. 7.1 в любой момент времени t , не меняется.

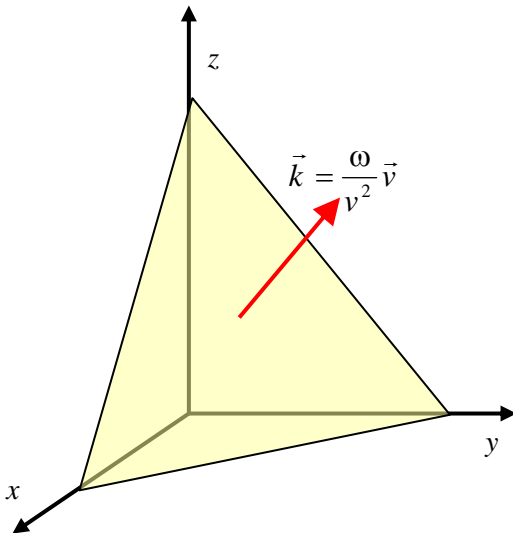


Рис. 7.2.

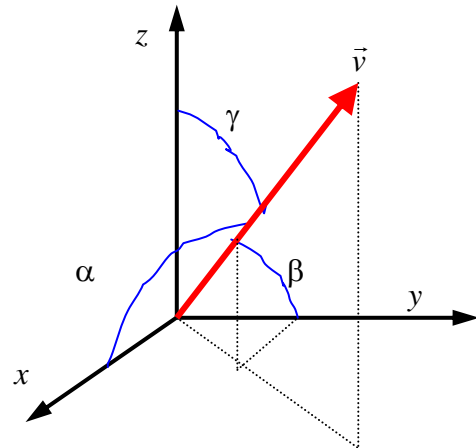


Рис. 7.3.

Пусть волна распространяется вдоль произвольного направления с фазовой скоростью \vec{v} . Если волна плоская (см рис. 7.2 и 7.3), то фазовые скорости вдоль осей x, y, z определяются следующим образом

$$v_x = \frac{v}{\cos \alpha}, \quad v_y = \frac{v}{\cos \beta}, \quad v_z = \frac{v}{\cos \gamma} \quad (4.7.5)$$

где углы α, β, γ – углы, образуемые вектором скорости относительно осей x, y, z соответственно. Рассматривая колебания в точке с координатами (x, y, z) получаем следующее уравнение, описывающее распространение плоской волны:

$$\begin{aligned}\xi(\vec{r}, t) &= ACos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v_x} - \frac{y}{v_y} - \frac{z}{v_z}\right)\right] = \\ &= ACos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\right] = . \quad (4.7.6) \\ &= ACos(\omega t - xk\cos\alpha - yk\cos\beta - zk\cos\gamma) = \\ &= ACos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = ACos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\end{aligned}$$

Здесь введен *волновой вектор* \vec{k} , направление которого совпадает с направлением распространения волны (перпендикулярно к фронту волны) и по модулю равный волновому числу

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v} \quad (4.7.7)$$

Можно еще ввести начальную фазу волны α , тогда общий вид плоской волны запишется:

$$\xi(\vec{r}, t) = ACos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \quad (4.7.8)$$

Если источник колебаний точечный, или имеет сферическую симметрию, то волна распространяется в изотропном пространстве в радиальном направлении, т.е. вектор \vec{k} совпадает по направлению с вектором \vec{r} и $\vec{k}\vec{r} = kr$. Причем в изотропном пространстве на сфере любого радиуса значения фазы и амплитуды имеют одинаковые значения. Однако сама амплитуда волны изменяется с расстоянием от источника r . В самом деле, если потерь в среде нет, то энергия распространяющихся колебаний (пропорциональная квадрату амплитуды) распределяется по площади сферы с возрастающим радиусом:

$$E \sim |A(r)|^2 \cdot 4\pi r^2 = const \quad (4.7.9)$$

Следовательно, амплитуда распространяющихся колебаний падает с радиусом обратно пропорционально ему $A(r) \sim 1/r$ и тогда уравнение, описывающее такую волну, запишется:

$$\xi(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} Cos(\omega t - kr + \alpha) \quad (4.7.10)$$

Такая волна носит название *сферической волны*. Такая волна имеет одну и ту же фазу колебаний на сфере радиуса r .

4.7.2. Волновое уравнение и волны.

Чтобы изучать распространение волн, необходимо получить соответствующее уравнение, решения которого описывало бы все многообразие волновых процессов. Вопрос о выводе такого уравнения, в основном, отложим до изучения электромагнитных волн. В этом параграфе только поясним, как можно было бы догадаться о его виде, исходя из уравнения плоской волны.

Продифференцируем дважды по времени и по всем координатам уравнение плоской волны (4.7.8):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \text{Cos}(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -\omega^2 \xi \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -Ak_x^2 \text{Cos}(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_x^2 \xi \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -Ak_y^2 \text{Cos}(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_y^2 \xi \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -Ak_z^2 \text{Cos}(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_z^2 \xi \end{cases} \quad (4.7.11)$$

Сложим координатные производные:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \equiv \Delta \xi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi \quad (4.7.12)$$

Здесь мы ввели *оператор Лапласа*

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \equiv \Delta \xi \quad (4.7.13)$$

Из (4.7.7) видим, что $k^2 = \omega^2/v^2$, и тогда, пользуясь уравнениями (4.7.11), заменяем k^2 и ω^2 соответствующими вторыми производными и получаем:

$$\frac{\Delta \xi}{\xi} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Сокращая на ξ , получаем дифференциальное уравнение, называемое *волновым уравнением*:

$$\Delta \xi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.7.14)$$

Вообще (4.7.14) – общий вид волнового уравнения, описывающего всевозможные волновые процессы. Легко увидеть непосредственной подстановкой, что любая функция, зависящая от аргумента $(\omega t - \vec{k}\vec{r})$:

$$\xi(\vec{r}, t) = f(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (4.7.15)$$

является решением этого уравнения.

Для волн, распространяющихся вдоль одной оси x , волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (4.7.16)$$

Решением уравнения (4.7.15) являются рассмотренные выше плоская и сферическая волны. Заниматься другими решениями этого уравнения будем при рассмотрении электромагнитных волн.

Литература

Основная

- 1) Сивухин Д.В. “Общий курс физики” Т.1. Механика. Наука, 1979.
- 2) Матвеев А.М. “Механика и теория относительности”. Высшая школа, М. 1986.
- 3) Иродов И.Е. “Основные законы механики”. Высш. школа. М. 1985
- 4) Ипатова И.П., Мастеров В.Ф., Уханов Ю.И. Курс физики. Том 1. Механика. Термодинамика. СПб, изд. СПбГТУ, 2001.
- 4) Берклеевский курс физики. Том 1. Механика. Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. Наука, 1983.
- 5) Савельев И.В. “Курс общей физики” Том 1. Физматгиз, 1977.

Дополнительная литература по СТО:

- 1) Сивухин Д.В. “Общий курс физики” Т.4. Оптика. Наука, 1980
- 2) Тейлор Э.Ф., Уилер Д.А. “Физика пространства- времени”. Изд. Мир, Москва, 1971.

Иванов Вадим Константинович,

ФИЗИКА.
Механика.
Колебания.

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано к печати 28.12.2020. Формат 60x84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 14. Тираж 70. Заказ 3402.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14