Общая физика. Физик: Юрий Алексеевич Мамаев.

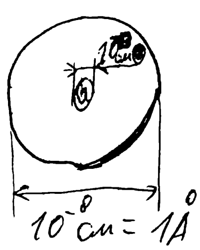
Рекомендуемая литература:

1) Сивухин — Общий курс физики, т. 1
2) Матвеев А.Н. — Механика и теория относительности.
3) Иванова И.П., Мастеров, Ухалов — курс физики.

Дополнительно:

1) Иродов И. Е. — Основные законы механики.
2) www.physics.spbstu.ru/lectures.shtml
3) Берклеевский — курс физики, т. 1.

## I Введение. Современная картина мира.




$V_{ат} \sim 10^{-24}$ см$^3$

$V_я \sim 10^{-39}$ см$^3$

$\frac{V_я}{V_{ат}} \sim 10^{-15}$

$r_{эл} < 10^{-16}$ см

$c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с $= 3 \cdot 10^{8}$ м/с

$\tau = (13{,}4 \pm 0{,}3)$ млрд. лет — возраст вселенной.

$c \cdot \tau = R \approx 10^{28}$ см $\approx 10^{10}$ св. лет.

1) Физ. законы на Земле справедливы во всех других областях Вселенной.

2) Общая теория относительности — наилучший вариант теории гравитации

В 1924 году Фридман сделал вывод о нестационарности Вселенной.

В 1946 году Гамов выдвинул теорию „Большого взрыва."

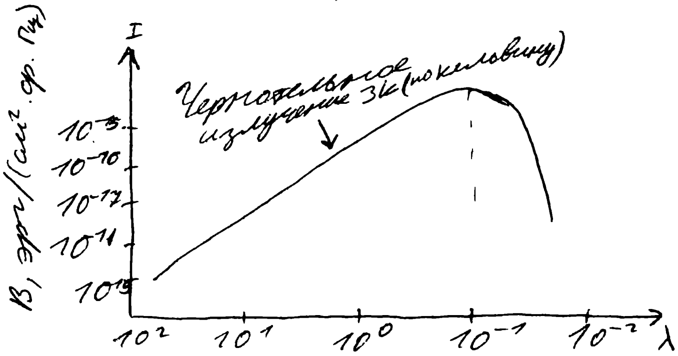
В 1929 году Хаббл установил закон „разбегания" галактик. $v = H \cdot R$; где $H$ - коэффициент пропорц.

$\frac{I}{R^2} = \mathcal{J}$ , где $I$ – интенсивность света.

Цефеиды: $I \sim T$

В 1964 году Р. Пензиас и А. Вильсон – „реликтовое излучение".

$v \sim RH$ – т.е. скорость „разбегания" пропорциональна расстоянию.




Длина волны, см

– измеренный спектр реликтового излучения.

const Взаимодействия.

1 1) Сильное – устойчивых ядер; $R \sim 10^{-13}$ см; „цветовой заряд".

$\frac{1}{137}$ 2) электромагнитное – электрический заряд; $R \approx \infty$.

$10^{-13}$ 3) слабое – „слабый заряд"; $n \to p + \bar{e} + \tilde{\nu}_e$.

$10^{-40}$ 4) Гравитационное – МАССА; „метрический тензор".

## (II) Границы применимости классической механики.

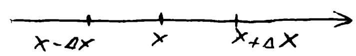
Классическая механика изучает медленные перемещения макроскопических тел неочень высокой плотности.

Ограничения:

1) $v \ll c$

2) по плотности, плотность должна быть невелика. Под действием гравитационного поля меняется временная метрика.

3) по размеру, размер > 1 мк.

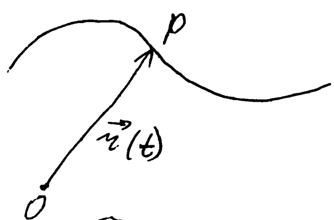



$p_x \qquad p_x \pm \Delta p_x$ $\qquad\qquad \Delta x \to 0$

$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar$; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ $\qquad \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \longrightarrow \infty$

$\Delta E = \frac{\Delta p_x^2}{2m}$

Траектория.

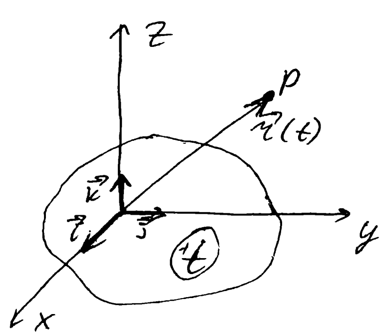


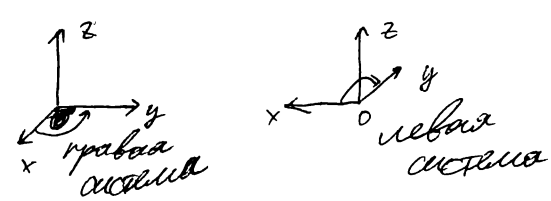

## III Пространственно-временные системы отсчёта.

# Кинематика материальной точки.

Перемещение — изменение координаты с течением времени.

Система (простр.-врем) отсчёта — это совокупность тел и время, связанное с ними.



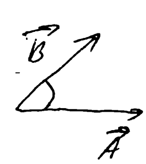

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = C = (\vec{A}\cdot\vec{B}); \quad C = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos(\vec{A},\vec{B})$$

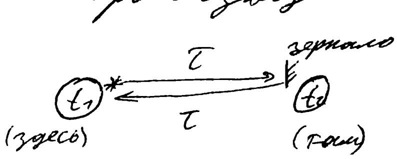
скаляр




$$C = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

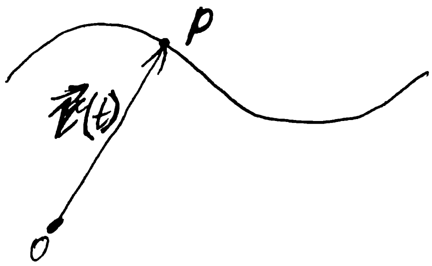
$$\vec{A} = A_x\cdot\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\cdot\vec{k}$$

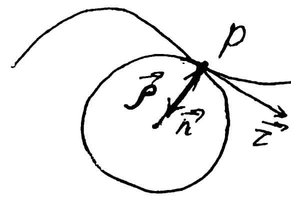
Синхронизация часов




$t_2 = t_1 + \tau$; $\tau = \frac{L}{c} \to 0$ $\quad \boxed{t_1 = t_2}$

# Скорость и ускорение материальной точки.




$\vec{\rho}$ - радиус.

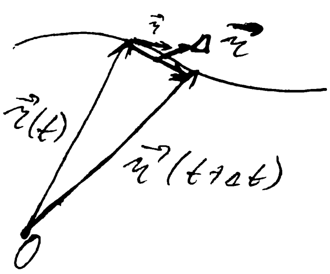
$\vec{\tau}$ - тангенциальный вектор

$\vec{n}$ - нормальный вектор.

Скорость перемещения:

Равномерное движение ($v = const$): $v = \frac{S}{t}$; $S = vt$.

Неравномерное движение:

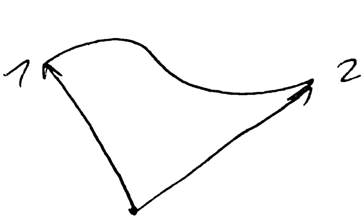



$$\vec{v} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$dr = v\cdot dt$$

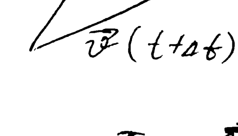
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt};\ \vec{v} = v\cdot\vec{\tau},\text{ где } v = |\vec{v}|$$

$$S = \lim_{t\to 0}\sum\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}\cdot\Delta t = \sum\lim_{t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}\cdot\Delta t$$

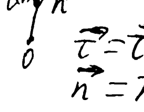



$$S_{12} = \int_1^2 v\,dt$$

Ускорение:




$$\vec{a} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



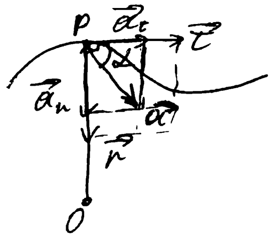

$\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$

$\vec{n} = \vec{n}(t)$

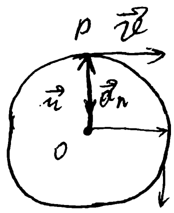
Т.к. $\vec{v} = v\cdot\vec{\tau}$, то:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\cdot\vec{\tau}) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau}}_{\text{тангенциальное ускорение}} + \underbrace{v\,\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{\text{нормальное ускорение}}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$



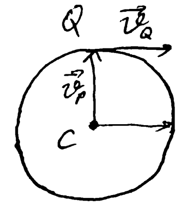

1) если $\angle\alpha$ — острый, то движение ускоренное
2) если $\angle\alpha$ — тупой, то движение замедленное
3) если $\angle\alpha = 90^\circ$, то движение по окружности




$v_p = |\vec v_p| = const$

$T = \frac{2\pi r}{v}$

$a_n = \frac{v^2}{r}$ — нормальное (центростремительное) ускорение.




— годограф скоростей

$v_Q = a_p = \frac{2\pi v_n}{T}$

$a_p = \frac{2\pi v_p^2}{2\pi r} = \frac{v^2}{r}$

$\vec v_Q = \vec a_p$

$v_Q \perp \vec v_p$

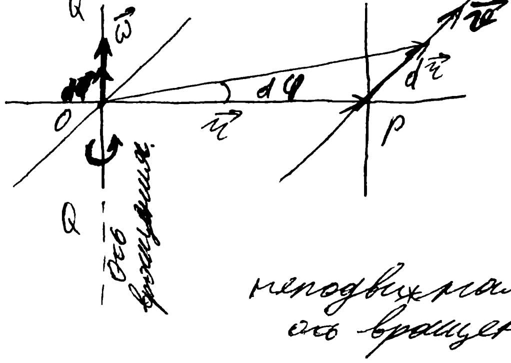
$\vec a_p \perp \vec v_p$


$\vec a_n = \frac{v^2}{\rho}\cdot\vec n$

$$\vec a = \underbrace{\frac{dv}{dt}\cdot\vec\tau}_{\vec a_\tau} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\cdot\vec n}_{\vec a_n}$$

## Угловая скорость и угловое ускорение

Движение можно представить как перемещение и поворот.




$dr = r\cdot d\varphi$

$d\varphi = \frac{dr}{r}$

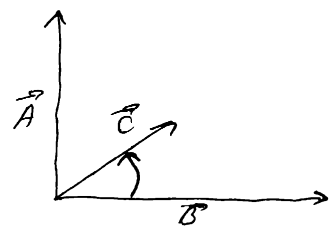
неподвижная ось вращения

$d\vec r = [d\vec\varphi \times \vec r]$ — векторное произведение.

$\vec{A} = [\vec{B} \times \vec{C}]$

$|\vec{A}| = A = |\vec{B}||\vec{C}| \cdot \sin \hat{B,C}$

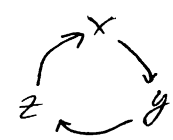
$\vec{A} \perp \vec{B}; \ \vec{A} \perp \vec{C}.$




$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$

$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$

$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$




$A_x = B_y C_z - B_z C_y.$

$A_y = B_z C_x - B_x C_z$

$A_z = B_x C_y - B_y C_x$

## Угловая скорость

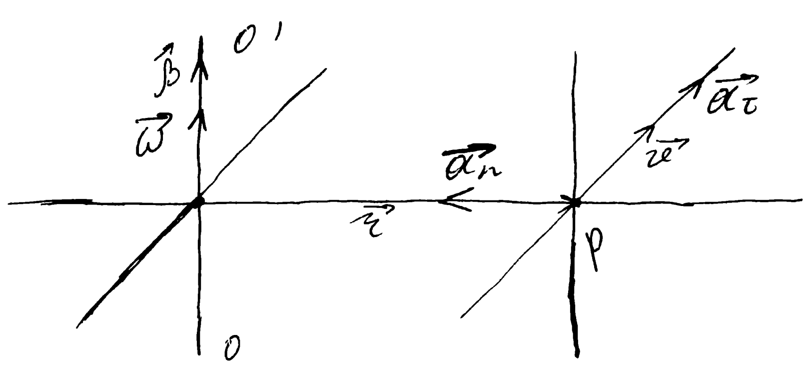
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}] \quad (1)$$

$$\frac{(1)}{dt} \Rightarrow \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \frac{d\vec{\varphi} \times \vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}\right] = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] \quad (2)$$

## Угловое ускорение

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$




$\uparrow \vec{\omega}, \uparrow \vec{\beta}$ – ускоренное вращение

$\uparrow \vec{\omega}, \downarrow \vec{\beta}$ – замедленное вращение.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}] = \Big[\underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\beta}} \times \vec{r}\Big] + \Big[\vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}}\Big]$$

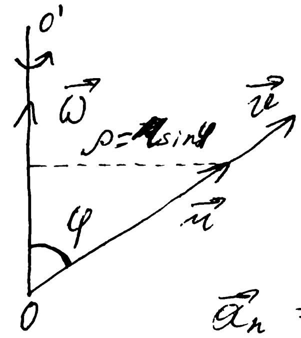
$$\vec{a} = \underbrace{[\vec{\beta} \times \vec{r}]}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{[\vec{\omega}, [\vec{\omega} \times \vec{r}]]}_{\vec{a}_n} \quad (3)$$

$$[\vec{A}\times[\vec{B}\times\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}\times\vec{r}]] = \vec{\omega}\underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}_{=0,\ \text{т.к. } \vec{\omega}\perp\vec{r}} - \underbrace{\vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})}_{\vec{\omega}^2\vec{r}},$$

$$\vec{a}_n = -\vec{\omega}^2\vec{r}$$

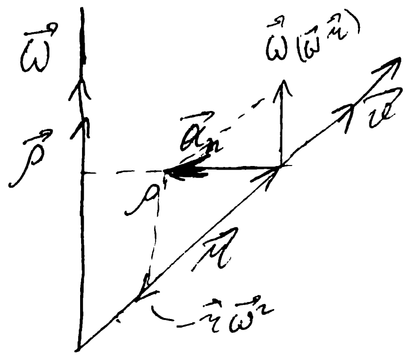
Если $\vec{\omega} \not\perp \vec{r}$ :

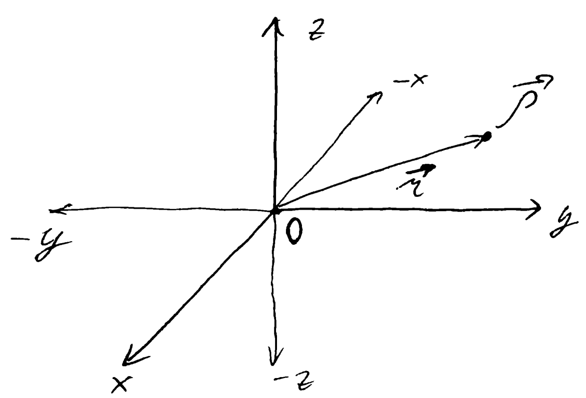



$v = \omega\rho = \omega r\sin\varphi$

$\vec{v} = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$.

$\vec{a}_n = \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\vec{\omega}^2$




Инверсия координат:

$x \to -x$

$y \to -y$

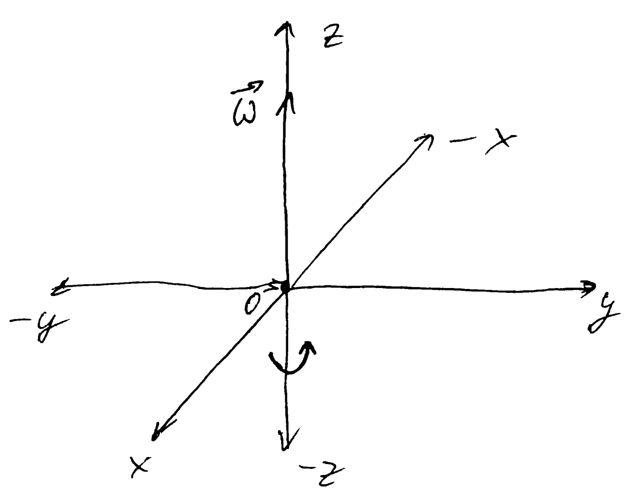
$z \to -z$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r}' = -x\vec{i} - y\vec{i} - z\vec{k}$

$\vec{r}' = -\vec{r}$

– полярные




$x \to -x$ ... $\uparrow\vec{\omega}$ $\downarrow\vec{\omega}$

$y \to -y$ ... $\vec{\omega}\downarrow$ $\uparrow\vec{\omega}$

$z \to -z$ ... $\vec{\omega}\uparrow$ $\uparrow\vec{\omega}$

$\vec{\omega} \to \vec{\omega}$ – аксиальные

$xyz \qquad \vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$

$\qquad\quad\ \ \ \ \text{п} \qquad \text{а} \qquad \text{п}$

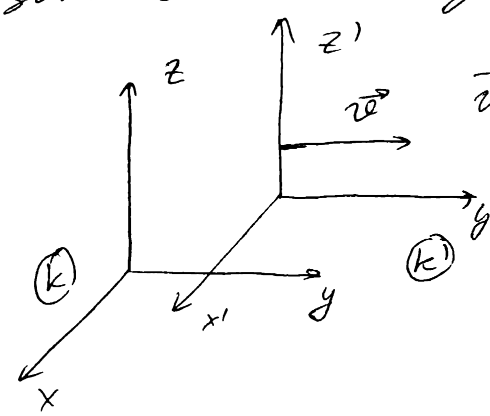
$$\left.\begin{matrix} -x \\ -y \\ -z \end{matrix}\right\} \ -\vec{v} = [\vec{\omega} \times (-\vec{r})] = -[\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

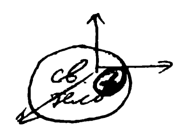
## Динамика.

### Закон инерции. Инерциальные системы отсчёта.

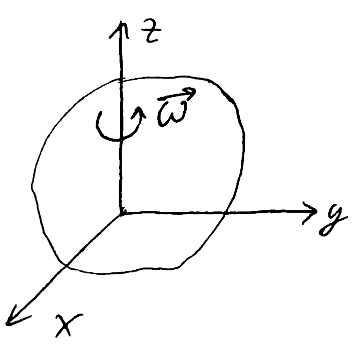
I-й закон Ньютона: **существуют** такие системы отсчёта, относительно которых материальная **точка**, при отсутствии внешних воздействий, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Инерциальная система отсчёта — система отсчёта, связанная со свободным телом.




Земля является ИСО.




$a = \frac{v^2}{r}$

$v = \frac{2\pi r}{T}$ ; $r_з = 6400$ км.

$T_з = 24$ часа.

$a_з = \frac{v^2}{r} = 3,4$ см/с²

$g = 980$ см/с²

$a_з \ll g$

Годовое вращение: $T = 365$ дней;

$a = \frac{v^2}{r}$; $\rightarrow 0,6$ см/с² $\ll g$

Закон сохранения импульса.

Замкнутая система – это совокупность точек, взаимодействующих между собой и не взаимодействующих с окружающими.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1} m_i \vec{v}_i$$ инертная масса

$$\frac{dp_x}{dt} = 0; \quad \frac{dp_y}{dt} = 0; \quad \frac{dp_z}{dt} = 0.$$

$\vec{p} = const$; $p_x = const$; $p_y = const$; $p_z = const$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ \vec{p}' &= m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \end{aligned}\right| \vec{p} = \vec{p}'$$

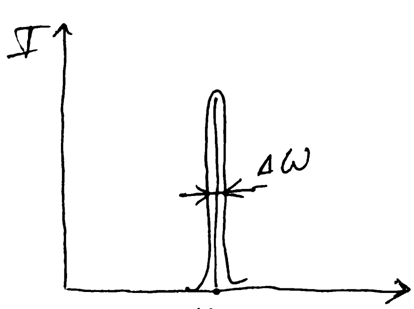
$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)$$

$$m_1 \Delta\vec{v}_1 = -m_2 \Delta\vec{v}_2$$

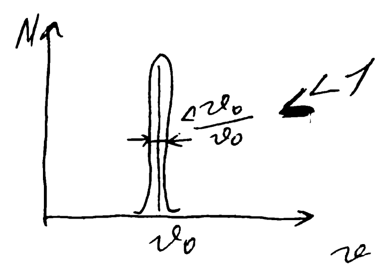
$$m_1 \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}$$

В 1958 году Р. Мессбауэр открыл эффект: излучение гамма-квантов без отдачи.

$Fe^{57}$ $\quad \mathcal{E} = 14{,}4 \text{ кэВ} = \hbar\omega$




$\omega\hbar = \mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda}$




$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 10^{-15}$$

Отдача воспринимается не одним ядром, а всем кристаллом.

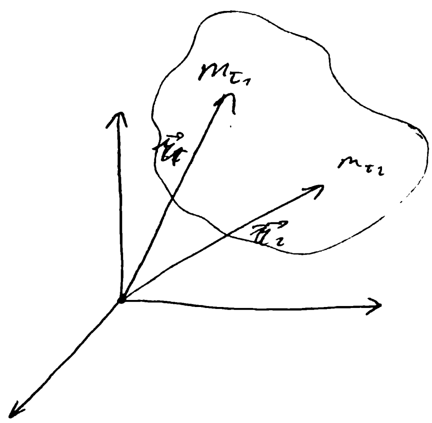
акустические фононы

$m_я \approx 10^{-23}$ гр

$M = 1$г $\qquad \frac{m}{M} = 10^{-23}$

В замкнутой системе суммарный импульс не изменяется.

Центр инерции системы материальных точек.

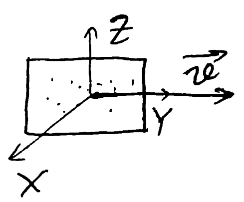


$$\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_i \vec{r}_i}{m_1 + m_2 + \ldots + m_i}$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \vec{R}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} = \frac{\vec{p}}{M} = \vec{v}$$

$$\vec{p} = M \cdot \vec{v}$$



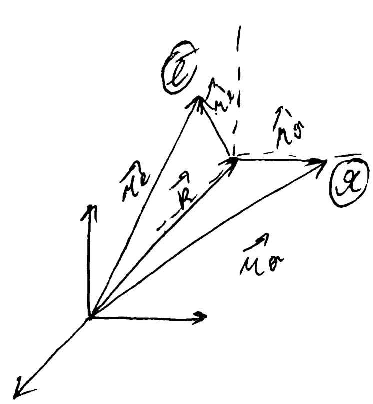
– система центра инерции.

Замкнутая система материальных точек.

$\vec{p} = const$

$\vec{v} = const$

В системе центра инерции $\vec{v} = 0$ ...



$$\begin{cases} \vec{r}_e = \vec{R} + \vec{r}_e' \\ \vec{r}_я = \vec{R} + \vec{r}_я' \end{cases}$$

$$\vec{r}_e' = \vec{r}_e - \vec{R} = \vec{r}_e - \frac{m_e \vec{r}_e + m_я \vec{r}_я}{m_e + m_я} =$$

$$= \frac{m_e \vec{r}_e + m_я \vec{r}_я - m_e \vec{r}_e - m_я \vec{r}_я}{m_e - m_я} =$$

$$= \frac{m_я}{m_e+m_я}(\vec r_e - \vec r_я) = \vec r_e^{\,0}$$

$$\vec r_я = \frac{m_e}{m_e+m_я}(\vec r_я - \vec r_e)$$

Сила. II закон Ньютона.

$\frac{d\vec p}{dt} = 0$ — нет воздействия.

$\frac{d\vec p}{dt} \neq 0$ — есть воздействие.

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F \qquad \begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = F_x \\ \frac{dp_y}{dt} = F_y \\ \frac{dp_z}{dt} = F_z \end{cases}$$

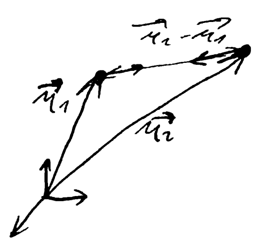
Сила – мера воздействия.

$\vec p = m\vec v$

$$\frac{d\vec p}{dt} = m\frac{d\vec v}{dt} = m\vec a$$

$\vec F = m\vec a$ $\qquad 1Н = 10^5$ дин

II закон Ньютона: в инерциальной системе ~~отсч~~ ускорение, которое получает материальная точка, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.




$$\vec F = \vec F(r_1 - r_2;\ v_1 - v_2)$$

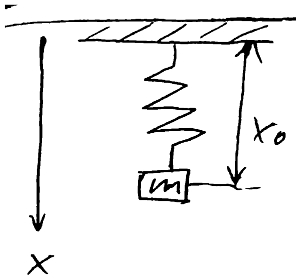
$$F = G\frac{Mm}{|\vec r_1 - \vec r_2|^2}$$

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F \qquad \vec F = 0, \quad \frac{d\vec p}{dt} = 0 \qquad \vec p = const$$

II закон Ньютона имеет смысл только в инерциальных системах отсчёта.

Два основных типа задач механики.

1) задано движение, найти силу.



$$(x - x_0) = A\cos\omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t = -\omega^2(x - x_0)$$

$$ma = \underbrace{-m\omega^2}_{k\text{ - коэффициент жёсткости}}(x - x_0) = F \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) Задана сила, установить характер движения.

$$ma = F$$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$dv = \frac{F}{m}dt$$

$$v = \frac{F}{m}t + C_1$$

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ v = v_0 \\ x = x_0 \end{matrix}\right\} \text{ - например;}$$

$$C_1 = v_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + v_0$$

$$dx = \frac{F}{m}t\,dt + v_0\,dt$$

$$x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2$$

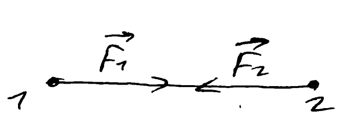
$$x\big|_{t=0} = x_0; \; C_2 = x_0$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$\frac{at^2}{2} = \frac{F t^2}{2m}$$

III закон Ньютона.

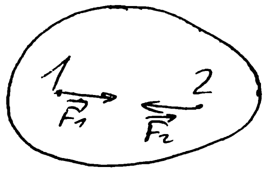
Сила парного взаимодействия двух частиц равны по величине, противоположны по направлению и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки.



В замкнутой системе $\frac{d\vec{p}}{dt}=0$; $\vec{P}=\sum\vec{p}_i=const$

$\sum\vec{F}_{ext}=0$ ext – externum (внешние).

$\sum F_i=0$

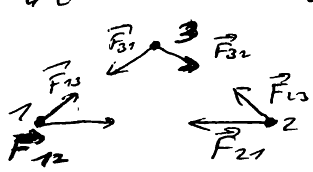



$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{F}_i=0$$

$\sum\vec{F}_i=0$; $\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$, тогда $\boxed{\vec{F}_1=-\vec{F}_2}$

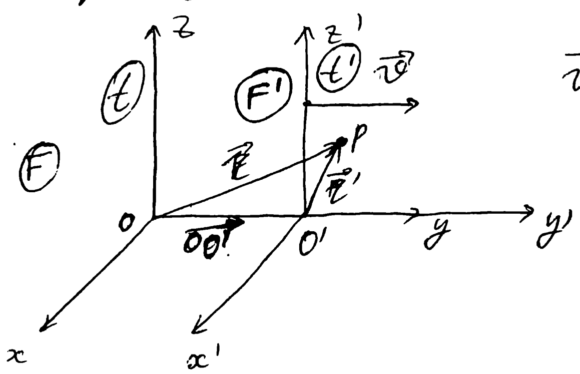
В незамкнутой системе:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum\vec{F}_{ext}+\sum\vec{F}_{вн}$$




20.09.10 г.

## Принцип относительности Галилея.




$\vec{v}=const$; $t=t'$

$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{OO'}$

$\vec{OO'}=\vec{v}\cdot t$

$$\begin{cases}\vec{r}=\vec{r}'+\vec{v}t\\ t=t'\end{cases}$$ – преобразование Галилея.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}'}{dt'}+\vec{v};\quad \vec{V}=\vec{v}'+\vec{v}$$

В механике: (K): $\vec{F}=m\vec{a}$, $\vec{F}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

(K'): $\vec{F}'=m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}'}{dt}+v$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

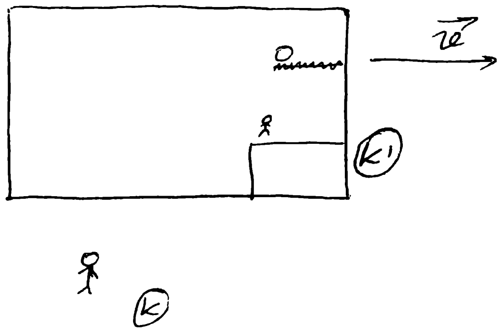
Всегда: $F(\vec{r}_1-\vec{r}_2;\ \vec{v}_1-\vec{v}_2)$

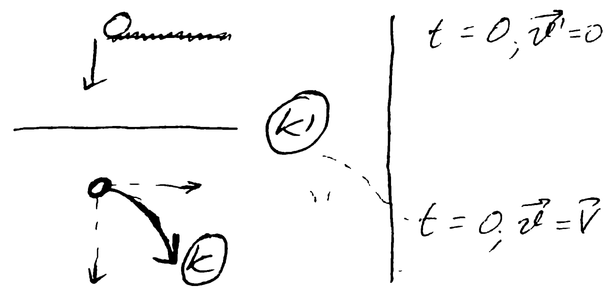
$\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r}_1'-\vec{r}_2'$

$\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{v}_1'-\vec{v}_2'$

Тогда, $\vec{F} = \vec{F'}$

Ур-е движения механики инвариантно относительно преобразований Галилея.



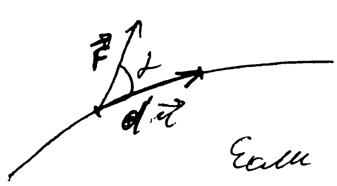

П.О.Г (по Эйнштейну): законы природы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того к какой системе отсчёта относятся эти законы.

Закон сохранения импульса.

| До столкновения | | После столкновения | |
|---|---|---|---|
| $m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20}$ <br> $m_1(\vec{v}'_{10} + \vec{V}) + m_2(\vec{v}'_{20} + \vec{V})$ | = | $m_1\vec{v}_{12} + m_2\vec{v}_{22}$ <br> $m_1(\vec{v}'_{12} + \vec{V}) + m_2(\vec{v}'_{22} + \vec{V})$ | K |
| $m_1\vec{v}'_{10} + m_2\vec{v}'_{20}$ | = | $m_1\vec{v}'_{12} + m_2\vec{v}'_{22}$ | K' |

Сохр. ма
$m_1\vec{V}$;
$m_2\vec{V}$.

Работа силы на ограниченном пути.



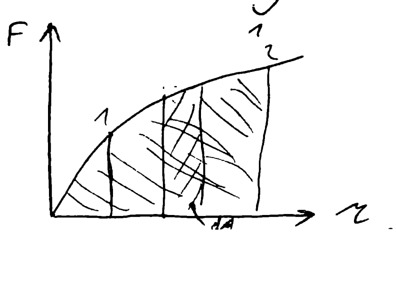

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = |\vec{F}|\,|\vec{r}|\,\cos\alpha = F_r \cdot dr$$

Если $\alpha$ - острый угол, то $dA > 0$.

Если $\alpha$ - тупой угол, то $dA < 0$.

Если $\alpha = 90°$, то $dA = 0$.

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 F_r\, dr$$



В СИ: $[A] = 1$ Дж $= 10^7$ эрг
В СГС: $[A] = 1$ эрг.

## Работа и кинетическая энергия.

$dA = F_\tau dr$ $\qquad F = ma;\ F_\tau = m a_\tau;\ a_\tau = a_\tau = \frac{dv}{dt}$

$dr = v\,dt$

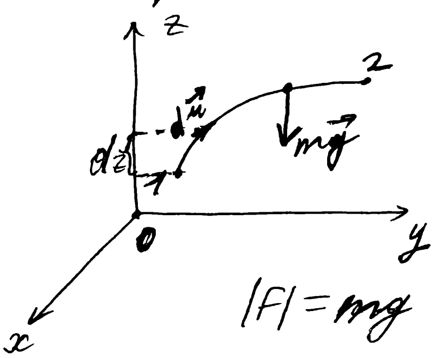
$dA = m\frac{dv}{dt}\cdot v\,dt = m v\,dv$ $\qquad A_{12} > 0$, если $K_2 > K_1$; $A_{12} < 0$, если $K_2 < K_1$.

$$A_{12} = \int_1^2 dA = m\int_1^2 v\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1;\ K = \frac{mv^2}{2}.$$

Для системы материальных точек: $K = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}$

$[K] = [A]$. (Дж; эрг; $1$ эВ $= 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж).

## Консервативные и неконсервативные силы.




$dA = F_r dr = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha$

$A_{12} = \int_1^2 dA = -\int_1^2 mg\,dz =$

$= mg(z_1 - z_2)$ $\quad\Big|\quad z_1 - z_2 < 0$, то $A_{12} < 0$.

Нет зависимости от траектории!

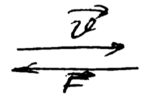
$$A_{21} = \int_2^1 dA = \int^2 mg z = mg(z_2 - z_1);\ A_{21} > 0$$

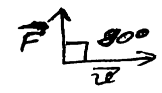
$$A_{121} = A_{12} + A_{21} = mg(z_1 - z_2) + mg(z_2 - z_1) = 0$$

Работа сил по замкнутому пути равна 0.

Если силы взаимодействия зависят только от конфигурации точек системы (от их взаимного расположения) и работа этих сил при переходе из начального положения в конечное не зависит от формы пути, то такие силы называются консервативными.

Неконсервативные силы:

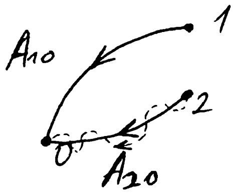
$A<0$ — диссипативные. 

$A=0$ — гироскопические. 

21.09.10г.

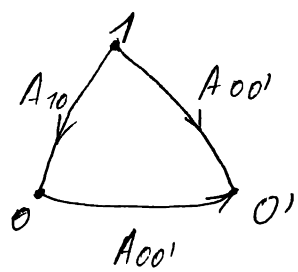
## Работа и потенциальная энергия.

только $F_{конс}$



Запас работы, определяемый начальным положением тела называется потенциальной энергией в данном положении.

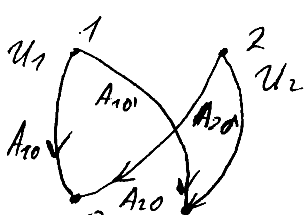
„$E_{пот}$" равна работе консервативных сил из данного положения в нулевое.



$1 \to O'$

$A_{10'} = A_{10} + A_{00'}$

$U' = U + A_{00'}$



относительно точки „O":

(1) $U_1 = A_{10}$

(2) $U_2 = A_{20}$

$U_1 - U_2 = A_0 - A_{20}$

Относительно точки „O'":

(1) $U_1' = A_{10'}$

(2) $U_2' = A_{20'}$

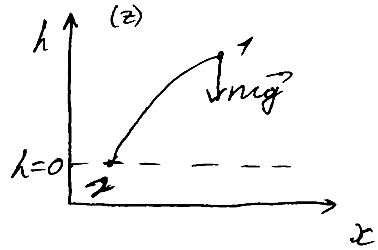
$U_1' - U_2' = A_{10'} - A_{20'} = (A_{10} + A_{00'}) - (A_{20} + A_{00'}) = A_{10} - A_{20}$

$1 \to 2: A_{12} = U_1 - U_2$

Работа равняется убыли потенциальной энергии.

# Потенциальная энергия в простейших случаях.

1) Однородное поле тяжести:



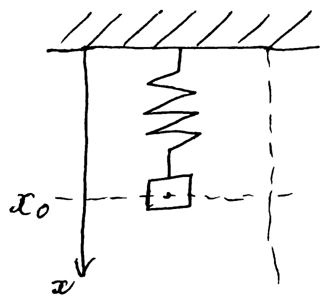

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2)$$

$$h_1 \longrightarrow h$$

$$h_2 \longrightarrow 0$$

$$\boxed{A = mgh = U}$$

2) Упругий маятник:




$$dA = (\vec{F} d\vec{r}) = (\vec{F} \cdot d\vec{x}) =$$

$$= |\vec{F}| \cdot |d\vec{x}| \cdot \underbrace{\cos(\vec{F}, d\vec{x})}_{=-1}$$

$$F = -k(x - x_0)$$

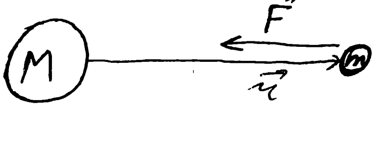
$$dA = -|-k(x - x_0)|\, dx$$

$$U = \int_{x}^{x_0} dA = -k \int_{x}^{x_0} (x - x_0)\, dx = -k \int_{X}^{0} X\, dX =$$

$$= -k\frac{X^2}{2}\Big|_X^0 = k\frac{X^2}{2}, \text{ где } X = x - x_0$$

$$\boxed{U = -\frac{k\Delta x^2}{2}}$$

3) Гравитационное поле:




$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$dA = (\vec{F} d\vec{r}) = |\vec{F}| |d\vec{r}| \underbrace{\cos(\vec{F}, \vec{r})}_{=-1}$$

$$dA = -G\frac{Mm}{r^2} \cdot dr$$

$$U = \int_r^\infty dA = -GMm \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -GMm\left(-\frac{1}{r}\Big|_r^\infty\right)$$

$$\boxed{U = -\frac{GMm}{r}}$$ — энергия притяжения, поэтому отрицательна.

Закон сохранения энергии в механике

В системе с консервативными силами:

$A_{12} = K_2 - K_1$

$A_{12} = U_1 - U_2$

$K_2 - K_1 = U_1 - U_2$

$K_2 + U_2 = K_1 + U_1$

$E_2 = E_1$ (с конс. силами (или гироскопическими)

Консервативные силы + диссипативные:

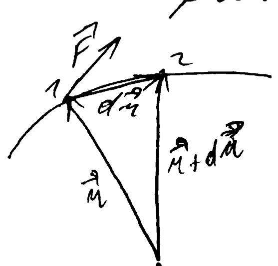
$A_{12} = K_2 - K_1 = \underbrace{A_{конс}}_{U_1 - U_2} + A_{дисс.}$

$(U_2 + K_2) - (U_1 + K_1) = A_{дисс.}$

$E_2 - E_1 = A_{дисс.}$

Силы и потенциальная энергия.

Только консервативные силы:



① $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$

② $U = U(x; y; z) \equiv U(\vec{r})$

$dA = (\vec{F} d\vec{r}) = U(\vec{r}) - U(\vec{r} + d\vec{r})$

$U(\vec{r} + d\vec{r}) = U(\vec{r}) + \underbrace{\frac{dU}{dr} d\vec{r}}_{dU(\vec{r})} =$

$= U(\vec{r}) + dU(\vec{r})$

$dA = (\vec{F} d\vec{r}) = -dU(\vec{r})$

$$\boxed{\vec{F} d\vec{r} = -dU}$$

$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU.$

Частная производная.

$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{y,z = const} = \frac{\partial U}{\partial x}$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \equiv -\frac{dU}{dx}\Big|_{y,z=const}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(-\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{k} =$$

$$= -\underbrace{\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right\}} = -grad\, U \equiv \nabla U$$

$$\boxed{\vec{F} = -grad\, U} \qquad \underbrace{grad\, U}_{\nabla U} \qquad (grad \text{ — градиент}).$$

Набла — векторный дифференциальный оператор ($\nabla$)

$$\begin{cases} a = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\ b = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \end{cases}$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

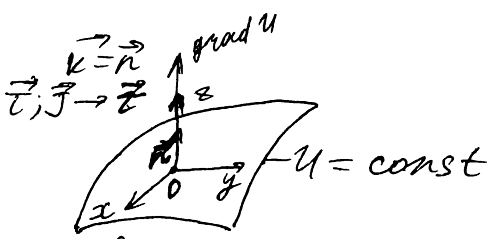
$$\underset{\vec{a}}{\nabla} = \vec{i}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{a_x} + \vec{j}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}}_{a_y} + \vec{k}\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}}_{a_z}$$

$$\vec{a}\cdot\varphi = a_x\varphi\vec{i} + a_y\varphi\vec{j} + a_z\varphi\vec{k}$$

$$(\nabla U) = \vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$(\nabla\varphi) \neq (\varphi\nabla) = \vec{i}\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\varphi\frac{\partial}{\partial z}$$

Геометрический смысл градиента.




(эквипотенциальная поверхность)

на экв. пов-ти: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$

$$(\nabla U) \equiv grad\, U \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial n}$$

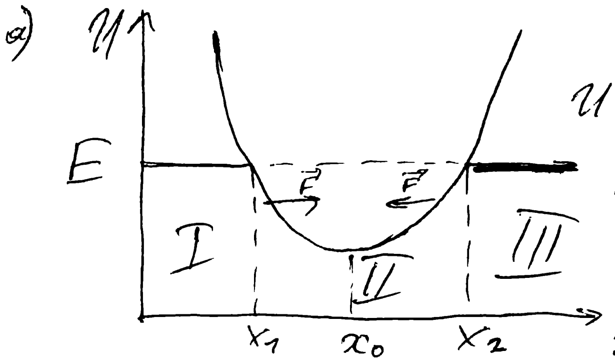
$$grad\, U = \frac{\partial U}{\partial n}\cdot\vec{n}$$

grad U — вектор, направленный по нормали к эквипот-й поверхности в сторону возрастания U.

27.09.10г. Границы движения

$E = U + K = \text{const}$

а)




$U = U(x)$

$k = \frac{m\dot{x}^2}{2} \geq 0$

$E \geq U$ (условие движения).

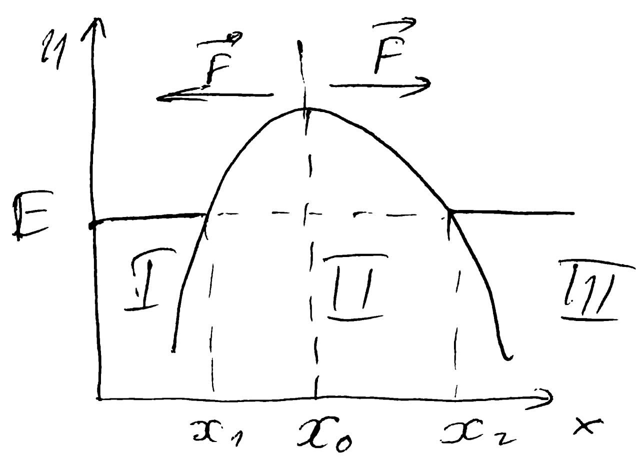
I и III $E < U$ запрет!

II $E \geq U$ $x_1 \leq x \leq x_2$ возможно движение.

$\vec{F} = -\operatorname{grad} U \Rightarrow -\frac{dU}{dt}$

$U|_{x=x_0} = U_{min}$ устан равн-е.

б)




I и III $E \geq U$

II $E < U$ запрет!

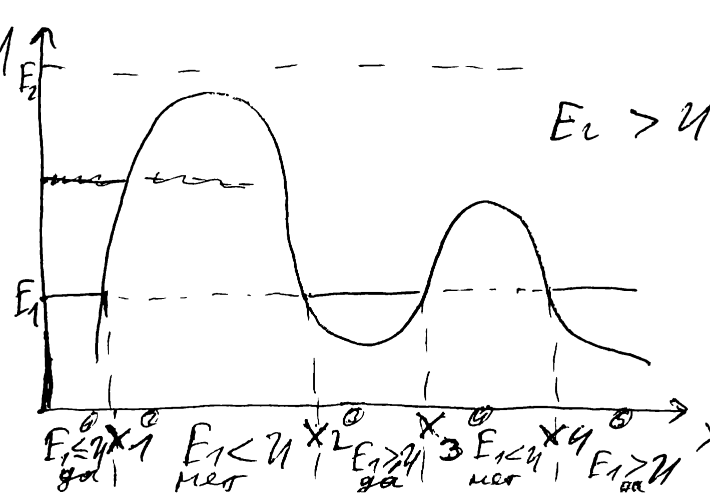
$x \leq x_1$

$x \geq x_2$

$U|_{x=x_0} = U_{max}$

неуст. равн-е.

в)




$E_2 > U$

$0 \leq x < x_1$

$x_2 \leq x < x_3$

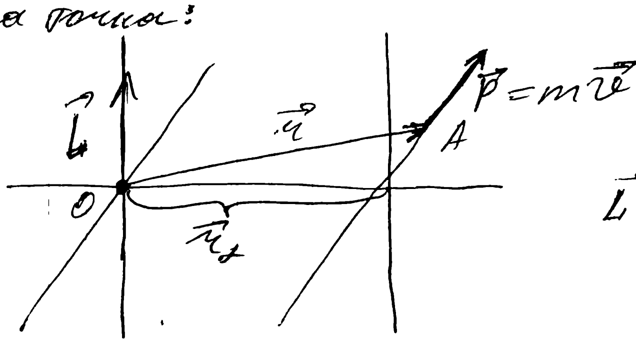
$x \geq x_4$ разреш.

Закон сохранения момента импульса.

импульс: $\vec{p} = m\vec{v}$ | momentum

момент импульса | angular momentum

Одна точка:




$\vec{L} \perp \vec{r}$; $\vec{L} \perp \vec{p}$.

Моментом импульса материальной точки относительно неподвижного начала „O" называется произведением (векторным) радиус-вектора на сам импульс.

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

$$\vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \cdot \vec{k}$$

$$L_x = y \cdot p_z - z p_y$$

$$L_y = z p_x - x p_z$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

$$L = |\vec{L}| = r \cdot p \sin\alpha = r_\perp p$$

Система мат. точек:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$$

Замкнутая система мат. точек:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = const.$$

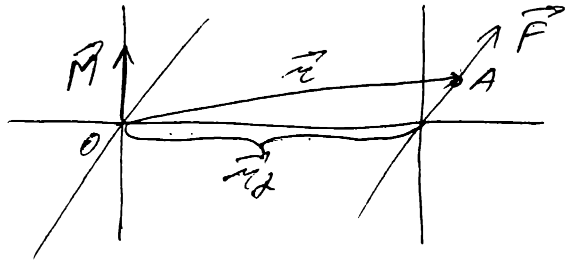
$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] = \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right]}_{=0} + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v};\ p = m\vec{v}$$

$$|m[\vec{v} \times \vec{v}]| = m v v \sin 0° = 0$$

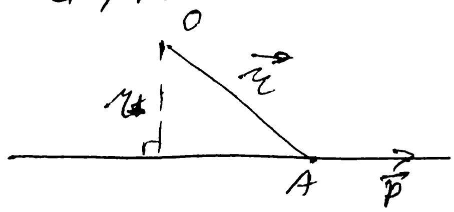
$$M = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

Уравнение момента: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$



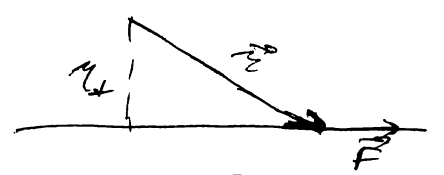

$$M = [\vec r \times \vec F]\ ; \quad |\vec M| = F \cdot r_\perp$$

$\vec L, \vec M$

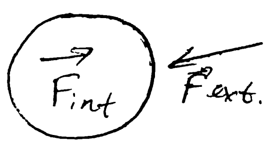



$$L = r_\perp \cdot p$$

равном



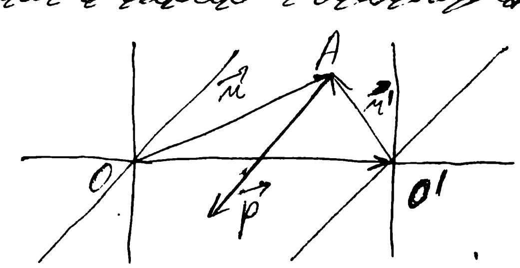

$$M = F \cdot r_\perp$$




$$\frac{d\vec L}{dt} = \vec M = [\vec r \times \vec F] = [\vec r \times \vec F_{int}] + [\vec r \times \vec F_{ext}]$$

$$\vec M = \sum_{i=1}^{N} M_i = \underbrace{\sum \vec M_{int}}_{\substack{\downarrow \\ \sum [\vec r_i \times \vec F_i] \\ = 0}} + \sum \vec M_{ext}$$

$$\frac{d\vec L}{dt} = \vec M_{ext}$$




$$\vec r = OO' + r'$$

$$\vec L = [\vec r \times \vec p] = [\vec{OO'} \times \vec p] + [\vec r' \times \vec p] = \vec L' + [\vec{OO'} \times \vec p]$$

$$\vec L = \vec L'$$

Если перейти в систему центра инерции материальных точек: $\vec L = \sum_i [\vec r_i \times \vec p_i] =$

$$= \sum_i [\vec r_i' \times \vec p_i] + \sum_i [\vec{OO'} \times \vec p]$$

В системе центра инерции:

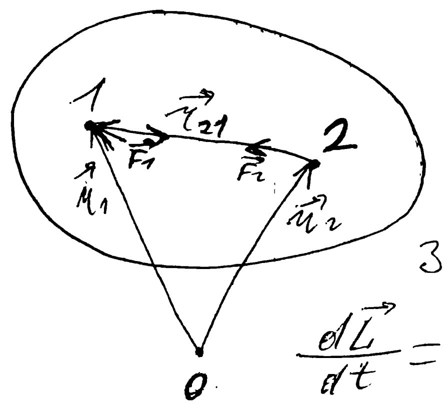
$$\vec{L} = \vec{L}' + \underbrace{\sum_\tau [\vec{OO'} \times \vec{p}_\tau]}$$

собственный момент импульса С.Ц.И. $\qquad [\vec{OO'} \times \underbrace{\sum_\tau \vec{p}_\tau}_{=0}]$

Ещё раз о III законе Ньютона.

~~...~~ Замкнутая система мат. точек (ЗСМС)

ЗСИ $\qquad$ ЗСМИ




$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}_{21}$$

ЗСМИ: $[\vec{r}_1 \times \vec{p}_1] + [\vec{r}_2 + \vec{p}_2] = const$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{F}$$

$$[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] = 0 \qquad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1] = 0$$

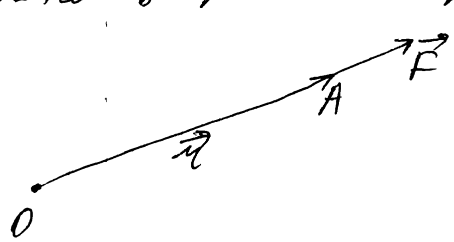
$$\vec{F}_1 \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$[(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2] = 0$$

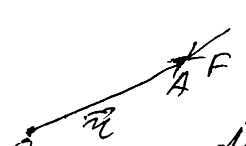
$$\vec{F}_2 \parallel (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Движение в центральном поле. Законы Кеплера.

Центральное поле — особый случай, когда система не замкнута, но момент импульса относительно центра масс сохраняется.




$\vec{F} = \vec{F}(r) \qquad \vec{F}$ вдоль $\vec{r}$



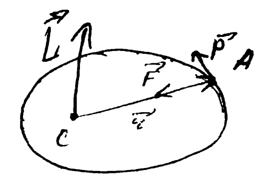

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = const$$

1 закон: Планеты солнечной системы движутся по плоским траекториям в одном из фокусов, в котором светит Солнце.

2 закон: Радиус-вектор планеты описывает равные площади за равные промежутки времени (закон постоянной секторной)

3 закон: $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}$, где $a_1$ и $a_2$ — большие полуоси.




$$F=-G\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=[\vec{r}\times\vec{F}]=0$$

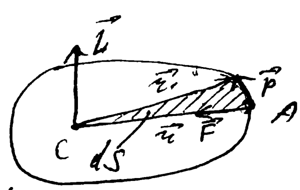
$$\vec{L}=const$$

$\vec{L}=[\vec{r}\times\vec{p}]$, $\perp$ плоскости вращения.

28.09.10г.

1з: $\vec{L}=[\vec{r}\times\vec{p}]=const$

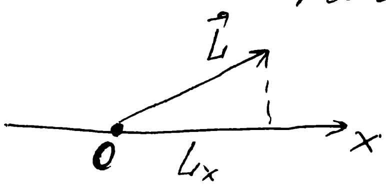
$\vec{M}=[\vec{r}\times\vec{F}]=0$



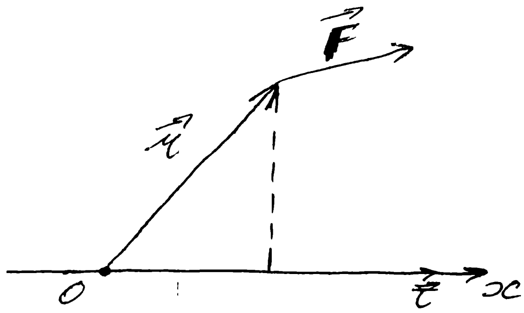

2з: $L=|\vec{L}|=r\cdot p\sin(\vec{r}\,\hat{}\,\vec{p})=2dS$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dL}{dt}=0$$

## Момент импульса и момент силы относительно неподвижной оси.




Моментом импульса (моментом силы) относительно неподвижной оси называется проекция вектора $\vec{L}$ ($\vec{M}$) относительно начала O в предположении, что начало O лежит на этой оси. ~~прямой (проекции)~~




$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

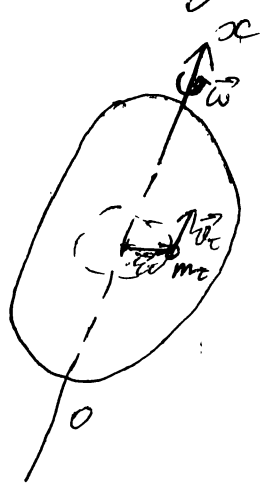
$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [(\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \times (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp})] =$$

$$= \underbrace{[\vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\parallel}]}_{=0} + \underbrace{\underbrace{[\vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\perp}]}_{\perp \vec{r}_{\parallel},\ \perp \vec{F}_{\perp}} + \underbrace{[\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel}]}_{\perp \vec{r}_{\perp},\ \perp \vec{F}_{\parallel}}}_{\perp \text{ оси}} + [\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}]$$

не дают вклада в $M_x$ (сумма их равна 0).

$$\vec{M}_x = [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{плечо} \\ \text{силы}}}{\vec{r}_{\perp}} \times \vec{F}_{\perp}] \quad \Big| \quad \vec{L}_x = [\vec{r}_{\perp} \times \vec{p}_{\perp}]$$

## Уравнение моментов для вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции.




поступательное движение: $\vec{v}_i$ — одинаковые.

вращательное движение: $\vec{\omega}$ — одинаковые.

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i]$$

L отн. оси: $L_i = r_{\perp} \cdot m_i \, v_{i\perp}$

$$v_i = \omega \cdot r_{i\perp}$$

$$L_i = m_i \cdot r_{i\perp}^2 \, \omega$$

$$L = (\underbrace{\sum_i m_i \cdot r_{i\perp}^2}) \omega = I \omega$$

$$\boxed{I = \sum_i m_i \cdot r_{i\perp}^2}$$ — момент инерции.

$$dm = \rho \, dV$$

$$I = \int \rho r^2 dV$$

$$L = I \cdot \omega.$$

$$\frac{dL}{dt} = M = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = M$$

Если $M = 0$ [redacted] то $L = I\omega = const$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Работа при повороте на угол $d\varphi$

$$dA = (\vec F \cdot d\vec r)$$

$$d\vec r = [d\vec\varphi \times \vec r]$$

$$dA = \sum_i (\vec F_i \cdot d\vec r_i) = \sum_i (\vec F_i \cdot [d\vec\varphi \times \vec r_i])$$

$$(\vec a \cdot [\vec b \times \vec c]) = (\vec b[\vec c \times \vec a]) = (\vec c[\vec a \times \vec b])$$

$$dA = \sum_i (d\vec\varphi \underbrace{[\vec r_i \times \vec F_i]}_{M_i}) = (d\vec\varphi \cdot \sum [\vec r_i \times \vec F_i]) = d\vec\varphi \cdot \vec M$$

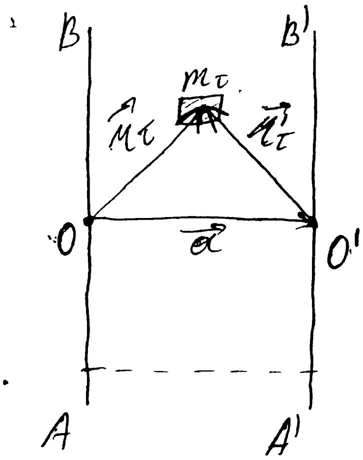
$$\boxed{dA = d\vec\varphi \cdot \vec M}$$

Равновесие системы точек означает, что потенциальная энергия не изменяется при повороте на угол $d\varphi$.

$$dA = 0$$

т.к. $d\varphi \neq 0$, то $\vec M = \sum \vec M_i = 0$

Теорема Гюйгенса–Штейнера.




O – центр инерции

O' – не ц. и.

$$\vec r_i = \vec a + \vec r_i$$

$$\vec r_i' = \vec r_i - \vec a$$

$$r_i'^2 = r_i^2 + a^2 - 2(\vec r_i \vec a)$$

$$I_0 = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I_{0'} = \sum_i m_i r_i'^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_\tau m_\tau r_\tau^2}_{I_0} + \underbrace{\sum_\tau m_\tau a^2}_{m a^2} - \underbrace{2\sum_\tau m_\tau (\vec a \, \vec r_\tau)}_{2\vec a \left(\sum_\tau m_\tau \vec r_\tau\right)}$$

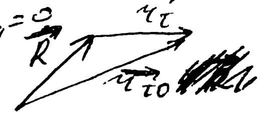
$$\sum_\tau m_\tau \vec r_\tau = 0$$

$$\boxed{I_{0'} = I_0 + ma^2}$$

$$\vec R = \frac{\sum_\tau m_\tau \vec r_{\tau 0}}{\sum m_\tau} =$$

$\vec R$ - координата центра инерции.

$$= \frac{\sum_\tau m_\tau \vec r_{0\tau} - \sum m_\tau \vec r_{\tau 0}}{\sum m_\tau} \cdot \sum m_\tau = 0$$




$$\vec r_\tau = \vec r_{\tau 0} - \vec R$$

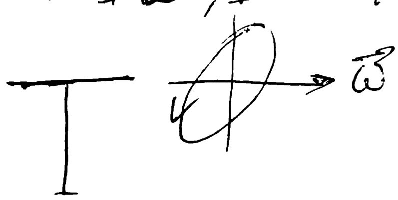
$$\sum_\tau m_\tau \vec r_\tau = \sum_\tau m_\tau \vec r_{\tau 0} - \sum_\tau \vec R m_\tau$$

01.10.10 г.

Формула Жуковского.

Скамья Жуковского:

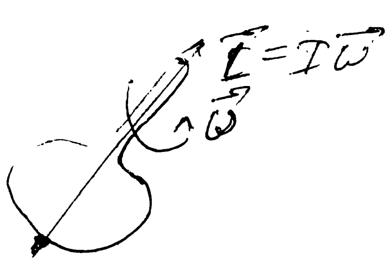
$\vec L = I\vec\omega$ ; $I = m_\tau r_\tau^2$




Гироскоп

- это массивное осе-симметричное тело со свободно ориентирующейся осью.

$I = \sum m_\tau r_\tau^2$



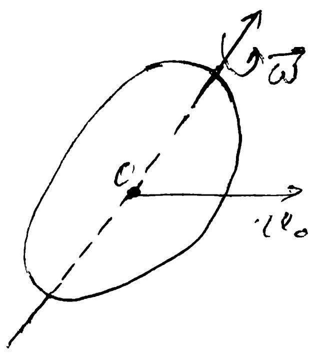

$\vec L = I\vec\omega$  $\frac{d\vec L}{dt} = \vec M$

$d\vec L = dt \cdot \vec M$

Параметрическое движение.

Энергия движущегося тела.

Любой вид движения твердого тела можно представить в виде суперпозиции перемещения при повороте.



$K$ – кинетическая энергия

$$K = \frac{M v_c^2}{2} + K_{вр}$$

$$\frac{M v_c^2}{2} = \frac{M}{2}\left(v_{cx}^2 + v_{cy}^2 + v_{cz}^2\right)$$

3 степени свободы.

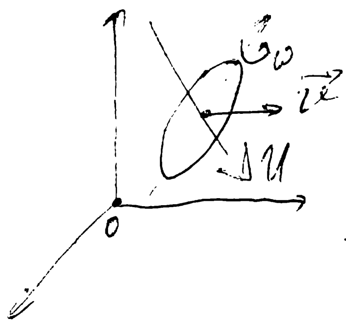
$$K_{вр} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i r_i^2 \cdot \omega^2}{2} = I\frac{\omega^2}{2}$$

$$\vec{v}_i = r_i \vec{\omega}$$

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$$

+ 3 степени свободы.

всего 6 степеней свободы.



$$K = \frac{1}{2}\int \rho v^2 dV$$

$\rho$ – плотность тела.

$$E = K_{пост} + K_{вр} + E_{пот} + E_{внутр}.$$

Степень свободы – это число независимых

Законы сохранения и симметрия пространства и времени.

З. С. Эн. ← однородность $t$.

З. С. Имп. ← однородность пространства.

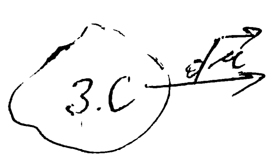
З. С. Момента Имп. ← изотропность пространства.

1) Однородность времени означает:
если в 2-х любых моментах времени всем телам в замкнутой системе поставить в одинаковые условия, то начиная с этого моментах времени все процессы будут протекать совершенно одинаково (в этой системе)

2) Однородность пространства:
если в замкнутую систему переместить из одного места пространства в другое, поставить в неё те же условия, то это не отразится на ходе последующих явлений.

3) Изотропность пространства:
если замкнутую систему повернуть на какой-то угол, поставить в неё те же условия то это не отразится на ходе всех последующих явлений.

ЗСИм. ← однородность пространства.
Так как пространство однородно, то св-ва замкнутой системы не зависят от её перемещения в пространстве.




$$A = (\vec{F_i} \cdot d\vec{r})$$
$$A = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F_i} \cdot d\vec{r})$$

Сумма всех этих работ должна равняться изменению потенциальной энергии. Независимость свойств замкнутой системы от перемещения означает, что они равна нулю.

$$\sum_i (\vec F_i \cdot d\vec r) = -dU = 0$$

$$(\vec F_1 d\vec r) + (\vec F_2 d\vec r) + \dots + (\vec F_i d\vec r) = 0$$

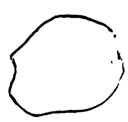
$$d\vec r = const$$

$$(\vec F_1 + \vec F_2 + \dots + \vec F_i) = 0; \quad \sum_i \vec F_i = 0$$

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F = 0; \quad \frac{d\vec p}{dt} = 0. \text{ — З.С.И.}$$

05.10 10г.

ЗСМИ ← изотропность пространства.



$d\varphi$

$$dA_i = (\vec M_i \cdot d\vec\varphi)$$

$$A = \sum (\vec M_i \, d\vec\varphi) = (d\vec\varphi \cdot \sum \vec M_i) =$$

$$= dU = 0$$

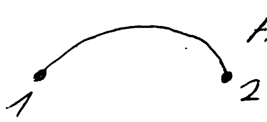
$$\begin{cases} \sum \vec M_i = 0 \\ \frac{d\vec L}{dt} = \vec M \end{cases}$$

$$\frac{dL}{dt} = 0. \text{ — ЗСМИ.}$$

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F$$

ЗСЭ ← однородность времени

$$A_{12} = K_2 - K_1$$



$$dA = (\vec F \cdot d\vec r)$$

$$\vec F = -\,\mathrm{grad}\, U$$

$$\vec F = -\left(\vec i \frac{\partial U}{\partial x} + \vec j \frac{\partial U}{\partial y} + \vec k \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$dA = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right)$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \pm \frac{\partial U}{\partial t} dt\right) =$$

$$U = U(x, y, z, t)$$

$$= -\int dU + \int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt.$$

$$A_{12} = K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$\underbrace{(K_2 + U_2)}_{E_2} - \underbrace{(K_1 - U_1)}_{E_1} = \int \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

В силу однородности времени ф-ия $U$ не может явно зависеть от $t$, тогда $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$

Тогда $E_2 = E_1$. — З.С. Эн.

Колебания.

Гармонические колебания.

Колебания — это всякий периодический процесс, в котором значение той или иной физической величина повторяется через равные или примерно равные промежутки времени.

Характеристики:

1 — ~~закон~~, по которому повторяется движение.

2 — время, через которое повторяется движение.

3 — наибольшее значение физической величина.

Для гармонических колебаний:

1 — cos; 2 — $T$; 3 — $A$.

$X = A\cos\overbrace{(\omega t + \alpha)}^{\varphi}$ $\qquad$ $\varphi$ — фаза

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad$ $\varphi\Big|_{t=0} = \alpha$ — начальная фаза.

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha) = $$
$$= A\omega\cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

W-ускорение; $W = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha) =$
$$= A\omega^2\cos(\omega t + \alpha + \pi) =$$
$$= -\omega^2 X$$

$mW = F$

$\underbrace{-m\omega^2}_{k} x = F \qquad F = -kx$

$$K = \frac{m v^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \alpha).$$

$E = K + U$ — полная энергия.

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

$$\langle K\rangle = \frac{mA^2\omega^2}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \alpha)\,dt = \langle \sin^2\varphi\rangle$$

$$\langle \sin^2\varphi\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\varphi\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle K\rangle = \frac{mA^2\omega^2}{4} = \frac{E}{2}$$

$$\boxed{E \sim A^2} \qquad \langle U\rangle = \frac{m\omega^2A^2}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \alpha)\,dt = \langle\cos^2\varphi\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle U\rangle = \langle K\rangle = \frac{1}{2}E$$

Колебания математического и физического маятников.

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \text{ где } k = m\omega^2$$

$v = \dot{x}$

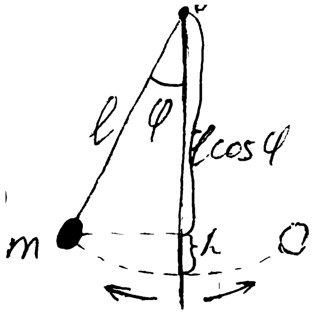
$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2x^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2x^2)$$

$$\text{З.С.}\cancel{Э}M: \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{m}{2}(2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega^2 x\dot{x}) =$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad = \frac{2\dot{x}}{2}m(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

# Математический маятник.




$p = mg$

$h = l(1-\cos\varphi)$

$U\big|_{\varphi=0} = 0$

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

$v = l\omega$

$\omega = \dot{\varphi}$ - угловая скорость. $\quad h = l(1-\cos\varphi) \quad \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

Условием реализации гармонических колебаний является малость отклонений от положения равновесия

$$E = \frac{m}{2}l^2\omega^2 + mgl\frac{\varphi^2}{2} = \frac{ml}{2}(l\omega^2 + g\varphi^2)$$

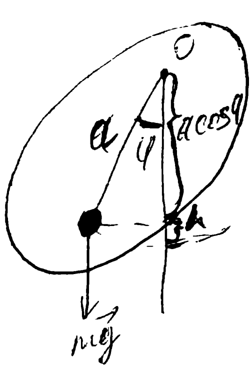
$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{ml}{2}(2l\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 2g\varphi\dot{\varphi}) =$$

$$= \frac{2ml\dot{\varphi}}{2}(l\ddot{\varphi} + g\varphi) = 0$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

# Физический маятник.




$h = a(1-\cos\varphi)$

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

$$K = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$U = mgh = mga\frac{\varphi^2}{2}$$

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mga\frac{\varphi^2}{2} = \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{mga}{I}\varphi^2\right)$$

$$l_{\text{приведенная}} = \frac{I}{ma}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{I}{2}\left(2\dot\varphi\ddot\varphi + \frac{g}{l_{np.}} 2\varphi\dot\varphi\right) =$$

$$= I\dot\varphi\left(\ddot\varphi + \frac{g}{l_{np.}}\varphi\right)$$

$$\boxed{\ddot\varphi + \frac{g}{l_{np.}}\varphi = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l_{np.}} = \frac{gma}{I}$$

Фазовый портрет маятника.

$$E = \frac{m v^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = const.$$

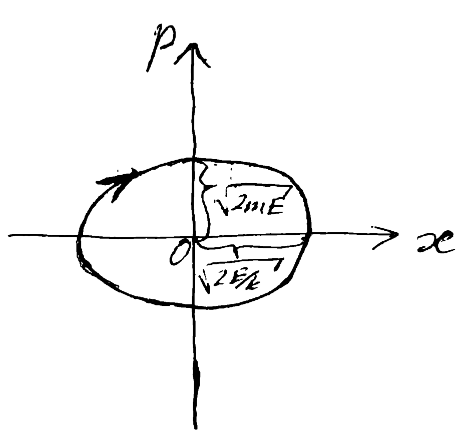
$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(ур-е эллипса)

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1$$

$$\frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} + \frac{x^2}{(\sqrt{2E/k})^2} = 1$$




11.10.10 г.

$$m w = F$$

$$F = -kx$$

$$m\ddot x = -kx$$

$$\ddot x + \omega_0^2 x = 0 \qquad x = A\cos\omega t$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \dot x = -A\omega\sin\omega t = $$

$$= A\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

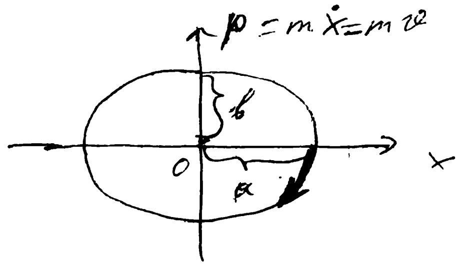
$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\ddot\varphi + \frac{gam}{I}\varphi = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{gma}{I} = \frac{g}{l_m}$$

$$E = \underbrace{\frac{m\dot{x}^2}{2}}_{\frac{p^2}{2m}} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{p^2}{2mE} = 1$$




$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

$$S = \pi ab = \pi\sqrt{\frac{2E}{k}}\cdot\sqrt{2mE} =$$

$$= 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi E}{\omega_0} = E\cdot T = const.$$

адиабатический инвариант (ИНВ):

$$y = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega_0}$$

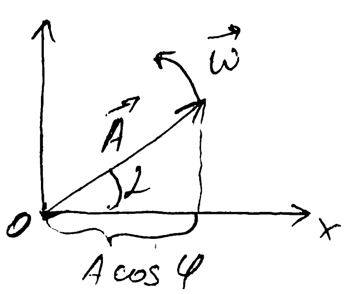
$$E = const\cdot\omega_0$$

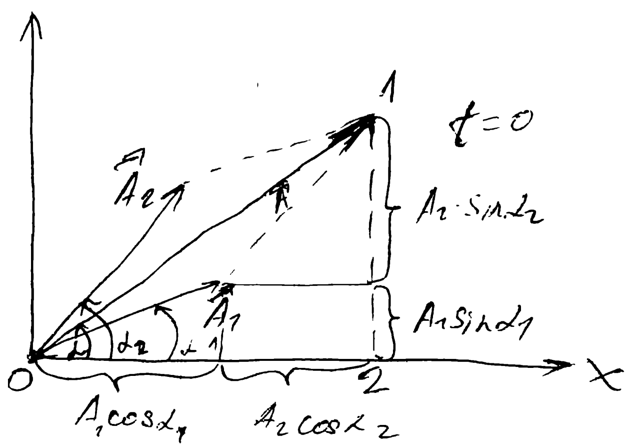
## Сложение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

1) Сложение 2-х колебаний $x_1$ и $x_2$ одного напр. с одной частотой:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t + \alpha_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t + \alpha_2) \end{aligned}\right\} x = A\cos(\omega t + \alpha)$$




По теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$tg\,\alpha = \frac{12}{02} =$$

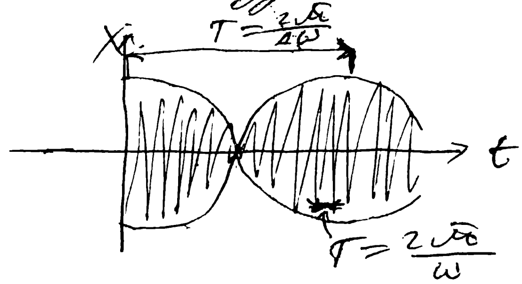
$$= \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

2) Сложение колебаний с близкими частотами (биения):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\cos\omega t & \omega_1 &= \omega \\ x_2 &= A\cos(\omega+\Delta\omega)t & \omega_2 &= \omega_1+\Delta\omega \end{aligned}\right\} \Delta\omega \ll \omega$$

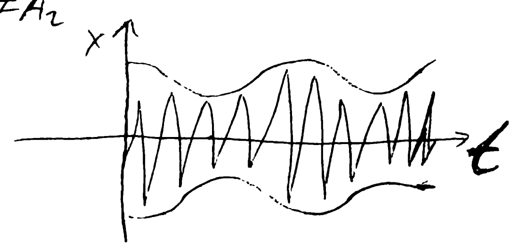
$$x = x_1 + x_2 = \cancel{2A\cos\ldots}$$

$$= \underbrace{2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t}_{\text{амплитуда}}\cdot\cos\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t$$




$A_1 = A_2$

$A_1 \neq A_2$




3) Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний.

а) одинаковые частоты:

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\cos(\omega t+\alpha) \end{cases}$$

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega t+\alpha) =$$

$$= \cos(\omega t)\cdot\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha$$

$$\frac{x}{a} = \cos\omega t\ ;\ \sin\omega t = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

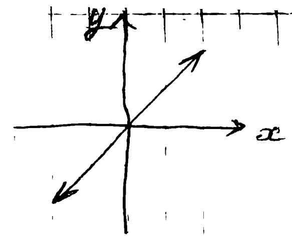
$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cdot\cos\alpha - \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\alpha$$

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\alpha$$

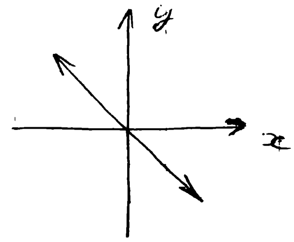
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\cos^2\alpha - 2\frac{xy}{ab}\cos\alpha = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\alpha$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha \quad (*)$$

$\alpha = 0 \qquad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0; \; y = \frac{b}{a}x$

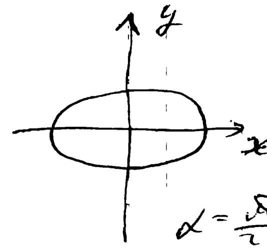


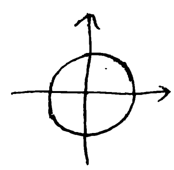
$\alpha = \pm\pi \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0; \; y = -\frac{b}{a}x$



$\alpha = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс)

если $a = b = R$, то $x^2 + y^2 = R^2$ (окружность)





$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ↻

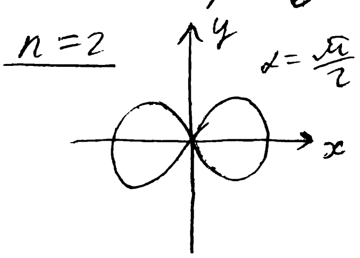
$\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ↺

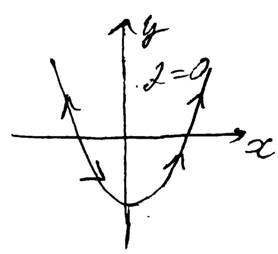
б) разные частоты:

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\cos(n\omega t + \alpha) \end{cases}$$

$\frac{\omega_y}{\omega_x} = n$ 	фр. физик (Лиссажу)

характер фигур зависит от частот и разности фаз.




## Затухающие колебания.

Формула Эйлера:

$z = e^{i\delta} = \underbrace{\cos\delta}_{Re\, z} + \underbrace{i\sin\delta}_{Im\, z}; \quad i = \sqrt{-1}$

$A e^{i(\omega t + \alpha)} = \underbrace{A\cos(\omega t + \alpha)}_{Re\, A e^{i(\omega t+\alpha)}} + iA\sin(\omega t + \alpha)$

$z = e^{x \cdot t}; \; \dot{z} = x e^{x \cdot t}$

$mw = \sum F$ 	по $x$

$m\ddot{x} = -kx + F_{тр}; \; F_{тр} = -b \cdot \vartheta$

$m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0$ $\qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \frac{b}{m} = 2\gamma$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

Решение ур-я (1) ищем в виде экспоненты (exp): $x = e^{\beta t}$

подставим (1): $\dot{x} = \beta \cdot e^{\beta t}$

$\ddot{x} = \beta^2 e^{\beta t}$

$$e^{\beta t}(\beta^2 + 2\gamma\beta + \omega_0^2) = 0 \qquad e^{\beta t} > 0$$

$$\beta^2 + 2\gamma\beta + \omega_0^2 = 0$$

$$\beta_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2)$$

а) $\gamma < \omega_0$ (малые потери).

б) $\gamma = \omega_0$ (средние потери энергии).

в) $\gamma > \omega_0$ (большое трение).

$\boxed{\gamma < \omega_0}$

12.10.11г.

$$\beta_{12} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

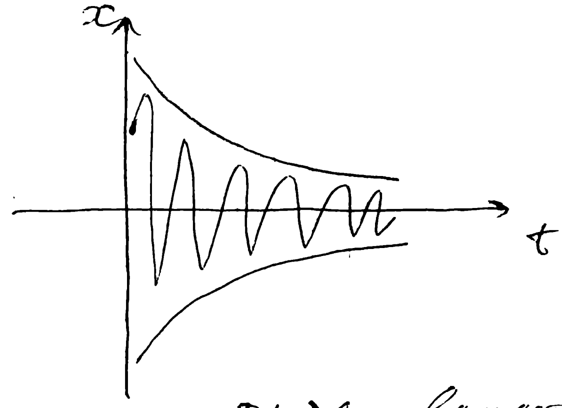
$$x = e^{\beta t}$$

$$\beta = -\gamma \pm i\omega_1$$

$$x = C_1 e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\gamma - i\omega_1)t}$$

$$x = e^{-\gamma t}\{C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\}$$

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \alpha) \quad (3)$$




т.к. $x$ — вещественное, то $x = x^*$

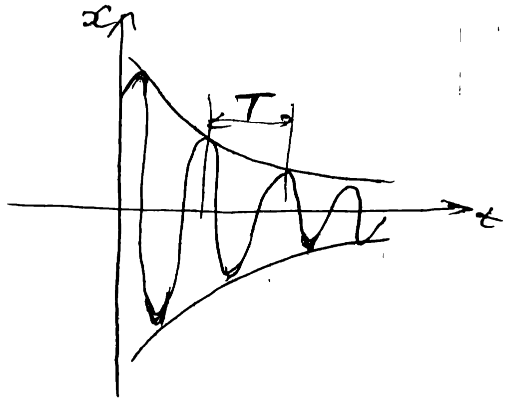
$x^*$ — сопряжённое $x$.

$$C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} = C_1^* e^{-i\omega_1 t} + C_2^* e^{i\omega_1 t}$$

$$C_1 = C_2^* \quad \Big| \quad \frac{A}{2} e^{i\alpha}$$
$$C_2 = C_1^* \quad \Big| \quad \frac{A}{2} e^{-i\alpha}$$

A - вещественное число.

$$\{\ldots\} = \frac{A}{2}\left(\underbrace{e^{i(\omega_1 t+\alpha)}}_{\cos(\ )+i\sin(\ )} + \underbrace{e^{-i(\omega_1 t+\alpha)}}_{\cos(\ )-i\sin(\ )}\right) = \frac{A}{2}\cdot 2\cos(\omega_1 t+\alpha)$$




$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

малость $\gamma$ означает большое $\tau$, т.е. долгое затухание

при $\downarrow\gamma \uparrow\tau$

за время $\tau$ пройдёт $n$ колебаний: $n = \frac{\tau}{T}$

$$\frac{1}{n} = \frac{T}{\tau} = \gamma T = \lambda \ (!)$$

$$\ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma(t+T)}} = \gamma T = \lambda$$

$\lambda$ - логарифмический декремент затухания.

Добротность колебательной системы (осциллятора)

$$Q = \frac{\text{запас } E \text{ в осц.}}{\text{средняя потеря } E \text{ за } T}$$

$$Q = \frac{\langle E\rangle}{\left|\langle -\frac{dE}{dt}\rangle\right|\cdot T}\cdot 2\pi$$

$F_{тр} = -bv$ $\qquad dE = dA_{тр.} = F_{тр}\,dx = -bv\,dx = -bv^2dt$

$$dx = v\,dt$$

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2$$

$$K = \frac{mv^2}{2};\ v^2 = \frac{2K}{m}$$

$K$ - кинетическая энергия.

$$\frac{dE}{dt} = -b\frac{2K}{m}$$

$$\langle\frac{dE}{dt}\rangle = -\frac{2b}{m}\langle K\rangle$$

У осцилляторов:

$$\langle\frac{dE}{dt}\rangle = -\frac{b}{m}\langle E\rangle = -2\gamma\langle E\rangle. \qquad \langle K\rangle = \langle U\rangle = \frac{1}{2}E$$

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{|\langle \frac{dE}{dt} \rangle| T} = 2\pi \frac{E}{2\gamma E T} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\gamma} \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\frac{1}{T} = \nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{1}{2}\omega\tau = \frac{\pi}{\lambda} \quad (5)$$

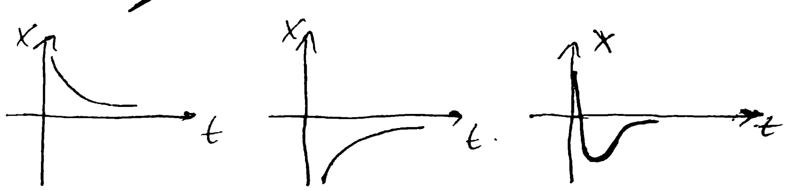
$\boxed{\gamma = \omega_0}$ (2) $\rightarrow \beta_{1,2} = -\gamma$

(апериодическое) $x = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t}$

для проверки подставим в ур-е (1) с учетом $\omega_0 = \gamma$

$\boxed{\gamma > \omega_0}$ (1) $\rightarrow \beta_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

(апериодическое) $x = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$




## Вынужденные колебания и резонанс.

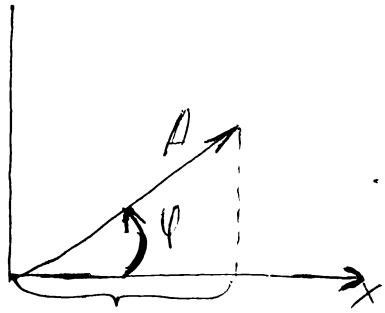
$F = F_0 \cos \omega t$

$x = B \cos(\omega t - \beta)$

$ma = \sum F$

$ma = -kx - bv + F$

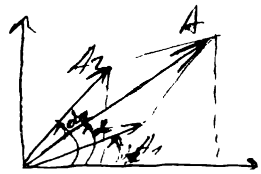
$$\frac{F}{m} = \underbrace{a}_{\ddot{x}} + \omega_0^2 x + 2\gamma \underbrace{v}_{\dot{x}} \quad (1)$$




$A \cos \varphi$

$\varphi = \omega t + \alpha$

$x = x_1 + x_2$




$t = 0$

$$\frac{F}{m} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 B\cos(\omega t - \beta)$$

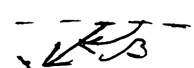
$$2\gamma v = -2\gamma\omega B\sin(\omega t - \beta) = 2\gamma\omega B\cos\left(\omega t - \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 B\cos(\omega t - \beta)$$

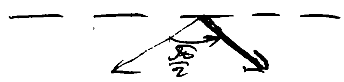
<u>$t = 0$</u>

$$\frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \qquad \text{фаза} = 0$$

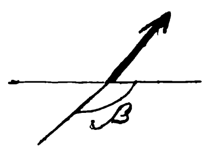
$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 B\cos(-\beta)$$



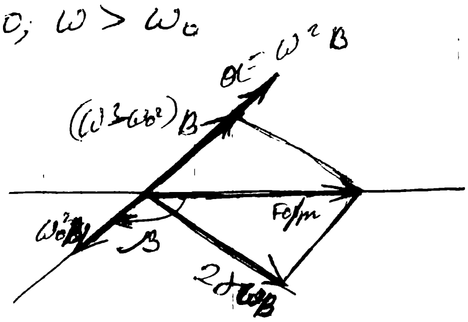

$$2\gamma v = 2\gamma\omega B\cos\left(-\beta + \frac{\pi}{2}\right)$$




$$a = -\omega^2 B\cos(-\beta)$$

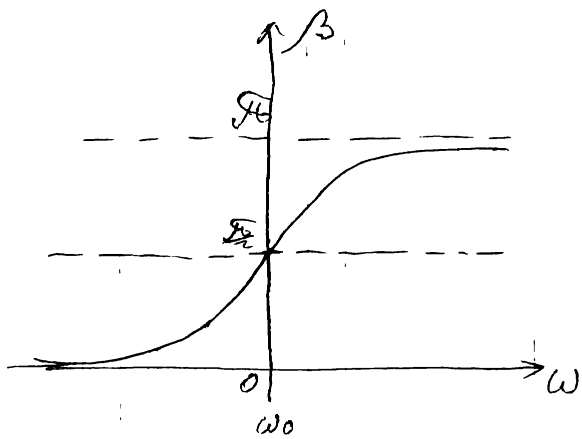



$t = 0;\ \omega > \omega_0$



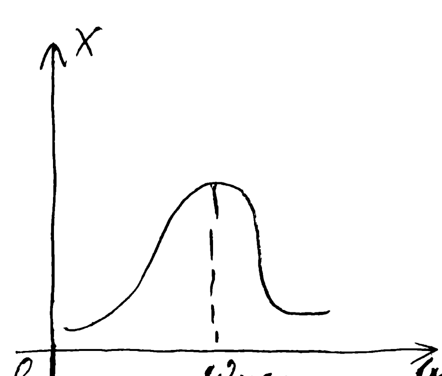

$$tg(\pi - \beta) = -tg\,\beta$$

$$tg\,\beta = \frac{2\gamma\omega B}{(\omega_0^2 - \omega^2)B} = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2)$$




$$\frac{F_0^2}{m^2} = 4\gamma^2\omega^2 B^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 B^2$$

$$B = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (3)$$



Условие минимума под корнем:

$$\frac{d}{d\omega}\{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2\}=0$$

$$2(\omega^2-\omega_0^2)\cdot 2\omega + 8\gamma^2\omega=0$$

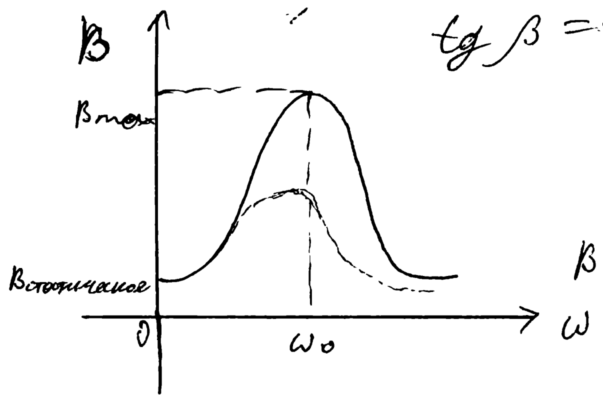
$$\omega\{\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2\}=0$$

$\omega=0$ $\qquad$ $\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2=0$

$$\omega^2=\omega_0^2-2\gamma^2$$

$$\omega_{рез.}=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$$

18.10.10г.




$$tg\,\beta=\frac{2\gamma\omega}{\omega_1^2-\omega^2}$$

$$\gamma \ll \omega_0$$

$$\omega_p \approx \omega_0$$

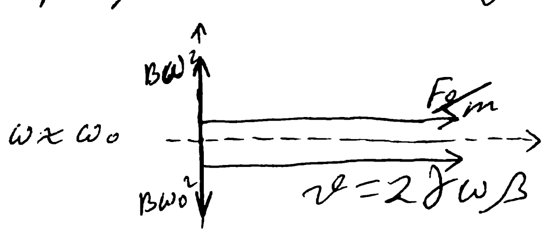
$$B|_{\omega=\omega_0}=B_{max}=\frac{F_0}{m\,2\gamma\omega_0} \qquad (4)$$

с убыванием $\gamma$ $B_{max}$ возрастает.

$$B_{стат.}=B|_{\omega=0}=\frac{F_0}{m\,\omega_0^2}$$

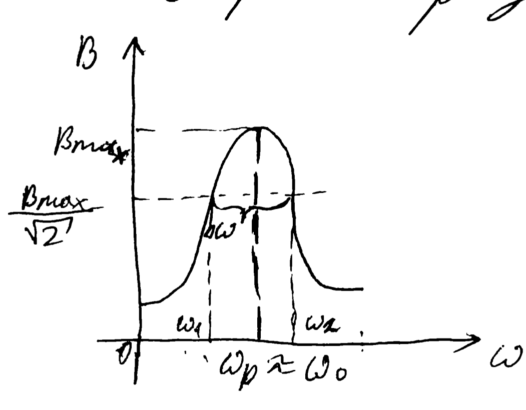
$$\frac{B_{max}}{B_{стат}}=\frac{\omega_0}{2\gamma}=Q$$

При резонансе: $tg\,\beta \to \infty;\ \beta=\frac{\pi}{2}$




т. е. вынуждающая сила и скорость совпадают по фазе.

## Острота резонанса.



$\omega \approx \omega_0$

в (3): $(\omega^2 - \omega_0^2) = (\omega - \omega_0)\cdot(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$

$$4\gamma^2\omega^2 \approx 4\gamma^2\omega_0^2$$

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{4\omega_0^2(\omega-\omega_0)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_0}}_{B_{max}\cdot\gamma}\frac{1}{\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}} = \frac{B_{max}\gamma}{\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}}$$

т.к. $E \sim B^2$, то $E\Big|_{\omega_1} = \frac{1}{2} E\Big|_{\omega_0}$

$\omega = \omega_1 \qquad B = \frac{B_{max}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_1-\omega_0)^2+\gamma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\omega_1 - \omega_0) = \frac{\Delta\omega}{2} = \gamma$$

$$\Delta\omega = 2\gamma$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

$Q$ – добротность.

| | $Q$ |
|---|---|
| $Fe^{57}$ | $10^{14} \div 10^{15}$ |
| от. ч. | $10^7$ |
| струна | $10^3$ |
| сейсм. ист. | $25 \div 1400$ |

## Принцип суперпозиции колебаний.

$F_1(t) \rightarrow x_1(t)$

$F_2(t) \rightarrow x_2(t)$

$F = F_1 + F_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2$

$$+\begin{array}{l} F_1 = m\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 + kx_1 \\ F_2 = m\ddot{x}_2 + \beta\dot{x}_2 + kx_2 \end{array}$$

$$F = F_1 + F_2 = m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \beta(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + k(x_1 + x_2)$$

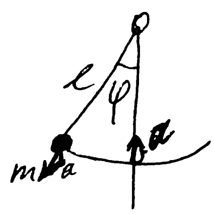
$$\Downarrow$$

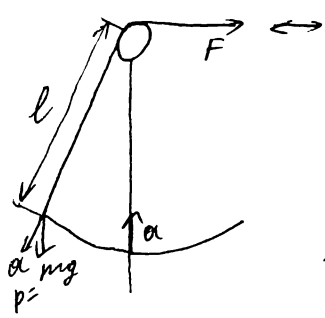
$$x = x_1 + x_2$$

Принцип суперпозиции колебаний является следствием дифференциальных ур-й, описывающих колебания.

## Параметрический резонанс.

- это возбуждение колебаний при периодическом изменении параметров колебательной системы.




$\uparrow\downarrow$

$\frac{m v_0^2}{l}$

$\varphi - \varphi_0 \leftarrow$ ↑ длина на „a" (удлинение) ⊖

$\varphi = 0 \rightarrow$ ↓ длина на „a" (укорачивание) ⊕

⊖ опуск. на $a \cdot \cos\varphi_0 \approx a\left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2}\right)$

⊕ подн. на „a"

$$+\begin{aligned} A &= mg\,(1-\cos\varphi_0)\cdot a \approx mga\frac{\varphi_0^2}{2} \\ A_1 &= \frac{m v_0^2}{l}\cdot a \end{aligned}$$

за T: $A_0 = 2(A + A_1) = \left(\frac{mga\varphi_0^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2}a\right)\cdot 2$

$$v_0^2 = l g \varphi_0^2$$

$$A = 6\frac{a}{l}\underbrace{\frac{m v_0^2}{2}}_{\sim E};\ A > 0.$$

⊕ $\sim E$

$$\frac{dE}{dt} = \varkappa E$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E$$