



Лекция 19. Статистические распределения (часть 1)

1. Введение. Статистический метод.
2. Некоторые сведения из теории вероятностей.
3. Нормальное распределение (распределение Гаусса).
4. Распределение молекул по скоростям теплового движения.
5. Функция распределения по проекции скорости.
6. Функция распределения по вектору скорости.
7. Функция распределения по модулю скорости.
8. Характерные скорости распределения молекул по скоростям.

1. Введение. Статистический метод.

Мгновенное состояние механической системы в классической механике определяется координатами и скоростями частиц, из которых состоит система. Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия колоссального числа молекул. Определить в каждый момент времени координаты и скорости всех молекул и атомов рассматриваемой системы невозможно. Однако в системах с огромным числом частиц появляются новые, статистические закономерности, изучаемые с помощью статистического метода. Этот метод основан на том, что свойства макроскопической системы в конечном счёте определяются свойствами частиц системы, особенностями их движения и усреднёнными значениями динамических характеристик этих частиц (скорости, энергии и т.д.). Молекулярно-кинетическая теория пользуется статистическим методом, интересуясь не движением отдельных молекул, а лишь такими средними величинами, которые характеризуют движение огромной совокупности частиц. Отсюда её другое название – статистическая физика.

2. Некоторые сведения из теории вероятностей.

Основу статистической физики составляет теория вероятностей. Приведём некоторые сведения из этой теории.

1) *Определение вероятности.* Рассмотрим некоторую макроскопическую систему, образованную огромным числом микрочастиц (молекул, атомов, ионов, электронов), находящуюся в заданном состоянии. Предположим, что какая-то характерная для системы величина x может иметь дискретные значения: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_s$. Осуществим над системой очень большое число N измерений величины x , приводя систему перед каждым измерением в одно и то же исходное состояние. Допустим, что N_1 измерений дали результат x_1 , N_2 измерений – результат x_2, \dots, N_i измерений – результат x_i и т.д. Величина

N_i/N называется относительной частотой появления результата x_i , а предел этой величины при стремлении N к бесконечности

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (19.1)$$

называется *вероятностью* появления результата x_i .

Так как на практике N всегда конечно, то для вычисления вероятности стараются, чтобы N и N_i были достаточно большими. Тогда можно считать, что

$$P_i \approx \frac{N_i}{N}$$

Поскольку $\sum N_i = N$, то

$$\sum P_i = \sum \frac{N_i}{N} = 1, \quad (19.2)$$

то есть сумма вероятностей всех возможных результатов измерений равна единице.

2) *Теорема о сложении вероятностей.* Определим вероятность несовместных событий x_i либо x_k (например, вероятность того, что при бросании кубика выпадет 2 или 5). Если в результате N измерений в N_i случаях произойдёт событие x_i , а в N_k случаях – x_k , то вероятность получить результат x_i либо x_k равна

$$P_{i \text{ или } k} = \frac{N_i + N_k}{N} = \frac{N_i}{N} + \frac{N_k}{N} = P_i + P_k. \quad (19.3)$$

Теорема о сложении вероятностей утверждает: вероятности несовместимых событий складываются.

3) *Теоремой об умножении вероятностей.* Пусть система характеризуется значениями двух величин x и y , причём обе величины могут принимать дискретные значения, вероятности появления которых равны

$$P(x_i) = \frac{N(x_i)}{N} \text{ и } P(y_k) = \frac{N(y_k)}{N}.$$

Найдём вероятность $P(x_i, y_k)$ того, что при некотором измерении для x будет результат x_i , а для y — y_k . Например, рассмотрим N двойных бросаний кубика и определим вероятность того, что при двух бросаниях кубика выпадут, допустим, сначала 2 (результат x_i), а затем 5 (результат y_k).

Пусть результат x_i получится в числе измерений, равном $N(x_i) = P(x_i) \cdot N$. Выделим из этих $N(x_i)$ случаев те, когда одновременно с x_i получается результат y_k . Если значение величины y не зависит от значения величины x , то результат y_k будет получаться одновременно с x_i в числе случаев, равном

$$N(x_i, y_k) = N(x_i)P(y_k) = (P(x_i) \cdot N)P(y_k)$$

Искомая вероятность

$$P(x_i, y_k) = \frac{N(x_i, y_k)}{N} = P(x_i)P(y_k).$$

Таким образом, в соответствии с теоремой об умножении вероятностей, вероятность одновременного появления статистически независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(x_i, y_k) = P(x_i)P(y_k). \quad (19.4)$$

4) *Среднее значение случайной величины.* Зная вероятности появления различных результатов, можно найти среднее значение всех результатов. По определению среднего

$$\langle x \rangle = \frac{\sum N_i x_i}{N} = \sum P_i x_i. \quad (19.5)$$

5) *Функция распределения.* Рассмотрим случай, когда случайная величина x может принимать непрерывный ряд значений (например, скорости молекул).

Для этого разобьем всю область изменения x на малые интервалы и будем считать число попаданий dN случайной величины в тот или иной интервал (рис.19.1). Вероятность того,

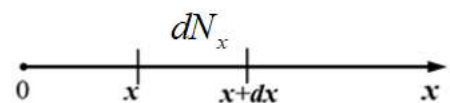


Рис.19.1

что результат измерения величины x будет заключен в пределах от x до $x + dx$

$$dP_x = \frac{dN_x}{N}.$$

Величина этой вероятности пропорциональна ширине бесконечно узкого интервала dx , так что она может быть представлена в виде

$$dP_x = f(x)dx, \quad (19.6)$$

причем коэффициент пропорциональности $f(x)$, вообще говоря, зависит от x . Функция $f(x)$ называется *функцией распределения* случайной величины x .

Функции распределения $f(x)$ можно приписать смысл плотности вероятности, т. е. вероятности интересующей нас величины оказаться в единичном интервале вблизи значения x :

$$f(x) = \frac{dP_x}{dx}.$$

В разных случаях функция распределения имеет совершенно различный вид, один из которых в качестве примера приведен на рис. 19.2. В соответствии с (19.6) площадь полоски шириной dx

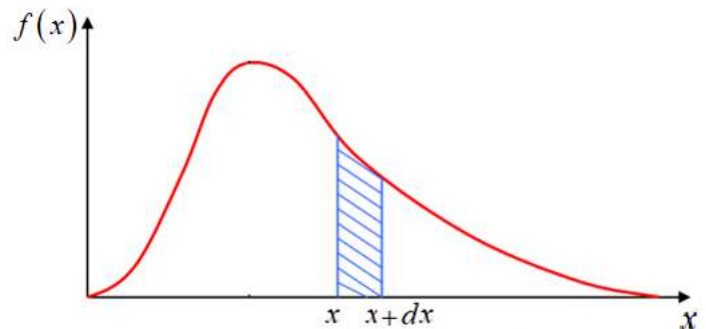


Рис.19.2

на этом рисунке равна вероятности того, что случайная величина x окажется в пределах интервала $(x, x + dx)$.

Вероятность того, что величина x попадает в интервал (a, b) :

$$P_{(a,b)} = \int_a^b f(x)dx. \quad (19.7)$$

Ясно, что вероятность того, что величина x может принять хотя бы какое-нибудь значение (достоверное событие), равна единице

$$\int f(x)dx = \int dP_x = 1. \quad (19.8)$$

Интегрирование производится по всему интервалу возможных значений величины x . Формулу (19.8), являющуюся аналогом формулы (19.2), называют условием нормировки функции $f(x)$. Из этого условия следует, что вся площадь под кривой $f(x)$ на рисунке 19.2 равна единице.

6. *Средние значения.*

Зная функцию распределения $f(x)$, можно найти среднее значение результатов измерения величины x можно найти. Обратимся к формуле (19.5). Она справедлива и для случая, когда интервал изменения величины x будет разбит на небольшие участки. Уменьшая участки и заменяя в конце концов P_i на dP , суммирование в (19.5) на интегрирование по интересующему нас интервалу значений x , получим

$$\langle x \rangle = \int x f(x) dx. \quad (19.9)$$

Аналогичные рассуждения дают, что среднее значение некоторой функции $\varphi(x)$ можно вычислить по формуле

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int \varphi(x) f(x) dx.$$

Например,

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx. \quad (19.10)$$

3. Нормальное распределение (распределение Гаусса).

Особую роль в теории вероятности и её приложениях играет нормальное распределение – наиболее часто встречающийся на практике закон распределения (открыт Муавром в 1733 г. и затем детально изучалось Лапласом и Гауссом). В честь Гаусса нормальное распределение часто называют гауссовским. Главной особенностью, выделяющей нормальный закон среди других, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы при часто встречающихся типичных условиях.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается функцией распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}. \quad (19.11)$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a – среднее значение случайной величины, σ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

График плотности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса). Нормальная кривая имеет симметричный холмообразный вид (рис.19.3). Максимальное значение функции нормального распределения $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ соответствует точке $x = a$. По мере удаления от точки a плотность распределения падает, и при $x \rightarrow \pm\infty$ кривая асимптотически приближается к оси x .

Параметр σ определяет форму кривой распределения. Так как максимум функции нормального распределения равен $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, а площадь, ограниченная кривой нормального распределения всегда равна единице, то при увеличении σ кривая распределения растягивается вдоль оси Ox , а максимум функции становится меньше.

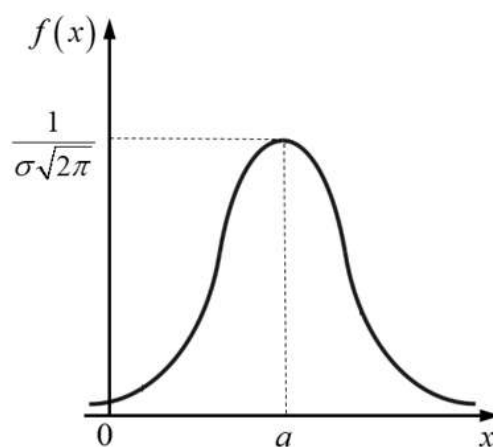


Рис.19.3

4. Распределение молекул по скоростям теплового движения.

Молекулы газа вследствие теплового движения испытывают многочисленные соударения друг с другом. При каждом соударении скорости молекул изменяются как по величине, так и по направлению. В результате в сосуде, содержащем большое число молекул, устанавливается некоторое

статистическое распределение молекул по скоростям, зависящее от абсолютной температуры T . При этом все направления векторов скоростей молекул оказываются равноправными (равновероятными), а величины скоростей подчиняются определенной закономерности. Задача о распределении молекул газа по скоростям была поставлена и решена Максвеллом в 1859 г.

При выводе закона распределения Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа N тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при одинаковой температуре. Предполагалось также, что силовые поля на газ не действуют.

Рассмотрим систему, состоящую из большого числа молекул, находящуюся в закрытом сосуде. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные $d\nu$, то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул dN_ν , имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция распределения молекул по скоростям $F(\nu)$ определяет относительное число молекул dN_ν / N , скорости которых лежат в интервале от ν до $\nu + d\nu$

$$\frac{dN_\nu}{N} = F(\nu)d\nu, \quad (19.12)$$

$$F(\nu) = \frac{dN_\nu}{N d\nu}. \quad (19.13)$$

Относительное число молекул dN_ν / N , есть вероятность dP_ν того, что скорость частицы находится в интервале от ν до $\nu + d\nu$, поэтому

$$F(\nu) = \frac{dP_\nu}{d\nu} \quad \text{и} \quad dP_\nu = F(\nu)d\nu. \quad (19.14)$$

Как было отмечено выше, если известен вид кривой распределения $F(\nu)$ (рис.19.4), то площадь столбика шириной $d\nu$ равна вероятности dP_ν . Площадь, ограниченная кривой распределения, равна 1. Это означает, что

$$\int F(\nu)d\nu = \int dP_\nu = 1, \quad (19.15)$$

где интегрирование ведётся по всем возможным значениям скорости.

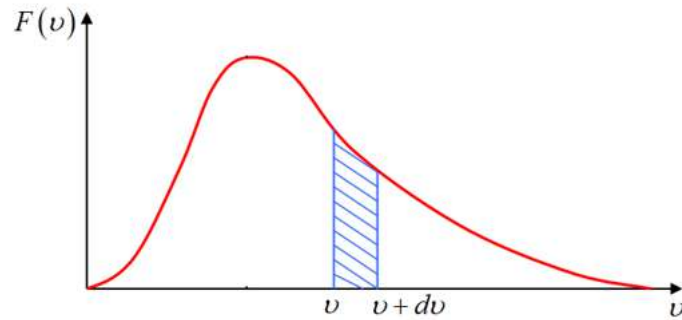


Рис.19.4

Распределения молекул по скоростям можно наглядно представить с помощью так называемого пространства скоростей. Примем произвольную точку пространства O за начало координат (рис. 19.5). Отложим от нее в какой-то момент времени t векторы скоростей всех молекул газа: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$. Концы этих векторов называются *скоростными* или *изображающими точками*. Совокупность всех скоростных точек образует трехмерное пространство, называемое *пространством скоростей* (v – пространство). В нем можно ввести прямоугольные оси. Координатами скоростной точки являются проекции v_x, v_y, v_z вектора \vec{v} на эти оси.

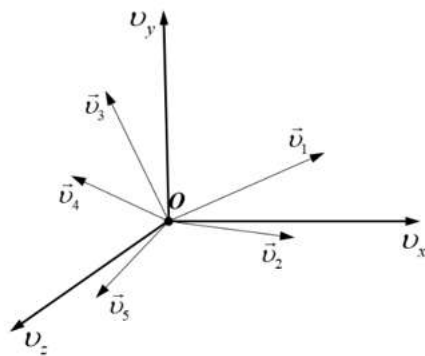


Рис.19.5

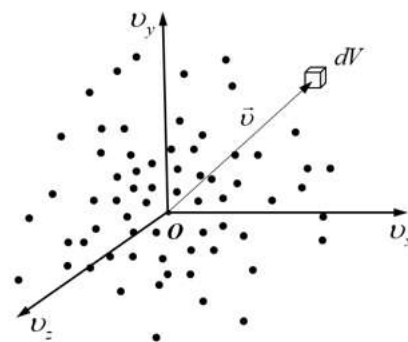


Рис.19.6

Таким образом, скорости каждой молекулы соответствует точка в v – пространстве (рис. 19.6). Из-за столкновений положения точек будут непрерывно меняться, но их плотность в каждом месте остается постоянной (равновесное состояние газа). Из-за равноправия всех направлений движения расположение точек будет сферически симметрично, т.е. плотность (концентрация) точек в пространстве скоростей зависит только от модуля

скорости. Задача о распределении скоростей молекул сводится к определению положения скоростных точек в пространстве скоростей в любой момент времени.

Поскольку скорость молекул (частиц) газа – непрерывная векторная случайная величина, то вероятность $dP_{\vec{v}}$ обнаружить частицу со скоростью, принимающей значение из интервала от \vec{v} до $\vec{v} + d\vec{v}$, пропорциональна объему dV в пространстве скоростей, в пределах которого может быть изображен вектор скорости.

5. Функция распределения по проекции скорости.

В декартовой системе координат вектор скорости \vec{v} однозначно определяется через его проекции v_x, v_y, v_z . При столкновениях молекул газа между собой каждая проекция скорости изменяется независимо, в соответствии с законом сохранения импульса. Поэтому проекции скорости v_x, v_y, v_z на произвольно выбранную декартову систему координат являются независимыми случайными величинами. Вероятность dP_{v_x} того, что v_x компонента скорости некоторой молекулы имеет значение в пределах от v_x до $v_x + dv_x$, может быть представлена в виде

$$dP_{v_x} = \phi(v_x)dv_x. \quad (19.16)$$

Величина $\phi(v_x)$ также называется функцией распределения, она характеризует распределение молекул по проекции скорости v_x на ось X .

Аналогичны вероятности для двух других компонент

$$dP_{v_y} = \phi(v_y)dv_y, \quad (19.17)$$

$$dP_{v_z} = \phi(v_z)dv_z. \quad (19.18)$$

В силу равноправности всех направлений движения аналитический вид функций $\phi(v_x)$, $\phi(v_y)$ и $\phi(v_z)$ должен быть одинаков. Максвелл предположил, что вероятность различных значений одной из компонент,

например v_x не зависит от того, какова величина двух других компонент. Тогда вероятность того, что компоненты скорости некоторой молекулы имеют значения в пределах от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$ одновременно, равна произведение вероятностей (19.16)-(19.18)

$$dP_{v_x v_y v_z} = dP_{v_x} dP_{v_y} dP_{v_z},$$

$$dP_{v_x v_y v_z} = \phi(v_x) \phi(v_y) \phi(v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

Если обозначить функцию распределения по вектору скорости

$$f(v) = \phi(v_x) \phi(v_y) \phi(v_z), \quad (19.19)$$

то

$$dP_{v_x v_y v_z} = f(v) dv_x dv_y dv_z \quad (19.20)$$

Взяв логарифм от обеих частей равенства (19.19), получим

$$\ln f(v) = \ln \phi(v_x) + \ln \phi(v_y) + \ln \phi(v_z).$$

Продифференцируем полученное соотношение по v_x

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)}. \quad (19.21)$$

Поскольку $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, то

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v}.$$

Подставив значение производной в (19.21), после преобразований придём к равенству

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \cdot \frac{1}{v} = \frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)} \cdot \frac{1}{v_x}. \quad (19.22)$$

Правая часть этого равенства, а значит и левая часть, не зависит от переменных v_y и v_z . Следовательно, она не может зависеть и от v_x . Таким образом, каждое из выражений, стоящих слева и справа в (19.22), равно некоторой константе. Обозначим эту константу через -2α , тогда

$$\frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)} \cdot \frac{1}{v_x} = -\alpha \quad \text{или} \quad \frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)} = -\alpha v_x.$$

Интегрирование даёт

$$\ln \phi(v_x) = -\frac{\alpha v_x^2}{2} + \ln A,$$

где A – константа. Отсюда

$$\phi(v_x) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right). \quad (19.23)$$

Аналогично

$$\phi(v_y) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_y^2}{2}\right), \phi(v_z) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_z^2}{2}\right). \quad (19.24)$$

Определим коэффициенты A и a .

1) В соответствии с условием нормировки (19.8) функции распределения $\phi(v_x)$ на единицу

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right) dv_x = 1. \quad (19.25)$$

В качестве пределов интегрирования взяты $-\infty$ и ∞ , поскольку проекция скорости может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В действительности значение v (а значит и v_x) не могут превысить некоторое, хотя и очень большое, но конечное значение v_{\max} . Расширение пределов интегрирования в (19.25) не вносит ощутимой ошибки, так как подынтегральная функция убывает с ростом v_x столь быстро, что при достаточно больших v_x она практически не отличается от нуля.

Интеграл в (19.25) представляет собой интеграл Пуассона [5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \exp(-\beta x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \quad \text{с} \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right) dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha/2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}.$$

Подставляя полученное значение в (19.25), найдём A

$$A = \sqrt{\alpha / 2\pi}.$$

Таким образом функция распределения

$$\phi(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right). \quad (19.26)$$

2) Для нахождения α воспользуемся тем фактом, что значение среднеквадратичной скорости

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0},$$

где m_0 — масса молекулы газа.

Представив $\langle v^2 \rangle$ в виде суммы квадратов компонент скорости, можно записать

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle.$$

Вследствие равноправности всех направлений движения выполняется равенство

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

С учётом этого находим, что

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{kT}{m_0}. \quad (19.27)$$

Используя выражение для функции распределения $\phi(v_x)$, вычислим значение $\langle v_x^2 \rangle$ (19.10)

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \phi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right) v_x^2 dv_x. \quad (19.28)$$

Значение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} A \exp(-\beta x^2) x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right) v_x^2 dv_x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{(\alpha/2)^3}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha^3}}. \quad (19.29)$$

Заменив в (19.28) интеграл его значением (19.29), найдём, что

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \phi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Сопоставление с (19.27) даёт

$$\alpha = \frac{m_0}{kT}. \quad (19.30)$$

Подстановка этого значения в (19.26) приводит к окончательному выражению для функции распределения по проекции скорости

$$\phi(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT} \right). \quad (19.31)$$

График функции (19.31) изображён на рисунке 19.7. Он совпадает с гауссовой кривой распределения случайной величины (9.11).

Функция $\phi(v_x)$ симметрично относительно начала координат и имеет максимум при $v_x = 0$. Положительные и отрицательные значения v_x имеют одинаковую вероятность, поэтому наиболее вероятная проекция и средняя проекция скорости равны нулю.

Распределение по проекциям скорости зависит от температуры. На рисунке 19.8 представлены зависимости $\phi(v_x)$ для двух разных температур. Качественная зависимость распределения по проекциям скорости при изменении температуры не меняется. Максимум функции распределения по-прежнему соответствует нулевой проекции скорости и равен

$$\phi(0) = \frac{m_0}{2\pi kT}.$$

Чем выше температура ($T_2 > T_1$), тем более пологой становится кривая.

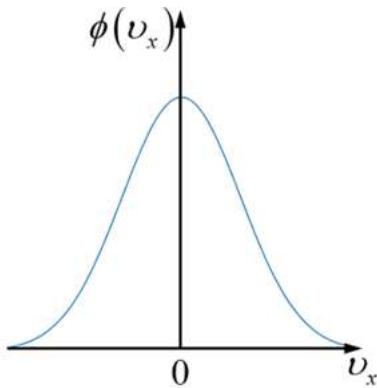


Рис.19.7

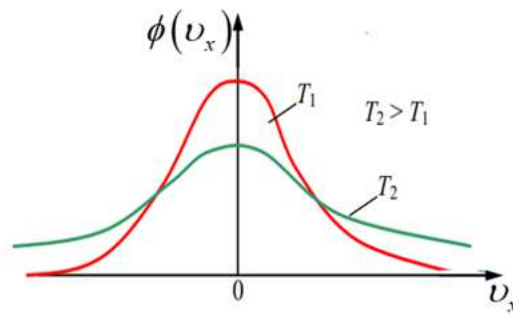


Рис.19.8

6. Функция распределения по вектору скорости.

Функция распределения по вектору скорости $f(\boldsymbol{v})$ (19.19) определяет вероятность того, что вектор скорости некоторой частицы принимает значение из интервала от \bar{v} до $\bar{v} + d\bar{v}$, то есть компоненты скорости этой частицы лежат в пределах от v_x до $v_x + dv_x$, от v_y до $v_y + dv_y$, v_z до $v_z + dv_z$,

$$f(\boldsymbol{v}) = \frac{dP_{v_x v_y v_z}}{dv_x dv_y dv_z}. \quad (19.32)$$

В пространстве скоростей произведение $dv_x dv_y dv_z$ в (19.32) даёт элемент объёма (рис. 19.6), поэтому функция распределения $f(\boldsymbol{v})$, может быть интерпретирована как плотность вероятности распределения скоростных точек молекул в пространстве скоростей. Умноженная на полное число молекул N , она определяет плотность точек, изображающих скорости молекул в v -пространстве.

Поскольку проекции скорости v_x, v_y, v_z на произвольно выбранную декартову систему координат являются независимыми случайными величинами, как было сказано выше, функция распределения $f(\boldsymbol{v})$ равна произведению вероятностей (19.23), (19.24).

$$f(\boldsymbol{v}) = \phi(v_x)\phi(v_y)\phi(v_z).$$

Учитывая найденное выражение для $\phi(v_x)$ (19.31) и аналогичные для $\phi(v_y)$ и $\phi(v_z)$, получим функцию распределения по вектору скорости

$$f(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right). \quad (19.33)$$

7. Функция распределения по модулю скорости.

Найдем распределение молекул газа по абсолютным значениям их скоростей, независимо от направления движения молекулы. Определим вероятность того, что частица имеет скорость, абсолютное значение которой

лежит в интервале от v до $v + dv$. Эта вероятность определяется функцией распределения молекул по скоростям $F(v)$ (19.13).

Точки в v – пространстве, изображающие скорости, величина которых заключена в пределах от v до $v + dv$, попадают в область, лежащую между сферами радиусов v до $v + dv$ (рис. 19.9). Объем этого слоя равен $4\pi v^2 dv$, поэтому количество точек, находящихся в этой области определяется выражением

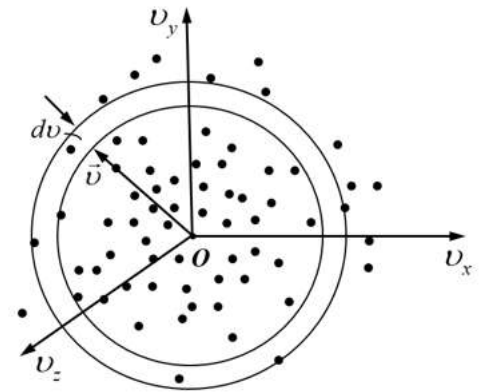


Рис.19.9

$$dN_v = Nf(v)4\pi v^2 dv. \quad (19.34)$$

Вероятность dP_v того, что скорость молекулы окажется в пределах от v до $v + dv$

$$dP_v = f(v)4\pi v^2 dv. \quad (19.35)$$

Из сравнения этого выражения с (19.14), получим функцию распределения молекул газа по скоростям

$$F(v) = f(v)4\pi v^2. \quad (19.36)$$

Согласно (19.33)

$$F(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right). \quad (19.37)$$

Эта функция распределения описывает плотность вероятности того, что абсолютная скорость частицы лежит в интервале от v до $v + dv$. Характерным для этой функции является то обстоятельство, что в показателе экспоненты стоит взятое со знаком минус отношение кинетической энергии молекулы к kT , то есть величине, характеризующей среднюю энергию молекул газа.

График функции (19.37) дан на рисунке 19.10. Поскольку при возрастании v множитель $\exp(-m_0 v^2 / (2kT))$ уменьшается быстрее, чем растёт множитель v^2 , то функция $F(v)$, начинаясь от нуля, достигает

максимума при $v_{вер}$ и затем асимптотически стремится к нулю. Кривая несимметрична относительно $v_{вер}$. Площадь, охватываемая кривой, равна единице (в соответствии с (19.15)).

Распределение плотности вероятностей зависит от температуры и массы молекул. На рис. 19.11 представлено несколько кривых $F(v)$ при разных температурах (при одинаковой m_0). С ростом температуры диапазон возможных скоростей все расширяется, а максимум кривой ($v_{вер}$) сдвигается в область больших скоростей.

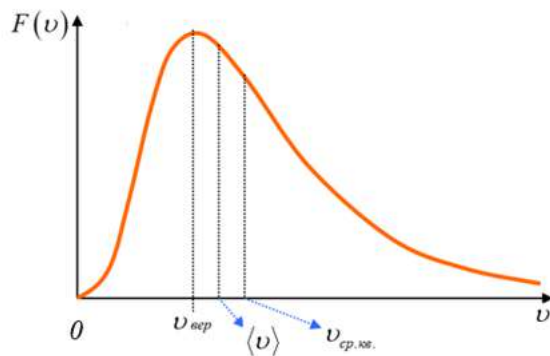


Рис.19.10

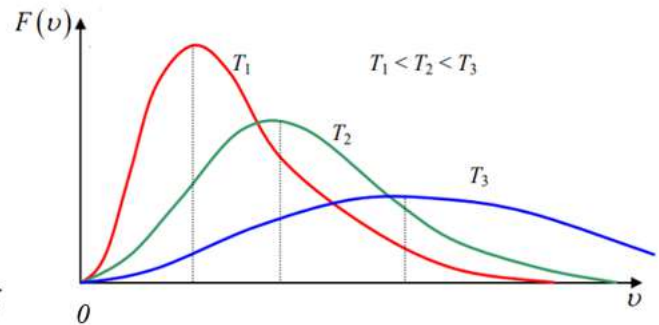


Рис.19.11

8. Характерные скорости распределения молекул по скоростям.

1) Наиболее вероятная скорость $v_{вер}$ соответствует максимуму функции $F(v)$. Взяв производную от выражения (19.37) по v , опустив постоянные множители и приравняв получившееся выражение нулю, придём к уравнению

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 \cdot \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \right) = \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \left(2 - \frac{m_0 v^2}{kT} \right) \cdot v = 0.$$

Удовлетворяющие этому уравнению $v=0$ и $v=\infty$ соответствуют максимумам $F(v)$. Значение v , при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая наиболее вероятную скорость $v_{вер}$

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (19.38)$$

Подставляя выражение (19.38) в формулу (19.37), найдём максимальное значение функции $F(\nu)$:

$$F(\nu_{\text{вер}}) = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \sim \sqrt{\frac{m_0}{T}}. \quad (19.39)$$

Из формул (19.38) и (19.39) следует, что при увеличении температуры (или уменьшения массы молекул) максимум кривой смещается вправо и становится ниже. Однако в силу условия нормировки (19.15) площадь под каждым графиком по-прежнему равна единице. На рисунке 19.11 сопоставлены три кривые распределения, относящиеся к различным температурам T_1, T_2, T_1 (при одинаковой m_0).

2) *Средняя арифметическая скорость* молекул $\langle \nu \rangle$ определяется по формуле (19.9)

$$\langle \nu \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \nu dN(\nu) = \int_0^{\infty} \nu F(\nu) d\nu.$$

Подставляя выражение $F(\nu)$ (19.37), получим

$$\langle \nu \rangle = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \nu^2 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 \nu^2}{2kT} \right) d\nu.$$

Переход к переменной $\xi = \nu^2$ и интегрирование по частям приводят к следующему результату:

$$\langle \nu \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \quad (19.40)$$

3) *Средняя квадратичная скорость* молекул $\nu_{\text{ср.кв.}}$ определяется по формуле

$$\nu_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle \nu^2 \rangle}. \quad (19.41)$$

По определению среднего значения (19.10)

$$\langle \nu^2 \rangle = \int_0^{\infty} \nu^2 F(\nu) d\nu = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \nu^4 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 \nu^2}{2kT} \right) d\nu. \quad (19.42)$$

Интеграл в (19.42) может быть представлен как результат дифференцирования по параметру β от интеграла Пуассона [5]:

$$\int_0^{\infty} x^4 \exp(-\beta x^2) dx = \frac{d^2}{d\beta^2} \int_0^{\infty} \exp(-\beta x^2) dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^5}}.$$

В нашем случае

$$\int_0^{\infty} v^4 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) dv = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{(m_0 / 2kT)^5}} = \frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{2\pi kT}{m_0}\right)^{5/2}.$$

Подставив это значение интеграла в (19.42), получим

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0}.$$

Корень квадратный из $\langle v^2 \rangle$ – есть средняя квадратичная скорость

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (19.43)$$

Сопоставление выражений (19.38), (19.40) и (19.43), даёт, что

$$v_{\text{вер}} : \langle v \rangle : v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3} = 1 : 1,13 : 1,22.$$

Рисунок (19.10) иллюстрирует это соотношение.

Литература

1. Гмурман В. Е. Г 55 Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. Изд. 7-е, стер.-М.: Высш. шк., 1999.- 479 с.
2. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций] Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
3. Иродов И. Е. Физика макросистем : основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов. 8-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 210 с.
4. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1981.– 400с.
5. Савельев И.В. Курс физики : учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям : [в 3 т.]. Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с.
6. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учебное пособие для физических специальностей вузов : [в 5 томах] Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика/ Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. Москва : ФИЗМАТЛИТ. 2014. 543 с.
7. Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1999.– 542 с.
8. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: методические указания / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Кафедра экспериментальной физики; составители: Б. Д. Агапьев, С. С. Козловский. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012

Разработал доцент кафедры физики
Мизина В.В.