ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 01 М е х а н и к а

Тема № 01 Кинематика

Лекция № 02 Кинематика материальной точки

Учебные вопросы:

1. Материальная точка.
2. Описание движения через векторы.
3. Описание движения через координаты.
4. Описание движения через параметры траектории («естественные координаты»).

Литература:

1. Кузнецов С.И. Курс физики с примерами решения задач. Часть I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – С.23 – 34.
2. Леденёв А.Н. Физика: учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн.1. Механика. – М.: Физматлит, 2005. – С.15 – 25.

Материальная точка

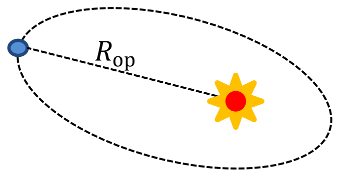
Кинематика – раздел механики, где изучаются способы описания движения тел независимо от причин, приводящих к данному движению.

Простейшим объектом, движение которого изучает классическая механика, является материальная точка. ***Материальная точка*** **(МТ)** – тело, размерами которого в условиях данного движения можно пренебречь. В МТ вся материя тела сосредоточена в одной геометрической точке. МТ – понятие относительное, одно и тоже материальное тело при одном движении можно считать МТ, а при другом – нельзя. Важным является отношение размеров тела к некоторым расстояниям, характерным для рассматриваемого движения.

Пример:

Земля – материальная точка

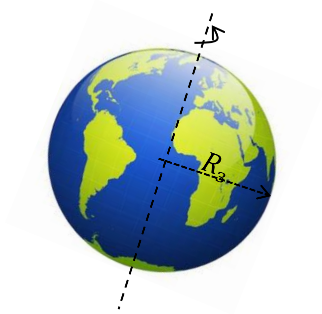
(вращение Земли вокруг Солнца)



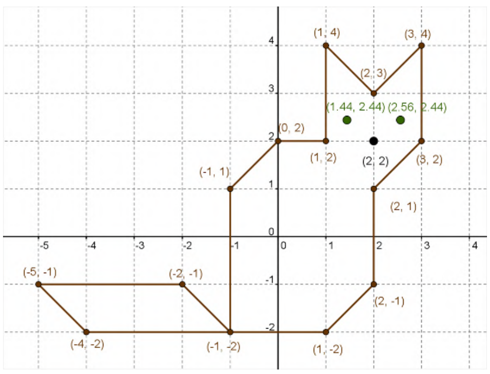
$R_{\text{ор}} = 150\ 000\ 000$ км
$R_{\text{з}} = 6\ 400$ км

Земля – не материальная точка

(вращение Земли вокруг собственной оси)



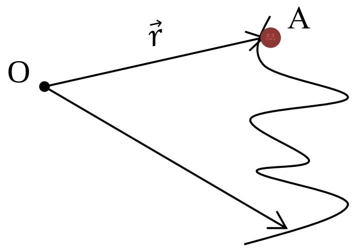
Движение материальной точки в классической физике является основой для всей механики. С классической точки зрения произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые части, взаимодействующие друг с другом. Каждую из таких частей можно принять за материальную точку. Тем самым изучение движения макроскопического тела или системы тел сводится к изучению движения системы материальных точек.



Выберем какую-либо произвольную систему отсчёта и будем рассматривать в ней движение материальной точки. Движение точки будет считаться полностью описанным, если будет известно её положение в любой момент времени относительно выбранной системы отсчёта.

Описание движения через векторы

Положение точки A в пространстве задаётся с помощью ***радиус-вектора*** $\vec{r}$, проведённого из неподвижной точки О (начала отсчёта) в место, где находится интересующая нас точка. При движении точки A её радиус-вектор в общем случае изменяется со временем как по величине (модулю), так и по направлению, то есть радиус-вектор $\vec{r}$ зависит от времени t: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. (Повторить правила действий с векторными величинами можно в Математическом дополнении 1).

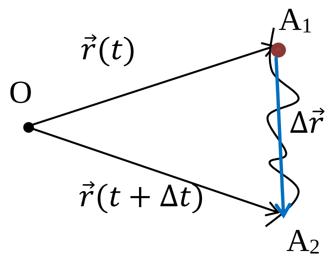


О – точка отсчета
А – материальная точка, движение которой изучается
$\vec{r}$ – радиус-вектор

Геометрическое место концов радиус-вектора $\vec{r}$ называют траекторией движения точки. Траектория – линия в пространстве, по которой движется МТ, представляющая собой множество точек, в которых находилась, находится или будет находиться МТ при своём перемещении в пространстве.

Задача описания движения в механике сводится к нахождению зависимости радиус-вектора от времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, называемой ***уравнение движения*** (закон движения).

Представим, что за конечный промежуток времени Δt наша материальная точка переместилась из положения A_1 в положение A_2. Вектором перемещения точки $\Delta\vec{r}$ называют приращение радиус-вектора $\vec{r}$ за Δt: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.



Разделив вектор перемещения на время, за которе оно произошло получаем

Δt – конечный интервал времени (конечное изменение времени)
$\Delta\vec{r}$ – вектор перемещения (или приращения радиус-вектора; конечное изменение радиус-вектора)

$$\langle\vec{v}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ – средний вектор скорости.

Средний вектор скорости совпадает по направлению с вектором перемещения $\langle\vec{v}\rangle \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}$, (так как $\Delta t > 0$) .

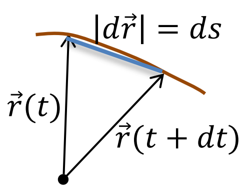
При неограниченном уменьшении момента времени Δt ($\Delta t \rightarrow dt$) вектор перемещения тоже становится малым ($\Delta\vec{r} \rightarrow d\vec{r}$), и средний вектор скорости устремляется к предельному значению, которое называется ***мгновенной скоростью*** или просто ***скоростью*** $\vec{v}$.

dt – бесконечно малый интервал времени
d$\vec{r}$ – бесконечно малое перемещение (малое приращение радиус-вектора), совершаемое за *dt*

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$ – вектор (мгновенной) скорости.

Аналогично среднему вектору скорости вектор скорости в любой момент времени сонаправлен с вектором перемещения $\vec{v} \uparrow\uparrow d\vec{r}$.

Тот факт, что вектор скорости в некоторый момент времени может быть найден дифференцированием радиус-вектора по времени, означает этот вектор всегда направлен по касательной к траектории в данной точке в направлении движения точки A. (См. Математическое дополнение 2).



$\Delta t \to dt$
$|d\vec{r}| = ds$
ds – пройденный путь
(длина вектора перемещения)

При неограниченном уменьшении промежутка времени Δt $(\Delta t \to dt)$ отрезок, соответствующий длине вектора перемещения, совпадает с длиной дуги траектории в эти моменты времени $|d\vec{r}| = ds$. В таком случае можно утверждать, что длина вектора перемещения равна ***пути***, пройденному точкой A за время dt.

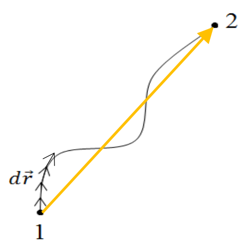
Модуль вектора скорости в принятых обозначениях может быть представлен как производная по времени от пройденного точкой пути:

$$\boxed{v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}}$$ – модуль скорости.

В отличие от математики, в физике любая измеряемая величина несмотря на утверждение, что она неограниченно стремится к нулю, всё же обладает, пусть даже очень малым, но конечным значением (физически бесконечно малая величина). Это позволяет рассматривать определения вектора скорости и его модуля не только как производные от соответствущих величин по времени, но и как отношение малых величин (обыкновенные дроби). Поэтому можно считать справедливыми и обратные операции, когда «делимое» может быть выражено через произведение «частного» и «делителя»:

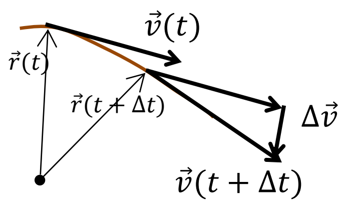
$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \;\text{ и }\; ds = v \cdot dt\,.$$

Так же справедливым является и то, что любое перемещение в пространстве можно представить как сумму малых перемещений. В математике в случае когда складываются бесконечно большое количество бесконечно малых величин, знак суммы заменяется на знак определённого интеграла. (См. Математическое дополнение 3). Поэтому справедливыми будут и следующие выражения для вектора перемещения $\Delta\vec{r}$, пройденного пути s, обратные их определениям:



$$\boxed{\Delta\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt\,; \qquad \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt\,; \qquad s = \int ds = \int_{t_0}^{t} v dt.}$$

Теперь определим характеристику, определяющую скорость изменения вектора скорости точки со временем. Действуем так же, как действовали выше: рассмотрим приращение вектора



скорости за промежуток времени Δt: $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$. Разделив это приращение $\Delta\vec{v}$ на время Δt, за которое оно произошло получим средний вектор ускорения:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Как и в случае со средним вектором скорости, средний вектор ускорения сонаправлен с вектором изменения мгновенной скорости $\langle\vec{a}\rangle \upuparrows \Delta\vec{v}$.

Теперь неограниченно уменьшим момент времени Δt $(\Delta t \to dt)$, соответственно уменьшится и вектор приращения скорости $\Delta\vec{v} \to d\vec{v}$. И теперь уже средний вектор ускорения устремляется к предельному значению, которое называется ***мгновенным ускорением*** или просто ***ускорением*** точки $\vec{a}$.

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}}$$ – вектор (мгновенного) ускорения;

который сонаправлен с вектором изменения скорости $\vec{a} \upuparrows d\vec{v}$. Если вектор скорости, был направлен всегда по касательной к траектории в направлении движения точки A, то про вектор ускорения ничего однозначного сказать нельзя. К траектории он может быть направлен, как угодно, всё определяется характером движения точки A: ускоряет она своё движение или замедляет, движется по прямой или криволинейно.

$$\boxed{a = |\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{v}|}{dt}}$$ – модуль ускорения.

Таким образом, по известному уравнению движения материальной точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (определён явный вид функции $\vec{r}(t)$), можно найти скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ точки в каждый момент времени, то есть движение точки можно считать описанным полностью. Следует отметить, что существуют и обратные задачи, когда по известной зависимости ускорения точки от времени $\vec{a}(t)$ приходится находить зависимости $\vec{v}(t)$ и $\vec{r}(t)$.

Уравнение движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$

↓ дифференцируем ↑ интегрируем

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$$

↓ дифференцируем ↑ интегрируем

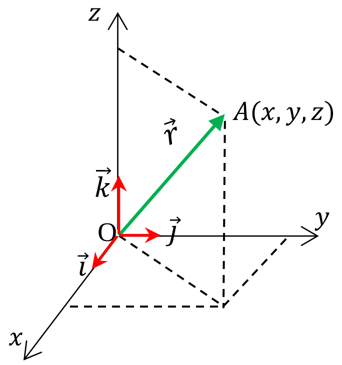
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$$

Величина перемещения измеряется в метрах $[ds] = \text{м}$, величина скорости в метрах в секунду $[v] = \text{м/с}$, а величина ускорения – $[a] = \text{м/с}^2$.

Описание движения через координаты

При таком способе описания движения с выбранным телом отсчёта жёстко связывается одна из возможных систем координат. Выбор системы в каждой конкретной задаче определяется характером движения тела, наличием симметрии у задачи, постановкой вопроса, а главное – желанием упростить описание.

Пусть в пространстве, где происходит движение точки A, для задания положения точки используется декартовая система координат (ДСК). Используем покомпонентную форму записи вектора $\vec{r}$, связывающую описание положения тела через радиус-вектор с описанием через координаты (см. Математическое дополнение 1): $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



В рассмотренном выше способе было показано, что движение будет полностью описано, если известен явный вид зависимости

$$\vec{r} = \vec{r}(t) -$$ уравнение движения.

В описании движения через координаты аналогом этой зависимости станут три выражения – зависимости координат тела от времени:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} -$$ уравнения движения.

Вектор скорости можно будет определить через его покомпонентную форму, составляющие которой – проекции вектора $\vec{v}$ получатся в результате дифференцирования по времени выражения для соответствующих координат:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

После чего можно будет определить и модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Аналогично необходимо поступить для нахождения вектора ускорения:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

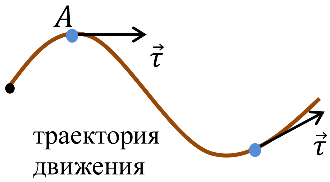
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Описание движения через параметры траектории («естественные координаты»)

Пусть $\vec{r}(t)$ – уравнение движения (траектория) точки.



Определим единичные векторы, которые будут использоваться для задания векторов $\vec{v}, \vec{a}$. Введём вектор $\vec{\tau}$ (тау) – единичный вектор ($[\vec{\tau}] = 1$), направленный по касательной к траектории в направлении движения точки А. При перемещении точки А этот единичный вектор, оставаясь касательным к траектории движения, изменяет своё направление, поэтому:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(t).$$

Так как вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории движения, его можно выразить через единичный вектор $\vec{\tau}$:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau} = v\vec{\tau}$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt},}$$

где ds малый путь, проходимый точкой за время dt.

С вектором ускорения всё немного сложнее. Используем введённое выше определение $\vec{a}$ и правило дифференцирования произведения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Для упрощения дальнейших вычислений представим последнее слагаемое в следующем в виде:

$$v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}. \qquad (1)$$

Проследим за перемещением точки А в течение малого промежутка времени $\Delta t \to 0$ $(\Delta t \to dt)$, в таком случае пройденный точкой А путь ds тоже мал. Чем ближе положение A_2 к A_1, тем с большей степенью уверенности мы можем утверждать, что оба эти положения точки А принадлежат дуге одной окружности, вписанной в траекторию движения в данном месте. Центр такой окружности находится на пересечении перпендикуляров к касательным в точках A_1 и A_2 и называется центром кривизны траектории (точка C), а её радиус – радиусом кривизны (R). Очевидно, что если траектория движения криволинейна, то и положение центра кривизны, и радиус кривизны изменяются со временем, и не зависят от времени только в случае, когда материальная точки движется по окружности. Поскольку путь ds мал, угол $\angle A_1CA_2$ так же мал и равен $\delta\alpha$ ($\delta\alpha \to 0$). По построению он является центральным углом, то есть равен

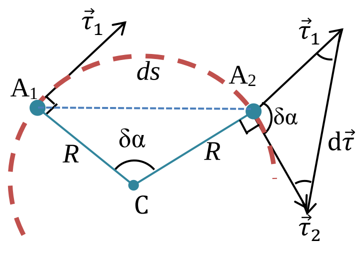


Рисунок 1
$\Delta t \to dt$
C – центр кривизны траектории
R – радиус кривизны траектории

$$\delta\alpha = \frac{ds}{R}.$$

Угол $\delta\alpha$ – угол, входящий в треугольник A_1CA_2. Также он является углом в вершине треугольника $\vec{\tau}_1\, A_2\vec{\tau}_2$, построенного в точке A_2 траектории. Его стороны: единичный вектор $\vec{\tau}_2$, построенный в этом месте траектории и вектор $\vec{\tau}_1$, касательный к траектории в точке A_1. Оба треугольника $_\Delta A_1CA_2$ и $_\Delta\vec{\tau}_1\, A_2\vec{\tau}_2$ подобны (см. Рисунок 1):

$$\begin{matrix}\vec{\tau}_1 \perp A_1C \\ \vec{\tau}_2 \perp A_2C\end{matrix}$$

Соответствующие углы в них равны: $\angle A_1CA_2 = \left(\widehat{\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2}\right) = \delta\alpha$, поэтому

$$\delta\alpha = \frac{ds}{R} = \frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}_1|} = \frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}_2|} = \frac{|d\vec{\tau}|}{1}, \qquad |d\vec{\tau}| = \frac{ds}{R}.$$

Выясним теперь, как направлен вектор $d\vec{\tau}$, длину которого мы вычислили.

<u>Первый способ</u>: $_\Delta\vec{\tau}_1\, A_2\vec{\tau}_2$ – равнобедренный $[\vec{\tau}_1] = [\vec{\tau}_2] = 1$, значит углы по бокам $d\vec{\tau}$: $\frac{180-\delta\alpha}{2} \to \frac{180-0}{2} \to 90°$ (см. Рисунок 1). Следовательно, $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}_1$ и $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}_2$.

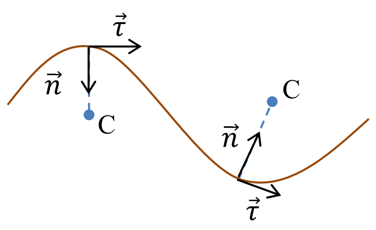
<u>Второй способ</u>: $\vec{\tau}^2 = 1$ (см. Математическое дополнение 1). Найдём дифференциал от левой и правой частей этого выражения (см. Математическое дополнение 2):

$$d(\vec{\tau}^2) = d(1) \qquad \text{или} \qquad 2\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = 0.$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю только, если косинус угла между векторами равен нулю: $\cos(\vec{\tau}, d\vec{\tau}) = 0 \Rightarrow \widehat{\vec{\tau}, d\vec{\tau}} = 90°$. Следовательно, $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$. Единичные векторы $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ – направлены по касательным к траектории движения, то есть перпендикулярны к радиусу кривизны траектории в данной точке.

<u>Третий способ</u>: при повороте длина вектора $\vec{\tau}$ не изменяется (она равна 1), поэтому проекция $d\vec{\tau}$ на $\vec{\tau}$ должна быть равна 0, то есть эти вектора перпендикулярны.

Таким образом, *в любой точке траектории $d\vec{\tau}$ смотрит на центр кривизны траектории C в этом месте*.



Для удобства дальнейшего описания введём ещё один единичный вектор – вектор нормали $\vec{n}$, направленный к центру кривизны:

$$\vec{n} \perp \vec{\tau}; \quad |\vec{n}| = 1.$$

Единичные векторы $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ так же необходимы для описания движения через параметры траектории, как и единичные векторы систем координат, например $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в координатном способе (в случае использования ДСК). Их отличие от упомянутой тройки заключается лишь в том, что они изменяются по направлению в процессе движения материальной точки по траектории.

Воспользуемся правилом записи вектора через единичный вектор: $d\vec{\tau} = |d\vec{\tau}| \cdot \vec{n}$ (см. Математическое дополнение 1). Окончательно для (1) получаем

$$v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds} = v^2\frac{|d\vec{\tau}| \cdot \vec{n}}{ds} = \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

После всех преобразований для вектора ускорения получается следующее выражение:

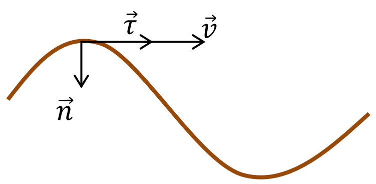
$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_\tau}\vec{\tau} + \underbrace{v\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{a_n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} -}$$ вектор (полного)ускорения.

Первое слагаемое называется ***тангенциальное ускорение*** $a_\tau\vec{\tau}$:

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} \gtrless 0.}$$

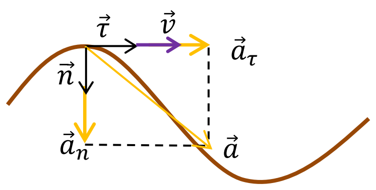
Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости v.

Второе слагаемое – ***нормальное ускорение*** $a_n\,\vec{n}$:



$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} > 0.}$$

Нормальное ускорение всегда направлено, как и вектор $\vec{n}$, к центру кривизны траектории в данном месте, то есть перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}$. Поэтому нормальное ускорение a_n изменяет направление вектора скорости $\vec{v}$, но не его величину.



Зная проекции вектора ускорения, можно определить и его величину

$$\boxed{a = |\vec{a}| = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2}}$$ – модуль (полного) ускорения.

В частном случае, когда материальная точка равномерно движется по окружности, положение центра кривизны C, радиус кривизны и величина скорости не изменяются со временем ($R = const$ и $v = const$), следовательно

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = a_n \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

При движении по окружности нормальное ускорение называют также ***центростремительным ускорением***.

Ускоренное движение материальной точки по прямой можно представить как движение по окружности, чей радиус кривизны бесконечно велик ($R = \infty$). Единичный вектор $\vec{\tau}$ в таком случае по направлению не изменяется ($\vec{\tau} = const$). Следовательно,

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0 \implies \vec{a} = a_\tau \vec{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Разработали
доцент кафедры физики Андреева Т.А.,
профессор кафедры физики Лукин А.Я.