ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 01 М е х а н и к а

Тема № 01 Кинематика

Лекция № 03 Кинематика твердого тела

Учебные вопросы:

1. Абсолютно твердое тело.
2. Поступательное движение твердого тела.
3. Вращение твердого тела.
4. Связь линейных и угловых величин в кинематике.

Литература:

1. Кузнецов С.И. Курс физики с примерами решения задач. Часть I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – С.34 – 37.
2. Леденёв А.Н. Физика: учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн.1. Механика. – М.: Физматлит, 2005. – С.25 – 42.

Абсолютно твердое тело (АТТ)

Рассмотренная в предыдущей лекции материальная точка (МТ) является простейшей *моделью* реального тела, используемой для описания движения в тех случаях, когда размерами тела можно пренебречь.

Описать движение одной материальной точки можно, зная всего три уравнения:

$$x = x(t);\quad y = y(t);\quad z = z(t).$$

Движение N материальных точек описывается уже $3N$ уравнениями:

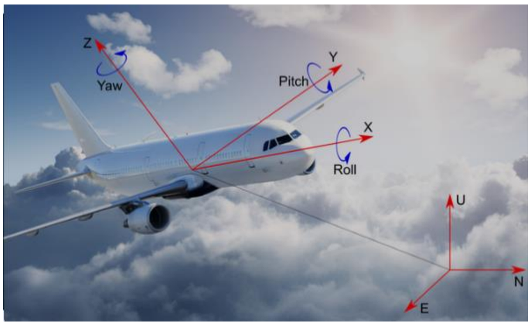
$$x_1(t)\ \dots\ x_N(t);\quad y_1(t)\ \dots\ y_N(t);\quad z_1(t)\ \dots\ z_N(t).$$

Число независимых параметров, с помощью которых описывается движение системы, называется ***числом степеней свободы*** i. Чем больше i, тем сложнее описание движения.

Движение тела конечных размеров, которое может изменять свою форму, необходимо рассматривать как движение большого (и даже очень большого) числа материальных точек. Однако во многих случаях изменением размеров и формы тела можно пренебречь и использовать следующую простую модель – модель *абсолютно твердого тела*.

Абсолютно твердое тело (АТТ) – макроскопическое тело, расстояния между точками которого, а следовательно размеры и форма которого в процессе движения не изменяются.

Положение АТТ в пространстве можно указать, задав координаты любых трех его точек, не лежащих на одной прямой. Для $N = 3$ число степеней свободы системы $i = 3N - n_{\text{связей}} = 3 \cdot 3 - 3 = 6$. Расстояния между этими точками фиксированы, поэтому их координаты не являются независимыми. На них накладываются три дополнительных условия вида $|\vec{r_i} - \vec{r_j}| = l_{ij},\ \ i,j = 1,2,3,\ \ j \neq i$, то есть $n_{\text{связей}} = 3$.



Вычислить число степеней свободы можно также и другим способом. Положение АТТ в пространстве можно задать тремя координатами какой-либо его точки (например, центра тяжести) и углами поворота вокруг трех осей, проходящих через эту точку. Таким образом получаем то же значение $i = 3 + 3 = 6$. Такой подход к описанию движения АТТ приводит к следующему важному выводу:

любое движение абсолютно твердого тела можно разложить на поступательное и вращательное.

Поступательное движение твёрдого тела

Поступательное движение (параллельный перенос) абсолютно твердого тела – это движение, при котором перемещение всех точек одинаково. При поступательном движении все точки твердого тела двигаются по одинаковым траекториям, и любая прямая, связанная с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению.

Пример поступательного движения АТТ – движение железнодорожного вагона по прямолинейному участку пути.

Рассмотрим промежуток времени dt:

$i = 1 \dots N$, где i – номер точки.

$d\vec{r}_i = d\vec{r}$ – перемещение каждой точки АТТ (исходя из определения, для всех точек оно одинаково) $\Rightarrow \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – скорости движения всех точек одинаковы и $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ – ускорения всех точек тоже одинаковы. Таким образом, *поступательное движение твердого тела можно описывать, следя за движением только одной его точки*.

Вращение твердого тела

Вращение абсолютно твердого тела – это движение, при котором одна или несколько его точек остаются неподвижны. Например, при вращении в трехмерном пространстве остаются неподвижными все точки, лежащие на одной линии – ***оси вращения***. Вращение вокруг неподвижной оси является частным случаем плоского движения.

Плоское движение твердого тела – это движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях.

Так как в случае вращения траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях, то для описания движения достаточно следить за одной такой плоскостью.

Рассмотрим подробнее важный частный случай вращения вокруг неподвижной оси.

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Будем описывать вращение нашего АТТ вокруг неподвижной оси OO', следя за одной из его точек – А, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения (см. Рисунок 1). Пусть за время dt наше твёрдое тело совершило поворот на малый угол $d\varphi$. Помимо величины угла, поворот всегда характеризуется осью вращения, точнее ее направлением в пространстве. Эти две величины можно объединить в один вектор $d\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота, такой что:

- модуль этого вектора $|d\vec{\varphi}| = d\varphi$; $[d\varphi]$ – рад;
- направление $d\vec{\varphi}$ совпадает с направление оси вращения и определяется по правилу «правого винта» (буравчика). То есть, вращая правый винт в направлении вращения, вектор $d\vec{\varphi}$ будет направлен в сторону «завинчивания» винта.

Только малые углы можно принимать за векторные величины.

Установим связь между векторами $d\vec{\varphi}$ и $d\vec{r}$ – вектором перемещения, которое точка А тела, совершила за промежуток времени dt, вращаясь по окружности радиуса R вокруг точки O_1 в своей плоскости (см. Рисунок 1).

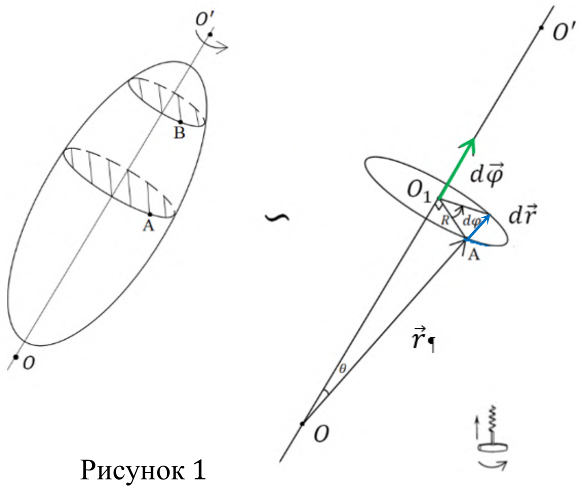


Рисунок 1

При этом:

$$|d\vec{r}| = R|d\vec{\varphi}| = |\vec{r}| \cdot |d\vec{\varphi}| \cdot \sin\theta =$$
$$= |\vec{r}| \cdot |d\vec{\varphi}| \cdot \sin(\widehat{\vec{r}; d\vec{\varphi}}),$$

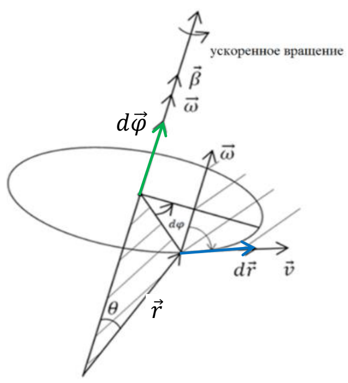
$d\vec{r} \perp d\vec{\varphi}$ и $d\vec{r} \perp \vec{r}$, то есть $d\vec{r} \perp$ плоскости OAO_1, в которой лежат векторы $d\vec{\varphi}$ и $\vec{r}$.

В таком случае векторы $d\vec{\varphi}$, $\vec{r}$ и $d\vec{r}$ связаны друг с другом операцией векторного произведения (см. Математическое дополнение 1):

$$\boxed{d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}].}$$

По аналогии со скоростью $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и ускорением $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, которые были введены для описания движения материальной точки, можно ввести:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}} \text{ – вектор угловой скорости.}$$



Так же как вектор скорости сонаправлен с вектором малого перемещения ($\vec{v} \uparrow\uparrow d\vec{r}$), вектор угловой скорости всегда сонаправлен с вектором малого угла поворота $\vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$. Величину вектора угловой скорости можно найти как производную по времени от угла поворота:

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}.}$$

Угловая скорость измеряется в радианах за секунду:

$$[\omega] = \frac{[d\varphi]}{[dt]} = \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

За изменение вектора угловой скорости со временем отвечает

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$ — вектор углового ускорения.

Величина углового ускорения тоже может быть найдена с помощью дифференцирования:

$$\boxed{\beta = \pm\frac{d\omega}{dt}}$$ — ускоренное вращение
замедленное вращение.

При вращении вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен по оси вращения, как и вектор изменения угловой скорости: $\vec{\beta} \uparrow\uparrow d\vec{\omega}$. Его направление может совпадать с направлением вектора угловой скорости (при ускоренном вращении) $\vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ или быть противоположным (при замедлении) $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$.

Единицей измерения углового ускорения являются:

$$[\beta] = \frac{[d\omega]}{[dt]} = \frac{\text{рад/с}}{\text{с}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

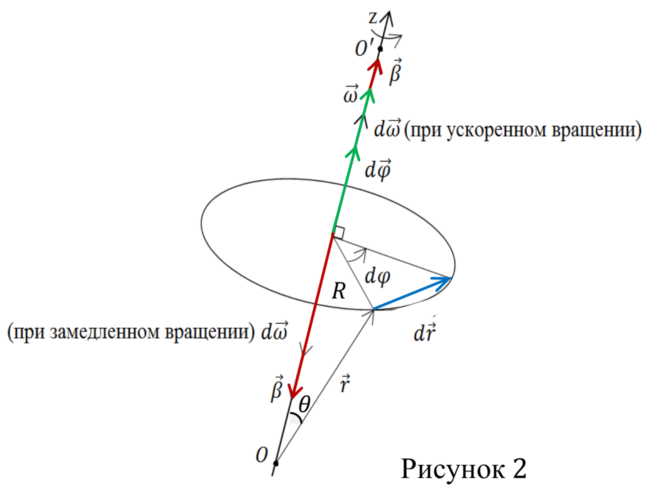


Рисунок 2

При вращении АТТ вокруг неподвижной оси вращение считается полностью описанным, если в явном виде известна зависимость угла φ от времени. Эта зависимость является таким же уравнением движения (вращения), как и $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в случае описания движения материальной точки (см. Лекцию 1.2). В практических задачах, описывая вращение АТТ вокруг неподвижной оси, удобно связывать с этой осью ось системы координат, например ось OZ декартовой системы. Направление вращения тела должно совпадать с направление OZ по правилу правого винта. При таком описании у угловых характеристик вращения оставалась бы только одна проекция:

$$d\vec{\varphi} = (d\varphi)_x \cdot \vec{\imath} + (d\varphi)_y \cdot \vec{\jmath} + (d\varphi)_z \cdot \vec{k} = d\varphi \cdot \vec{k}; \qquad \vec{\omega} = \cdots = \omega \cdot \vec{k}\,; \qquad \vec{\beta} = \cdots = \beta_z \cdot \vec{k}.$$

Дифференцируя известную зависимость $\varphi = \varphi(t)$, можно определить угловую скорость и угловое ускорение АТТ в любой момент времени. Или при известной зависимости $\beta = \beta(t)$ интегрированием можно восстановить закон вращения АТТ.

Уравнение вращения $\varphi = \varphi(t)$

↓ дифференцируем ↑ интегрируем

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega(t)$$

↓ дифференцируем ↑ интегрируем

$$\beta = \pm\frac{d\omega}{dt} = \beta(t)$$

Связь линейных и угловых величин

Вернёмся к точке А нашего твёрдого тела. Если тело вращается вокруг неподвижной оси OO', то движение этой точки (как части АТТ) можно описать, используя векторы угловых величин $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$. С другой стороны, так как в результате движения АТТ точка А просто движется по окружности радиуса R вокруг точки O_1 в своей плоскости (см. Рисунок 2), для описания её движения можно использовать векторы $d\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$. При таком подходе удобно использовать «естественные координаты» (см. Лекцию 1.2). Для отличия от угловых величин векторы малого перемещения, скорости и ускорения в таком случае называются линейными.

Существует принципиальное отличие между линейными и угловыми величинами. Чтобы связать направление поворота и направление вектора $d\vec{\varphi}$ мы использовали правый винт. Такое решение есть результат «договоренности», как и использование правой ДСК, и допустим переход к левой ДСК и левому винту. В этом случае направление векторов угловых величин изменится на противоположное, а линейных – не изменится. В математике первые принято называть аксиальными векторами (или псевдовекторами), а вторые – полярными.

Линейные величины – ***полярные*** векторы (направление определяется самим движением)	Угловые величины – ***аксиальные*** векторы (***пвсевдовекторы***) (для определения направления требуется дополнительное правило – *правило буравчика)*
$d\vec{r}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
$\vec{a}$	$\vec{\beta}$

Независимо от подхода к описанию речь идёт о движении одной и той же точке А, поэтому можно установить выражения, связывающие оба способа описания движения. Если за время dt тело повернётся на угол $d\vec{\varphi}$, то точка А за тоже время совершит перемещение $d\vec{r}$. Связь между этими переменными была установлена выше $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$. Использовав выражение для модуля векторного произведения (см. Математическое дополнение 1), можно найти как связаны длины этих векторов $|d\vec{r}| = Rd\varphi$. Связь между векторами угловой и линейной скоростями можно установить, разделив обе части выражения для $d\vec{r}$ на dt (вторая строка таблицы 1). Выражение для вектора линейного ускорения найдётся после дифференцирования выражения, связывающего линейную и угловые скорости (третья строка таблицы 1). В случае движения по окружности (криволинейного движения) ускорение можно представить в виде двух составляющих: тангенциальной и нормальной, которые также будут связаны с угловыми характеристиками. Вывод соответствующих формул приведён под таблицей 1 ниже.

Линейная	Связь величин	Угловая
$d\vec{r}$	$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$ $|d\vec{r}| = |d\vec{\varphi}| \cdot \underbrace{|\vec{r}| \cdot \sin(\widehat{d\vec{\varphi}, \vec{r}})}_{R} = d\varphi \cdot R$ $\boxed{|d\vec{r}| = Rd\varphi}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{[d\vec{\varphi}, \vec{r}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right] = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = |\vec{\omega}| \cdot \underbrace{|\vec{r}| \cdot \sin(\widehat{d\vec{\varphi}, \vec{r}})} = \omega R$ $\boxed{v = \omega R}$	$\vec{\omega}$
$\vec{a}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}] =$ $= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ *При вращении вокруг неподвижной оси* $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}];\ \boxed{|a_\tau| = \beta R}$ $\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}];\ \boxed{a_n = \omega^2 R}$	$\vec{\beta}$

Таблица 1

<u>Вывод формул для ускорения</u>. Вектор – результат векторного произведения всегда перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы – множители. Поэтому первое слагаемое в выражении для ускорения это тангенциальное ускорение:

$$(\vec{\beta}, \vec{r}) \perp d\vec{r}, \quad d\vec{r} \uparrow\uparrow \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp (\vec{\beta}, \vec{r}) \quad \Rightarrow \vec{a}_\tau \parallel \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}];$$

$$|\vec{a}_\tau| = |\vec{\beta}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{r}}\right) = \beta R.$$

Следовательно, второе слагаемое в выражении для ускорения – нормальное ускорение:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}]; \qquad |\vec{a}_n| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}\right) = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 90^\circ = \omega v \ \text{ или } \quad a_n = \omega^2 R.$$

Примечание

На самом деле само понятие ***ось вращения (поворота)*** связано с трехмерностью нашего пространства. Только в нем существует единственная прямая, проходящая через неподвижную точку и перпендикулярная плоскости, в которой происходит поворот. В пространствах большей размерности таких прямых бесконечно много, и можно говорить только о повороте в какой-либо плоскости. При переходе от правой системы координат к левой и обратно вектора могут или оставаться неизменными, или менять знак на противоположный. Как нельзя складывать (или вычитать) величины, имеющие разные единицы измерения, так и в случае с полярными и аксиальными векторами, можно складывать между собой только векторы одного типа:

$$\cancel{\overrightarrow{v_0} + \vec{\omega}} R \Rightarrow \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}] = \vec{v}_0 + \vec{v}.$$

Разработали

доцент кафедры физики Андреева Т.А.,

профессор кафедры физики Лукин А.Я.