ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 01 М е х а н и к а

Тема № 02 Динамика

Лекция № 06 Кинетическая энергия. Работа.
Консервативные и неконсервативные силы.
Потенциальная энергия

Учебные вопросы:

1. Кинетическая энергия.
2. Работа.
3. Консервативные силы.
4. Неконсервативные силы.
5. Потенциальная энергия.

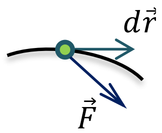
Литература:

1. Кузнецов С.И. Курс физики с примерами решения задач. Часть I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – С.93 – 98.
2. Леденёв А.Н. Физика: учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн.1. Механика. – М.: Физматлит, 2005. – С.86 – 106.

Кинетическая энергия. Работа

Как уже говорилось в лекции 1.4 задачей механики является определение сил, действующих на тело, и последующее определение закона движения тела. Однако детальное описание поведения тела (или системы материальных точек) с помощью уравнений движения часто бывает затруднительно: из-за сложности самой системы или из-за незнания законов сил (такое тоже бывает). В таких задачах требуется иной подход к описанию движения. Этот подход опирается на *законы сохранения* (его ещё называют энергетическим способом описания движения, в отличие от того, о чём говорилось выше – силового способа).

Рассмотрим сначала материальную точку массы m, которая под действием силы $\vec{F}$ совершает



малое (бесконечно малое) перемещение $d\vec{r}$. Запишем II закон Ньютона для этой точки умножим его на перемещение $d\vec{r}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}; \qquad d\vec{r}\cdot m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Преобразуем выражение из левой части, используя представление о производной как об обыкновенной дроби (см. Лекцию 1.2)

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\cdot d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\cdot d\vec{v}\cdot\vec{v} = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v}d\vec{v} = \left(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}\right)\cdot\left(dv_x\vec{\imath} + dv_y\vec{\jmath} + dv_z\vec{k}\right) = v_x dv_x\vec{\imath}^2 + v_x dv_y(\vec{\imath}\vec{\jmath}) + \dots =$$

$$= v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = d\frac{v_x^2}{2} + d\frac{v_y^2}{2} + d\frac{v_z^2}{2} = \frac{1}{2}d\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2}dv^2 = vdv$$

(см. Математические дополнения 1, 2)

Тогда левая часть:

$$m\vec{v}d\vec{v} = \frac{m}{2}dv^2 = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \overset{\text{def}}{=} dE_{\text{кин}},$$

где $dE_{\text{кин}}$ – малое изменение кинетической энергии точки.

Тогда кинетическая энергия материальной точки равна:

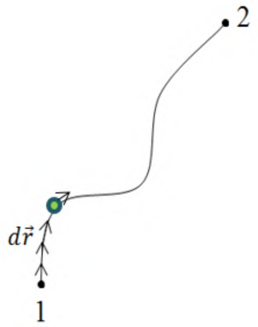
$$\boxed{E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.}$$

Правая часть выражения: $\vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\text{def}}{=} \delta A$

δA – малая работа силы (или малое количество работы), скалярное произведение силы на малое перемещение точки.

Приравнивая левую и правые части после преобразований, получим, что в результате малого перемещения точки приращение кинетической энергии равно работе:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r}; \qquad \boxed{dE_{\text{кин}} = \delta A} \qquad (1)$$



Пусть теперь наша точка проходит путь конечной длины из положения 1 в положение 2. Его можно представить как сумму малых перемещений $d\vec{r}$, для каждого из которых справедливо выражение (1). Таким образом, для конечного пути справедливым можно считать следующее выражение:

$$\int_1^2 dE_{\text{кин}} = \int_1^2 \delta A$$

(см. Лекцию 1.2 при суммировании бесконечно большого количества бесконечно малых величин, знак суммы заменяется на знак определённого интеграла).

$$\int_1^2 dE_{\text{кин}} = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{m{v_2}^2}{2} - \frac{m{v_1}^2}{2} = E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1} = \Delta E_{\text{кин}}$$

$$\int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = A_{12}.$$

Приращение кинетической энергии при перемещении материальной точки равно работе силы, действующей на эту точку:

$$\boxed{\Delta E_{\text{кин}} = A_{12}} \qquad (1')$$

(1') – интегральная форма записи ***теоремы о кинетической энергии***, (1) – её дифференциальная форма.

Если на точку действует несколько сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i,$$

то $\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \cdots = \delta A_1 + \delta A_2 + \cdots$ то малая работа равна сумме малых работ каждой действующей силы. И для пути конечной длины $A = \int_1^2 \delta A = A_1 + A_2 + \cdots$ – сумме работ всех сил на этом пути.

Единицей работы и энергии в СИ является Джоуль:

$$[A] = [E_{\text{кин}}] = [F] \cdot [dr] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Один джоуль есть работа силы в один ньютон на перемещении в один метр при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения.

Работа, совершенная в единицу времени, называется мощностью:

$$\boxed{N = P = \frac{\delta A}{dt};} \qquad P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt}; \qquad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}.}$$

Её единицами является джоуль на секунду или ватт (Вт): $[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$

Введённая нами величина кинетической энергии зависит от положения точки и от её скорости, то есть она является $E_{\text{кин}}(\vec{r}, \vec{v}) -$ функцией состояния. Конечное изменение любой функции состояния обозначается Δ: $\Delta E_{\text{кин}}$, малое изменение функции состояния – d: $dE_{\text{кин}}$.

Поскольку работа получается суммированием по многим перемещениям: $A_{12} = \int_1^2 \delta A$, то есть по многим состояниям, то в общем случае работа зависит от того, как меняется состояние, какое перемещение совершается (по какой траектории движется МТ). *Любое изменение состояния называется* ***процессом***. Таким образом, в общем случае работа является функцией процесса. И, следовательно, *работа*, совершаемая при перемещении материальной точки, в общем случае *зависит от формы* её *траектории*.

Для величин, являющихся функциями процесса, в физике принято использовать обозначения, отличающиеся от обозначений функций состояния: $A_{12} -$ функция процесса, малое количество функции процесса – δ: δA.

Полученный результат (1′) без труда обобщается на случай произвольной системы материальных точек. Кинетическая энергия системы МТ – сумма кинетических энергий МТ, из которых эта система состоит $\mathrm{E}_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}}^{i}$. Так как для любой из МТ системы справедливо выражение (1′):

$$\Delta E_{\text{кин}}^{i} = E_{\text{кин}2}^{i} - E_{\text{кин}1}^{i} = A_{12}^{i}.$$

то сложив эти выражения для всех N точек системы, получим:

$$E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}2}^{i} - \sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}1}^{i} = \sum_{i=1}^{N} \left(E_{\text{кин}2}^{i} - E_{\text{кин}1}^{i}\right) = \sum_{i=1}^{N} A_{12}^{i} = A_{12}.$$

$$\boxed{\Delta E_{\text{кин}} = A_{12}}$$

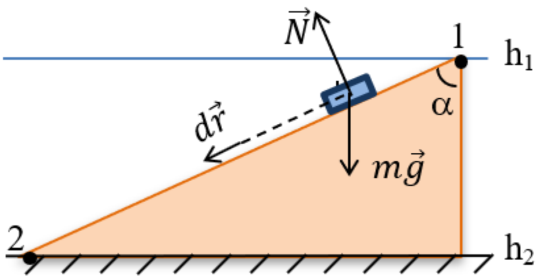
Под A_{12} теперь надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы. Таким образом,

приращение кинетической энергии системы материальных точек равно работе всех сил, действующих на эту систему – ***теорема о кинетической энергии***.

Консервативные силы

Как об этом было сказано выше, *работа* является *функцией процесса*, и, следовательно, *работа*, совершаемая при перемещении точки, *зависит от формы её траектории*. Существуют, однако, силы работа которых определяется только начальным и конечным состояниями точки, и форма траектории на неё не влияет. Рассмотрим примеры.

Сила тяжести: рассчитаем работу силы тяжести, которую она совершает при скольжении без трения МТ по гладкой наклонной плоскости.



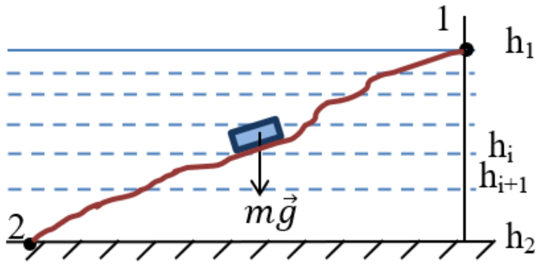
$$A_{12} = \int_1^2 \vec F \cdot d\vec r = \int_1^2 (\cancelto{0}{\vec N} + m\vec g) \cdot d\vec r = \underset{\vec N \perp d\vec r}{\int_1^2 \vec N \cdot d\vec r} +$$

$$+ \int_1^2 m\vec g \cdot d\vec r = \int_1^2 |m\vec g||d\vec r| \cos(\widehat{m\vec g\, d\vec r}) =$$

$$= \int_1^2 mg\, ds \cos\alpha = mg \cos\alpha \int_1^2 ds = mg(s_{12}\cos\alpha)$$

$$= mg(h_1 - h_2) \quad (2)$$

Здесь h_1 и h_2 высоты, на которых находилась точка в начале и конце пути, отсчитанные от произвольного уровня, например от земной поверхности или пола в аудитории. То есть, в выражение для совершённой работы вошли только характеристики начального и конечного состояний точки.



Усложним задачу, пусть наша МТ теперь совершает скольжение как показано на рисунке. Формула (2) будет справедлива, если перемещение её будет происходить по произвольному криволинейному пути. Это становится очевидным, если разбить весь путь $1-2$ горизонтальными плоскостями на малые участки, каждый из которых можно считать прямолинейным. Записав для каждого участка формулу (2) и сложив полученные работы для всех участков, мы придём к прежней формуле:

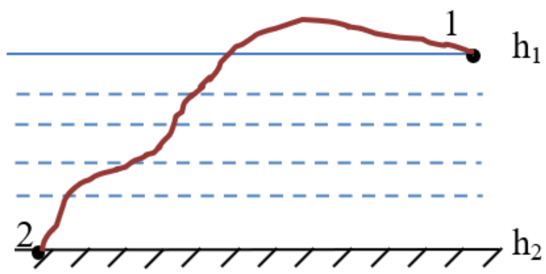
$$A_{1\,i} = mg(h_1 - h_i)$$

$$A_{i\,i+1} = mg(h_i - h_{i+1})$$

$$A_{i+1\,i+2} = mg(h_{i+1} - h_{i+2})$$

$$A_{i+n\,2} = mg(h_{i+n} - h_2)$$

$$A_{12} = \sum_i A_{i\,i+1} = mg(h_1 - h_2)$$



Даже в случае любой другой кривой, проведённой между теми же начальным и конечным положениями 1 и 2, работа силы тяжести не изменится

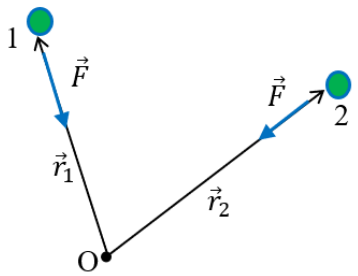
$$A = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} m\vec g d\vec r = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} (-mg)dh = mg(h_1 - h_2)$$

и будет определяться через разность высот $h_1 - h_2$.

Таким образом, *работа силы тяжести не зависит от формы пути (траектории движения), а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки*.

Следующий пример – работа, совершаемая центральной силой, при перемещении материальной точки из положения 1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в положение 2 с $\vec{r}_2$ по произвольной траектории.

Центральная сила: *сила* называется *центральной*, если она направлена к одной и той же точке пространства (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой ***центром силы*** или *силовым центром* (на рисунке точка О).



$\vec{F} = \pm F(r)\frac{\vec{r}}{r}$ – общая запись всех центральных сил.

$F(r)$ – величина центральной силы, $\pm\frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, задающий её направление.

Центральными силами являются сила Кулона: $\vec{F}_{\text{кул}} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$,

сила тяготения $\vec{F}_{\text{гр}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$,

внутренние силы взаимодействия между точками $\vec{F}_{ij} = \vec{f}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ в системе МТ.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \pm F(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r} = \pm\int_1^2 F(r)\,dr = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) \qquad (3)$$

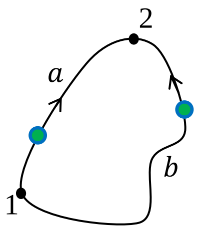
Использовали вывод, приведённый выше: $\vec{r}d\vec{r} = rdr$ и формулу Ньютона-Лейбница (см. Математическое дополнение 3).

Видно, что работа A_{12} выражается чрез определённый интеграл, значение которого зависит только от расстояний r_1 и r_2 до силового центра и не зависит от формы пути, по которому был осуществлён переход из начального положения 1 в конечное положение 2. В формулу (3) путь перехода совсем не входит.

Силы, работа которых не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями тела, называются ***консервативными (или потенциальными)***.

Можно дать другое определение консервативных сил, эквивалентное только что приведённому.

Рассмотрим пространство, где действуют только консервативные силы. МТ переходит из положения 1 в положение 2 по пути $1a2$, при этом консервативные силы совершают работу A_{1a2}.



Если точка перейдёт из положения 1 в положение 2 по пути $1b2$ будет совершена работа A_{1b2}. По определению консервативных сил $A_{1a2} = A_{1b2}$.

$$A_{1b2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_2^1 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -A_{2b1}$$

Пусть теперь наша МТ совершает перемещение по замкнутому пути: $1a2b1$, тогда консервативные силы совершают работу $A_о = A_{1a2b1} = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0$.

Т.е. *работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю:* $\boxed{A_о^{кон} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.}$

Все силы, не являющиеся консервативными, называются ***неконсервативными***.

Неконсервативные силы

К ним, в первую очередь, относятся ***диссипативные силы*** ($\vec{F}_{тр}$, $\vec{F}_{сопр}$), общий вид которых можно представить ввиде $\vec{F} = -F(v)\frac{\vec{v}}{v}$ (см. Лекцию 1.5). Найдём работу диссипативной силы при малом премещении МТ $d\vec{r}$:

{т.к. все множители в этом произведениии – модули величин}.

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F(v)\frac{\vec{v}}{v} \cdot d\vec{r} = -F(v)\frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{v} \cdot dt = -F(v) \cdot v \cdot dt < 0,$$

Значит, работа диссипативных сил на любом пути всегда будет отрицательна $\boxed{A_{дис} = \int \delta A < 0.}$

Диссипативные силы *– силы, работа которых всегда отрицательна*.

Ещё один вид сил – ***гироскопические силы***. Это *силы, зависящие от скорости* МТ *и действующие всегда перпендикулярно скорости*. Примером гироскопических сил, известных в физике, является магнитная часть силы Лоренца (см. Лекцию 1.5):

$$\vec{F}_м = q[\vec{v}, \vec{B}], \qquad \vec{F}_м \perp \vec{v}.$$

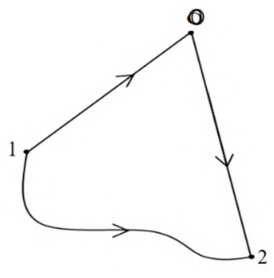
Найдём работу силы Лоренца при малом премещении МТ $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F}_м \cdot d\vec{r} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \cdot d\vec{r} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \cdot \vec{v} \cdot dt = q \cdot \underbrace{[\vec{v}, \vec{v}]}_{0} \cdot \vec{B} \cdot dt = 0$$

Значит, работа гироскопических сил на любом пути всегда будет равна нулю $\boxed{A_{гир} = \int \delta A = 0.}$

Потенциальная энергия

Если на систему действуют одни <u>только</u> <u>консервативные</u> <u>силы</u>, то можно для неё ввести понятие <u>потенциальной энергии</u>.



Представим себе пространство, в котором действуют только консервативные силы. Рассмотрим перемещение МТ из точки 1 в точку 2 в этом пространстве. Можно перейти непосредственно из точки 1 в точку 2, а можно с заходом в точку O. Так как работа не зависит от вида пути, то

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_O} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_O}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}.$$

Назовём потенциальной энергией материальной точки в произвольном месте пространства работу консервативной силы на перемещении из этого места в некоторую фиксированную точку O:

$$\boxed{E_{\text{пот}}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} A_{\vec{r}\vec{r}_0} = \int\limits_{\vec{r}}^{\vec{r}_O} \vec{F}\cdot d\vec{r}.} \qquad (4)$$

Тогда $A_{12} = A_{10} - A_{20} = E_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = -\Delta E_{\text{пот}}$; $\quad A_{\text{конс}} = -\Delta E_{\text{пот}}$.

Работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии.

Согласно нашему определению, потенциальная энергия в точке O равна нулю: $E_{\text{пот}}(\vec{r}_O) = 0$, то есть точка O является началом отсчета для потенциальной энергии. В зависимости от положения этой точки потенциальная энергия будет иметь разное значение. Выберем новое начало отсчета точку O′. Новое значение потенциальной энергии будет равно

$$E'_{\text{пот}}(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\vec{r}_{O'}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\vec{r}}^{\vec{r}_O} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{\vec{r}_O}^{\vec{r}_{O'}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = E_{\text{пот}}(\vec{r}) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_{O'}),$$

то есть будет отличаться от прежнего на некоторую постоянную величину $E_{\text{пот}}(\vec{r}_{O'})$.

Легко показать, что перенос начала отсчета не влияет на разность потенциальных энергий

$$-\Delta E'_{\text{пот}} = E'_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - E'_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = E_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_{O'}) - \left(E_{\text{пот}}(\vec{r}_2) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_{O'})\right) =$$
$$= E_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = -\Delta E_{\text{пот}}$$

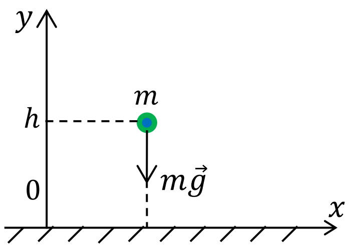
Следовательно, изменение потенциальной энергии $\Delta E_{\text{пот}}$ не зависит от выбора начала отсчета – точки O.

Окончательно, имеем

$$\boxed{A^{\text{кон}}{}_{12} = -\Delta E_{\text{пот}}} \qquad \boxed{\delta A^{\text{кон}} = -dE_{\text{пот}}}$$ (дифференциальная форма).

Примеры расчета потенциальной энергии

1. Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести.



Тело движется под действием силы тяжести $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$. Начало отсчета потенциальной энергии точку O выбираем на поверхности: $\vec{r}_O = 0$ ($y = 0$), используем формулу (4):

$$E_{\text{пот}}(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{0} m\vec{g}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\vec{r}}^{0} mg(-\vec{j})\cdot\left(\vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz\right) =$$

{учтём, что $\vec{g}$ направлено вниз по оси y}

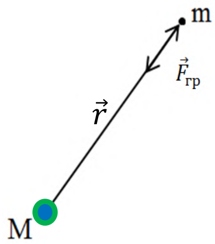
$$= -\int\limits_{h}^{0} mg\cdot dy = \int\limits_{0}^{h} mg\cdot dy = mg\int\limits_{0}^{h} dy = mgh; \qquad E_{\text{пот}}(h) = mgh$$

$$\Delta E_{\text{пот}} = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h.$$

2. Потенциальная энергия в поле силы тяготения (гравитационном поле).

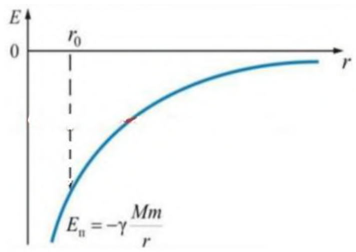
$$\vec{F}_{\text{гр}} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Гравитационное взаимодействие между телами отсутствует, когда они находятся на бесконечно



большом расстоянии друг от друга, то есть $r_0 = \infty$, поэтому естественно считать, что $E_{пот}(\infty) = 0$:

$$E_{пот}(\vec{r}) = E_{пот}(r) = \int_r^\infty \vec{F}_{гр} \cdot d\vec{r} = -\int_r^\infty G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r}$$

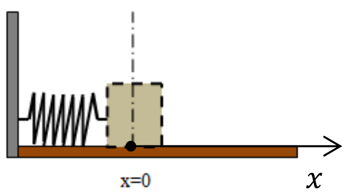


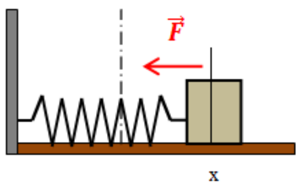
$$= -GMm\int_r^\infty \frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^2 r} =$$

$$= -GMm\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty = GMm\frac{1}{r}\Bigg|_r^\infty = -G\frac{Mm}{r}$$

$$E_{пот}(r) = -G\frac{Mm}{r}.$$

3. Потенциальная энергия упругой деформации.





$$\vec{F}_{упр} = -k\Delta\vec{r}$$

Если принять, что груз, растягивающий пружину, смещается вдоль оси x и выбрать за начало отсчёта положение груза при недеформированной пружине, то величину силы упругости можно представить в виде $F_{x\,упр} = -kx$. В недеформированное состояние пружины, то есть при $r_0 = x_0 = 0$, можно считать $E_{пот}(0) = 0$.

$$E_{пот}(x) = \int_{\vec{r}}^0 \vec{F}_{упр} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^0 \left(\vec{\imath}F_{упр_x} + \vec{\jmath}F_{упр_y} + \vec{k}F_{упр_z}\right) \cdot \left(\vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz\right) =$$

$$= \int_x^0 F_{упр_x} \cdot dx = -\int_x^0 kxdx = -k\int_x^0 xdx = -k\frac{x^2}{2}\Bigg|_x^0 = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{E}_{пот}(x) = k\frac{x^2}{2}.$$

Разработали

доцент кафедры физики Андреева Т.А.,

профессор кафедры физики Лукин А.Я.