ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 01 Механика

Тема № 02 Динамика

Лекция № 08 Закон сохранения импульса.
Центр масс (центр инерции)

Учебные вопросы:

1. Импульс системы материальных точек.
2. Сохранение проекций импульса в случае незамкнутой системы МТ.
3. Связь закона сохранения импульса с однородностью пространства.
4. Центр масс (центр инерции).
5. Уравнение движения центра масс системы.
6. Система отсчёта, связанная с центром масс (Ц-система).
7. Теорема Кёнига.

Литература:

1. Кузнецов С.И. Курс физики с примерами решения задач. Часть I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – С.49 – 53.
2. Леденёв А.Н. Физика: учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн.1. Механика. – М.: Физматлит, 2005. – С.74 – 81.

Импульс системы МТ

Ранее (см. Лекция 1.4), было введено понятие импульса тела как произведение его массы на его скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$. Там же выяснили, что в замкнутой системе двух тел (двух МТ) импульс сохраняется:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = const.$$

Импульс каждой точки в отдельности изменяется под действием силы, действующей со стороны другой точки

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21},$$

но суммарный импульс системы сохраняется.

Рассмотрим теперь <u>**не**замкнутую</u> систему N МТ.

Силу, действующую на $i -$ ую точку системы, можно представить в виде суммы всех внешних и внутренних сил, действующих на неё:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \vec{F}_i^{\text{внутр}} \Leftrightarrow \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij},$$

II закон Ньютона для $i -$ ой точки

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}.$$

Суммируем по всем точкам системы $i \in (1 \dots N)$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}. \qquad (1)$$

Левая часть (1) есть изменение импульса системы

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt}$$

Первое слагаемое в правой части (1) – результирующая всех внешних сил, действующих на систему

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} = \vec{F}^{\text{внеш}}.$$

Для второго слагаемого (1) воспользуемся свойством двойных сумм, как в лекции 1.7

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ji}\right) = \frac{1}{2}\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\right)}^{\{\text{по III закону Ньютона}\}} = \boxed{0}$$

Собираем всё вместе, приравнивая правую и левую части:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}} - \qquad (2)$$

импульс системы МТ может изменяться под действием ***только*** *внешних сил.*

Значит, если система МТ – замкнутая система $\left(\vec{F}^{\text{внеш}} = 0\right)$, то её импульс не изменяется:

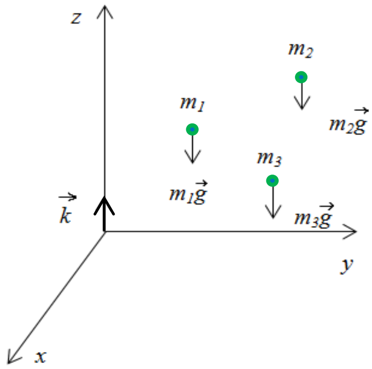
$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\text{сист}} = const} - \text{ЗСИ для замкнутой системы МТ.}$$

Сохранение проекций импульса в случае незамкнутой системы МТ

Импульс системы – векторная характеристика. У незамкнутой системы МТ может сохраняться не сам импульс в целом, а его проекция на некоторое направление.

Пусть система МТ <u>**не**замкнута</u>, на неё действует внешняя сила, направленная определённым образом, например $\vec{F}^{\text{внеш}} = F_z\vec{k}$.

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист.}}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш.}} \rightarrow \left.\begin{aligned} &\frac{dp_x}{dt} = F_x^{\text{внеш.}} = 0; && p_x = const \\ &\frac{dp_y}{dt} = F_y^{\text{внеш.}} = 0; && p_y = const \\ &\frac{dp_z}{dt} = F_z^{\text{внеш.}} \neq 0; && p_z \neq const \end{aligned}\right\}$$



Вдоль оси Z такой системы импульс сохраняться не будет. А проекции импульса на любое горизонтальное направление p_x, p_y –будут оставаться неизменными, что бы в системе не происходило.

<u>Пример</u>: система МТ находится во внешнем однородном поле силы тяжести:

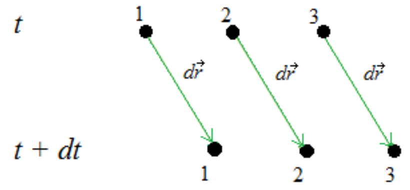
$$\vec{F}^{\text{внеш}} = \vec{F}_{\text{тяж}} = -mg\vec{k}.$$

$$p_x = const; \qquad p_y = const; \qquad \frac{dp_z}{dt} = -mg.$$

Связь закона сохранения импульса с однородностью пространства

ЗСИ – как и другие ***законы сохранения – фундаментальный закон природы.*** Иными словами, он связан с определёнными свойствами симметрии пространства и времени. Закон сохранения импульса является следствием *однородности пространства* (см. Лекция 1.1).

Пусть в некоторый момент времени все точки системы совершат одинаковое перемещение: $d\vec{r}_i = d\vec{r}$. Вычислим работу, которую совершили внутренние силы системы в результате перемещения точек.



$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = d\vec{r} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = d\vec{r} \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = d\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = d\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt}.$$

С другой стороны:

- ✓ конфигурация системы (взаимное расположение точек) не изменилась, так как все точки переместились одинаково;
- ✓ в результате перемещения положение системы относительно внешних тел не изменилось (система замкнутая – внешние тела где-то далеко);
- ✓ пространство однородно, перемещение в новое место не изменило свойств системы;
- ✓ и, вообще, ввиду относительности пространства, вполне может быть, что переместились мы, а не система.

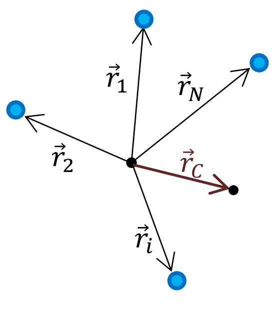
Можно сделать вывод, что работа при таком перемещении не совершалась, то есть $\delta A = 0$.

Из равенства нулю скалярного произведения двух векторов $d\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt}$, вообще говоря, следует только их взаимная перпендикулярность. Ситуация, однако, кардинально меняется, если вспомнить, что равенство справедливо для любого вектора $d\vec{r}$. Если допустить, что второй множитель $\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} \neq 0$, то вектор $d\vec{r}$ можно будет выбрать параллельным ему и тогда произведение будет отлично от 0. Таким образом,

$$d\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = 0, \forall d\vec{r} \Longrightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{p}_{\text{сист}} = const.$$

Центр масс (центр инерции)

При исследовании поведения систем частиц часто удобно использовать для описания движения точку, которая характеризует положение и движение рассматриваемой системы как единого целого. Такой точкой служит центр масс (центр инерции) – точка С.



Рассмотрим систему N материальных точек.

Пусть O – начало отсчёта, выбранное в нашем пространстве; $m_1, m_2, \dots, m_N$ – точки системы.

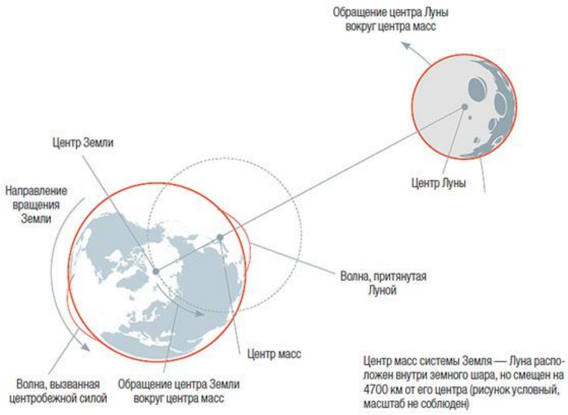
Центром масс или ***центром инерции*** называется такая точка C, радиус-вектор которой $\vec{r}_c$ выражается через радиусы-векторы материальных точек системы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ по формуле

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m},} \qquad (3)$$

где $m = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – общая масса всей системы.

Для однородных тел, обладающих симметрией, центр масс часто совпадает с геометрическим центром тела. Центр тяжести системы – точка приложения силы тяжести (равнодействующей всех гравитационных сил), у систем материальных точек и тел совпадает с центром масс только в однородном гравитационном поле.

Продифференцировав выражение (3) по времени, можно найти ***скорость центра масс*** $\vec{v}_c$ (скорость движения всей системы как целого)



Центр масс системы Земля — Луна расположен внутри земного шара, но смещен на 4700 км от его центра (рисунок условный, масштаб не соблюден)

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{m},$$

где $\vec{v}_i$ – скорость движения каждой материальной точки системы.

$$\boxed{\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i} \qquad (4)$$

Если скорость центра масс равна нулю, то система как целое покоится, то есть точки системы движутся только относительно друг друга. Во внешнем пространстве система как целое не перемещается.

Из формулы (4) следует, что *импульс системы равен произведению массы системы на скорость её центра масс*

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{сист}}$$

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{p}_{\text{сист}}}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_{\text{сист}} = m\vec{v}_c.}$$

Уравнение движения центра масс системы

Понятие центра масс позволяет придать уравнению (2) иную форму

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}; \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}.$$

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}} \; -$$

уравнение движения центра масс системы. Из него следует, что *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна сумме масс всей системы, а действующая сила – векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему*.

Понятие центра масс широко используется в физике, в частности, в механике. Движение твёрдого тела можно рассматривать как суперпозицию движения центра масс тела и вращательного движения тела вокруг его центра масс. Центр масс при этом движется так же, как двигалось бы тело с такой же массой, но бесконечно малыми размерами (материальная точка). Последнее означает, в частности, что для описания этого движения применимы все законы Ньютона. Во многих случаях можно вообще не учитывать размеры и форму тела и рассматривать только движение его центра масс. (Например, при поступательном движении абсолютно твердого тела (см. Лекция 1.3))

Если система замкнута, то её центр масс движется равномерно и прямолинейно (если центр масс покоился, то продолжает покоиться), а импульс сохраняется:

$$\vec{F}^{\text{внеш}} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{v}_c = const, \;\; \vec{p}_{\text{сист}} = const.$$

В замкнутой системе могут действовать внутренние силы, в результате их действия части системы могут иметь ускорения. Но это не оказывает влияния на движение центра масс. Под действием внутренних сил скорость центра масс не изменяется.

Система отсчёта, связанная с центром масс (Ц-система)

Часто бывает удобно рассматривать движение замкнутой системы МТ в системе отсчёта, связанной с центром масс (С). Такая система отсчёта называется ***системой центра масс*** (***Ц-система***), или ***системой центра инерции***. В ней центр масс системы покоится $\vec{v}_c = 0$. А следовательно, полный импульс замкнутой системы остаётся равным нулю $\vec{p}_{\text{сист}} = 0$. Это позволяет упростить уравнения движения системы МТ. Другими словами, любая система МТ как целое покоится в своей Ц-системе. Для замкнутой системы МТ Ц-система является инерциальной.

Теорема Кёнига

Рассмотрим теорему Кёнига, позволяющую *разложить кинетическую энергию системы на: энергию движения точек друг относительно друга и энергию движения системы относительно других (внешних) тел*, то есть на энергию движения относительно центра масс и энергию движения системы как целого со скоростью центра масс.

Кинетическая энергия системы МТ складывается из кинетических энергий отдельных МТ. В каждом слагаемом к $\vec{v}_i$ добавим и вычтем $\vec{v}_c$

$$E_{\text{кин}}^{\text{сист}} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\big((\vec{v}_i - \vec{v}_c) + \vec{v}_c\big)^2}{2} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c)^2}{2}}_{\boxed{I}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{v}_i - \vec{v}_c)\vec{v}_c}_{\boxed{II}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_c^2}{2}}_{\boxed{III}}.$$

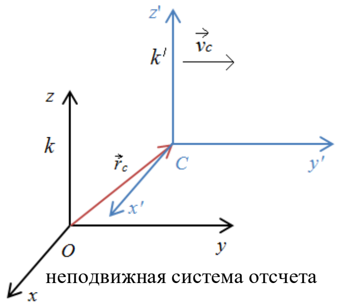
Подробнее распишем каждое слагаемое.

$\boxed{\text{III –}}$ кинетическая энергия движения системы как единого целого относительно других тел (во внешнем пространстве):

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_c^2}{2} = \frac{\vec{v}_c^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{m \vec{v}_c^2}{2} = E_{\text{кин}\,c}.$$

$\boxed{\text{II –}}$ $$\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c)\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_i)\vec{v}_c - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_c^2 = \vec{p}_{\text{сист}} \cdot \vec{v}_c - \vec{v}_c^2 \sum_{i=1}^{N} m_i = m\vec{v}_c \cdot \vec{v}_c - \vec{v}_c^2 m = 0.$$

$\boxed{\text{I –}}$ кинетическая энергия системы относительно центра масс (движение частиц относительно центра масс). Воспользуемся преобразованием Галилея (см. Лекцию 1.4): $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$, где $\vec{v}_i'$ – скорость точки в подвижной системе отсчета, связанной с точкой С.



$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c)^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i {\vec{v}_i'}^2}{2} = E'_{\text{кин}}.$$

Таким образом,

$$\boxed{E_{\text{кин}} = E'_{\text{кин}} + E_{\text{кин}\,c}} -$$

теорема Кёнига, где $E_{\text{кин}\,c}$– кинетическая энергия движения системы как целого (во внешнем пространстве), $E'_{\text{кин}}$ – внутренняя/собственная энергия системы. Например, $E_{\text{кин}\,c}$– кинетическая энергия, связанная с перемещение автобуса, а $E'_{\text{кин}}$ – кинетическая энергия, связанная с перемещением людей в этом автобусе. Деление энергии системы на внешнюю и внутреннюю части уже встречалось в лекции 1.6: $E_{\text{пот}} = E_{\text{пот}}^{\text{взаим}} + E_{\text{пот}}^{\text{внеш}}$.

Разработали

доцент кафедры физики Андреева Т.А.,

профессор кафедры физики Лукин А.Я.