Раздел № 01 М е х а н и к а

Тема № 02 Динамика

Лекция № 09 Момент импульса.
Закон сохранения момента импульса.
Вращение АТТ вокруг неподвижной оси

**Учебные вопросы:**

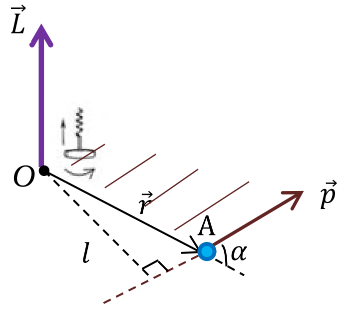
1. Момент импульса. Момент силы. Уравнение моментов.
2. Работа силы при повороте.
3. Закон сохранения момента импульса. Связь закона сохранения момента импульса с изотропностью пространства.
4. Вращение АТТ вокруг неподвижной оси. Уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси.

**Литература:**


1. Кузнецов С.И. Курс физики с примерами решения задач. Часть I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – С.117 – 121.
2. Леденёв А.Н. Физика: учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн.1. Механика. – М.: Физматлит, 2005. – С.141 – 145.

## Момент импульса и момент силы относительно точки. Уравнение моментов

Анализ поведения систем показывает, что кроме энергии и импульса существует ещё одна механическая величина, с которой также связан закон сохранения, – момент импульса (момент количества движения).




Рассмотрим материальную точку А, движущуюся с некоторым импульсом $\vec{p}$, в пространстве. Положение этой точки в любой момент времени описывается радиус-вектором $\vec{r}$ относительно точки отсчёта О. ***Моментом импульса МТ относительно точки*** называется вектор $\vec{L}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$:

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}].}$$

Из этого определения следует, что

1) вектор $\vec{L}$ является аксиальным вектором (см. Лекцию 1.3) – направлен по правилу «правого винта». $\vec{L}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$.
2) модуль вектора $|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{p}}) = |\vec{p}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha = \ p \cdot l.$

   где $l$ – ***плечо вектора*** $\vec{p}$ ***относительно точки*** О (*кратчайшее расстояние от точки О до линии действия* $\vec{p}$).

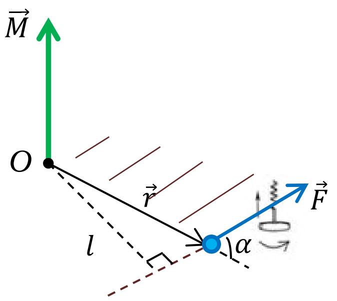
Единица измерения $\vec{L}$: $[L] = [p] \cdot [l] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{м} = \text{кг}\frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$

Выясним, какая механическая величина отвечает за изменение момента импульса $\vec{L}$ со временем в данной системе отсчёта:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] \overset{\{\text{по II закону Ньютона}\}}{=} \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v}\right] + [\vec{r}, \vec{F}] = m\cancelto{0}{[\vec{v}, \vec{v}]} + [\vec{r}, \vec{F}].$$

***Моментом силы,*** действующей на МТ, ***относительно точки*** О называется векторное произведение

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]}$$




1) вектор $\vec{M}$ – аксиальный вектор.
2) модуль $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha = \ F \cdot l$ (сила на плечо).

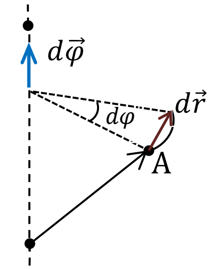
Единица измерения $\vec{M}$: $[M] = [F] \cdot [l] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{кг}\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} \ -$$

***уравнение моментов***: *производная по времени от момента импульса относительно некоторой точки равна моменту сил, относительно той же точки, действующих на частицу*.

**Работа силы при повороте**

Введённые выше величины позволяют по-новому записать выражение для работы силы. Рассмотрим МТ $A$ массы $m$ вращающуюся вместе с АТТ вокруг неподвижной оси. Пусть $d\vec{r}$ – малое перемещение точки за время $dt$, $d\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота. Как было показано в лекции 1.3 эти величины связаны следующим выражением: $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$. Малая работа, совершаемая силой, действующей на эту точку (см. Лекцию 1.6) при таком перемещении равна




$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot [d\vec{\varphi}, \vec{r}] = d\vec{\varphi} \cdot [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

Мы воспользовались свойством смешанного скалярно-векторного произведения, допускающим циклическую перестановку сомножителей (Математическое дополнение 1).

Для пути конечной длины (для поворота на конечный угол) ***работа силы***:

$$\boxed{A_{12} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}.}$$

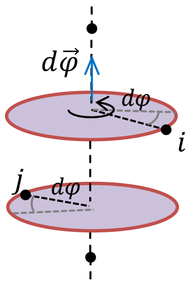
**Закон сохранения момента импульса системы МТ. Связь закона сохранения момента импульса с изотропностью пространства**

Рассмотрим систему $N$ материальных точек. ***Момент импульса*** данной ***системы*** будет равен векторной сумме моментов импульсов её отдельных точек:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i],$$

где все векторы $\vec{L}_i$ определены относительно одной и той же точки О заданной системы отсчёта, то есть момент импульса – аддитивная величина.

Предположим, что наша система – замкнутая система. При повороте системы все её точки за время $dt$ повернутся на на один и тот же угол $d\vec{\varphi}_i = d\vec{\varphi}$:




Вычислим работу, которую совершили внутренние силы системы при таком повороте.

$$\delta \text{A} = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внутр}} \cdot d\vec{\varphi}_i = d\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внутр}} = d\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} =$$

$$= d\vec{\varphi} \cdot \frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt}.$$

С другой стороны:

✓ конфигурация системы (расположение точек) не изменилась (все точки повернулись на один и тот же угол);

- ✓ в результате поворота положение системы относительно внешних тел не изменилось (система замкнутая – внешние тела где-то далеко);
- ✓ пространство изотропно, его свойства не зависят от направления и, значит, поворот не изменил свойств системы;
- ✓ и, вообще, повернулись мы, а не система.

Можно сделать вывод, что «тратить» работу было не на что, то есть $\delta A = 0$.

Равенство 0 выполняется для любого малого поворота $d\vec{\varphi}$. Такое возможно, только если второй сомножитель равен 0.

$$d\vec{\varphi} \cdot \frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = 0, \quad \forall d\vec{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = 0.$$

$\boxed{\vec{L}_{\text{сист}} = const}$ – ***закон сохранения момента импульса*** (ЗСМИ):

*момент импульса замкнутой системы МТ не меняется со временем.*

Если бы пространство не было изотропным, утверждать, что $\delta A = 0$, мы не могли бы.

ЗСМИ – как и другие законы сохранения – ***фундаментальный закон природы.*** Иными словами, он связан с определёнными свойствами симметрии пространства и времени. Закон сохранения момента импульса является следствием *изотропности пространства* (см. Лекция 1.1).

Вернёмся к нашей замкнутой системе МТ. Мы показали, что при повороте всех точек вокруг некоторой оси на угол $d\vec{\varphi}$ работа не совершается

$$0 = \delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внутр}} \cdot d\vec{\varphi}_i = d\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внутр}} = d\vec{\varphi} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{M}_{ij}, \qquad \forall d\vec{\varphi}$$

где $\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}]$ – момент силы, с которой $j$ точка действует на $i$ точку. Таким образом *моменты внутренних сил не могут изменить момент импульса системы*:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{M}_{ij} = 0, \quad \vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}.$$

$$\left\{ \text{см. Лекцию 1.8: } \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = 0 \right\}$$

Рассмотрим **не**замкнутую систему $N$ МТ:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{M}_i^{\text{внеш}} + \vec{M}_i^{\text{внут}}\right) =$$

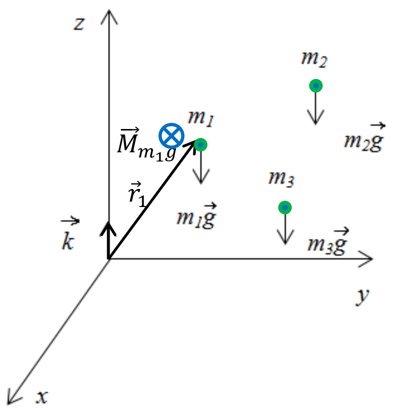
$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внеш}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{M}_{ij}}_{0} = \vec{M}^{\text{внеш}}.$$

*Момент импульса системы МТ может изменяться под действием только суммарного момента всех внешних сил, действующих на систему*:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}.} \quad (1)$$

В некоторых случаях момент импульса **не**замкнутой системы частиц тоже может сохраняться (как и импульс системы (см. Лекцию 1.8)). Рассмотрим эти случаи.

1) если проекция момента всех внешних сил на ось OZ равна нулю, то сохраняется не сам момент импульса $\vec{L}$, а его проекция на эту ось $L_z$:




$$\vec{M}^{\text{внеш}} = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath}, \ (M_z = 0): \ \vec{M}_{mg} \perp OZ.$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}: \quad \begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = M_x; \quad L_x \neq const \\ \dfrac{dL_y}{dt} = M_y; \quad L_y \neq const \\ \dfrac{dL_z}{dt} = 0; \quad L_z = const \end{cases}$$

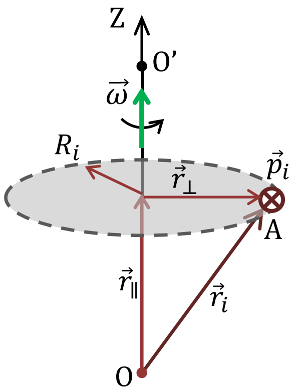
Вдоль оси $OZ$ такой системы момент импульса сохраняется, что бы в системе не происходило. А проекции момента импульса на любое горизонтальной направление $L_x, L_y$ –будут изменяться.

2) если на МТ системы действует внешняя центральная сила (см. Лекцию 1.6) с центром в точке O, то момент импульса системы относительно этой точки сохраняется $\vec{L}_{\text{сист}} = const$:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{цент}}\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i, F(r_i)\frac{\vec{r}_i}{r_i}\right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{F(r_i)}{r_i}[\vec{r}_i, \vec{r}_i] = 0$$

**Уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси**

Как было установлено выше, вращение систем характеризуется моментом импульса $\vec{L}$. Вычислим момент импульса абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.




В лекции 1.3, где уже говорилось об этом движении, для описания такого вращения предлагалось описывать движение одной из точек АТТ.

Рассмотрим точку А АТТ. В процессе вращения АТТ вокруг неподвижной оси наша точка движется по окружности радиуса $R_i$, центр которой находится на этой оси.

Пусть ось OZ системы координат совмещена с осью вращения АТТ OO', O – начало отсчета. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ согласно направлению вращения АТТ направлен вдоль оси вертикально вверх $\vec{\omega} = \omega_z\vec{k} = \omega\vec{k}.$

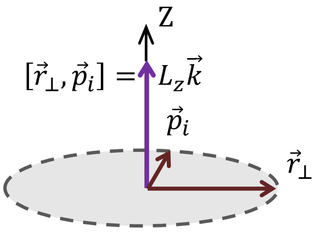
$\vec{L}_i = [\vec{r}_i; \vec{p}_i]$ – момент импульса точки А относительно точки отсчёта O.

Представим радиус-вектор точки $\vec{r}_i$ как сумму двух составляющих $\vec{r}_i = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$, где $\vec{r}_\parallel -$ составляющая радиус-вектора параллельная оси вращения АТТ, $\vec{r}_\perp -$ составляющая перпендикулярная ей.

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = [\vec{r}_\parallel, \vec{p}_i] + [\vec{r}_\perp, \vec{p}_i] = \vec{L}_{xy_i} + L_{z_i}\vec{k}.$$

Разберём каждое слагаемое по отдельности:

- $[\vec{r}_\perp, \vec{p}_i]$: по построению этот вектор параллелен оси вращения АТТ, то есть это проекция момента импульса на ось вращения (ось OZ) $L_z$.



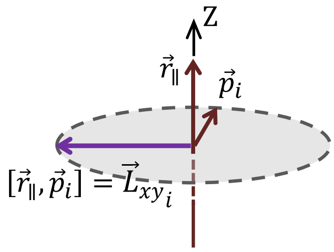

$$|L_{z_i}| = |[\vec{r}_\perp, \vec{p}_i]|$$

$$|L_{z_i}| = |\vec{r}_\perp| \cdot |\vec{p}_i| \cdot \sin\big(\overset{90^\circ}{\widehat{\vec{r}_\perp, \vec{p}_i}}\big) =$$

$$= R_i \cdot p_i = R_i \cdot m_i v_i = R_i \cdot m_i \omega_z R_i = m_i {R_i}^2 \omega$$

$\omega -$ угловая скорость вращения АТТ. Все точки АТТ вращаются с одной угловой скоростью.

- $[\vec{r}_\parallel, \vec{p}_i]$: по построению этот вектор перпендикулярен оси вращения АТТ (оси OZ), то есть это проекция момента импульса на плоскость OXY $\vec{L}_{xy_i} = [\vec{r}_\parallel, \vec{p}_i]$.



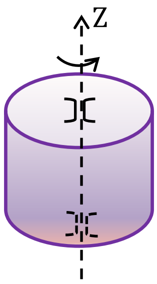

Для всего АТТ, поскольку момент импульса – аддитивная величина:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

Соответственно для его проекций справедливы аналогичные выражения:

$$\vec{L}_{xy} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{xy_i}; \qquad L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{z_i}.$$

Обсудим, что получилось: $\vec{L}_{xy} -$ составляющая момента импульса перпендикулярная оси вращения. Мы говорим о вращении АТТ вокруг неподвижной оси только тогда, когда тело закреплено на ней, в противном случае, это произвольное вращение. Поэтому, $\vec{L}_{xy} -$ вместе с телом просто поворачивается вокруг оси и на само вращение АТТ не влияет.




Для описания вращения АТТ вокруг неподвижной оси используют $L_z$ **−** ***момент импульса тела относительно неподвижной оси***:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{z_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2 \omega_z = \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2; \qquad \boxed{L_z = I\omega_z = I\omega} \qquad (2).$$

*I* – ***момент инерции твердого тела относительно оси вращения***:

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2.}$$

Единица измерения момента инерции – $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Выше было установлено, что момент импульса системы материальных точек может изменяться только под действием момента всех внешних сил (1):

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}.$$

Это векторное уравнение эквивалентно трём скалярным уравнениям, получающимся путём проецирования на неподвижные оси ДСК. Для АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси, совмещённой с осью $0Z$, скалярное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z -$$

***уравнение моментов относительно неподвижной оси***. Подставим в него выражение для соответствующей проекции момента импульса (2):

$$\frac{d(I\omega_z)}{dt} = M_z \qquad \text{или} \qquad I\frac{d\omega_z}{dt} = M_z$$

так как момент инерции АТТ вокруг неподвижной оси остаётся постоянным. Заменив производную от проекции угловой скорости на соответствующую проекцию углового ускорения (см. Лекцию 1.3), получим

$$\boxed{I\beta_z = M_z} -$$

***уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси***.

**Разработали**

**доцент кафедры физики** Андреева Т.А.,

**профессор кафедры физики** Лукин А.Я.