Раздел № 01 Механика

Тема № 02 Динамика

Лекция № 10 Момент инерции.
Кинетическая энергия твёрдого тела,
вращающегося вокруг неподвижной оси.
Динамика плоского движения АТТ

Учебные вопросы:

1. Момент инерции.
2. Моменты инерции простых однородных твердых тел.
3. Теорема Гюйгенса - Штейнера.
4. Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
5. Аналогии между движением МТ и вращением АТТ вокруг неподвижной оси.
6. Динамика плоского движения АТТ.

Литература:

1. Кузнецов С.И. Курс физики с примерами решения задач. Часть I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – С.122 – 130.
2. Леденёв А.Н. Физика: учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн.1. Механика. – М.: Физматлит, 2005. – С.146 – 165.

Момент инерции

Момент инерции тела, полученный в лекции 1.9, – *мера инертности тела относительно вращения*, так же как инертная масса – мера инертности для поступательного движения (см. Лекция 1.4). Он зависит от распределения массы, вращающегося тела, по объёму относительно его оси вращения.

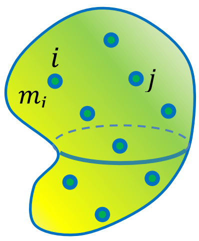
$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2},$$

где r_i – расстояние до оси вращения. Из полученной формулы следует, что момент инерции тела – аддитивная величина (равен сумме моментов инерции частей тела).

Моменты инерции простых однородных твердых тел

Что бы рассмотреть примеры расчёта моментов инерции простых тел, обсудим способы описание АТТ в физических моделях. Первый способ уже зарекомендовал себя: макроскопическое тело можно представить как систему дискретных материальных точек (см. Лекция 1.2). Этот способ позволяет получать компактные выражения физических величин, удобные для теоретического изложения.

1 способ: *дискретное описание*.

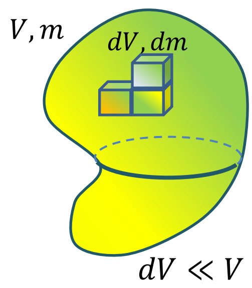


АТТ – система МТ, разделённых между собой пространством. Многие величины, описывающие АТТ, являются аддитивными характеристиками, и могут быть найдены с помощью операции сложения:

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i \,; \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{v}_i \,; \qquad I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, {r_i}^2$$

2 способ: *непрерывное описание*.

Такой подход к представлению АТТ применяется при решении практических задач. В этом способе считается, что АТТ – система физически малых объёмов dV, таких что любой из них много меньше объёма самого твёрдого тела, $dV \ll V$. При этом учитывается, этот dV– макроскопический объём, так как в него попадает много частиц вещества.



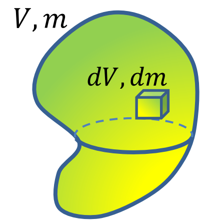
Величины, описывающие АТТ в этом случае вычисляются с помощью определённых интегралов (см. Математическое дополнение 3).

$$V = \int\limits_{\text{по всему телу}} dV \,; \qquad m = \int\limits_{\text{по всему телу}} dm \,; \qquad \vec{p} = \int\limits_{\text{по всему телу}} d\vec{p} = \int \vec{v}\, dm \,; \qquad I = \int\limits_{\text{по всему телу}} dI = \int r^2 dm,$$

где dm, $d\vec{p}$, dI — соответствующие характеристики, относящиеся к малым объёмам: масса, импульс, момент инерции малого объёма dV.

При переходе от дискретного описания вещества к непрерывному, удобно использовать понятие плотности вещества как коэффициента пропорциональности между бесконечно малым объёмом и его массой: $dm \sim dV$. В зависимости от характерных размеров тела плотности бывают объёмной, поверхностной или линейной.

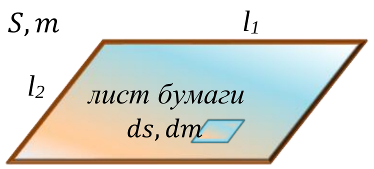
- ***масса, распределённая по объёму*** (l_1, l_2, l_3) — характерные размеры тела



$\boxed{\rho = \dfrac{dm}{dV}}$ – объёмная плотность $\left(\rho = \dfrac{m}{V}\right.$ – для однородных тел$\left.\right)$

Единица измерения $[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

- ***масса, распределенная по поверхности*** $(l_1, l_2 \gg l_3)$



Роль малого объёма dV в этом случае играет малая площадка dS.

$\boxed{\sigma = \dfrac{dm}{dS}}$ – поверхностная плотность

$\left(\sigma = \dfrac{m}{S}\right.$ – для однородного тела$\left.\right)$

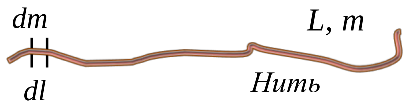
Единица измерения $[\sigma] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$.

- ***масса, распределенная вдоль линии*** $(l_1 \gg l_2, l_3)$

Роль малого объёма dV в этом случае играет малый отрезок dl.

$\boxed{\lambda = \dfrac{dm}{dl}}$ – линейная плотность вещества

$\left(\lambda = \dfrac{m}{L}\right.$ – для однородного тела$\left.\right)$



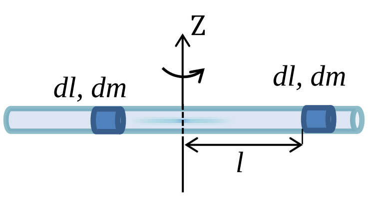
Единица измерения $[\lambda] = \frac{\text{кг}}{\text{м}}$.

Примеры расчёта моментов инерции

Рассмотрим однородные тела симметричной формы (центр масс такого тела совпадает с его геометрическим центром).

➢ Тонкий однородный стержень массы m и длины L:

1) ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его центр масс.



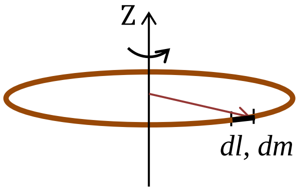
$$I = \int\limits_{\text{по всему стержню}} dI_{dl} = \int r^2 dm = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 dm = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 \cdot \lambda dl = \lambda \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 dl =$$

$$= \frac{m}{L}\frac{l^3}{3}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{3L}\left(\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{mL^2}{12}$$

2) ось вращения совпадает с осью симметрии тонкого стержня ($d_{\text{ст}} \to 0$).

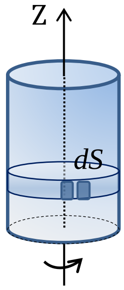
$$I = \int\limits_{\text{по всему стержню}} dI_{dl} = \int r^2 dm = 0$$

так как стержень тонкий, расстояние от оси вращения до точки на его поверхности мало $r \to 0$.



➢ Тонкое кольцо массы m и радиуса R, ось вращения перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр масс.

$$I = \int\limits_{\text{по всему кольцу}} dI_{dl} = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int\limits_{\text{по всему кольцу}} dm = mR^2$$



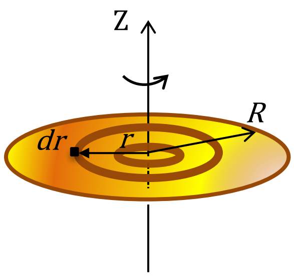
➢ Тонкостенная труба (полый цилиндр) массы m, радиуса R и длины L, ось вращения совпадает с осью симметрии трубы.

$$I = \int\limits_{\text{по всей поверхности трубы}} dI_{dS} = \{\text{сгруппировали отдельные элементы } dS \text{ в кольца}\} = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dI_{\text{к}} =$$

$$= \int\limits_{\text{по всем кольцам}} R^2 dm_{\text{к}} = R^2 \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dm_{\text{к}} = mR^2$$

И у кольца, и у трубы вся масса находится на расстоянии R от оси вращения.

➢ Тонкий диск массы m и радиуса R, ось вращения перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр.



Как и в предыдущем примере представляем диск набором тонких колец радиуса r толщиной dr. Используем, рассчитанный выше момент инерции.

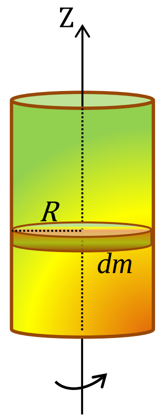
$$I = \int\limits_{\text{по всей поверхности диска}} dI_{dS} = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dI_{\text{к}} = \int r^2 dm_{\text{к}} = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} r^2 \sigma dS_{\text{к}} = \sigma \int_0^R r^2 2\pi r dr =$$

$$= 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{S_{\text{д}}}\frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

Площадь тонкого кольца $dS_{\text{к}} = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = r^2 + 2\pi r dr + (dr)^2 - r^2 = 2\pi r dr$, так как слагаемым $(dr)^2$ можно пренебречь.

Другой подход позволяет сразу получить искомое выражение. Разрежем кольцо и растянем его в прямоугольник. Мы можем это сделать из-за его малой толщины. Длина получившегося прямоугольника $2\pi r$, ширина dr, площадь равна их произведению.

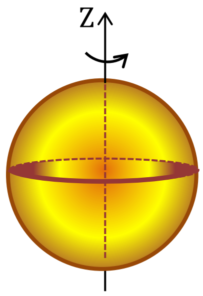
➢ Сплошной цилиндр массы m и радиуса R, ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра.



Сплошной цилиндр можно представить как набор дисков одинакового радиуса, нанизанных на ось вращения. Тогда можно использовать момент инерции диска из примера выше.

$$I = \underset{\text{по всем дискам}}{\int} dI_{д} = \int \frac{R^2}{2} dm_{д} = \frac{R^2}{2} \underset{\text{по всем дискам}}{\int} dm_{д} = \frac{mR^2}{2}$$

➢ Шар массы m и радиуса R.



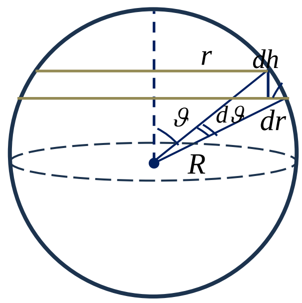
Момент инерции шара можно вычислить, разбивая его на диски. Это удобно сделать, используя угол ϑ сферической системы координат. Рассмотрим тонкий диск, расположенный под углом ϑ и видимый под малым углом $d\vartheta$.

Момент инерции такого диска $\qquad dI = dm \cdot \frac{r^2}{2},$

$$r = R \cdot \sin\vartheta, \qquad dh = R \cdot d\vartheta \cdot \sin\vartheta,$$

масса $\qquad dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dh = \rho\pi (R \cdot \sin\vartheta)^2 (R \cdot d\vartheta \cdot \sin\vartheta) = \rho\pi R^3 sin^3\vartheta d\vartheta$

Тогда



$$I = \underset{\text{по всему шару}}{\int} dI_{д} = \int \frac{r^2}{2} dm = \int_0^{\pi} \frac{\rho\pi R^5}{2} \sin^5\vartheta d\vartheta =$$

$$= -\frac{\rho\pi R^5}{2} \int_0^{\pi} \sin^4\vartheta d(\cos\vartheta) = -\frac{\rho\pi R^5}{2} \int_0^{\pi} (1-\cos^2\vartheta)^2 d(\cos\vartheta) =$$

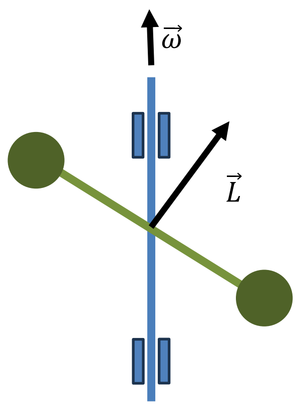
$$= -\frac{\rho\pi R^5}{2} \left(\cos\vartheta - \frac{2}{3}\cos^3\vartheta + \frac{1}{5}\cos^5\vartheta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{8\rho\pi R^5}{15}.$$

Так как $\qquad \rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3},$

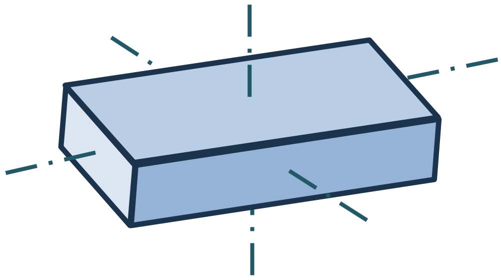
окончательно получаем

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

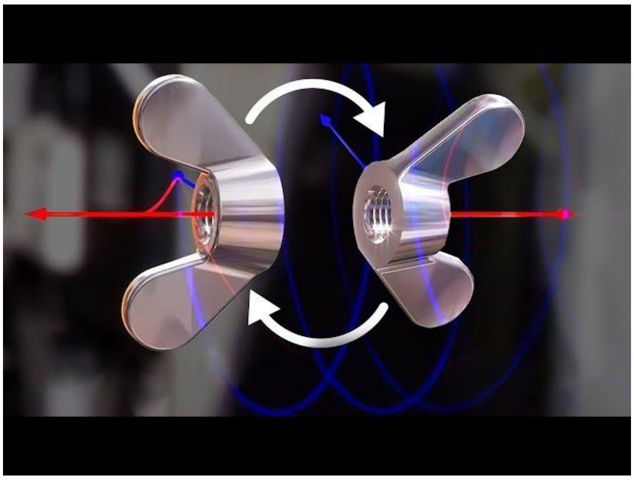
Эффект Джанибекова



В общем случае, при вращении произвольного тела векторы момента импульса и угловой скорости не обязательно направлены одинаково. Например, для тела на рисунке вектор момента импульса вращается вместе с телом, описывая в пространстве конус. С другой стороны, при вращении свободного тела момент импульса должен сохраняться и по величине, и по направлению. Следовательно вращение свободного тела возможно только вокруг оси, для которой направления $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$ совпадают. Таких осей всего три, они называются ***главные центральные оси инерции***, и для симметричных тел они совпадают с осями симметрии.



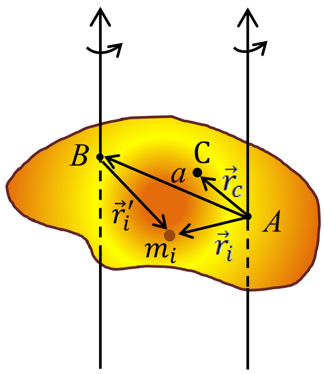
Но оказывается, что устойчивым может быть только вращение вокруг оси с наименьшим и наибольшим моментом инерции. И хотя этот факт был известен давно, космонавт Владимир Джанибеков в условиях невесомости «открыл» его заново.



https://www.youtube.com/watch?v=agEn8M5SM_o
https://www.youtube.com/watch?v=N9HlQ-XVnFk
https://www.youtube.com/watch?v=LzVItPwiQyI

Теорема Гюйгенса-Штейнера

Теорема, позволяющая при известном моменте инерции относительно одной оси находить момент инерции относительно другой параллельной оси.



Предположим, что момент инерции АТТ относительно оси, проходящей через точку А, известен. Необходимо найти момент инерции АТТ относительно оси, проходящей через точку B. Обе оси параллельны. Известны масса АТТ m и расстояние между осями a.

Воспользуемся снова дискретным описанием АТТ.

$$I_B = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, {r_i'}^2,$$

где r_i' – расстояние от i точки АТТ до оси, проходящей через точку B, I_B – момент инерции тела относительно этой оси (тот, что надо найти). Если r_i – расстояние от i точки АТТ до оси, проходящей через точку A, то $I_A = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2$ – момент инерции тела относительно этой оси.

Согласно рисунку $\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{a}$, $\quad {r_i'}^2 = (\vec{r}_i - \vec{a})^2 = {r_i}^2 + a^2 - 2\vec{r}_i\vec{a}$.

$$I_B = \sum_{i=1}^{N} m_i \left({r_i}^2 + a^2 - 2\vec{r}_i\vec{a}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2 + a^2 \sum_{i=1}^{N} m_i - 2\vec{a} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i.$$

Последнее слагаемое можно преобразовать, использовав определение радиус-вектора центра масс системы МТ (см. Лекцию 1.8). В данном случае под $\vec{r}_c$ мы понимаем положение центра масс относительно оси А, то есть составляющую радиус-вектора центра масс, лежащую в плоскости, перпендикулярной этой оси

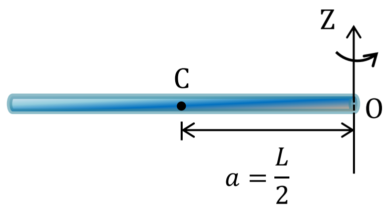
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}; \qquad 2\vec{a}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 2\vec{a} m \vec{r}_c$$

$$\boxed{I_B = I_A + ma^2 - 2m\vec{r}_C\vec{a}.}$$

Если точка А не только точка, через которую проходит ось вращения, но и центр масс этого АТТ (точки А и С совпадают), то $\vec{r}_C = 0$ и $\boxed{I = I_C + ma^2}$ –
момент инерции тела относительно произвольной неподвижной оси I равен сумме момента инерции этого тела I_C относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями a.

Из полученной формулы очевидно, что $I > I_C$. Поэтому можно утверждать: момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела, является наименьшим среди всех моментов инерции тела относительно осей, имеющих данное направление.

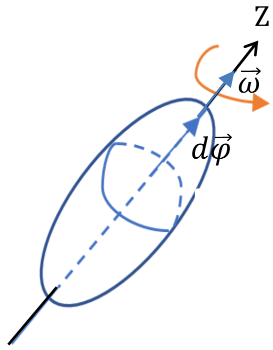
Пример расчёта с использованием теоремы Гюйгенса-Штейнера: тонкий стержень массы m и длины L, ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его конец.



$$I_C = \frac{mL^2}{12}; \qquad I_O = I_C + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}.$$

Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим АТТ, вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью Z ДСК.



Пусть за время dt тело поворачивается на угол $d\vec{\varphi}$: $d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{k}$, $\vec{k}$ – единичный вектор (орт) оси Z.

Сосчитаем работу, совершённую силами, действующими на АТТ, при повороте на угол $d\varphi$ (см. Лекцию 1.9):

$$\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = \vec{M}^{\text{внеш}} d\vec{\varphi} = \frac{d\vec{L}}{dt} d\vec{\varphi} = \frac{d\vec{L}}{dt} d\varphi \cdot \vec{k} = \frac{d(\vec{L} \cdot \vec{k})}{dt} d\varphi =$$

$$= \frac{dL_z}{dt} d\varphi = \frac{d(I\omega)}{dt} \cdot d\varphi = I \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi = I \cdot d\omega \cdot \frac{d\varphi}{dt} = I \cdot d\omega \cdot \omega = I \cdot d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right).$$

При преобразованиях учли, что вектор $\vec{k}$ - постоянный вектор, а $\vec{L} \cdot \vec{k} = L_z$, где $L_z = I\omega$ (см. Математическое дополнение 1 и Лекцию1.9).

По теореме о кинетической энергии работа всех сил, действующих на тело, равна приращению его кинетической энергии (см. Лекцию 1.6):

$$\delta A = dE_{\text{кин}};$$

$$dE_{\text{кин}} = d\left(\frac{I\cdot\omega^2}{2}\right) \Longrightarrow \boxed{E_{\text{кин}} = \frac{I\cdot\omega^2}{2}} -$$

кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Выражение для кинетической энергии вращающегося АТТ можно получить и другим способом. Разобьем все тело на маленькие элементы dm. Кинетическая энергия каждого элемента равна $dE_{\text{кин}} = \frac{dm\cdot v^2}{2}$, а скорость $v = \omega r$, где r – расстояние до оси. Суммируя, находим кинетическую энергию тела

$$E_{\text{кин}} = \int\limits_{\text{по всему телу}} dE_{\text{кин}} = \int\limits_{\text{по всему телу}} \frac{dm\cdot\omega^2 r^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\int\limits_{\text{по всему телу}} r^2 dm = \frac{I\omega^2}{2}$$

Это выражение напоминает выражение для кинетической энергии МТ, только вместо массы фигурирует момент инерции, а вместо линейной скорости – угловая: $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$.

Аналогии между движением МТ и вращением АТТ вокруг неподвижной оси

МТ	АТТ, вращающееся вокруг неподвижной оси
$d\vec{r}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
m	I
$p = mv$	$L_z = I\omega$
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r}$	$\delta A = \vec{M}\cdot d\vec{\varphi}$
$m\vec{a} = \vec{F}$	$I\beta_z = M_z$
$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$	$E_{\text{кин}} = \frac{I\cdot\omega^2}{2}$

Динамика плоского движения АТТ

При плоском движение (см. Лекцию 1.3) АТТ его центр масс (C) движется в определённой плоскости, неподвижной в выбранной системе отсчёта, а вектор его угловой скорости $\vec{\omega}$ всё время остаётся перпендикулярным этой плоскости. То есть в системе центра масс тело просто вращается относительно неподвижной оси, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости движения. Из этого следует, что плоское движение АТТ можно описывать двумя уравнениями:

$\boxed{m\vec{a}_C = \vec{F}}$ – уравнение движения центра масс системы (см. Лекцию 1.8) (поступательное движение АТТ как целого);

$\boxed{I_C \beta_z = M_z}$ – уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси (см. Лекцию 1.9) (вращение АТТ), где M_z суммарный момент всех внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс (C).

Кинетическая энергия АТТ при плоском движении тоже складывается из энергии движения центра масс (поступательного движения) и энергии вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через точку C (теорема Кёнига) (см. Лекцию 1.8):

$$\boxed{E_{\text{кин}} = \frac{m{v_C}^2}{2} + \frac{I_C \cdot \omega^2}{2}.}$$

Разработали

доцент кафедры физики Андреева Т.А.,

профессор кафедры физики Лукин А.Я.