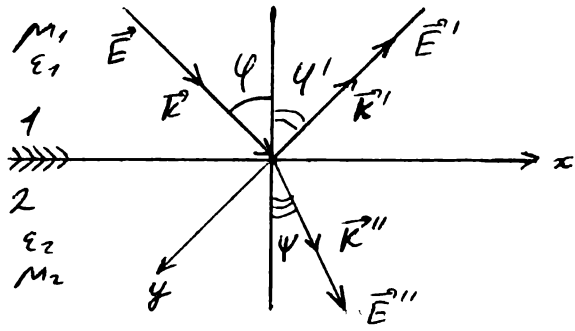


24) Электромагнитные волны на границе раздела изотропных сред.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$\vec{E} = \text{Re } \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

падающая волна:  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

отражённая волна  $\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\omega' t - \vec{k}'\vec{r})}$

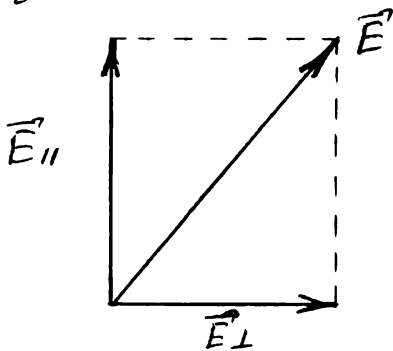
преломлённая волна  $\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i(\omega'' t - \vec{k}''\vec{r})}$

граничные условия:  $E_{1z} = E_{2z} \quad \sqrt{\mu'} H = \sqrt{\epsilon'} E$   
 $H_{1x} = H_{2x}$

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \vec{E}'$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}''$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\mu'} H = \sqrt{\epsilon'} E \\ \Rightarrow H = nE \end{array} \right\} \mu \neq 1; \sqrt{\epsilon'} = n$$



распишем граничные условия.

при  $z=0$ :  $E_{1z}|_{z=0} = E_{2z}|_{z=0}$

$$\vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + \vec{E}'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)} = \vec{E}''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)} \quad (1)$$

условие (1) выполняется при  $z=0$ , но при любых значениях  $t, y, x$ :

1) т.к. при  $\forall t$ , то:  $\omega' = \omega'' = \omega$ ; т.е. частота электромагнитной волны не изменяется.

2) т.к. при  $\forall x$ , то:  $k_x = k'_x = k''_x \quad (\Rightarrow a)$

3) т.к. при  $\forall y$ , то:  $k_y = k'_y = k''_y \quad (\Rightarrow b)$

a)  $k \sin \psi = k' \sin \psi' = k'' \sin \psi \quad (2) \quad |k_x = k'_x = k''_x|$

$$k = \frac{\omega}{v_1}, k' = \frac{\omega}{v_1}, k'' = \frac{\omega}{v_2}$$

$$k \sin \varphi = k' \sin \varphi'; \Rightarrow \frac{\omega}{v_1} \sin \varphi = \frac{\omega}{v_1} \sin \varphi'; \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi'}$$

$\Rightarrow$  угол отражения равен углу падения, что является следствием граничных условий.

б) если луч идет в плоскости  $xz$ , то  $k_y = 0; \Rightarrow k_y' = k_y''$   
 $\Rightarrow$  лучи (отраженный, падающий и преломленный) в одной плоскости ( $k_y' = k_y'' = k_y$ )

$$k \sin \varphi = k'' \sin \psi$$

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \varphi = \frac{\omega}{v_2} \sin \psi$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}; v = \frac{c}{n} \text{ — закон Снеллиуса.}$$

если  $\psi > \frac{\pi}{2}$ , то это случай полного внутреннего отражения (д.в.о)

$$\psi_{\text{прег.}} = \arcsin(n_{12}), n_2 < n_1 \text{ (например из стекла в воздух)}$$

2в) Поляризация при отражении и преломлении света. Формулы Френеля. Закон Брюстера.

Поляризация — это упорядочение направления колебания вектора  $\vec{E}$ . Существует линейно-, циркулярно- и эллиптически-поляризованный свет.

Естественный свет не поляризован — колебания вектора  $\vec{E}$  и его направление в каждый момент времени беспорядочно, т.е. имеет всевозможные направления светового вектора. Из естественного света можно сделать плоско-поляризованный свет с помощью поляризаторов. Поляризаторы — это приборы, которые пропускают свет с колебаниями вектора  $\vec{E}$  параллельными плоскости поляризатора и задерживают свет с колебаниями вектора, перпендикулярными этой плоскости.

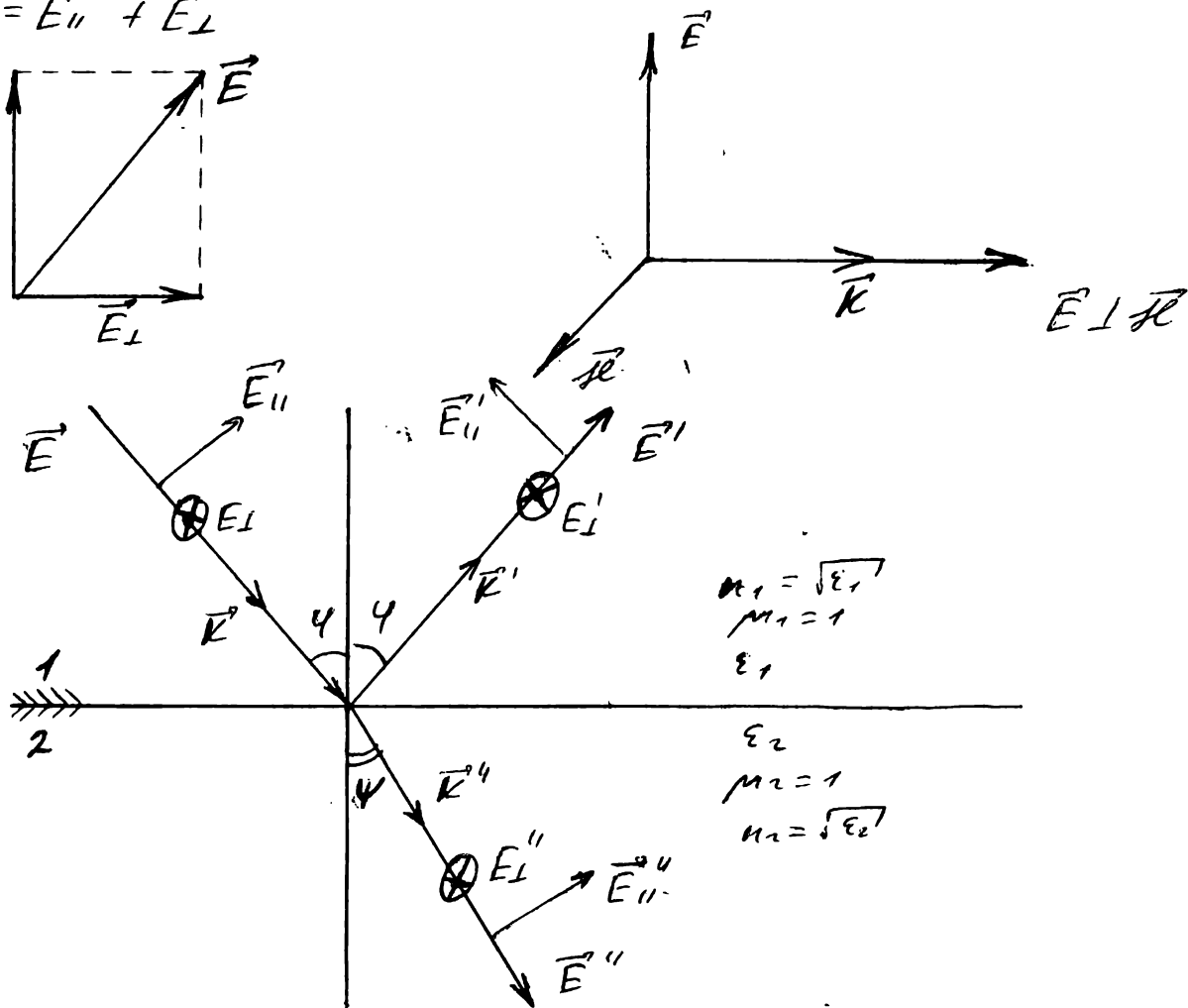
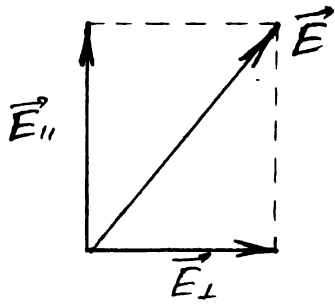
Поларизаторы не всегда полностью поляризуют свет. Иногда происходит частичная поляризация и при этом образуется частично-поляризованный свет. При отражении и прохождении света через кристаллы тоже появляется частично-поляризованный свет, который характеризуется степенью поляризации:  $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

естеств. свет при  $P = 0$ ; плоскопаралл. свет при  $P = 1$ .

Формулы Френеля.

естественный луч можно представить себе в виде суперпозиции двух лучей, именно поляризованных, в двух взаимноперпендикулярных направлениях:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$$



$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$$

$$\mu_1 = 1$$

$$\epsilon_1$$

$$\epsilon_2$$

$$\mu_2 = 1$$

$$n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$$

$\vec{E}_{\parallel}$  - || плоскости падения

$\vec{E}_{\perp}$  -  $\perp$  плоскости падения

$$\mu = nE$$

$$E_{1x} = E_{2x}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}' + \vec{E}''$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}''$$

⇒ формулы Френеля:

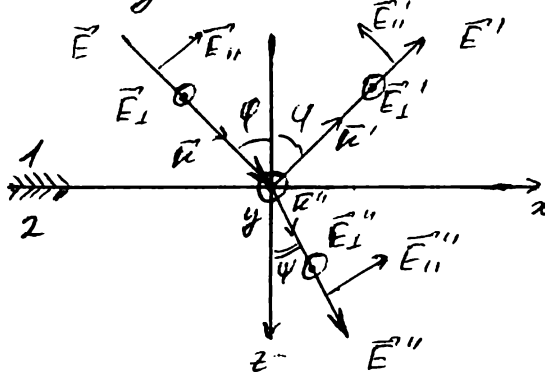
$$① E_{11}' = E_{11} \frac{\tan(\varphi - \psi)}{\tan(\varphi + \psi)}$$

$$② E_{11}' = -E_{11} \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}$$

$$③ E_{11}'' = E_{11} \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}$$

$$④ E_{11}'' = E_{11} \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

Доказательство:



на границе раздела сред:

$$z = 0:$$

полн. волна: 
$$\begin{cases} E_x = E_{11} \cos \varphi; E_y = E_{11}; E_z = -E_{11} \sin \varphi \\ H_x = -n_1 E_{11} \cos \varphi; H_y = n_1 E_{11}; H_z = n_1 E_{11} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[ \frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right] = \sqrt{\epsilon} \left[ \frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right] = n \left[ \frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right]$$

отрази волна: 
$$\begin{cases} E_x' = -E_{11}' \cos \varphi; E_y' = E_{11}'; E_z' = -E_{11}' \sin \varphi \\ H_x' = n_1 E_{11}' \cos \varphi; H_y' = n_1 E_{11}'; H_z' = n_1 E_{11}' \sin \varphi \end{cases}$$

прелом. волна: 
$$\begin{cases} E_x'' = E_{11}'' \cos \psi; E_y'' = E_{11}''; E_z'' = E_{11}'' \sin \psi \\ H_x'' = -n_2 E_{11}'' \cos \psi; H_y'' = n_2 E_{11}''; H_z'' = n_2 E_{11}'' \sin \psi \end{cases}$$

имеем 4-е независимых уравне-

$$\begin{cases} E_x + E_x' = E_x''; E_y + E_y' = E_y'' \\ H_x + H_x' = H_x''; H_y + H_y' = H_y'' \end{cases}$$

подставим в эти 4-е уравнения выражения для компонентов E и H, тогда.

$$\begin{cases} (E_{11} - E_{11}') \cos \varphi \stackrel{a)}{=} E_{11}'' \cos \psi; E_{11} + E_{11}' \stackrel{b)}{=} E_{11}'' \\ n_1 (E_{11} - E_{11}') \cos \varphi = n_2 E_{11}'' \cos \psi; n_1 (E_{11} + E_{11}') = n_2 E_{11}'' \end{cases}$$

рассмотрим (1) и (2), исключая амплитуду прошедшей волны:

$$\frac{(E_{11} - E_{11}') \cos \varphi}{n_1 (E_{11} + E_{11}')} = \frac{\cos \varphi}{n_2}$$

$$\Rightarrow E_{11}' = E_{11} \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \varphi} \cdot \frac{n_1 \cos \varphi - \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + \cos \varphi} =$$

$$= \frac{1}{\sin \varphi} = n \cdot E_{11} \frac{\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi} =$$

$$= E_{11} \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi + \sin 2\varphi} = E_{11} \frac{2 \cos(\varphi + \varphi) \sin(\varphi - \varphi)}{2 \sin(\varphi + \varphi) \cos(\varphi - \varphi)} = E_{11} \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi)}$$

подставим (3) в (2):  $E_{11}'' = \frac{n_1}{n_2} \left( E_{11} + E_{11} \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi} \right) =$

$$= E_{11} \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} = n = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow E_{11}'' = E_{11} \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{n_2}{n_1}} =$$

$$= E_{11} \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi} = E_{11} \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{\sin(\varphi + \varphi) \cos(\varphi - \varphi)}$$

аналогично из (1) и (2) находим

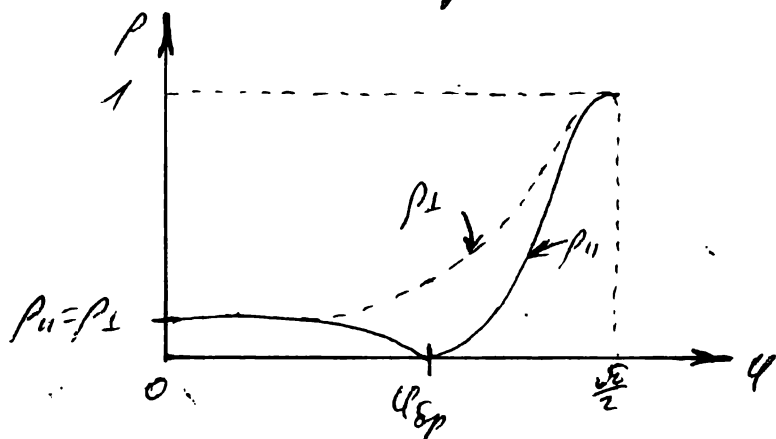
$$E_{11}' = E_{11} \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \varphi}$$

$$E_{11}'' = E_{11} \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \varphi}$$

$\Rightarrow$  получили 4-е формулы Френеля. И.т.д.  
Коэффициент отражения в зависимости от угла падения:

$$R = \frac{I'}{I} = \frac{n_1^2 E_{11}'^2}{n_1^2 E^2} = \frac{E_{11}'^2}{E^2}$$

$$R_{11} = \frac{E_{11}'^2}{E_{11}^2} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \varphi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \varphi)}, \quad R_{\perp} = \frac{E_{11}'^2}{E_{11}^2} = \frac{\sin^2(\varphi - \varphi)}{\sin^2(\varphi + \varphi)}$$



в случае малых

$$\text{углов: } \operatorname{tg}(\varphi - \varphi) \approx \sin(\varphi - \varphi) =$$

$$R_{11} = R_{\perp} = \frac{(\varphi - \varphi)^2}{(\varphi + \varphi)^2}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} = n_{12}; \Rightarrow \varphi = n_{12} \varphi$$

$$R_{11} = R_{\perp} = \frac{\varphi^2 (n_{12} - 1)^2}{\varphi^2 (n_{12} + 1)^2}$$

$n_1 = 1$  воздух  $\downarrow$   
 $n_2 = 1,52$  стекло  $\quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = 1,52; \quad R_{11} = R_{\perp} = \frac{0,52^2}{(2,52)^2} = 0,04$  (из возг. в стекло)

$$\frac{\text{стекло} \downarrow}{\text{воздух}} \quad \rho = \frac{\left(\frac{1}{n_{12}} - 1\right)^2}{\left(\frac{1}{n_{12}} + 1\right)^2} = \frac{(1 - n_{12})^2}{(1 + n_{12})^2} = \frac{(-0,52)^2}{(2,52)^2} = 0,04 \text{ (из ст. в возд.)}$$

в случае скольжения границы:  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\rho_{||} = \frac{\tan^2(\varphi - \psi)}{\tan^2(\varphi + \psi)} = \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)} = \left| \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \psi\right) \right| = \left| \cot \psi \right| = \frac{\cot 2\psi}{\cot^2 \psi} = 1$$

$$\rho_{\perp} = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)} = 1$$

Закон Брюстера:

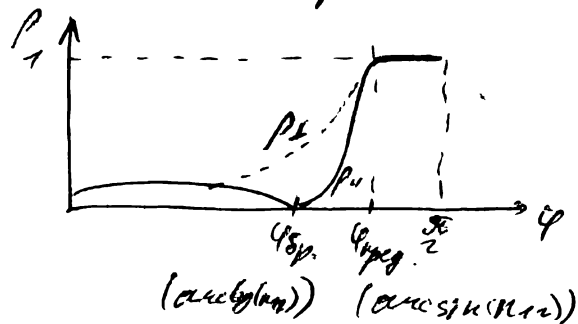
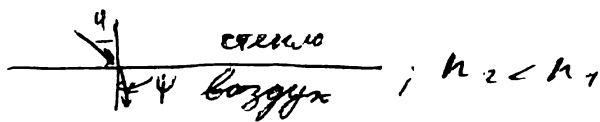
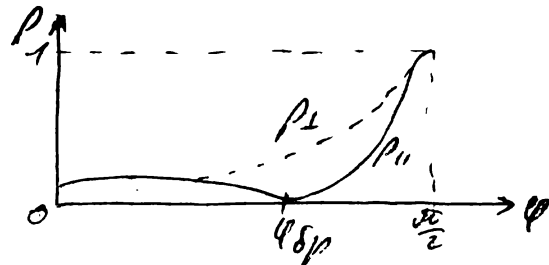
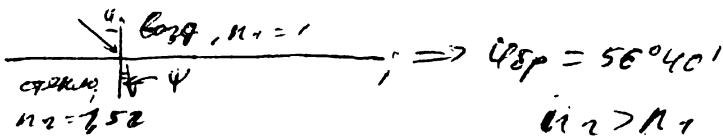
$$\rho_{||} = \frac{\tan^2(\varphi - \psi)}{\tan^2(\varphi + \psi)}$$

если  $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ , то  $\rho_{||} \rightarrow 0$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{12}; \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi; \Rightarrow n_{12} = \frac{\sin \varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \tan \varphi; \Rightarrow \varphi_{Br} = \arctan(n_{12})$$

при  $\varphi_{Br}$  отражается только  $\perp$ -ая составляющая.  
/ физич. обоснование см. в § 5 излуч. ускор. движ. заря- рывов /

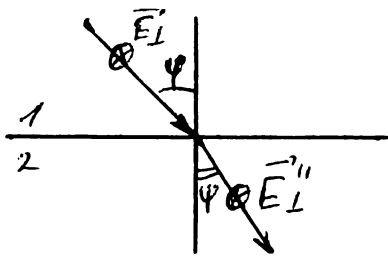
$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}; \quad \rho_{||} \rightarrow 0$$



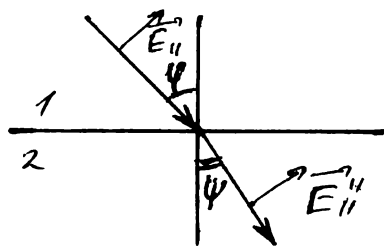
29) Фазовые соотношения между отраженной, преломленной и падающей волной.

в формулах Френеля при объективной отражении все координаты вещественны, тогда при отражении и преломлении скачок фазы может быть:  $\delta = 0$ ;  $\delta = \pi$   $|e^{i\delta} = -1|$

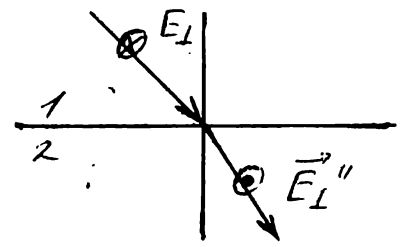
рассмотрим преломление волн:



$\delta = 0$ ; точки  $E_I''$  и  $E_I$  совпадают

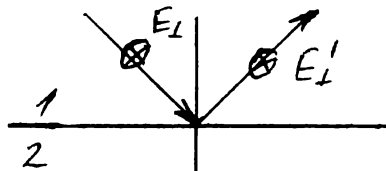


$\delta = 0$ ; точки  $E_I''$  и  $E_I$  совпадают

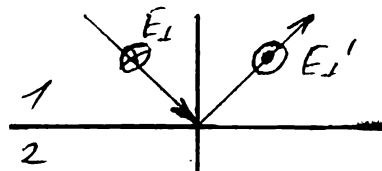


если  $\delta = \pi$ , то точки  $E_I''$  и  $E_I$  разные; из формулы Френеля  
 ③ и ④:  $E_I'' = E_I(\dots)$   
 $E_I' = E_I(\dots)$   
 $\Rightarrow \psi + \phi < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$  скачка фазы при преломлении не существует.  
 рассмотрим отражение волн: будет.

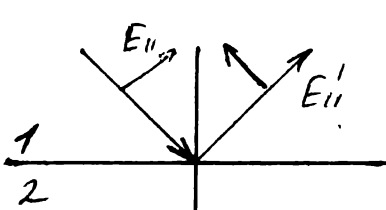


точки совпадают;  $\delta = 0$

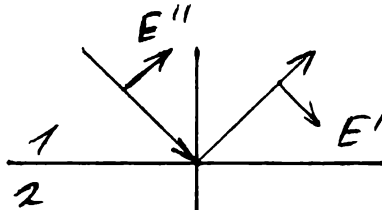


точки разные;  $\delta = \pi$

$|\delta$ -скачок фазы



точки разные;  $\delta = 0$

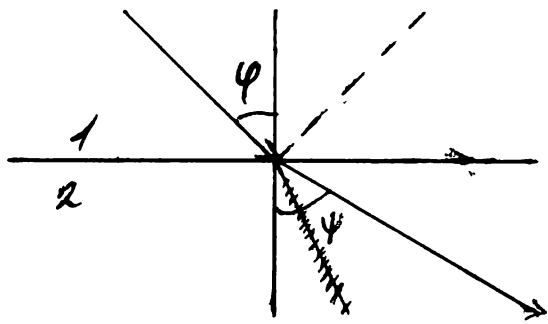


точки совпадают;  $\delta = \pi$

Составим таблицу для отражённых волн:

	$\psi < \psi_{cp}; \psi + \phi < \frac{\pi}{2}$	$\psi > \psi_{cp}; \psi + \phi > \frac{\pi}{2}$
$n_2 > n_1$ $\psi > \phi$	- точки совпадают ① $\Rightarrow \delta = 0$	- точки разные; $\Rightarrow \delta = \pi$
вот ст. волн	⊥ - точки разные ② $\Rightarrow \delta = \pi$	⊥ - точки разные; $\Rightarrow \delta = 0$
$n_2 < n_1$ $\psi < \phi$	- точки разные $\Rightarrow \delta = \pi$	- точки совп. $\Rightarrow \delta = 0$
ст. волн	⊥ - точки совпадают $\Rightarrow \delta = 0$	⊥ - точки совп. $\Rightarrow \delta = \pi$

30) Полное внутреннее отражение.



$$n_2 < n_1$$

$$\psi < \varphi$$

$$\psi \geq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{12}$$

если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то:

$$\varphi_{\text{прег.}} = \arccos \sin(n_{12})$$

$$\psi > \varphi_{\text{прег.}}; \text{ д.т.б. 0.}$$

$$\varphi_{\text{пр.}} (\text{от -возг.}) = \psi$$

рассмотрим отражённую волну:

$$\varphi > \varphi_{\text{прег.}}$$

преобразуем формулы Френеля, введя в них показатель преломления ( $n_{12}$ ):

$$\begin{aligned} \mu_{||} &= \frac{E_{||}'}{E_{||}} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} = \frac{\sin(\varphi - \psi) \cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi) \sin(\varphi + \psi)} = \\ &= \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\psi}{\sin 2\varphi + \sin 2\psi} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi - \sin \psi \cos \psi}{\sin \varphi \cos \varphi + \sin \psi \cos \psi} \end{aligned}$$

$\mu_{\perp}$  - амплитудный коэффициент отражения.

$$\mu_{\perp} = \frac{E_{\perp}'}{E_{\perp}} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} = -\frac{\sin \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{12}; \Rightarrow \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n_{12}}; \cos \psi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \\ = \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2}} = \pm \frac{1}{n_{12}} \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

в этой формуле оставляется знак минус (-), т.к. при знаке плюс (+) интенсивность после прохождения должна бесконечно расти, чего быть не может.

$$\Rightarrow \cos \psi = \pm \frac{1}{n_{12}} \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \varphi} = \pm \frac{i}{n_{12}} \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}$$

$$\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n_{12}}; \cos \psi = \pm \frac{i}{n_{12}} \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}$$

$$\Rightarrow \mu_{||} = \frac{E_{||}'}{E_{||}} = \frac{n_{12}^2 \cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}$$

$$\Rightarrow \mu_{\perp} = \frac{E_{\perp}'}{E_{\perp}} = \frac{\cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}$$

$$z = \frac{a + ib}{a - ib}; |z| = 1; z = A e^{i\delta}; \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{b}{a}$$



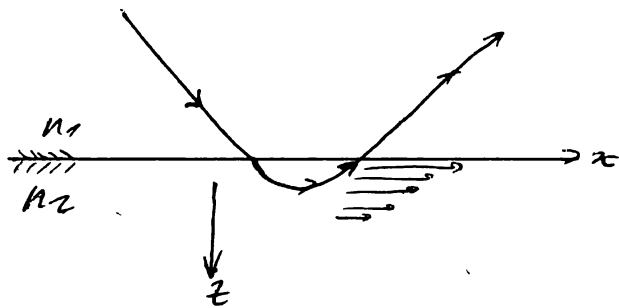


Выражение  $\textcircled{+}$  описывает волну в 2-ой среде, распространяющуюся со скоростью  $\left(\frac{v_2}{\sin \varphi}\right)$  вдоль оси "x" и амплитудой, которая экспоненциально убывает вдоль оси "z".

"+" браво нельзя, т.к. тогда это будет означать, что амплитуда растет с ростом "z", что не физично".

амплитуда:  $E_0'' e^{-\frac{\omega n_2}{c n_1} \sqrt{\sin^2 \varphi - n_2^2} z}$ ;  $n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$

$\Rightarrow$  амплитуда  $\cong e^{-(-11-)z}$ , т.е. экспоненциально убывает с ростом "z".



амплитуда:  $E_0'' e^{-\frac{z}{z_0}}$ ;  $z_0 = \frac{c n_{12}}{\omega n_2 \sqrt{\sin^2 \varphi - n_2^2}}$ ;  $n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = n$

$$z_0 = \frac{c n}{\omega n_2 \sqrt{\sin^2 \varphi - n_2^2}} = \frac{n}{k'' \sqrt{\sin^2 \varphi - n_2^2}}; k'' = \frac{2\pi}{\lambda''}$$

$z_0$  — эффективная глубина проникновения.

$$z_0 = \frac{n \lambda''}{2\pi \sqrt{\sin^2 \varphi - n_2^2}}$$

Пример.

С.В.Ч.:  $\lambda = 3 \text{ см}$ .

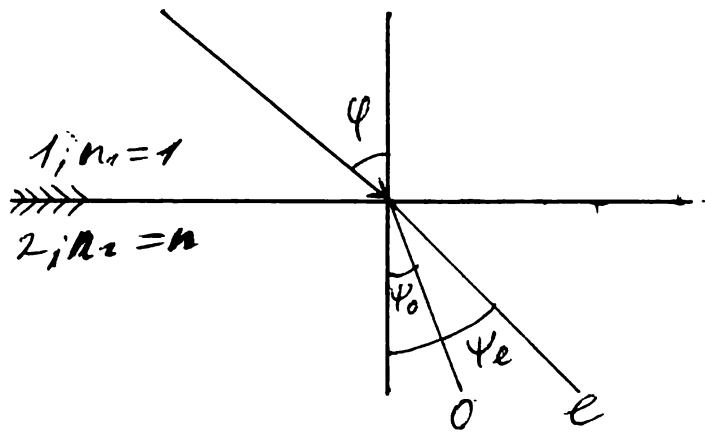


т.е. частично волна проходит в среду "2".

### 31) Двойное лучепреломление.

1669 год, Бартолини — открыл двойное лучепреломление.

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n$$



"o" - ordinary  
 "e" - extraordinary  
 o - обыкновенной — лучи  
 e - необыкновенной — лучи

$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_o} = n_o = \text{const}$ ; зависит только от материала

$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_e} = f(\varphi) = n_e(\varphi)$ ; зависит от угла падения.

это происходит только в оптически анизотропных средах.

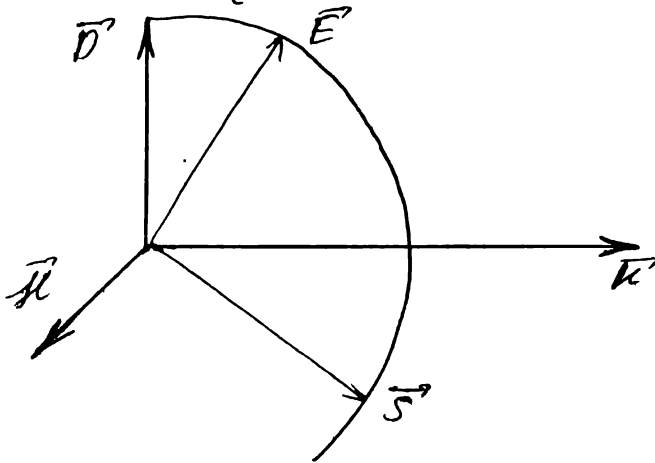
изотропная среда:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \epsilon - \text{скаляр}; n = \sqrt{\epsilon}; D_x = \epsilon E_x; \vec{D} \parallel \vec{E}$$

анизотропная среда (например аморфная).  
кристалл / скелет

кристалл;  $\epsilon$  - тензор

$$D_j = \sum_i \epsilon_{ij} E_i; \vec{D} \nparallel \vec{E}$$

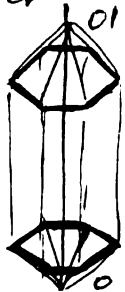


$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] - \text{вектор Пойнтинга}$$

несовпадение  $\vec{H}$  и  $\vec{S}$   
 (их направления)  
 и приводит к двойному  
 лучепреломлению.

"o" и "e" лучи линейно-поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

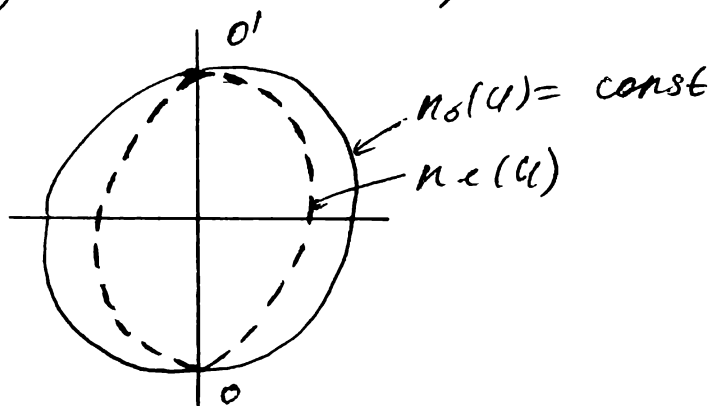
Оптическая ось:



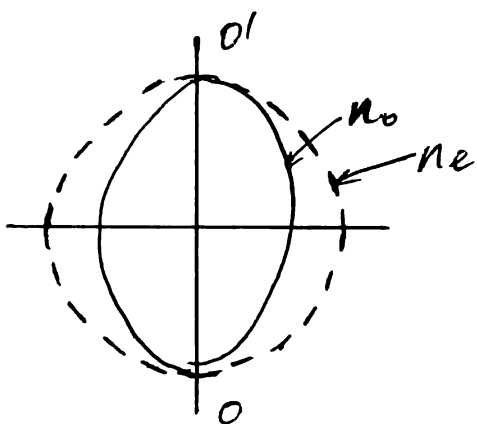
OO' - оптическая ось кристалла -  
 направление луча, у которого  
 $n_o = n_e$ .

есть двусвязные кристаллы (например слюда; там оси  $\perp$  и есть только "e", "o" ось).

одноосные кристаллы:

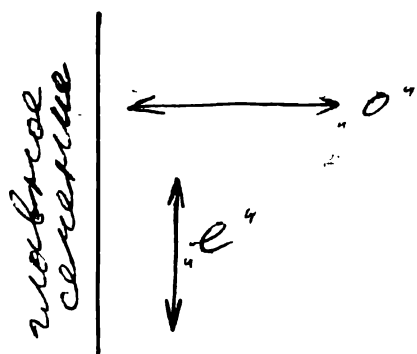
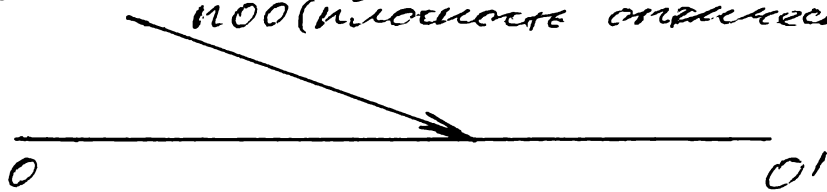


$n_o > n_e$  - отрицательные кристаллы  
 $\Rightarrow v_o < v_e$



$n_o < n_e$  - положительные кристаллы  
 $\Rightarrow v_o > v_e$

Главное сечение - плоскость, проходящая через оптическую ось.  
 ПОО (плоскость оптической оси)



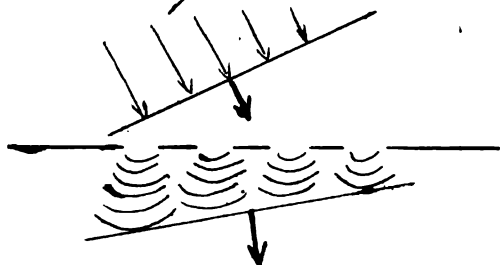
"o'' - линейно поляризован  $\perp$  главному сечению  
 "e'' - линейно поляризован  $\parallel$  главному сечению

"o'' и "e'' - линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

32) Поляризационные устройства.

а) построение Гюйгенса:

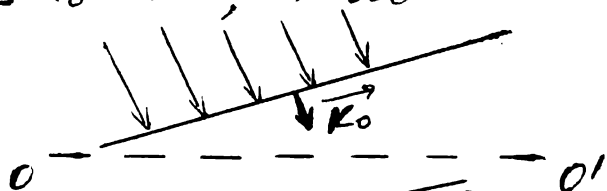
каждую точку рассматриваем как источник вторичных волн (принцип Гюйгенса);  $\Rightarrow$  образующая вторичных волновой фронт, огибающая которого даст направление луча.



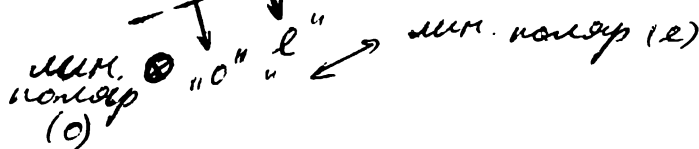
$$v = \frac{c}{n}$$

$$n_o \neq n_e; v_o \neq v_e$$

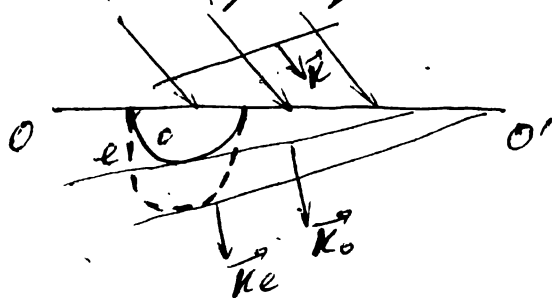
$$] n_o > n_e; \Rightarrow v_o < v_e$$



(поверхность кристалла  
вдоль  $OO'$ )



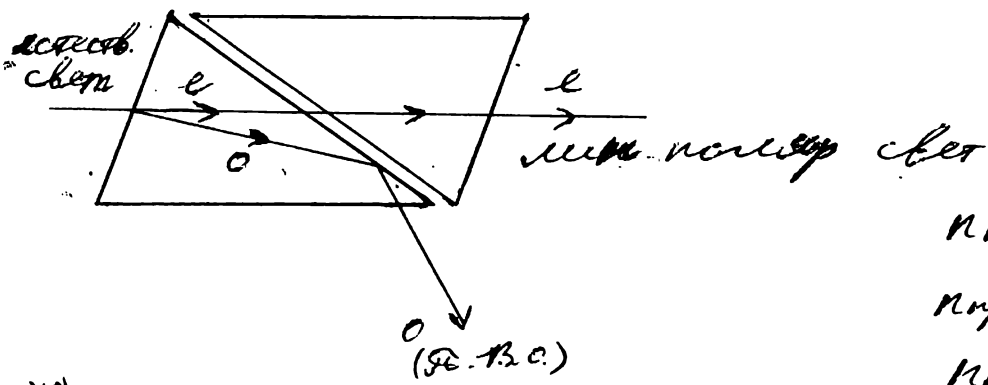
обыкновенный и необыкновенный лучи расходятся в пространстве.



б) поляризаторы на двойном лучепреломлении:

① призма Николя:

призма сделана из исландского шпата (CaCO<sub>3</sub>) промежуток между двумя частями из CaCO<sub>3</sub> заполнен накаленным баллызомом.



$n_{кб}$  - "n" обыкновенного луча

$n_{кп}$  - "n" -  $CaCO_3$

$n_{кб} < n_{кп}$

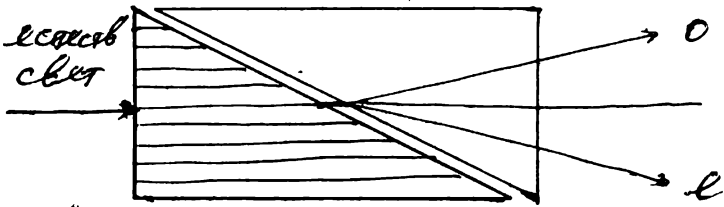
т.е. на границе выделится условие Ф. В. С.  $\theta$



в итоге входит естественный свет, а выходит линейно поляризованный свет.

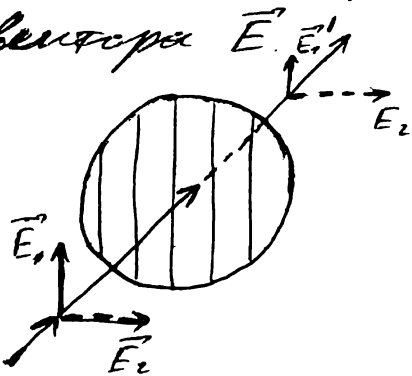
## 2) призма Вилластона:

призма сделана из исландского шпата ( $CaCO_3$ ) промежуток между частями из  $CaCO_3$  заполнен воздухом.



## 3) дихроичные поляризаторы:

дихроизм - зависимость коэффициента пропускания от ориентации плоскости колебания вектора  $\vec{E}$ .

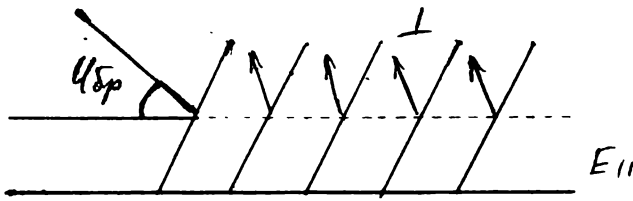
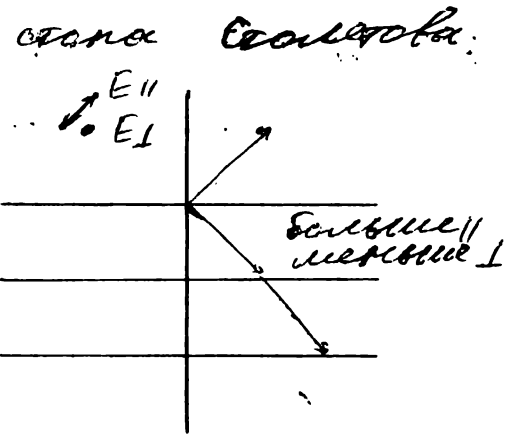
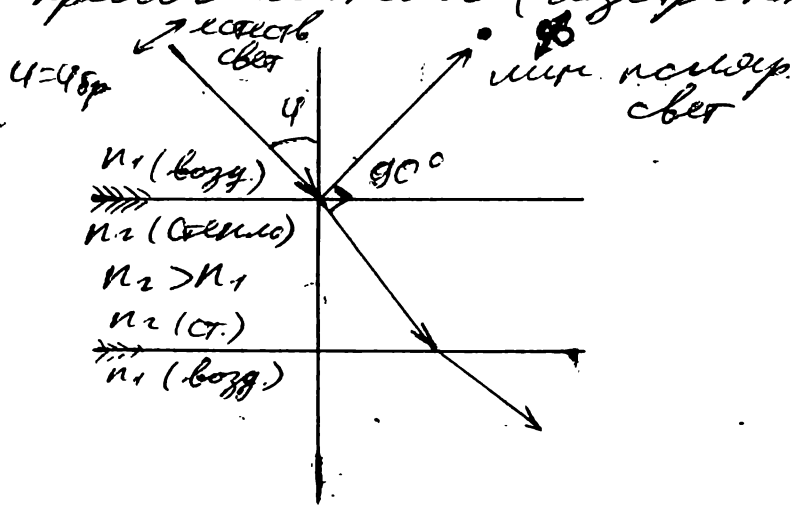


после прохождения вектор  $\vec{E}$  сильно ослабевает, т.к.  $\vec{E}_2$  велик расход энергии (когда  $\vec{E}$  расположен как  $\vec{E}_2$ ); а когда  $\vec{E}$  расположен как  $\vec{E}_1$ , то энергетические затраты малы и вектор  $\vec{E}$  почти не ослабевает.

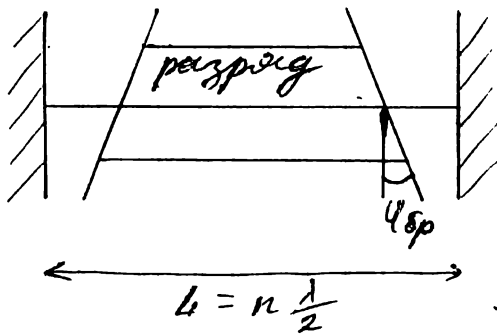
(аналог - гераниевый)

(аналог - гераниевый)

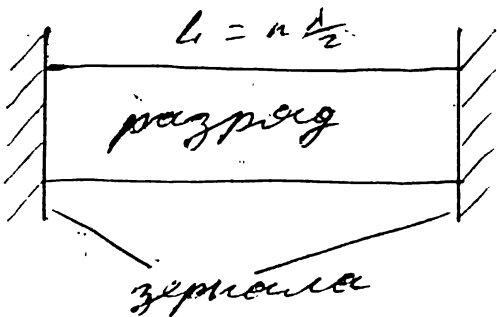
2) поляризаторы, основанные на отражении и преломлении (изотропные среды):



(на этом основана работа газового лазера)

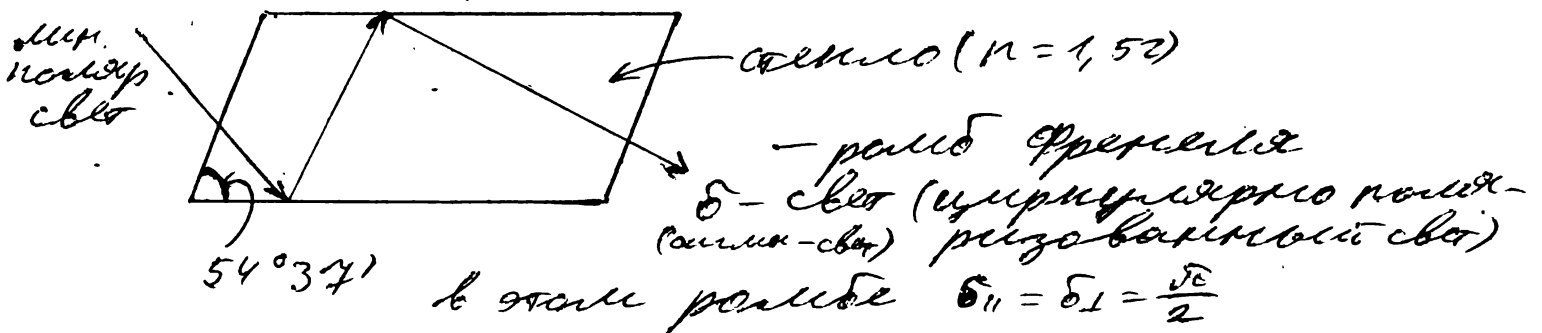


из-за полного отражения под углом Брюстера сразу теряется половина, но зато вторая половина проходит целиком.



- такой лазер не даст линейно поляризованного света, т.к. нет отражения света под углом Брюстера.

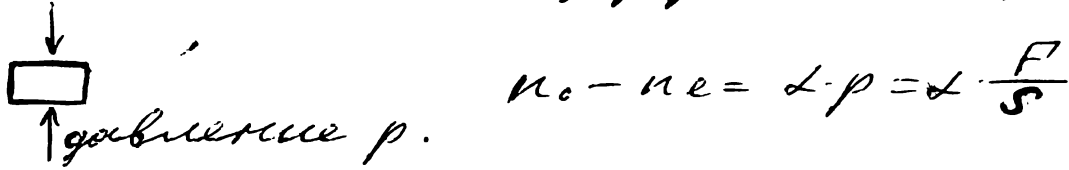
д) при рассмотрении П. В. Ф. получим, что  $\delta_{||} \neq \delta_{\perp}$ :



=> при помощи ромба Френеля можно получить циркулярно поляризованный свет.

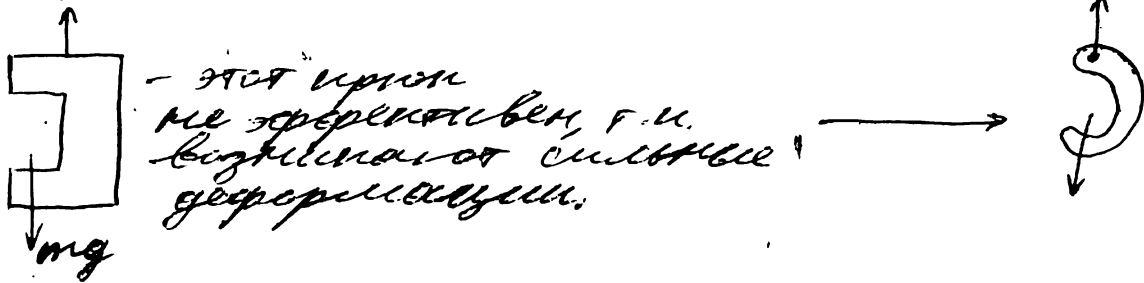
### 33) Искусственная оптическая анизотропия. Фазовые пластинки.

а) искусственная оптическая анизотропия при механических деформациях:

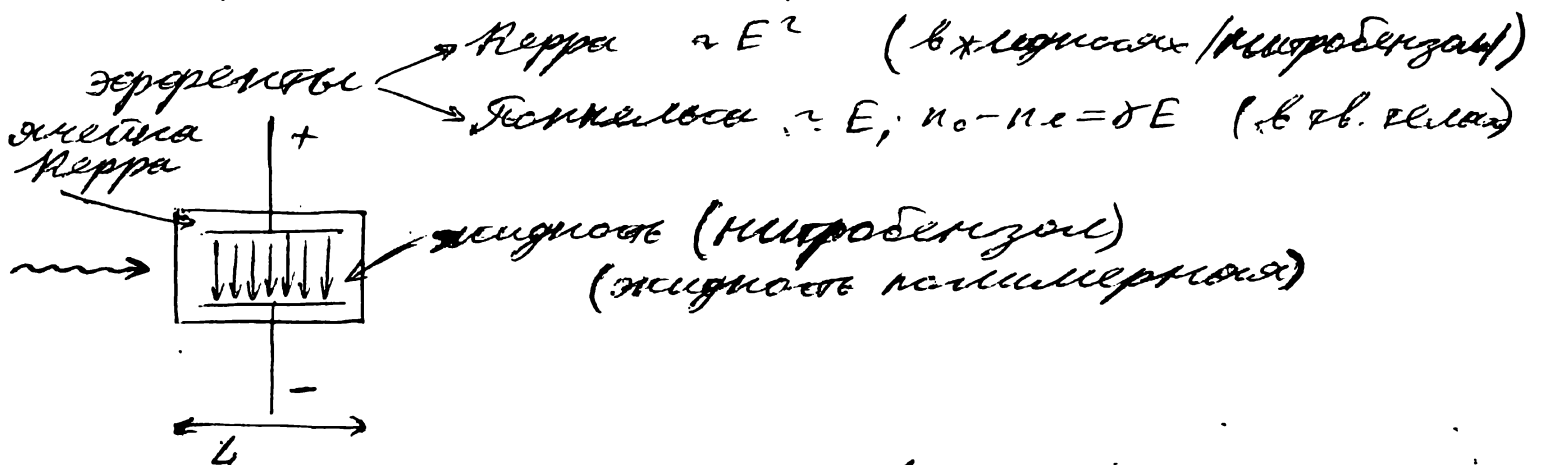


возникают деформации  $\Rightarrow$  меняется внутренняя структура вещества  $\Rightarrow$  меняются электрические и оптические свойства;  $n = \sqrt{\epsilon}$ ;  $\epsilon$  - зависит от структуры вещества.

Пример: крик криала:



б) электрооптические эффекты:



$$n_o - n_e = \rho E^2$$

$$\Delta = (n_o - n_e) L = \beta \rho E^2$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \beta \rho E^2$$

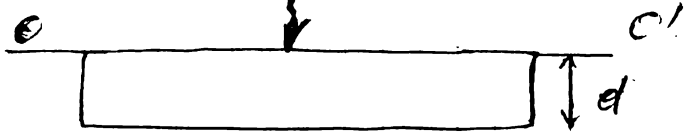
↑  
валлюевое число

$\frac{\beta}{\lambda}$  - постоянная Керра.

| свет выречает  
отклонен диэлектрического поляризатора |



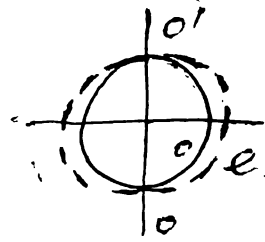
б) фазовые максимумы:



$$\Delta = (n_e - n_0) d$$

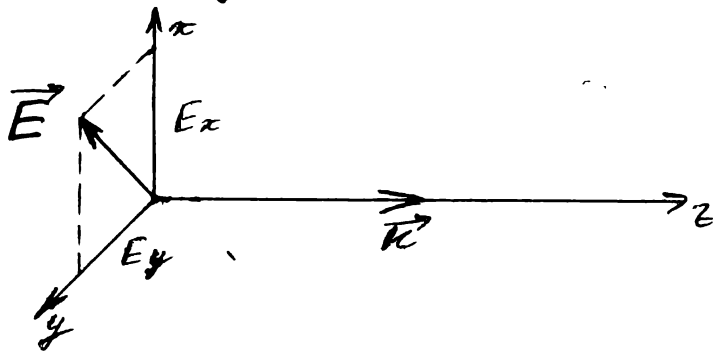
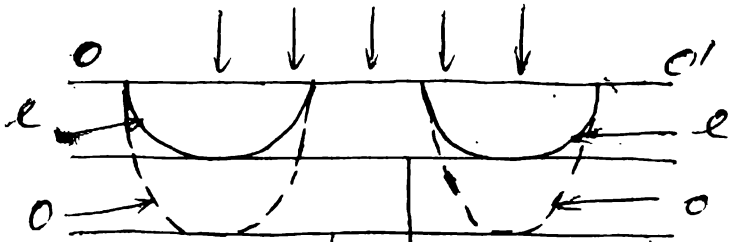
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_0) d$$

OO' - оптическая ось.



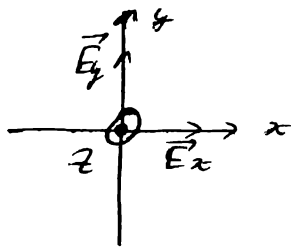
$$n_e > n_0$$

$$v_e < v_0$$



$$\left. \begin{aligned} E_x &= A \cos(\omega t - kx - \alpha) \\ E_y &= A \cos(\omega t - ky - \beta) \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{E_x^2}{A^2} + \frac{E_y^2}{A^2} - \frac{2E_x E_y \cos(\alpha - \beta)}{A^2} = \sin^2(\alpha - \beta)$$



если  $\delta = \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ , то получается циркулярно поляризованная волна

$$\Delta = \frac{\lambda}{4}, \text{ т.к. } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$$

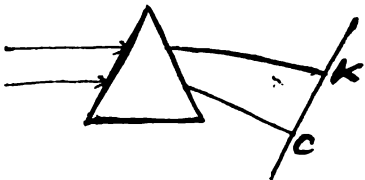
$$\Delta = (n_e - n_0) d = \frac{\lambda}{4} \quad |\pi \rightarrow \delta|$$

$$\text{если } \delta = 0, \pi, \text{ то: } \Delta = \frac{\lambda}{2} = (n_e - n_0) d \quad |\pi \rightarrow \pi|$$

34) Нормальная и аномальная дисперсия

$v = v(\lambda)$   
 $n = n(\lambda)$  > определенные дисперсии.

$$v_{гф} = \frac{\omega}{k}, \quad u_{гф} = \frac{d\omega}{dk}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = v k; \quad v = \frac{c}{n}$$



$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\nu k)}{dk} = \nu + k \frac{d\nu}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{2\pi c}{\lambda} \right) =$$

$$= \nu - \frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{d\nu}{d\lambda} = \nu - \lambda \frac{d\nu}{d\lambda} \quad (1)$$

$$\nu = \frac{c}{n} \rightarrow (1); \quad d\nu = -\frac{c}{n^2} dn; \quad u = \nu + \lambda \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{c}{n} + \lambda \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}$$

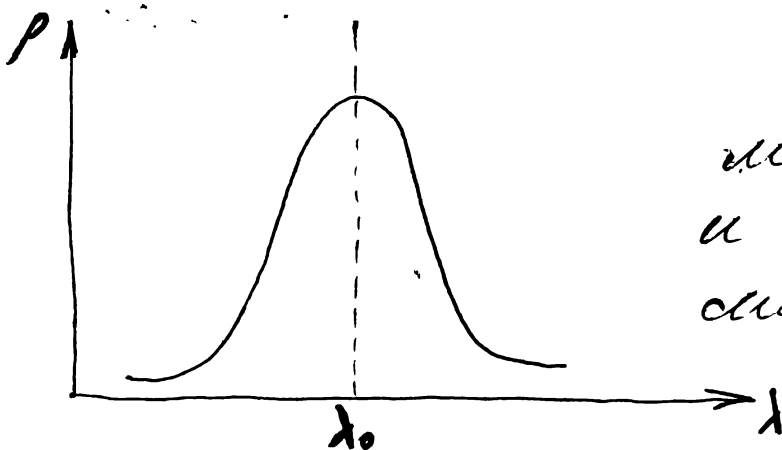
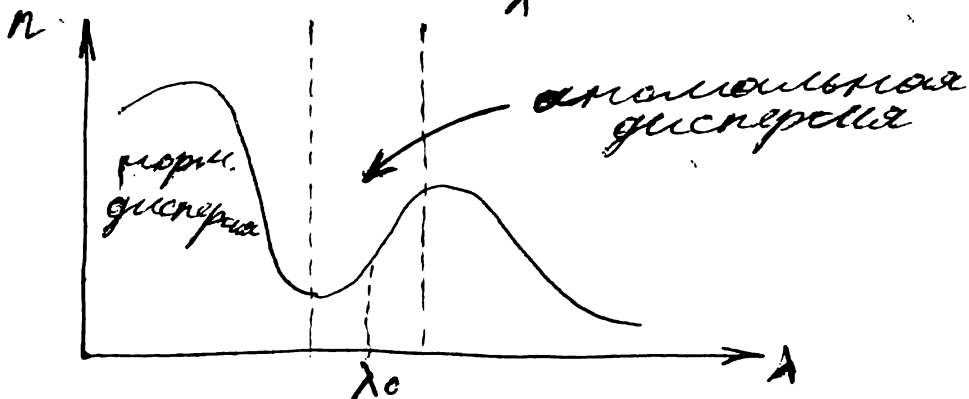
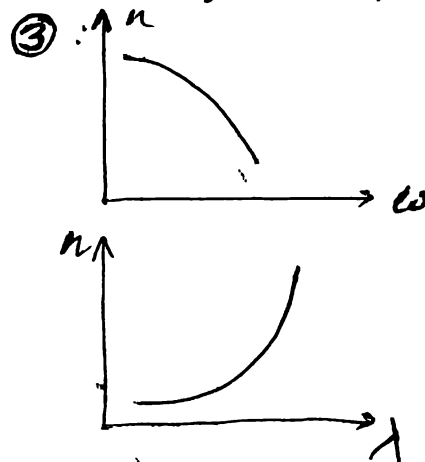
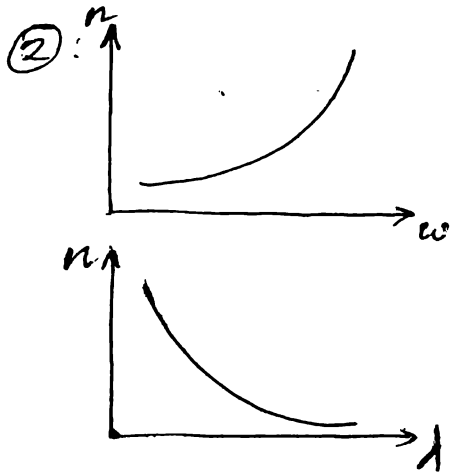
$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\left(\frac{c}{n}\right)}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow u = \nu \left( 1 + \lambda \frac{dn}{n^2} \right) \quad (2)$$

①  $\frac{d\nu}{d\lambda} = 0; \Rightarrow n = \text{const}; u = \nu \Rightarrow$  нет дисперсии, т.е. нет зависимости  $n = n(\lambda) / \nu = \nu(\lambda)$

②  $\frac{d\nu}{d\lambda} > 0; \frac{dn}{d\lambda} < 0; u < \nu \Rightarrow$  нормальная дисперсия (например в стекле)

③  $\frac{d\nu}{d\lambda} < 0; \frac{dn}{d\lambda} > 0; u > \nu; \Rightarrow$  аномальная дисперсия.



при  $\lambda_0$  наблюдается максимум поглощения и аномальная дисперсия;  $\Rightarrow$  эти явления связаны.

35) Классическая теория дисперсии. Распространение света в среде с постоянной диэлектрической проницаемостью.

под действием внешнего поля  $\vec{E}$  происходят появления новых зарядов;  $\Rightarrow$  появляются дипольные моменты:  $\vec{E} \rightarrow \vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i$  (век. объема)

$\vec{P} = \chi \vec{E}$ ;  $\Rightarrow \epsilon = 1 + 4\pi\chi$ ;  $\Rightarrow n = \sqrt{\epsilon}$

↑  
вектор поляризации    ↑  
поляризуемость

$\frac{q_i}{r_i^2}$

при  $\vec{E} = 0$ ;  $\vec{r}_i(0)$  - равновесное состояние;

при  $t > 0$ ;  $\vec{E} \neq 0$ ;  $\vec{r}_i' = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(0)$

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} = q_i \vec{E} - \underbrace{\delta \vec{r}_i'}_{\text{полюса-то сгруппированные в среду}}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} = \frac{q_i}{m} \vec{E} - \frac{\delta}{m} \vec{r}_i'; \quad \frac{\delta}{m} - \text{собственная частота колебаний.}$$

$q_i = e$ ;  $\frac{\delta}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} = \frac{q}{m} \vec{E} - \omega_0^2 \vec{r}_i'$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \\ \vec{r}_i' = \vec{a} e^{i\omega t} \end{cases} - \text{ищем решение в таком виде.}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \vec{a} e^{i\omega t} = \frac{q}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t} - \omega_0^2 \vec{a} e^{i\omega t} \quad | : e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{q \vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}; \quad \vec{r}_i' = \frac{q \vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\vec{P} = \sum_{\text{по тел. объёму}} q_i \vec{r}_i' = Nq \vec{r}_i' = \frac{Nq^2 \vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = Nq \vec{a} e^{i\omega t} = \chi \vec{E}$$

в 1 тел. объёме  $\rightarrow N$  элементаров

$$\Rightarrow \frac{Nq^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \chi; \quad \frac{Nq^2 \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \chi \vec{E}$$

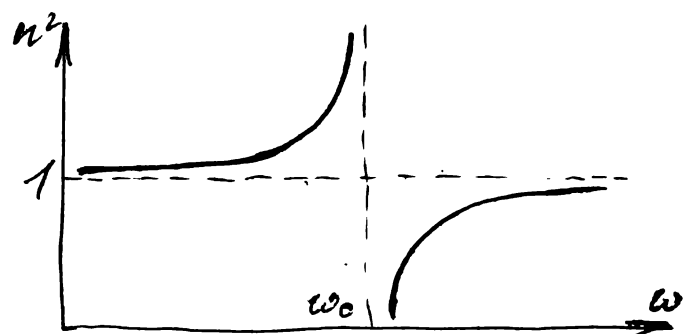
$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\epsilon = n^2$$

$$\omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow n^2 \rightarrow \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow n^2 \rightarrow 1$$

$$\omega = 0; \Rightarrow \epsilon = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{m\omega_0^2}$$



Пример:  $n^2 = \epsilon$ ,  $\epsilon/\omega_0 = \delta \ll 1$  для  $H_2O$ ;  $n = 1,33 \Rightarrow$  мнимая часть  $n$  на  $\omega_0$  ~~на  $\omega_0$~~

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = q \vec{E} - b \dot{\vec{r}}_i - \underbrace{\beta \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}}_{\text{мнимая}}$$

$\omega_0^2 = \frac{b}{m}$ ,  $\frac{\beta}{m} = \gamma$  - коэффициент затухания

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{q}{m} \vec{E} - \frac{b}{m} \vec{r}_i - \frac{\beta}{m} \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{q}{m} \vec{E} - \omega_0^2 \vec{r}_i - \gamma \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \vec{a} e^{i\omega t} = \frac{q}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t} - \omega_0^2 \vec{a} e^{i\omega t} - i\omega \gamma \vec{a} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{E}_0 \frac{q}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}$$

$$\vec{P} = N q \vec{a} e^{i\omega t} \Rightarrow |\vec{P}| = \sum_i q_i \vec{r}_i = N q \vec{r}_i = \alpha \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$N q \vec{a} e^{i\omega t} = \alpha \vec{E}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \alpha = \frac{N q^2}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)}$$

$$\Rightarrow \alpha + 4\pi\alpha = 1 + 4\pi \frac{N q^2}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)}$$

$$n^2 = \epsilon; n = n_1 - i\alpha$$

темным образом двумерная проекция  $\alpha$  - мнимая (C) величина.

волна, распространяющаяся в среде с двумерной проекцией  $\alpha$  выглядит следующим образом:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} n \vec{s}; |\vec{s}| = 1 \quad \left| \frac{\omega}{c} n \right|$$

$$n = n_1 - i\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\frac{\omega}{c} n \vec{s} \cdot \vec{r}))} = |\vec{E}| e^{-\frac{\omega \alpha}{c} \vec{s} \cdot \vec{r}} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n_1 \vec{s} \cdot \vec{r})}$$

$$= \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{\omega \alpha}{c} \vec{s} \cdot \vec{r}}}_{\text{амплитуда (затухание)}} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n_1 \vec{s} \cdot \vec{r})}$$

$$n^2 = \epsilon = |n_1 - i\alpha|^2 = n_1^2 - 2i\alpha n_1 - \alpha^2 = 1 + 4\pi \frac{N q^2}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)}$$

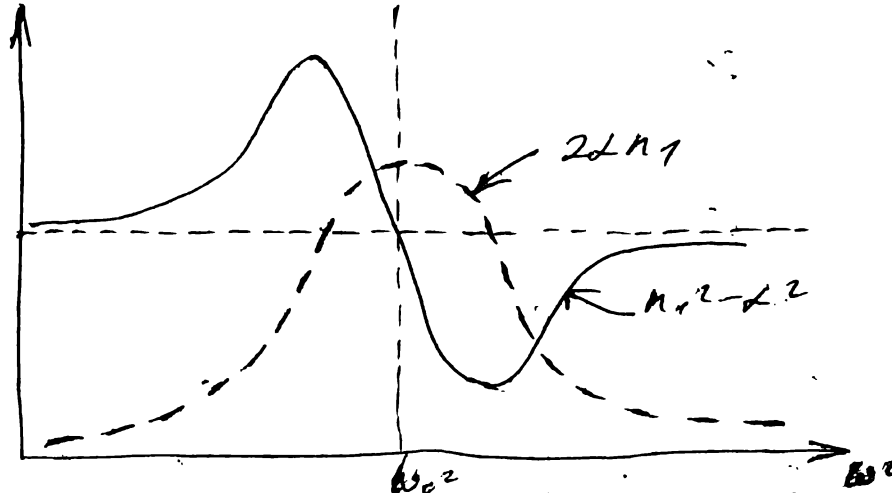
$$= 1 + 4\pi \frac{N q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} =$$

$$= 1 + \frac{4\pi N (\frac{q^2}{m}) [(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma]}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2}$$

приравняем вещ. и мнимые части:

вещное число равно:  $\Rightarrow n_1^2 - \epsilon^2 = 1 + \frac{4\pi N (\frac{q^2}{m}) (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\omega^2}$

мнимые части равны:  $\Rightarrow -2n_1 \epsilon = \frac{4\pi N (\frac{q^2}{m}) \delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\omega^2}$



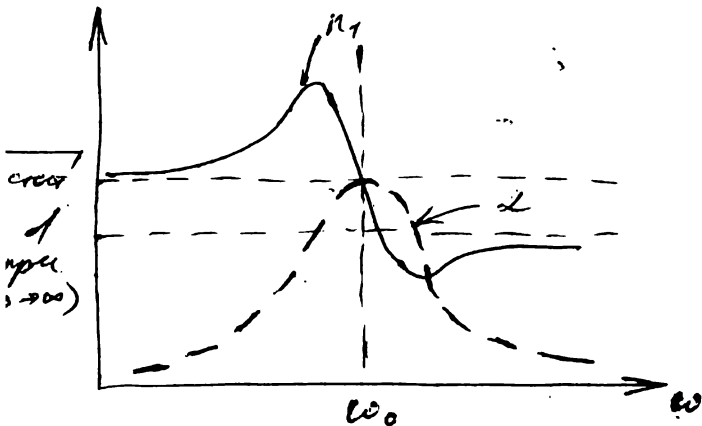
$\frac{4\pi N e^2}{m} = \omega_{магн}$

(магнетонная частота)

$\vec{\epsilon} = n - i k$

амплитуда:  $E_0 e^{-\frac{\omega}{c} z} e^{i k z}$  — вектор поляризации

$\epsilon/\omega \rightarrow \infty = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m \omega c^2} = 1 + \frac{\omega_{магн}^2}{\omega^2}$

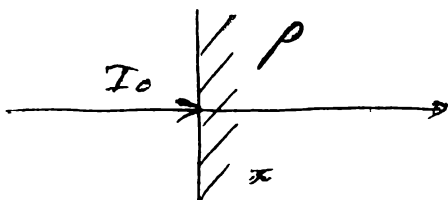


$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$  — вектор Пойнтинга

$\langle S \rangle = I \sim (\text{амплитуда})^2$

$I = I_0 e^{-2\frac{\omega}{c} z} (\vec{S} \cdot \vec{e})$ ;  $k = \frac{\omega}{c} n_2$ ;  $|S| = 1$   
— вектор поляризации

закон Бугера:



$I = I_0 e^{-\rho x}$ ;  $\rho$  — коэф. поглощения  
 $\Rightarrow \rho = \frac{2\omega k}{c}$

36) Квантовые оптические явления.

Ватие напряжённость поля:  $E \approx 10^7 \frac{В}{см}$

если  $E_{волны} \ll E_{атом}$ , то свойства среды не меняются; если  $E_{волны} \approx E_{атом}$ , то свойства

среды меняются в зависимости от волны (силовых оптика)

$\vec{P} = \chi \vec{E}$  - линейная зависимость

↑  
вектор поляризации

могут рассматриваться случаи с определенной линейностью.

Далее будем рассматривать изотропные среды / приближенно изотропной средой: правильные и нечетные рез-ты неучитываются, если предположить,

что:  $\vec{P} = \chi_1 \vec{E}_1 + \chi_2 \vec{E}_2 + \chi_3 \vec{E}_3 = \vec{P}_{\text{лин}} + \vec{P}_{\text{нелин}}$  (1)  
 $\vec{P}_{\text{лин}}$  зависимость поляризации от приложенного поля линейная.

В изотропных средах:  $\chi_1$  и  $\chi_2$  - скаляры (или не)

то определится:  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}_{\text{лин}} + 4\pi \vec{P}_{\text{нелин}}$   
 $\vec{D}_{\text{лин}} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}_{\text{лин}} = \epsilon \vec{E}$ ;  $\vec{D}_{\text{нелин}} = 4\pi \vec{P}_{\text{нелин}}$  (2)

для случая прозрачной изотропной среды (макроскопич. поле) /  $\mu=1$  - для прозрач. сред / поле  $\vec{B} = \vec{H}$ ;  $\mu=1$ ;  $\rho=0$  (нет зарядов),  $\vec{J}=0$  (нет токов)

система уравнений Максвелла для среды:

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$		$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$		$\text{div } \vec{D} = 0$
$\text{div } \vec{B} = 0$		$\text{div } \vec{H} = 0$
$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi \vec{J}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$		$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\rho=0$   
 $\vec{J}=0$

подставим в полученную систему (при  $\rho=0$ ;  $\vec{J}=0$ ) выражения из (2):  $|\vec{D}_{\text{лин}} = \epsilon \vec{E}|$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ ;  $\text{div } \vec{H} = 0$ ;  $\text{div } \vec{D}_{\text{лин}} + \text{div } \vec{D}_{\text{нелин}} = 0$ ;  
 $\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_{\text{лин}}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_{\text{нелин}}}{\partial t}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \epsilon \vec{E} = -\text{div } \vec{D}_{\text{нелин}} = -4\pi \text{div } \vec{P}_{\text{нелин}} \end{array} \right.$  (3)  
 $\text{rot } \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}_{\text{нелин}}}{\partial t}$

система (3) решается методом последовательных приближений:

нулевое приближение:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \vec{P} = \alpha \vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

в нулевом приближении амплитуда

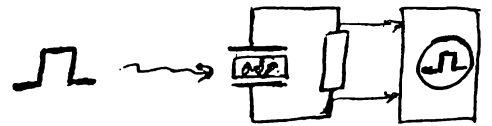
первое приближение:  $\alpha_2 = 0; \vec{P}_{\text{внеш}} = \alpha_1 E_0 \vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad (E_1 \ll E_0); \vec{P}_{\text{внеш}} = \alpha_1 E_0^2 = \alpha_1 A^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$$= \frac{\alpha_1 A^2}{2} + \frac{\alpha_1 A^2}{2} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (4)$$

оптическое детектирование (возникновение постоянного напряжения)  $\rightarrow 2\omega$   
 генерирующая 2-ой гармоники  $\rightarrow \frac{\omega}{2}$

второе приближение:  $\alpha_2 \neq 0;$



$$\vec{P}_{\text{внеш}} = \alpha_1 (E_0 + E_1) \vec{E} + \alpha_2 (E_0 + E_1)^2 \vec{E}$$

$$\vec{P}_{\text{внеш}} = \alpha_1 (E_0 + E_1) (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) + \alpha_2 E_0^2 \vec{E}_0$$

изотропная среда,  $\alpha_1 = \alpha_0; E_1 \ll E_0$

$$\Rightarrow \vec{P}_{\text{внеш}} = \alpha_2 E_0^3 = \alpha_2 A^3 \cos^3(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{4} \cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi =$$

$$= \frac{3A^3 \alpha_2}{4} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \frac{A^3 \alpha_2}{3} \cos 3(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5)$$

$$\frac{3A^2}{4} \alpha_2 E_0$$

генерирующая 3-ей гармоники

$$\omega \rightarrow \square \rightarrow 3\omega$$

$$P^* = \epsilon^* E_0$$

новая диэлектрическая проницаемость (из-за действия пучка)  $\Rightarrow$  измененная коэффициент преломления.

$$\text{т.к. част } \vec{J} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{P}_{\text{внеш}}}{\partial t} = \text{внешнее } P^* =$$

$$= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\epsilon}{c} \epsilon^* \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} (\epsilon + 4\pi\epsilon \epsilon^*) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} (\epsilon + 4\pi \frac{3A^2}{4} \alpha_2) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

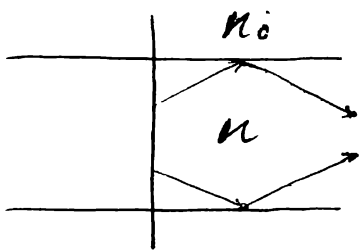
$$= \frac{\epsilon^{**}}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

получаем старый закон, но с новой диэлектрической проницаемостью;  $\Rightarrow$  получаем новые коэффициенты преломления.

$$\text{в итоге: } n = n_0 + n_2 A^2 \quad (6)$$

если  $n_2 < 0$ , то  $n < n_0$  - дефокусировка

если  $n_2 > 0$ , то  $n > n_0$  - возможна самофокусировка.



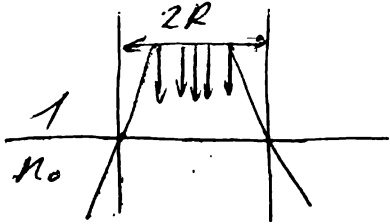
$n_0$  - среда без поля  $\vec{E}$

$$\text{от } R - \frac{1}{c} [\epsilon + 3\alpha x_2 A^2] \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$n = \sqrt{\epsilon^{**}}, \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \dots$$

умноживая малость добавим к показателю преломления, можно записать в виде:  $n = n_0 + n_2 A^2$  (6)

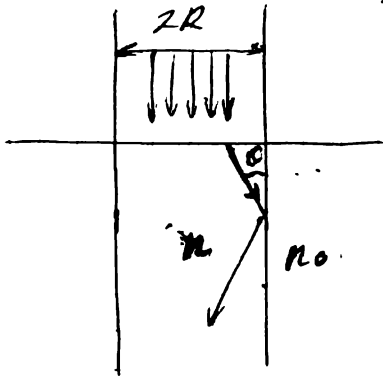
если  $n_2 < 0$ ;  $n < n_0$ , то будет дефокусировка.



$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_0$$

будет отклонение в сторону и луч будет расходящаяся.

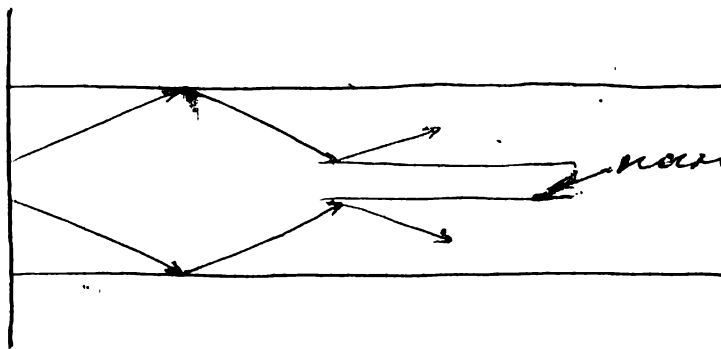
если  $n_2 > 0$ ;  $n > n_0$ , то возможна самофокусировка



при  $n_2 > 0$  лучом света создаёт условия, что  $n > n_0$ ; возможно явление П. В. О., зависящее от угла падения; предельный угол

$$\text{П. В. О.: } \cos \theta_0 = \frac{n_0}{n_0 + n_2 A^2}; \text{ если } \theta > \theta_0, \text{ то}$$

будет дефокусировка; если  $\theta < \theta_0$ , то возможна самофокусировка.



начал (самонамалирование)

Т.к.  $\theta_0$  - достаточно мал, то:

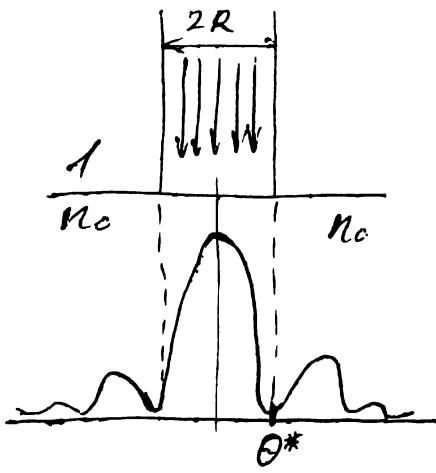
$$\cos \theta_0 = \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_0} A^2}; \quad \frac{n_2}{n_0} A^2 = \frac{1 - \cos \theta_0}{\cos \theta_0} \approx 1 - \cos \theta_0 \approx 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_0^2 = 2 \frac{n_2}{n_0} A^2 \quad (7)$$

$$\theta^* = \frac{1,22 \lambda}{2R}; \quad 2 \theta^* = 2 \frac{1,22 \lambda}{2R n_0} \leftarrow \text{для учёта среды.}$$

$\theta_{\text{дифф}}$





$$\theta_{diff}^* = \frac{1,22\lambda}{2Rn_0} \quad \text{D}$$

если  $\theta_{diff}^* > \theta_0$  - дефокусировка

если  $\theta_{diff}^* < \theta_0$  - фокусировка

если  $\theta_{diff}^* = \theta_0$  - предельный

случай: D ≈ E:  $2 \frac{n_2}{n_0} A^2 = \frac{(1,22\lambda)^2}{4R^2 n_0^2}$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{(1,22\lambda)^2 n_0^2}{n_2 8R^2 n_0^2} = \frac{(1,22\lambda)^2}{n_2 8R^2 n_0} \quad \text{E}$$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} [\vec{E} \times \vec{H}]$  - вектор плотности потока энергии - вектор Пойнтинга.

$$S = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \omega = \frac{c}{n_0} \cdot \frac{\epsilon A^2}{8R} = \left[ \frac{\partial p}{\partial t} \right] = \frac{p}{(cm)^2}$$

предельная мощность луча:  $P_{пред} = \frac{c}{n_0} \frac{\epsilon A^2}{8R} 8R^2 =$

$$= |E| \Rightarrow A^2 = \frac{c \cdot n_0^2 8R^2 (1,22\lambda)^2}{n_2 8R^2 n_0} = \frac{c (1,22\lambda)^2}{8 n_2} \quad \text{F}$$

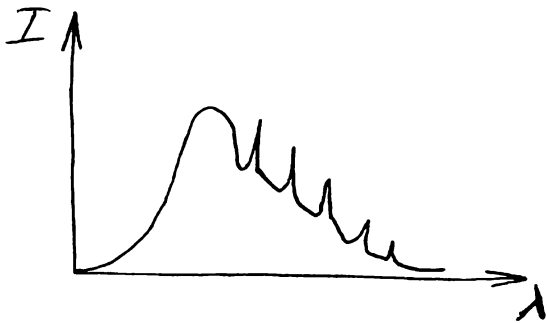
если  $P > P_{пред}$ , то возможна самодиффузия.

34) Тепловое излучение. Связь между параметрами излучателя и излученного поля. Закон Вина.

различают два типа излучения:

1) монокроматическая, неравновесное излучение.

2) тепловое излучение



тепловое излучение - это излучение, находящееся в термодинамическом равновесии с излучателем.

монокроматическая возникает в результате внешнего воздействия.

переобозначение:

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} [\vec{E} \times \vec{H}] = c \cdot n$$

$$\Phi = \int \vec{S} d\vec{\sigma} ; d\Phi = \vec{S} d\vec{\sigma}$$

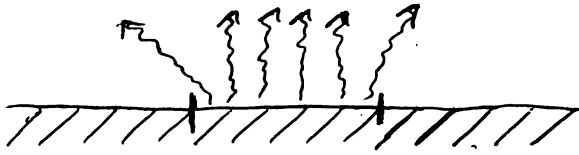
↑  
плотность

Эйлерова плотность энергии электромагнитного поля.

$$u = \int u_0 d\omega$$

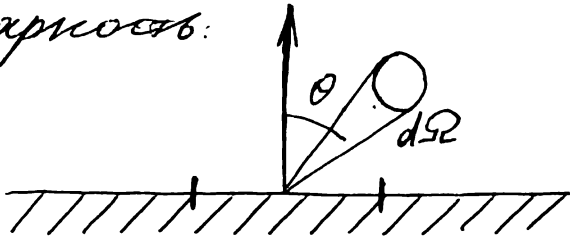
↑  
спектральная плотность  
лучистой энергии

энергетическая светимость:



$$k = \frac{d\Phi_{\text{изл.}}}{d\delta} \quad \text{①} \quad \text{в } d\Omega = 2\pi$$

яркость:

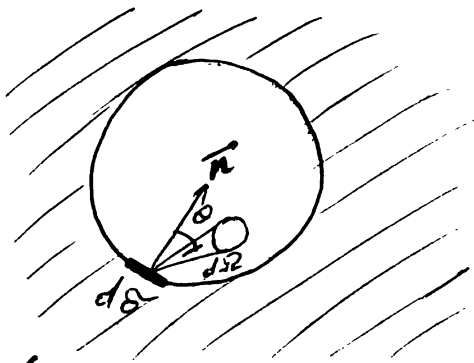


$$B = \frac{d\Phi_{\text{изл.}}}{d\delta \cos\theta d\Omega} \quad \text{②}$$

если излучатель светит сферично во все стороны (лампированный излучатель), то

$$B = \text{const}; \quad k = \int B \cos\theta d\Omega = B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos\theta \sin\theta d\theta}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \pi B \quad \text{③}$$

связь параметров поля и излучателя, находящаяся в ~~вертикальном~~ динамическом равновесии:



в поле: плотность  
потока энергии:

$$S = c \cdot u \quad (\text{н. н. э. н.})$$

н. н. э. н. в  $d\Omega$ : →

$$\rightarrow \frac{cu}{4\pi} d\Omega$$

(находящая мощность излучает всего поперек)

поле излучается сферично

$$d\Phi = \frac{cu}{4\pi} d\Omega \quad d\delta \cos\theta$$

$$\Phi = \int d\Phi$$

$$\Phi = \frac{cu d\delta}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin\theta \cos\theta d\theta}_{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{cu d\delta}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{cu d\delta}{4}$$

↑  
 $d\Phi_{\text{изл.}}$

$$\Rightarrow d\Phi_{\text{изл.}} = \frac{cu}{4} d\delta$$



$$K = \int_0^\infty f(\omega; T) d\omega = \sigma T^4 \quad \text{①} - \text{закон Стефана-Больцмана}$$

$$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$$

оптический пирометр - прибор для измерения температуры (оптическая пирометрия)  
 закон Стефана-Больцмана  $\Rightarrow$  радиометрический пирометр;  $T_{\text{поверх. Солнца}} = 5800 \text{ К}$

закон смещения Вина:

$$f = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right); \Rightarrow \lambda_{\text{max}} \cdot T = b - \text{закон смещения Вина.}$$

$$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ мК}, \quad b = \text{const}$$

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = b \quad \text{②}$$

$\Rightarrow$  если  $T_2 < T_1$ , то  $\lambda_{1\text{max}} < \lambda_{2\text{max}}$

$$\text{если } T \approx 310 \text{ К}, \lambda_{\text{max}} \approx \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^2} \approx 10^{-5} \text{ м} = 10 \text{ мкм}$$

$\Rightarrow$  если учесть, что  $T_{\text{человеческая}} \approx 310 \text{ К}$ , то человек «видит» примерно с  $\lambda_{\text{max}} \approx 10 \text{ мкм}$

$$T_{\text{поверх. Солнца}} = 6000 \text{ К}$$

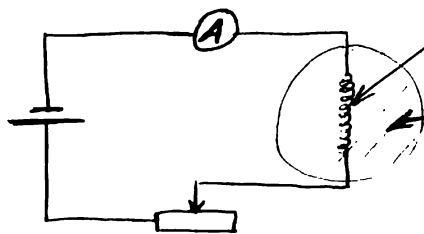
$$\Rightarrow \lambda_{\text{max Солнца}} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^3} \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,5 \text{ мкм}$$

если тело абсолютно черное, то  $T_{\text{поверх.}} = T_{\text{изв.}}$

если у тела макс E, то у него макс A и обратно.

Объяснение закона излучения абсолютно черного тела.

пирометр с исчезающей мишенью:



ток  $\rightarrow$  температура

экран, у которого можно измерить температуру

исчезающая мишень, добиваются исчезающей миши на фоне экрана;

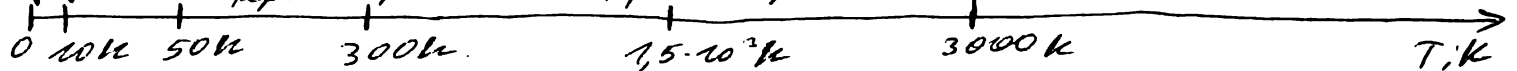
тогда  $T_{\text{нить}} = T_{\text{экрана}}$ , а  $T_{\text{нить}} = T_{\text{объекта}}$

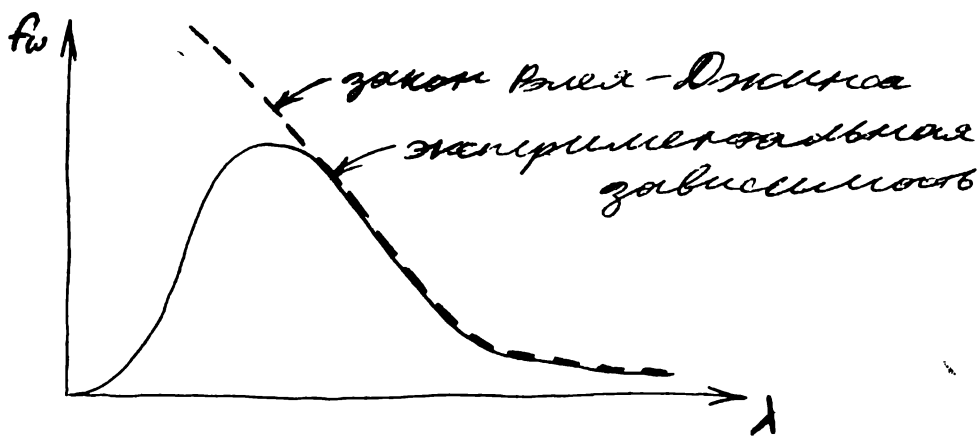
уменьшение температуры или термометры  
 термометры жидк. и газ. термометры  
 термометры

регламент по ГОСТ

оптик. пирометры

$T > 3000 \text{ К} \Rightarrow$  только оптич. пирометры





Рэлея и Джинс  
выполнили  
расчет:



$N_0$  - число независимых мод (число степеней свободы) колебаний в полости

$\frac{1}{2} kT$  - соотв. каждой моде.

$$\left. \begin{aligned} u(\omega; T) &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \\ f(\omega; T) &= \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT \end{aligned} \right\} \textcircled{3} \text{ - закон Рэлея-Джинса.}$$

закон Рэлея-Джинса не верен в коротковолновой области

$$K = \int_0^{\infty} f(\omega; T) d\omega \rightarrow \infty$$

$$\Delta \varepsilon = h\nu = h\omega; \quad h = \frac{h}{2\pi}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$$

Плэнк предположил, что э/м волна излучается порциями по  $h\omega$  и что энергия может быть

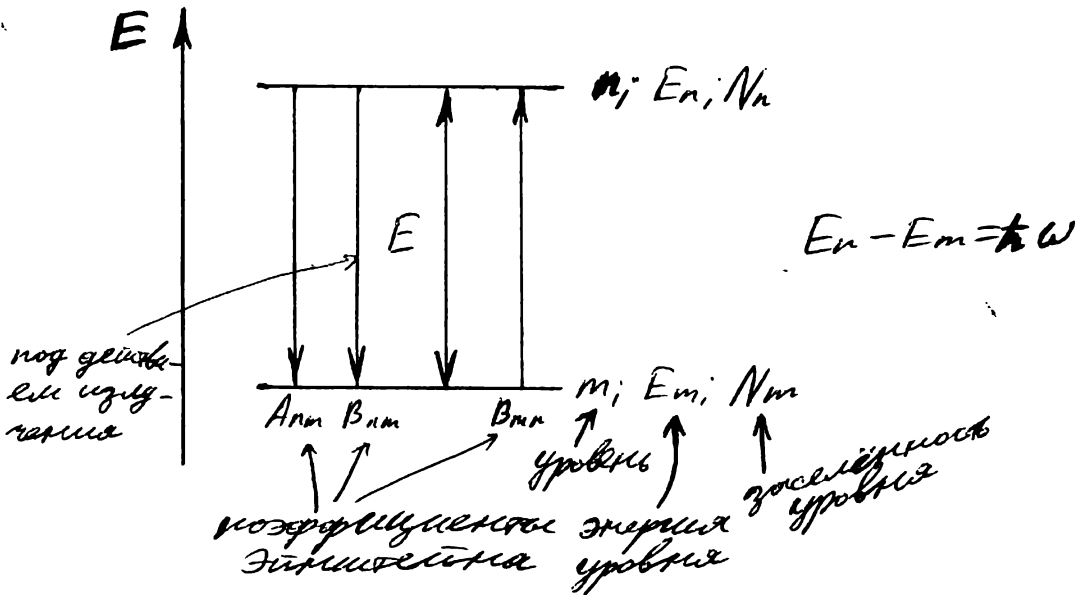
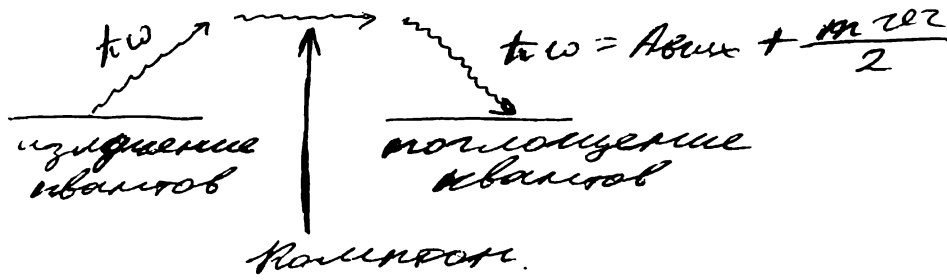
$$\left. \begin{aligned} u_{\omega} &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{h\omega}{(e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1)} \\ f_{\omega} &= \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{h\omega}{(e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1)} \end{aligned} \right\} \textcircled{4} \text{ - формулы Планка (закон) Планка.}$$

$\] h\omega \ll kT$ , тогда:  $e^{\frac{h\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{h\omega}{kT}$ ; подставим это в (4):

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} u_{\omega} &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \\ f_{\omega} &= \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{при } h\omega \ll kT, \text{ т.е. при доста-} \\ \text{точно малых порциях } u, \text{ соот-} \\ \text{ветственно, почти непрерывностью,} \\ \text{то получается закон Рэлея-} \\ \text{Джинса.}$$

39) Стоящее и вынужденное излучение. Вывод формулы Планка по Эйнштейну.

$\hbar\omega = A_{\text{внн}} + \frac{m\omega^2}{2}$  - уравнение фотозадержки  
 свет излучается и поглощается квантами.



а) спонтанные переходы:  $\tau \approx 10^{-8}$  с - время жизни  
 $W_{nm} = A_{nm}$   
 ↑  
 вероятность в единицу времени /  $\frac{\text{вер.}}{\text{сек.}}$  /  $10^{-8}$  с - длина жизни /  $\frac{\text{дл.}}{\text{жизн.}}$

б) переходы с поглощением:  
 $W_{mn} = B_{mn} \cdot U_\omega$  /  $A; B(\omega)$   
 ↑  
 спектральная плотность излучения

в)  $W_{nm} = B_{nm} U_\omega$  - вынужденное излучение

↓  
 имеет ту же  $\omega$ , что и падающее излучение → имеет то же направление, что и падающее излучение → попеременно падающему излучению

вводя в рассмотрение вынужденное излучение Эйнштейн получил формулы Планка:  
 число переходов (в системе в термодинамическом равновесии) вверх (↑):  $N_{mn} = N_m B_{mn} U_\omega$

число переходов вниз ( $\downarrow$ )  $N_{nm} = N_n (A_{nm} + B_{nm} U_\omega)$

$$\frac{N_{nm}}{N_{mn}} = 1; \Rightarrow \uparrow N_{mn} = \downarrow N_{nm}$$

в системе, находящейся в термодинамическом равновесии, наряду с прямой переходу процессу можно сопоставить обратный процесс (принцип детального равновесия)

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{B_{mn} U_\omega}{A_{nm} + B_{nm} U_\omega} \quad (1)$$

в соответствии с распределением Больцмана: (для  $n \neq m$  систем)

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{(E_n - E_m)}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$\Rightarrow \frac{B_{mn} U_\omega}{A_{nm} + B_{nm} U_\omega} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$\Rightarrow U_\omega = -\frac{A_{nm} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{B_{mn} - B_{nm} e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \quad (2)$$

при  $T \rightarrow \infty; U_\omega \rightarrow \infty$

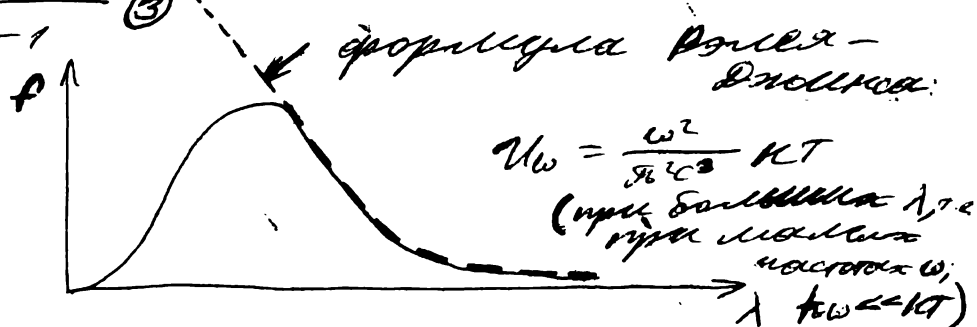
$$B_{nm} = B_{mn}$$

$$U_\omega = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (3)$$

$$E_\omega = \frac{c}{4} U_\omega$$

↑  
излучательная способность

$$E_\omega / \text{А.Э.Т.} = F(\omega; T)$$

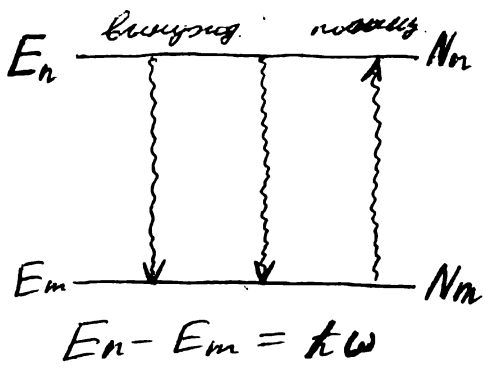


$$\Rightarrow \frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\omega^2 kT}{8\pi^2 c^3} \cdot \frac{kT}{kT} = \frac{k\omega^3}{8\pi^2 c^3} = \frac{\omega^2 kT}{8\pi^2 c^3}$$

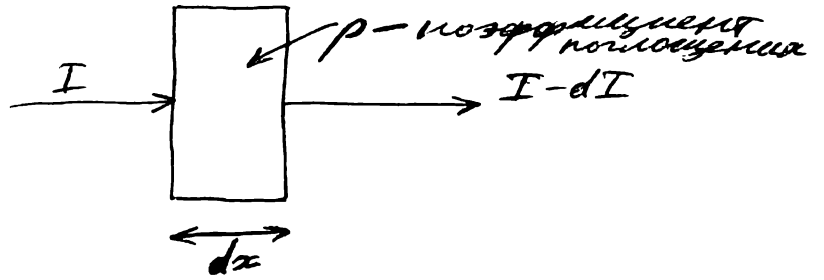
$$\Rightarrow U_\omega = \frac{k\omega^3}{8\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{\omega^2}{8\pi^2 c^2} \cdot \frac{kT}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (4) \text{ - ф-ла Планка}$$

$$F = \frac{c}{4} U = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{kT}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (5)$$

40) Аннвивная среда с инверсной заселённостью.



закон Бугера:



$-dI = I\rho dx$  — убавление интенсивности

$I = \langle S \rangle = cU\omega$

$-dI = cU\omega\rho dx$  (1)

при прохождении расстояния  $dx$  в единицу объема поглощается интенсивность:

$I_{\text{погл.}} = \underbrace{U\omega V_{\text{мн}}}_{\substack{\text{выраженность} \\ \text{перехода} \\ \text{в единицу} \\ \text{времени}}} \underbrace{N_m}_{\substack{1/\text{см}^3}} \underbrace{\hbar\omega}_{\substack{1/\text{с}}} dx = \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{с}} \right]$

$[cU] = \frac{\text{см}}{\text{с}} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} = \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{с}}$

излучаемая интенсивность:  $I_{\text{изл}} = U\omega V_{\text{мн}} N_n \hbar\omega dx$

$-dI = I_{\text{погл.}} - I_{\text{изл.}} = U\omega V \hbar\omega dx (N_m - N_n) = cU\omega\rho dx$   
 $|V_{\text{мн}} = V_{\text{мн}}|$

$\Rightarrow \rho = \frac{V\hbar\omega (N_m - N_n)}{c}$  (2)

если  $N_n < N_m$ , то  $\rho > 0$  и интенсивность будет

убывать (предполагает поглощение)

если  $N_n > N_m$  (инверсия), то  $\rho < 0$ ,  $I \uparrow$ , среда с активной

(IT) инверсной заселённостью.

термодинамически равновесная система:

$N = N_0 e^{-\frac{E}{kT}}$

$\frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{E_n - E_m}{kT}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

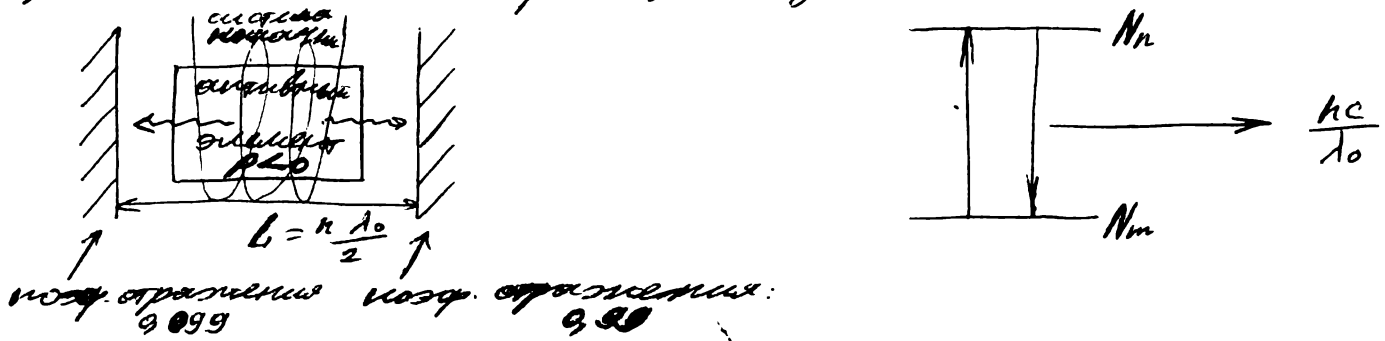
если  $N_n > N_m$ , то  $e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} > 1$ , что возможно при  $T < 0$  !!!!!



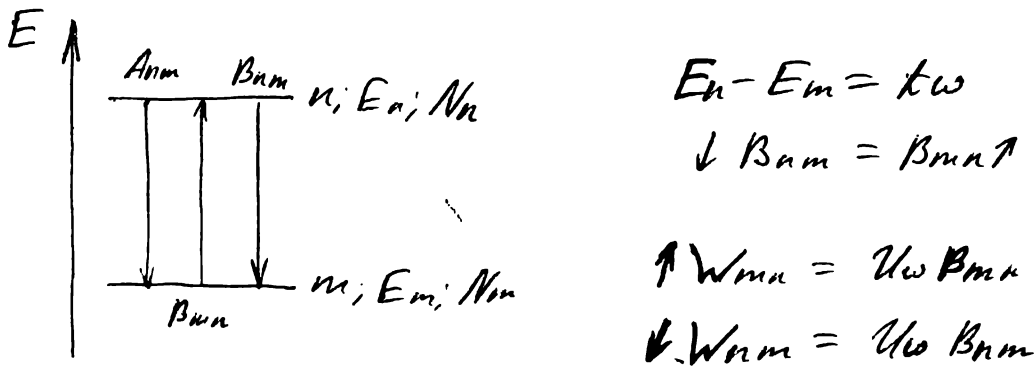
# 41) Лазеры.

Оптические квантовые генераторы (принцип действия)

а) Блок-схема (принцип действия):



б) схемы накачки:



$$E_n - E_m = \hbar \omega$$

$$\downarrow B_{nm} = B_{mn} \uparrow$$

$$\uparrow W_{mn} = U \omega B_{mn}$$

$$\downarrow W_{nm} = U \omega B_{nm}$$

число переходов:

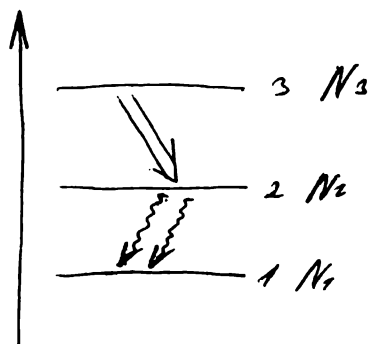
$$\uparrow W_{mn} \cdot N_m = \uparrow N_1$$

$$\downarrow W_{nm} \cdot N_n = \downarrow N_2$$

$$N_n \leq N_m$$

на двух уровнях инверсия заселённости не получить.

трехуровневая система накачки:



переход 1 → 3 - переход накачки (помощный)

$$\hbar \omega_1 = E_3 - E_1$$

переход 3 → 2 - накачка (спонтанный переход)

(безызлучательный переход)

переход 2 → 1 - рабочий

$$\text{переход; } \hbar \omega_0 = E_2 - E_1$$

нельзя, чтобы  $N_2 > N_1$ !

реализация  $N_2 > N_1$ :

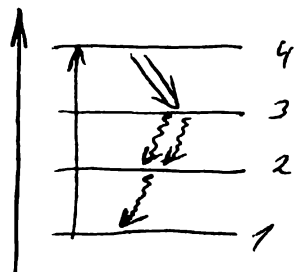
$$W_{32} \gg W_{13}; A_{31} \ll B_{13} U(\omega_1)$$

вероятность перехода (спонтанного) должна быть

Большая вероятность перехода с попомощью  
 освобождение уровня 1 идёт только в ре-  
 зультате действия накачки

$N_2 > N_1$  - возможно только в симметричном  
 режиме работы лазера.

4-х уровневая система накачки:



$E_4 - E_1 = h\nu_1$  - накачка

спонтанный переход  $4 \rightarrow 3$   
 (безызлучательный)

$\begin{cases} 4 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 3 \end{cases}$  - накачка.

рабочий переход:  $3 \rightarrow 2$ :  $E_3 - E_2 = h\nu_0$

очистка:  $2 \rightarrow 1$

$N_3 > N_2$  - для инверсной заселённости

$W_{14} = B_{14} U(\omega_1)$

$W_{43} = A_{43}$  - вероятность спонтанного перехода

$W_{32} = B_{32} U(\omega_0)$

$W_{21} = A_{21}$  - вероятность очистки.

в этом случае можно реализовать непрерыв-  
 ный режим работы, если:

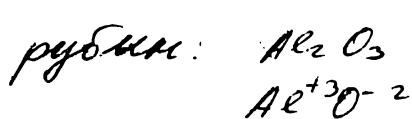
$W_{43} \gg W_{14} > A_{32}$  - ведёт к росту  $N_3$

$W_{32} < W_{21} = A_{21}$ , - ведёт к уменьшению  $N_2$

при 4-х уровневой накачке возможен непре-  
 рывный режим работы лазера.

В) типы лазеров:

- твердотельные лазеры: - 1961 год - Мейман-



рубинный лазер:

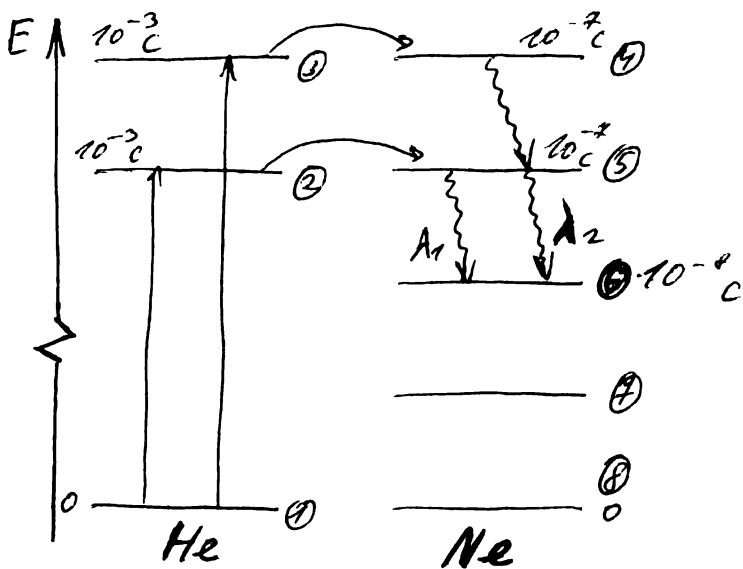
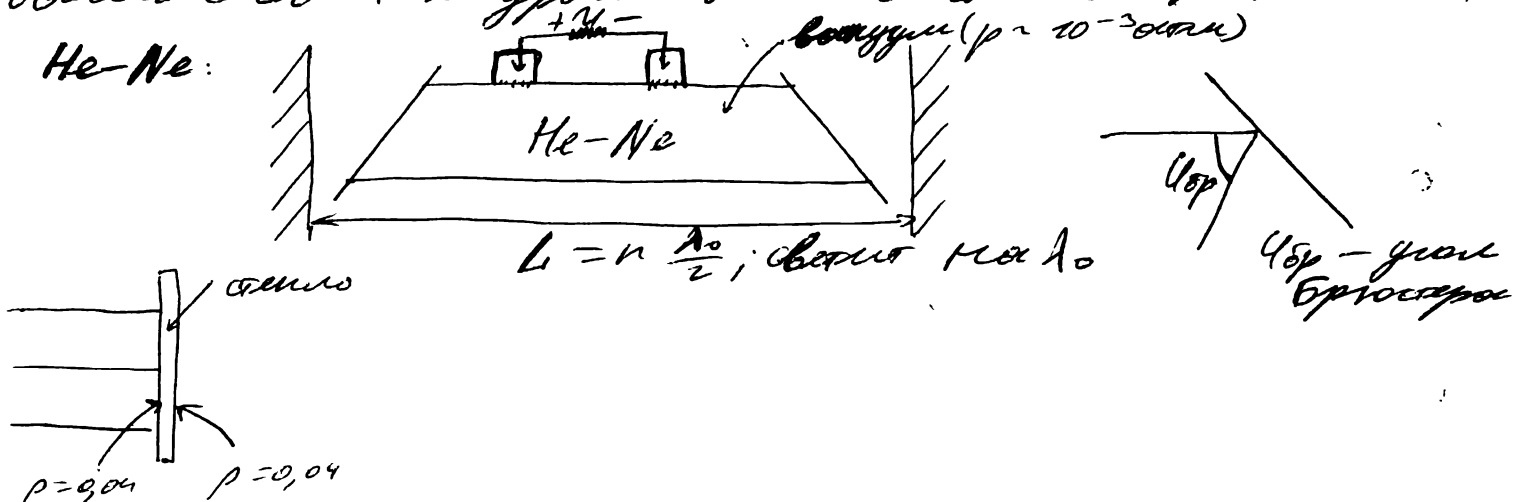
$\uparrow$   $Cr^{3+}$ ; алмазный разбавлен графитом:

в 3-х элементном кристе есть 3-и уровень  $\Rightarrow$  3-х уровневая система накачки  $\frac{Cr^{3+}O_3}{Al_2O_3} = 0.05\%$

- газовый лазер:

$\text{CO}_2$ ; выбирается такой состав, чтобы реализовывалась 4-х уровневая схема накачки.

He-Ne:



$1 \rightarrow 2$  }  $e + \text{He} \rightarrow \text{He}^* + e$   
 $4 \rightarrow 5$  } возбуждение  
 метрными  
 ударами

уровни 2 и 3 - metastable;  $\tau \sim 10^{-3}$  c

$3 \rightarrow 4$  } удары второго рода (идёт заселение 4 и 5 уровней)  
 $2 \rightarrow 5$  }

$4 \rightarrow 6$  - рабочий переход ( $\lambda_2 = 0,63$  мкм)

$5 \rightarrow 6$  - рабочий переход ( $\lambda_1 = 1,15$  мкм)

Время "назлы" уровней 4 и 5 мало ( $\sim 10^{-8}$ ), т.е. на них ничего не задерживается.

$5 \sim 10^{-8}$  c

$6 \rightarrow 7$  - переход ошестки (за счёт спонтанных переходов, т.к. уровень "малозаселенный")

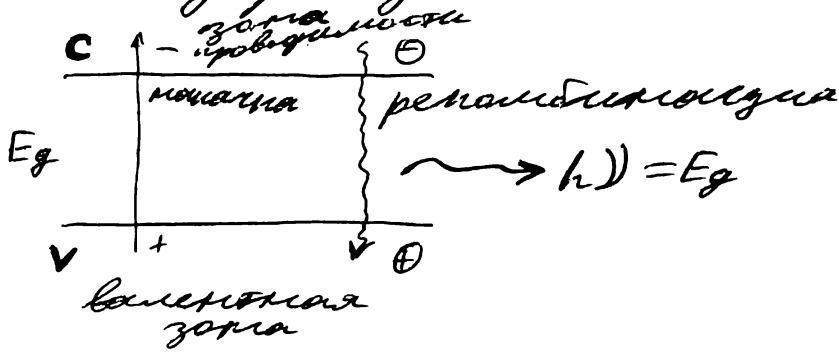
$7 \rightarrow 8$  - ошестка (тумление) (за счёт столкновения со стенками;  $\Rightarrow$  нужна узкая и длинная трубка)

$$\frac{P_{He}}{P_{Ne}} = \begin{cases} \frac{1}{5}; \Rightarrow \lambda_2 \approx 0,63 \text{ мкм} \\ \frac{1}{10}; \Rightarrow \lambda_1 \approx 1,15 \text{ мкм} \end{cases}$$

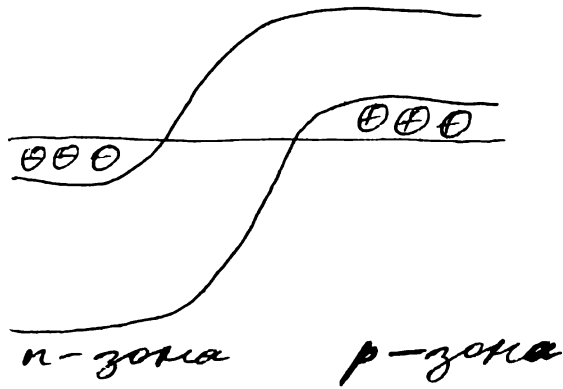
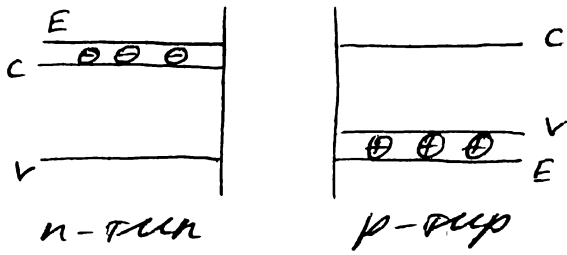
$P_2 \approx 1 \text{ мм. рт. ст.} \approx 10^{-3} \text{ атм}$

к.р.д.:  $\eta = 0,1\% \text{ (He-Ne)}; \eta = 12\% \text{ (CO}_2\text{)}$

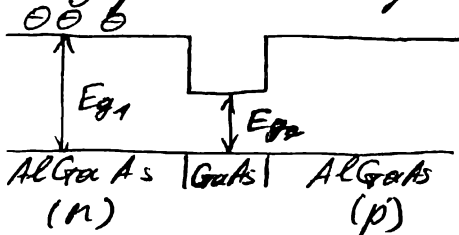
- полупроводниковый лазер:



поясница образуется за счёт электрического тока.



- лазер на гетеропереходе:



создаётся «ловушка»; электроны «собираются» в эту «ловушку».

- мультиквантовые лазеры и лазеры на красителях:

