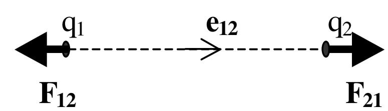
ЧАСТЬ III Электричество и магнетизм.

3.1 Электрические заряды в природе. Закон сохранения заряда. Закон Кулона.

В настоящее время известно, что в основе всего разнообразия явлений природы лежат четыре фундаментальных взаимодействия между элементарными частицами : сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. Каждый вид взаимодействия связывается с определенной характеристикой частицы. Например, гравитационное взаимодействие зависит от масс частиц, электромагнитное – от *электрических зарядов*.
Электрический заряд частицы является одной из основных первичных характеристик. Заряд всех элементарных частиц (если они заряжены) одинаков по абсолютной величине. Его можно назвать элементарным зарядом. Обозначается модуль элементарного заряда буквой e.
Электрическому заряду частицы присущи следующие фундаментальные свойства:
1) электрический заряд существует в двух видах – положительный и отрицательный;
2) в любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется во времени (закон сохранения заряда);
3) электрический заряд является релятивистским инвариантом – его величина не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от скорости заряженной частицы;
4) единица измерения заряда в системе Си – Кулон. Элементарный заряд $e = 1.60\cdot10^{-19}$ Кл.
Определить наличие заряда можно по его действию на другие заряды определенной силой. Закон, которому подчиняется сила взаимодействия **точечных** зарядов, был установлен экспериментально в 1785 г Кулоном. Под точечным зарядом понимается идеализированный объект, размеры которого много меньше расстояния между ним и точкой наблюдения. В результате проведенных экспериментов Кулон пришел к выводу, что сила взаимодействия двух точечных зарядов пропорциональна величине каждого из них и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Сила направлена по прямой, соединяющей заряды. Запишем формулу для закона Кулона:

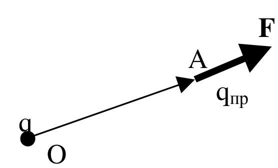


$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_{12}\,.$$

Формула записана в системе СИ. В этой формуле $\vec{e}_{12}$ - единичный вектор, направление которого показано на рисунке, $\varepsilon_0 = 8.85\cdot10^{-12}$ Ф/м. По III закону Ньютона, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Заметим, что заряды одного знака отталкиваются, а разных знаков – притягиваются друг к другу.

3.2 Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции.

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что на заряд, помещенный в какую-либо точку такого поля, действует сила. Поэтому, чтобы установить наличие электрического поля в данной точке, туда надо поместить заряд и замерить силу. Такой заряд будем называть *пробным,* и, естественно, он должен быть малым и точечным. Далее для простоты изложения получим общие формулы на примере формул для точечного заряда. Все выводы, сделанные при этом, будут верны для электрических полей любой системы зарядов. Пусть источник поля – точечный заряд q, а пробный заряд внесен в точку A,



характеризуемую радиус-вектором $\vec{r}$ (начало координат в точке О). Тогда сила их взаимодействия равна

$$\vec{F} = q_{пр}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r\right)$$

Ясно, что величина в скобках не зависит от величины пробного внесенного заряда и определяется <u>только</u> свойствами <u>самого</u> поля, в то время как сила $\vec{F}$ зависит от $q_{пр}$. Поэтому величину в скобках и используют в качестве силовой характеристики поля и называют <u>напряженностью электрического поля –</u>

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}$$

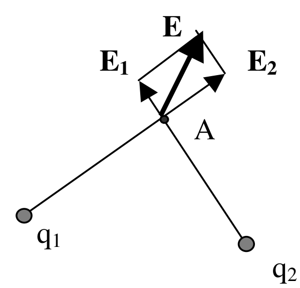
Она численно равна силе, действующей на положительный единичный заряд, внесенный в данную точку пространства. Эта формула справедлива для электрического поля любых неподвижных зарядов. С помощью этих формул получаем напряженность электрического поля точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

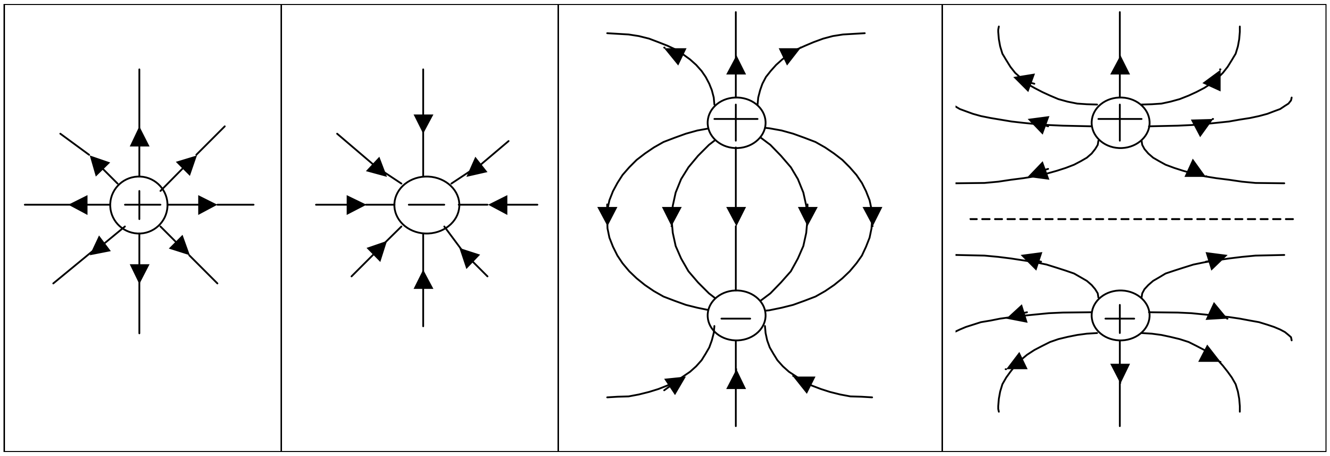
Сила, действующая со стороны электрического поля на заряд q, будет равна $\vec{F} = q\vec{E}$. Если поле создается несколькими зарядами, то полная сила, действующая на некий заряд q, будет равна сумме сил: $\vec{F} = \sum\limits_i \vec{F}_i = \sum\limits_i q\vec{E}_i = q\sum\limits_i \vec{E}_i = q\vec{E}$, где $\vec{E}$ - это суммарная напряженность электрического поля. Это утверждение носит название **принципа суперпозиции**:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i ; \vec{E} = \int_V d\vec{E} .$$

Вторая формула выражает принцип суперпозиции для заряда, непрерывно распределенного по объему V.Этот принцип позволяет вычислять напряженность поля любой системы зарядов. Действительно, всегда можно разбить мысленно систему зарядов на точечные заряды dq и найти поле от этих зарядов по принципу суперпозиции. В качестве примера рассмотрим поле двух положительных точечных зарядов q_1 и q_2. Найдем поле в точке А. Для этого надо по формуле для напряженности электрического поля точечного заряда найти модули E_1 и E_2, а затем сложить два этих вектора.



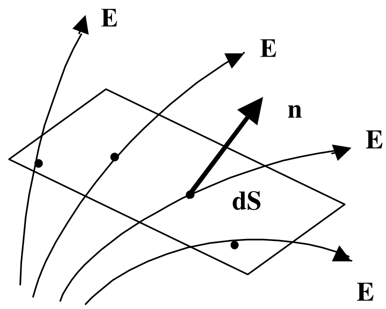
Если мы знаем величину и направление вектора электрического поля в любой точке пространства, то можно построить картину, называемую линиями вектора напряженности или силовыми линиями электрического поля. Касательная к такой линии указывает направление силы, которая будет действовать на внесенный в эту точку заряд, а густота линий характеризует численное значение вектора $\vec{E}$. На рисунке показаны картины силовых линий некоторых полей.



3.3 Теорема Гаусса.

Поле системы зарядов можно определить, разбивая систему зарядов на точечные и суммируя(или интегрируя) по всему объему, занятому зарядами. Этот метод основан на принципе суперпозиции и всегда дает результат. Но иногда можно использовать более простой и наглядный метод – теорему Гаусса.

Сначала определим понятие поток вектора через поверхность. Рассмотрим область



пространства, в которой существует электрическое поле. Поместим в некоторое место этого пространства площадку $d\vec{S}$ (это вектор, модуль которого равен площади dS, а направление определяется единичным вектором внешней нормали к этой поверхности). Тогда эту площадку будут пересекать силовые линии, густота которых говорит о величине поля в данной точке. Величина $d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S}$ называется потоком вектора электрического поля через площадку $d\vec{S}$. Поток можно записать в виде $d\Phi = \vec{E}\cdot\vec{n}dS = EdSCos(\vec{E},\vec{n}) = EdSCos\alpha = E_n dS$, где E_n – проекция вектора электрического поля на нормаль к площадке. Чтобы найти полный поток через некоторую поверхность S, необходимо вычислить интеграл

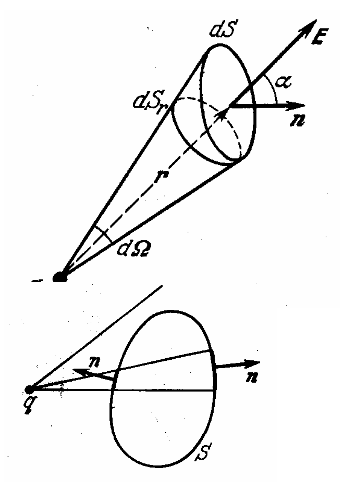
$$\Phi = \int_S \vec{E}d\vec{S}$$

Теперь сформулируем теорему Гаусса:

Поток вектора электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ε_0.

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Докажем эту теорему для поля одного точечного заряда, далее обобщим на случай любого



заряда. Окружим точечный заряд произвольной замкнутой поверхностью и, выделив на ней элемент площади $d\vec{S}$, определим поток вектора электрического поля через $d\vec{S}$:

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = EdSCos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dSCos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\cdot d\Omega.$$

В этих формулах использован тот факт, что $dSCos\alpha = dS_r = r^2 d\Omega$; dS_r – элемент сферической поверхности, который опирается на элемент телесного угла $d\Omega$, как показано на рисунке. Окончательно для потока получаем $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Если же заряд расположен вне выбранной поверхности, то часть телесного угла будет иметь положительное значение $d\Omega > 0$ (будет с «точки зрения» заряда выпуклая), а часть телесного угла будет иметь отрицательное значение $d\Omega < 0$ (будет вогнутая), поэтому полный поток через такую поверхность будет равен нулю. На языке силовых линий это означает, что сколько силовых линий вошло в поверхность, столько и вышло. Для точечного заряда теорема доказана. Если же заряд не точечный, а распределен непрерывно по некоторому объему, то его можно разделить на точечные заряды dq и для каждого записать:

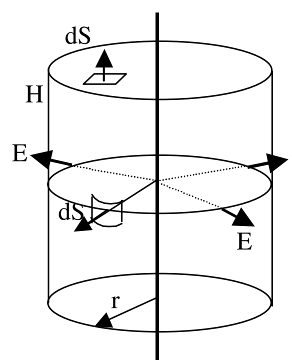
$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ и $d\Phi = \oint\limits_S d\vec{E}d\vec{S} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\oint\limits_S d\Omega = \frac{dq}{\varepsilon_0}$. Далее можно найти полный поток от всего заряда и получить общую формулу: $\Phi = \frac{\int \rho dV}{\varepsilon_0}$, где ρ – плотность зарядов. Для дискретного распределения зарядов получаем следующую цепочку формул:

$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = \oint(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ...)d\vec{S} = \oint \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint \vec{E}_2 d\vec{S} + ... = \Phi_1 + \Phi_2 + ... = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}.$$

3.4 Вычисление полей заряженных плоскости, цилиндра, сферы и шара.

Как уже упоминалось, теорема Гаусса используется в тех случаях, когда имеется какая-либо симметрия в распределении зарядов, создающих электрическое поле. В этом случае главной задачей является нахождение такой поверхности для расчета потока вектора $\vec{E}$, на которой легко можно было бы вычислить вектор $\vec{E}$ или угол между векторами $\vec{E}$ и $d\vec{S}$. При этом расчет с помощью теоремы Гаусса становится несложным.

1). Бесконечная нить, равномерно заряженная зарядом с линейной плотностью λ.



Для такого распределения заряда имеется осевая симметрия. Это означает, что все направления, перпендикулярные нити, имеют одинаковые свойства: модуль вектора $\vec{E}$ не должен зависеть от направления. Для расчета потока выбираем замкнутую поверхность, состоящую из цилиндра радиуса r, соосного с нитью, и двух плоскостей (я называю их «дно» и «крышка»). На боковой поверхности цилиндра вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно поверхности и одинаков в любой точке ее. На плоскостях («дно» и «крышка») вектор $\vec{E}$ параллелен плоскостям и потока через эти поверхности вектора $\vec{E}$ нет. В результате можно записать следующую цепочку формул:

$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{дно}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{\text{крышка}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{\text{бок}} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{бок}} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{бок}} EdS = E\int\limits_{\text{бок}} dS = E2\pi rH = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda H}{\varepsilon_0}.$$

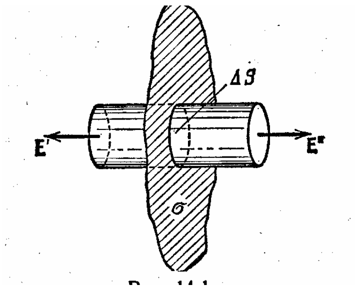
Для напряженности электрического поля нити получаем следующую формулу:

$$E_{\text{нить}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Для цилиндра радиуса R, заряженного равномерно по поверхности, получается та же формула, но только для расстояний r от оси цилиндра, больших, чем его радиус R. Внутри цилиндра электрического поля нет.

2). Бесконечная плоскость, равномерно заряженная зарядом с поверхностной плотностью σ.

Так как плоскость бесконечна во все стороны, то в любой точке пространства вектор $\vec{E}$ может быть направлен только перпендикулярно плоскости. Поэтому в данном случае в качестве поверхности для интегрирования используется замкнутый цилиндр, изображенный на рисунке. Для удобства расчетов площади оснований цилиндра ΔS берут малыми. На боковой поверхности цилиндра вектор $\vec{E}$ параллелен плоскостям и потока через эту поверхность нет. На плоскостях («дно» и «крышка») вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно поверхности и одинаков в любой точке ее. В результате можно записать



$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{лево}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{\text{право}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{\text{бок}} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{лево}} \vec{E}'d\vec{S} + \int\limits_{\text{право}} \vec{E}''d\vec{S} = 2\int\limits_{\text{лево}} EdS = 2E\int\limits_{\text{лево}} dS = 2E\Delta S = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

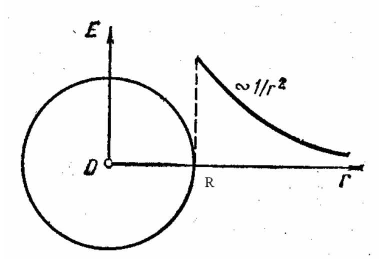
.

Итак, электрическое поле заряженной плоскости определяется по формуле:

$$E_{\text{плоск}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

3). Сфера радиуса R, заряженная равномерно по поверхности с поверхностной плотностью σ.

При равномерном распределении заряда по сфере эта система обладает сферической симметрией. При этом любое направление из центра сферы будет обладать одинаковыми свойствами по отношению к величине электрического поля и его зависимости от расстояния от центра сферы. Другими словами, модуль вектора электрического поля будет одинаков на сферической поверхности. В качестве поверхности для интегрирования выбираем поверхность радиуса r с центром в центре заряженной сферы. Рассмотрим два случая. В первом случае радиус сферы интегрирования $r < R$. Так как внутрь сферы не помещен заряд, а сферическая симметрия есть, то по теореме Гаусса единственная возможность для электрического поля – равенство его нулю. Итак, $E_{\text{внутри}} = 0$. Во втором случае $r > R$ и цепочка формул для расчета электрического поля на поверхности сферы будет выглядеть так:



$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{сфера}} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{сфера}} EdS = E\int\limits_{\text{сфера}} dS = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

.

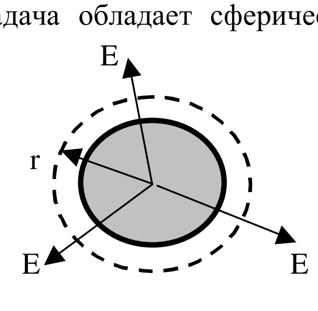
Учитывая полученные формулы, получаем ответ для вектора $\vec{E}$:

$$E_{\text{внесф}} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Внутри сферы электрическое поле отсутствует. На рисунке изображена зависимость модуля вектора напряженности электрического поля сферы от расстояния от ее центра. Вне сферы этот заряд производит впечатление точечного заряда, расположенного в центре сферы.

4). Шар радиуса a, заряженный равномерно по объему с объемной плотностью ρ.

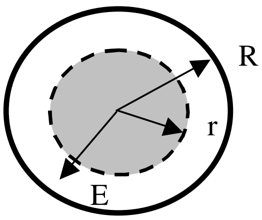
Задача обладает сферической симметрией. Снова в качестве замкнутой поверхности выбираем сферу с центром в центре шара. В зависимости от радиуса сферы интегрирования возможны два случая. В первом случае $r > R$ и внутри этой сферы находится весь заряд, создающий поле. Поэтому ответ для напряженности



электрического поля будет соответствовать полю точечного заряда, расположенного в центре симметрии системы:

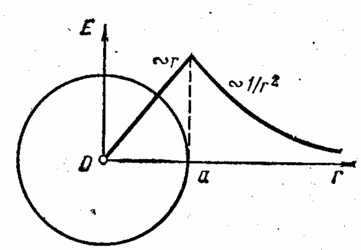
$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{сфера}} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{сфера}} EdS = E\int\limits_{\text{сфера}} dS = E4\pi r^2 = \frac{q_{\text{внут}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0}.$$

$$E_{\text{внешара}} = \frac{\rho R^3}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{q_{\text{шар}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$



Во втором случае r < R и внутри этой сферы находится не весь заряд шара, а только его часть равная

$$q_{\text{внутр}} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3} = \frac{q_{\text{шар}} r^3}{R^3}.$$



В результате для поля внутри шара получаем следующее уравнение:

$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{сфера}} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{сфера}} EdS = E\int\limits_{\text{сфера}} dS = E4\pi r^2 = \frac{q_{\text{внут}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$$

.

$$E_{\text{внутри}} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Зависимость модуля напряженности электрического поля шара от расстояния от центра шара приведено на рисунке.

3.5 Потенциал электрического поля.

Перейдем к следующей характеристике электрического поля – энергетической. Рассмотрим поле, создаваемое точечным неподвижным зарядом q. В любой точке пространства на пробный заряд $q_{\text{пр}}$ действует сила

$$\vec{F} = \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = F(r)\cdot\vec{e}_r.$$

Сила эта является центральной (то есть в любой точке пространства направлена по линии, соединяющей некий центр О с искомой точкой), а следовательно консервативной. Поэтому работа этой силы не зависит от пути, по которому передвигается заряд $q_{\text{пр}}$. Тогда работа по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = \int F(r)\vec{e}_r d\vec{l}.$$

Легко показать, что $\vec{e}_r d\vec{l} = dr$, тогда получаем

$$A_{12} = \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Как уже было получено в механике, для консервативной силы эта работа равна разности потенциальных энергий пробного заряда в электрическом поле заряда q: $A_{12} = W_{p1} - W_{p2}$. Тогда для потенциальной энергии получаем

$$W_p = \frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi\varepsilon_0 r} + Const$$

Обычно считается, что заряды, находящиеся на очень большом расстоянии друг от друга, не взаимодействуют, поэтому константу выбирают равной нулю. Полученная величина (потенциальная энергия) зависит от величины внесенного заряда, а величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{пр}}$$

не зависит и называется потенциалом электрического поля. Эта формула была получена на примере поля точечного заряда но, тем не менее, справедлива во всех возможных случаях. Потенциал же поля точечного заряда можно вычислять по формуле:

$$\varphi_{тз} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Следует заметить, что для потенциала тоже справедлив принцип суперпозиции: потенциал системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов отдельных зарядов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i ; \varphi = \int_V d\varphi .$$

3.6 Связь между $\vec{E}$ и φ для электрического поля.

Поле системы зарядов можно определить по принципу суперпозиции, разбивая мысленно распределенный заряд на точечные заряды dq: $\vec{E} = \int d\vec{E}$ и $\varphi = \int d\varphi$. Но есть и другая возможность: можно, зная одну из этих величин, получить вторую. Выведем соответствующие формулы.

Элементарная работа dA электрического поля по переносу пробного заряда на расстояние $d\vec{r}$ определяется так: $dA = \vec{F}d\vec{r} = q_{пр}\vec{E}d\vec{r}$. Тогда работа электрического поля по переносу пробного заряда из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = q_{пр}\int_1^2 \vec{E}d\vec{r} .$$

Так как электростатическое поле потенциально, то эта работа равна разности потенциальных энергий пробного заряда в этом электрическом поле:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q_{пр}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

После несложных вычислений получаем связь разности потенциалов и напряженности электрического поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r} .$$

Эта формула позволяет вычислять разность потенциалов, если известна напряженность $\vec{E}$. Теперь получим обратное соотношение. Для этого запишем полученное соотношение в дифференциальной форме

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

Для того чтобы из этой формулы определить проекцию напряженности электрического поля, например, по оси x, необходимо считать остальные переменные постоянными величинами. В математике такая производная называется частной и записывается так

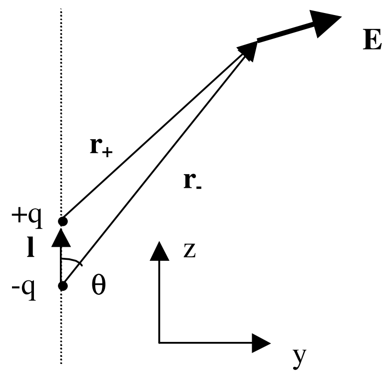
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = E_x ; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = E_y ; \frac{\partial\varphi}{\partial z} = E_z .$$

Эти три производные объединяют в векторный оператор, который носит название *градиент* (или оператор ∇). Запишем окончательную формулу:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\mathrm{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

3.7 Поле диполя.

Электрический диполь – это система из двух одинаковых по модулю разноименных



точечных зарядов +q и –q , находящихся на некотором расстоянии l друг от друга. Когда говорят о поле диполя, то имеют в виду точечный диполь, то есть систему зарядов, расстояния между которыми гораздо меньше, чем от зарядов до точки наблюдения $l << r_+, r_-$. Поле диполя обладает симметрией. Ось диполя задает ось симметрии, относительно которой все направления эквивалентны. Поэтому достаточно изучать поле в одной плоскости (плоскости рисунка). Найдем сначала потенциал этого поля, а потом с помощью формул предыдущего параграфа получим его напряженность. По принципу суперпозиции поле диполя

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = kq\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}.$$

Из рисунка ясно, что $r_-^2 = r_+^2 + l^2 + 2r_+ l\cdot\cos\theta$. С учетом дипольного приближения ($l << r_+, r_-$), получаем $r_-^2 = r_+^2 + 2r_+ l\cdot\cos\theta$ и далее $r_- = r_+\sqrt{1+2\frac{l\cos\theta}{r_+}} \approx r_+(1+\frac{l}{r_+}\cos\theta)$. Тогда, поскольку $r_+ \approx r_- \approx r$, получаем

$$\varphi = \frac{kql\cos\theta}{r^2} = \frac{kp\cos\theta}{r^2} = \frac{k(\vec{p}\vec{r})}{r^3}.$$

В этой формуле $\vec{p} = q\vec{l}$ называется дипольным моментом диполя.
Для получения напряженности электрического поля диполя воспользуемся формулой:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\mathrm{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

вычислив с ее помощью проекции E_y и E_z. Вычисления дают следующие ответы:

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k(\vec{p}\vec{r})}{r^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kpz}{r^3}\right) = \frac{3kpz}{r^4}\frac{y}{r} = \frac{3kp\cos\theta\sin\theta}{r^3}.$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k(\vec{p}\vec{r})}{r^3}\right) = k\frac{3p\cos^2\theta - p}{r^3} = \frac{kp}{r^3}(3\cos^2\theta - 1).$$

Модуль вектора напряженности электрического поля будет равен

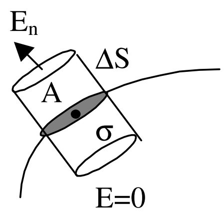
$$E = \frac{kp}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}.$$

3.8 Поле в веществе. Поле внутри и снаружи проводника.

Рассмотрим металл, находящийся в **постоянном** электрическом поле. Истинное электрическое поле в любом веществе (его называют микрополем) меняется весьма резко, как по координате, так и по времени. Оно определяется в данной точке суммой полей от всех заряженных частиц этого вещества. Его найти практически невозможно, да и не нужно. А нужно знать макрополе – это электрическое поле, усредненное по физически бесконечно малому объему. Это объем, содержащий большое число атомов, достаточное для усреднения, но имеющий размеры много меньше тех, на которых заметно меняется макрополе. Макрополе в веществе состоит как бы из двух – внешнего и внутреннего. Внутреннее образуется за счет смещения зарядов вещества из положений равновесия, что приводит к появлению индуцированного заряда, как на поверхности, так и в объеме. Теперь остановимся на особенностях поведения металлов в электрическом поле.

1) Металл отличается от остальных веществ тем, что в нем имеется огромное число свободных электронов, то есть электронов, которые могут перемещаться на расстояния порядка размеров самого металла. Поэтому если в металле на электроны действует какая-либо сила, то они будут передвигаться до тех пор, пока внутреннее поле, связанное с перераспределением зарядов, полностью не скомпенсирует внешнюю силу. В результате электрическое поле внутри металла в стационарном случае равно нулю. Из этого следует (теорема Гаусса), что в металле нет не скомпенсированных свободных зарядов в объеме. Зато эти заряды появляются на поверхности, где их поверхностная плотность равна $\sigma(A)$. Она, конечно, зависит от формы поверхности. Поскольку электрическое поле внутри металла равно нулю, то потенциал электрического поля внутри металла постоянен. Это означает, что энергия электронов внутри металла в электростатическом случае везде одинакова.

2) Так как на поверхности металла есть свободные заряды, то электрическое поле в пространстве вблизи поверхности должно быть перпендикулярно этой поверхности. Иначе возникнет сила, направленная вдоль поверхности, способная двигать заряды, что они и будут делать до полной ликвидации этой составляющей силы.



3) Поле вблизи поверхности металла можно получить с помощью теоремы Гаусса. Рассмотрим малую область пространства вблизи точки A на поверхности металла. Окружим ее замкнутой поверхностью в виде малого цилиндра площадью основания ΔS и высотой h как показано на рисунке. В силу пункта 2) через боковую поверхность этого цилиндра силовые линии электрического поля поверхностных зарядов не выходят; кроме того, поле внутри металла равно нулю. Поэтому поток вектора $\vec{E}$ выходит только через наружную поверхность и равен

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = E_n \Delta S = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon_0},$$ откуда получаем окончательную формулу

$$E_n = \sigma/\varepsilon_0.$$

3.9 Общая задача электростатики. Метод изображений.

Очень часто приходится встречаться с задачами, в которых распределение зарядов неизвестно, но заданы потенциалы проводников, их форма и относительное расположение. И требуется определить потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в любой точке поля между проводниками. Напомним, что, зная φ можно легко восстановить само поле E и по значению E непосредственно у поверхности проводника найти распределение поверхностных зарядов на них.

Получим уравнение для потенциала. Выберем бесконечно малый объем dV, который ограничивается поверхностью $d\vec{S}$. Тогда по теореме Гаусса получаем

$$\vec{E} d\vec{S} = \frac{\rho dV}{\varepsilon_0} \text{ или } \frac{\vec{E} d\vec{S}}{dV} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Величина слева называется *дивергенцией вектора* $\vec{E}$. Дивергенция – векторный оператор, совпадающий по формуле с градиентом. Различие заключается в том, что если этот оператор применяется к скаляру, то он называется градиентом, а если к вектору – то дивергенцией:

$$\mathrm{div} \equiv \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k};\ \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Зная, что $\vec{E} = -\nabla\varphi$, получаем

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

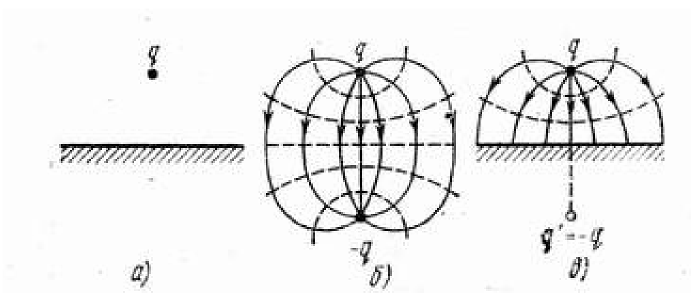
где оператор $\Delta = \nabla^2$ называется оператором Лапласа: $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Это уравнение носит имя Пуассона. Если между проводниками зарядов нет, то получаем уравнение Лапласа: $\Delta\varphi = 0$. Для однозначного решения задачи по нахождению потенциала во всем пространстве необходимо задать значения потенциалов на всех проводниках φ_1, φ_2, φ_3 ….В теории доказывается, что у такой задачи есть единственное решение. Это утверждение носит название теоремы единственности.

Однако решить такую задачу часто достаточно сложно математически. Поэтому в некоторых простых случаях используют искусственные методы. Один из них и будет сейчас изложен.

Метод электрических изображений.

Рассмотрим его применение на примере точечного электрического заряда q, находящегося на расстоянии l от бесконечной проводящей плоскости. Необходимо найти потенциал во всем пространстве. Идея метода заключается в том, что мы должны найти другую задачу, которая решается просто и решение которой или его часть может быть использовано.



Таким образом, нам надо решить уравнение Лапласа с граничным условием: потенциал равен нулю в нижней полуплоскости (внутри металла поле равно нулю). В нашем случае поле в верхней полуплоскости, создаваемое зарядом q и распределенным по поверхности плоскости зарядом противоположного знака, совпадает с полем системы двух зарядов q и –q, второй расположен на расстоянии l от поверхности плоскости внутри нее. Из рисунка это видно наиболее ясно.

Решение, найденное нами, и есть единственное в этом случае. Теперь можно считать, что поле в верхней полуплоскости создается двумя точечными зарядами. Напомним, что поле в нижней полуплоскости обязано быть равным нулю. Потенциал электрического поля такой системы в точке А находим теперь как сумму потенциалов точечных зарядов:

$$\varphi_A = \varphi_q + \varphi_{-q} = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

Можно сказать, что метод изображений по существу основан на подгонке потенциала под граничные условия: мы стараемся найти другую задачу, у которой конфигурация поля в интересующей нас части пространства была бы той же. Если это удается сделать с помощью достаточно простых конфигураций точечных зарядов, то метод изображений оказывается весьма эффективным.

3.10. Поляризация диэлектрика. Вектор $\vec{P}$.

Диэлектрики отличаются от металлов тем, что в них нет свободных электронов (при комнатных температурах и ниже) и они не проводят электрический ток. Это означает, что все электроны «привязаны» к своим атомам или молекулам. Поскольку диэлектрик (не заряженный) в целом нейтрален (q=0), то потенциал внутри диэлектрика может быть создан диполями. Сами молекулы исходно могут иметь вид диполей, или такой их вид можно создать внешним электрическим полем. Молекулы (атомы), у которых в отсутствие внешнего электрического поля центр тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадает (дипольный момент равен нулю) называются неполярными. Это, например, молекулы H_2, O_2, N_2. У других, таких как CO, HCl, центры тяжести даже без внешнего поля сдвинуты и есть дипольный момент. Такие молекулы называются полярными. Напомним, что дипольным моментом молекулы называется величина $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$, где $\vec{l}$ - расстояние между центрами тяжести отрицательных и положительных зарядов молекулы (q>0).

Если неполярную молекулу поместить в электрическое поле, то она приобретет дипольный момент, величина которого будет пропорциональна напряженности электрического поля. Для полярной молекулы, находящейся во внешнем электрическом поле, имеющийся уже дипольный момент практически не изменяется, лишь ориентируется вдоль поля.

В диэлектрике огромное количество диполей (полярный диэлектрик) и все они хаотически ориентированы в пространстве. Поэтому в отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент как неполярного, так и полярного диэлектрика равен нулю. Если же любой диэлектрик поместить в электрическое поле, то возникающие (или имеющиеся уже) дипольный моменты выстраиваются преимущественно по полю. Появляется макроскопический дипольный момент. Это явление называется **поляризацией диэлектрика**. Количественно это явление характеризуется вектором поляризации $\vec{P}$, который определяется следующим образом:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i ,$$

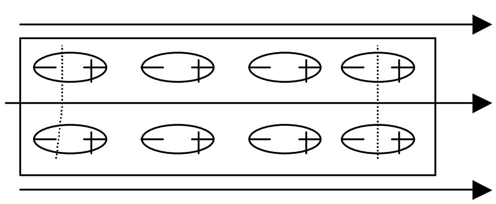
где ΔV – физически малый объем, а $\vec{p}_i$ - дипольный момент i – ой молекулы. Модуль вектора поляризации численно равен дипольному моменту единицы объема.

У большинства диэлектриков в отсутствие внешнего электрического поля вектор поляризации равен нулю. При помещении таких диэлектриков в электрическое поле появляется вектор поляризации, величина которого прямо пропорциональна напряженности электрического поля:

$\vec{P} = \kappa \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$, где величина κ называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика.

3.11 Поле внутри диэлектрика. Объемные и поверхностные связанные заряды.

Заряды, входящие в состав диэлектрика, называются связанными по понятной причине.



E

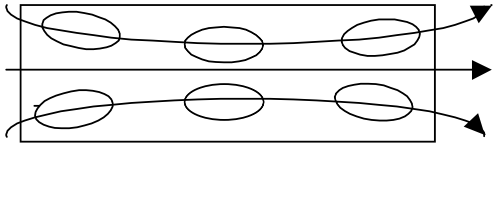
Заряды, не входящие в состав молекул диэлектрика, называются сторонними. Поле в диэлектрике является суперпозицией поля $\vec{E}_{стор}$ и $\vec{E}_{связ}$. Это поле называется микроскопическим

$$\vec{E}_{микро} = \vec{E}_{связ} + \vec{E}_{стор}.$$

Но, как мы уже обсуждали, это поле сильно зависит от координат. Обычно пользуются усредненным по физически бесконечно малому объему макрополем, которое равно

$$\vec{E} = <\vec{E}_{микро}> = <\vec{E}_{связ}> + <\vec{E}_{стор}>.$$

Это макрополе состоит из поля $\vec{E}_0$ - внешнего и $\vec{E}'$ - внутреннего: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. Когда



E

внешнего поля нет, нет и объемной плотности связанных зарядов и поверхностной тоже нет. При наличии внешнего поля появляются объемная ρ' и поверхностная σ' плотности связанных зарядов. На рисунках показано, как и в каком случае возникают эти заряды. На первом рисунке показана возможность возникновения только поверхностного связанного заряда в случае однородного электрического внешнего поля. В случае неоднородного внешнего поля появляется и поверхностная, и объемная плотность связанных зарядов, что и показано на втором рисунке.

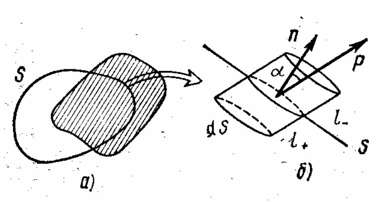
3.12 Свойства вектора $\vec{P}$. Связь σ' и ρ' с вектором $\vec{P}$.

<u>Теорема Гаусса для поля вектора</u> $\vec{P}$. Как мы сейчас покажем, поле вектора $\vec{P}$ обладает следующим замечательным и важным свойством. Оказывается, поток вектора $\vec{P}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объеме, охватываемом поверхностью S, т. е.

$$\oint \vec{P}d\vec{S} = -q'.$$

Это уравнение и выражает теорему Гаусса для вектора $\vec{P}$.

Доказательство теоремы. Пусть произвольная замкнутая поверхность S охватывает часть



диэлектрика (рис. а, где диэлектрик заштрихован). При включении внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется - положительные заряды сместятся относительно отрицательных зарядов. Найдем заряд, который проходит через элемент dS замкнутой поверхности S наружу (рис. б). Пусть $\vec{l}_+$ и $\vec{l}_-$,- векторы, характеризующие смещения положительного и отрицательного связанных зарядов в результате поляризации. Тогда ясно, что через элемент поверхности dS наружу поверхности S выйдет положительный заряд $\rho'_+ l_+ dS\cos\alpha$, заключенный во «внутренней» части косого цилиндра (рис. б). Кроме того, через элемент dS войдет внутрь поверхности S отрицательный заряд $\rho'_- l_- dS\cos\alpha$, заключенный во «внешней» части косого цилиндра. Но мы знаем, что перенос отрицательного заряда в некотором направлении эквивалентен переносу положительного заряда в противоположном направлении. Учитывая это, можно записать суммарный связанный заряд, выходящий наружу поверхности S через элемент dS, как

$$dq' = \rho'_+ l_+ dS\cos\alpha + |\rho'_-| l_- dS\cos\alpha.$$

Поскольку $\rho'_+ = |\rho'_-|$,

$$dq' = \rho'_+ (l_+ + l_-) dS\cos\alpha = \rho'_+ l dS\cos\alpha.$$

где $l = l_+ + l_-$ - расстояние, на которое сместились относительно друг друга положительные и отрицательные связанные заряды диэлектрика при поляризации.

Далее, согласно определению вектора поляризации $\vec{P}$ $\rho'_+ l = P$ и $dq' = PdS\cos\alpha$, или

$$dq' = P_n\, dS = \vec{P}d\vec{S}$$

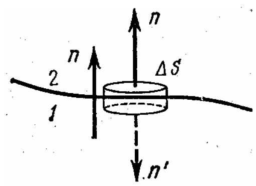
Проинтегрировав это выражение по всей замкнутой поверхности S, мы найдем весь заряд, который вышел при поляризации из объема, охватываемого поверхностью S, он равен $\oint \vec{P}d\vec{S}$. В результате внутри поверхности S останется некоторый избыточный связанный заряд q'. Ясно, что вышедший заряд должен быть равен с обратным знаком оставшемуся внутри поверхности S избыточному связанному заряду, и мы приходим к исходному утверждению.

<u>Дифференциальная форма теоремы Гаусса для</u> $\vec{P}$. В дифференциальной форме это уравнение имеет следующий вид:

$$\nabla\vec{P} = \mathrm{div}\vec{P} = -\rho',$$

т. е. дивергенция поля вектора P равна с обратным знаком объемной плотности избыточного связанного заряда в той же точке.

Граничные условия для вектора $\vec{P}$. Рассмотрим поведение вектора $\vec{P}$ на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков. Найдем связь между



поляризованностью P и поверхностной плотностью σ' связанных зарядов на границе раздела диэлектриков. Для этого воспользуемся теоремой Гаусса для вектора P. Возьмем в качестве замкнутой поверхности небольшой плоский цилиндр, торцы которого расположим по разные стороны границы раздела (рис.). Высоту цилиндра будем предполагать ничтожно малой, а площадь ΔS каждого торца настолько малой, что во всех точках каждого торца цилиндра вектор P был бы одинаков (это же касается и поверхностной плотности σ' связанного заряда). Пусть $\vec{n}$ - общая нормаль к границе раздела в данном месте. Условимся всегда проводить вектор $\vec{n}$ от диэлектрика 1 к диэлектрику 2.

Пренебрегая потоком вектора P сквозь боковую поверхность выбранного нами цилиндра, запишем согласно теореме Гаусса $P_{2n}\Delta S + P_{1n}\Delta S = -\sigma'\Delta S$,

где P_{2n} и P_{1n} - проекции вектора P в диэлектрике 2 на нормаль n и в диэлектрике 1 на нормаль n' (рис.). Учитывая, что проекция вектора P на нормаль n' равна с обратным знаком проекции этого вектора на противоположную (общую) нормаль $\vec{n}$, т. е. $P_{1n'} = -P_{1n}$ перепишем предыдущее уравнение после сокращения на ΔS в следующем виде:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'.$$

Это значит, что на границе раздела диэлектриков нормальная составляющая вектора P испытывает разрыв, величина которого зависит от σ'. В частности, если среда 2 вакуум, то $P_{2n} = 0$, и условие приобретает более простой вид: $\sigma' = P_n$.

3.13 Теорема Гаусса для диэлектриков. Вектор $\vec{D}$.

При выводе теоремы Гаусса для вектора $\vec{E}$ учитывались лишь свободные заряды. В случае, когда электрическое поле возбуждается в веществе, необходимо учитывать поляризацию среды и наличие электрического поля, создаваемого связанными зарядами. Поэтому ранее выведенную формулу в этом случае нужно дополнить:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q_{полн}}{\varepsilon_0} = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}.$$

Для расчетов эта формула неудобна, так как содержит два зависящих друг от друга неизвестных q' и $\vec{E}$. Поэтому ее надо переписать в более удобном виде. Для этого используем теорему Гаусса для вектора $\vec{P}$:

$$\oint \vec{P}d\vec{S} = -q'.$$

Тогда после несложных преобразований получим следующую формулу:

$$\oint \left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)d\vec{S} = q.$$

Величина, стоящая в скобках под интегралом, называется вектором электрической индукции

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

Теперь теорема Гаусса для диэлектриков принимает окончательный вид:

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = q.$$

Поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности.

Используя формулу, связывающую вектор поляризации и напряженность электрического поля, можно получить еще одну важную формулу:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = (1+\kappa)\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},$$

где ε - диэлектрическая проницаемость среды. Для всех веществ $\varepsilon > 1$, для вакуума $\varepsilon = 1$. В случае *однородного* диэлектрика можно доказать, что величина диэлектрической проницаемости среды ε характеризует во сколько раз поле в диэлектрике меньше, чем поле в вакууме (то есть в той же точке, но в отсутствии диэлектрика).

3.14 Теорема о циркуляции для вектора $\vec{E}$.

Электростатическое поле точечного заряда q – центральное и поэтому потенциальное. Это означает, что работа по переносу пробного заряда из одной точки в другую не зависит от формы пути. На пробный заряд в этом поле действует сила $\vec{F} = q_{пр}\vec{E}$, где $\vec{E}$ - напряженность поля точечного заряда. Работа этой силы по переносу пробного заряда по любой замкнутой траектории L равна, следовательно, нулю:

$$\oint_L q_{пр}\vec{E}d\vec{r} = 0 \text{ или } \oint_L \vec{E}d\vec{r} = 0.$$

Интеграл, стоящий в левой части последнего соотношения, называется **циркуляцией вектора $\vec{E}$ вдоль замкнутого контура L**. Таким образом, циркуляция вектора напряженности электрического поля точечного заряда вдоль произвольного замкнутого контура, проведенного в области электрического поля, равна нулю. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы поле напряженностью $\vec{E}$ было потенциальным.

Напряженность $\vec{E}$ электростатического поля произвольной системы точечных зарядов связана с напряженностью $\vec{E}_i$ отдельного заряда q_i принципом суперпозиции, поэтому

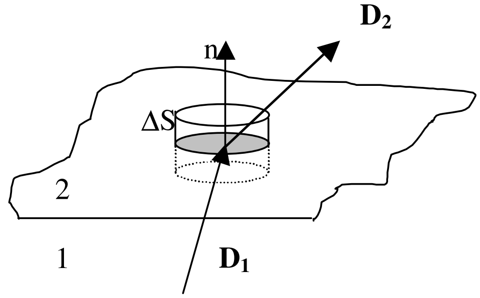
$$\oint_L \vec{E}d\vec{r} = \oint_L \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n}\oint_L \vec{E}_i d\vec{r} = 0$$

Теперь можно утверждать, что циркуляция вектора напряженности любого электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю. Тем самым доказано, что любое электростатическое поле потенциально.

3.15 Граничные условия для векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$.

Получим связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$ по обе стороны границы раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Это будет сделано с помощью теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.

Условие для вектора $\vec{D}$. Возьмем бесконечно малый цилиндр высоты h и площадью основания ΔS. Размеры его должны быть таковы, чтобы можно было считать поле на поверхности цилиндра однородным. Граница раздела делит цилиндр пополам так, как изображено на рисунке. В результате половина цилиндра находится в среде 1, а вторая половина – в среде 2. Обозначим индукцию электрического поля в среде 1 как $\vec{D}_1$, в среде 2 это поле будет $\vec{D}_2$. Вычислим поток вектора индукции электрического поля через поверхность цилиндра. В соответствии с теоремой Гаусса, этот поток должен быть равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся на границе раздела двух сред. Расчет дает следующий результат:



$$\oint \vec{D}d\vec{S} = \int\limits_{верх} \vec{D}d\vec{S} + \int\limits_{дно} \vec{D}d\vec{S} + \int\limits_{бок} \vec{D}d\vec{S} = \sigma\Delta S\ .$$

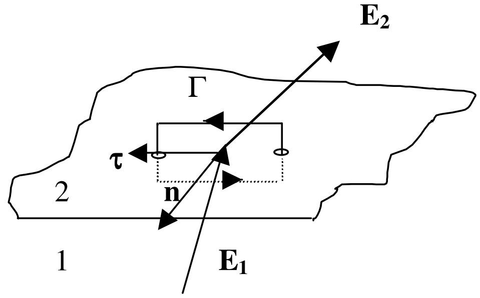
Так как поле в верхней части цилиндра однородно(как и в нижней), то

$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S + \int\limits_{бок} \vec{D}d\vec{S} = \sigma\Delta S\ .$$

Устремим и без того малое $h \to 0$. Тогда поток вектора индукции электрического поля через боковую поверхность будет равен нулю. Получаем граничное условие для нормальной к поверхности раздела компоненты вектора $\vec{D}$:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

<u>Условие для вектора</u> $\vec{E}$. Снова рассмотрим границу раздела тех же диэлектриков, вдоль которой вычислим циркуляцию вектора $\vec{E}$ по бесконечно малому прямоугольному контуру Г. Контур расположен перпендикулярно поверхности раздела диэлектриков так, что половина его находится в среде 1, а вторая половина его находится в среде 2. Высота контура h к тому же много меньше длины l. На рисунке показаны направления обхода контура и направление нормали к плоской поверхности, связанной с контуром. Циркуляция вектора $\vec{E}$ равна



$$\int\limits_{Г} \vec{E}d\vec{l} = \int\limits_{низ} \vec{E}d\vec{l} + \int\limits_{бок} \vec{E}d\vec{l} + \int\limits_{верх} \vec{E}d\vec{l} = 0\ .$$

Тогда, считая поле $\vec{E}$ в пределах контура однородным, получаем

$$E_{2\tau}l - E_{1\tau}l = 0.$$

В этой формуле вектор $\vec{\tau}$ направлен вдоль плоскости контура справа налево, кроме того, учтено, что высота контура очень мала. Граничное условие для тангенциальной компоненты вектора $\vec{E}$ приобрело окончательный вид

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}.$$

Можно оба граничных условия выразить через вектор $\vec{E}$, учитывая тот факт, что вектор электрической индукции – вектор вспомогательный:

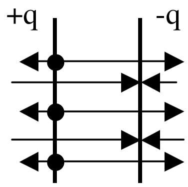
$$E_{2\tau} = E_{1\tau}$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ .$$

3.16 Электроемкость. Конденсаторы (плоский, цилиндрический, сферический).

Способность проводников накапливать электрический заряд называется электроемкостью. Если приложить разность потенциалов U к системе проводников, то на них появится заряд q. Опыт показывает, что эти величины связаны линейной зависимостью q ~ U. Коэффициент пропорциональности в этой зависимости называется <u>электроемкостью</u> C: q = CU.

Система из нескольких проводников (не менее двух) называется <u>конденсатором</u>. Чтобы определить электроемкость системы проводников необходимо поместить на них заряд q и вычислить разность потенциалов U, тогда электроемкость можно определить как C = q/U. Проделаем эти действия для нахождения емкости следующих систем:

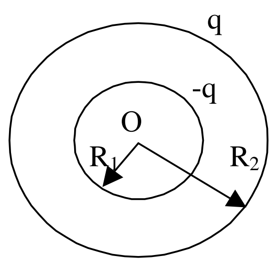


1) Плоский конденсатор (заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε). На рисунке изображены силовые линии поля каждой пластины. Вне области между плоскостями поля вычитаются, а внутри электрические поля складываются, тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}; E_{внутр} = E_q - E_{-q} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Зная, что $\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$, получаем $U = qd/(\varepsilon\varepsilon_0 S)$. Тогда $C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$. В этой формуле S – площадь пластин, d – расстояние между ними.

2) Сферический конденсатор (радиусы обкладок R_1 и R_2, между ними – диэлектрик с



диэлектрической проницаемостью ε). Поместим на внутреннюю обкладку заряд q, а на внешнюю заряд –q. Найдем по теореме Гаусса поле во всем пространстве. Поле в области пространства $r < R_1$ равно нулю, так как сферическая поверхность с центром в точке O такого радиуса никаких зарядов не охватывает, и, следовательно, $\oint \vec{E}d\vec{S} = 0$. Аналогичная ситуация и в области пространства $r > R_2$. Только в этом случае полный охватываемый заряд равен нулю. Таким образом, поле есть только в пространстве между обкладками, и его найдем по теореме Гаусса (считая, что диэлектрика нет), выбрав для интегрирования сферу радиусом $R_1 < r < R_2$:

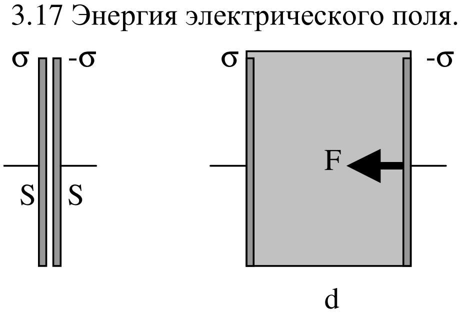
$\oint \vec{E}d\vec{S} = \oint EdS = E\oint dS = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Тогда с учетом диэлектрика $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$. Разность потенциалов найдем интегрированием $U = \int_{R_1}^{R_2} Edr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Для электроемкости C = q/U

$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$. Если внешняя сфера имеет бесконечный радиус, то получается конденсатор в виде шара в диэлектрике. Емкость такого шара равна $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$.

3) Цилиндрический конденсатор (высота H, радиусы обкладок R_1,R_2, внутри диэлектрик ε). Чтобы формулы были простыми, необходимо предположить, что $H >> R_1,R_2$ и $R_1,R_2 >> R_2 - R_1$. Снова заряжаем конденсатор: внутреннюю обкладку зарядом q, а внешнюю – зарядом –q. Далее в качестве поверхности для интегрирования выбираем замкнутый цилиндр радиусом $R_1 < r < R_2$, охватывающий всю внутреннюю обкладку. Силовые линии электрического поля будут пересекать лишь боковую поверхность этого цилиндра и поток вектора $\vec{D}$ будет равен $\oint \vec{D}d\vec{S} = DS = D2\pi rH = q$. Тогда $E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 rH}$. Теперь определим разность потенциалов

$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 H}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 H}\ln\frac{R_2}{R_1}$. Электроемкость $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}$.

3.17 Энергия электрического поля.



Получим формулу для энергии электрического поля на примере поля, создаваемого плоским заряженным конденсатором. Создадим этот конденсатор следующим образом. Разделим тонкую металлическую незаряженную пластину площадью S на две, каждая с плотностью заряда σ и -σ, и разведем их на расстояние d. В процессе раздвижки на каждую пластину действует сила со стороны другой пластины $\vec{F} = q\vec{E}_\sigma = -\vec{E}_\sigma \sigma S$. Это сила притяжения, и против этой силы надо совершить работу по созданию конденсатора, величина которой равна $A = \int_0^d \vec{F} d\vec{l} = E_\sigma \sigma S d = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} S d$

При получении этой формулы была использована формула для электрического поля заряженной плоскости, которую можно получить с помощью теоремы Гаусса: $E_\sigma = \sigma/(2\varepsilon\varepsilon_0)$. Выразим поверхностную плотность заряда через полный заряд конденсатора и учтем, что работа нашей внешней силы пошла на создание энергии конденсатора W. Тогда получаем

$$A = W = \frac{q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{2C}$$

Энергию заряженного конденсатора (причем любого) можно теперь записать так:

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

Это полная энергия, запасенная в конденсаторе. Но это ведь энергия электрического поля, которое сосредоточено в области пространства, ограниченного пластинами конденсатора. В идеальном случае поля вне пластин нет. Поэтому можно говорить о плотности энергии электрического поля, не задумываясь о том, каким образом это поле создано. В данном случае электрическое поле однородно и можно получить следующее соотношение (E - полное электрическое поле внутри конденсатора)

$$W_c = \frac{1}{2} E\sigma S d = \frac{E\sigma}{2} V = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V .$$

Ясно, что V – объем конденсатора, а ε - диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами. Мы получили формулу для плотности энергии однородного электрического поля, но эта формула носит общий характер и справедлива для любого поля:

$$\omega_c = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

В случае неоднородного электрического поля полную энергию этого поля можно получить по формуле

$$W_c = \int_V \omega_c dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV$$

В заключение отметим, что эти формулы справедливы в случае однородного диэлектрика.

3.18 Плотность тока. Уравнение непрерывности.

В этом разделе будем изучать свойства постоянного тока. Электрическим током называется направленное движение зарядов. В металлах носителями тока являются электроны, в электролитах – электроны и ионы, в полупроводниках – электроны и так называемые «дырки». При отсутствии внешнего поля носители тока совершают хаотические перемещения так, что направленного движения нет. При включении электрического поля появляется направленное движение зарядов, то есть упорядоченное их перемещение. Тогда электрический ток можно определить как

$$I = \frac{dq}{dt} ,$$

то есть заряд перешедший через рассматриваемую поверхность S за время dt. Ток – скалярная величина, а вот *плотность тока* $\vec{j}$ - векторная величина. Ее модуль определяется как отношение тока, протекающего через бесконечно малую перпендикулярную к току поверхность, к величине этой поверхности:

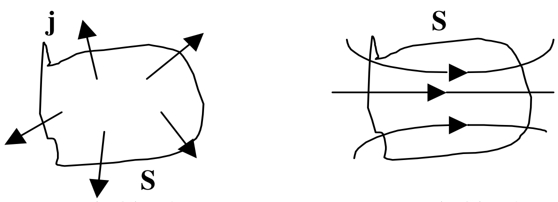
$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

За положительное направление тока принимают направление движения положительных зарядов.

Обозначим буквой ρ объемную плотность свободных зарядов в веществе (не путать с плотностью вещества!), тогда для вектора плотности тока получаем $\vec{j} = \rho \cdot \vec{U}$, где $\vec{U}$ - скорость «дрейфового» (то есть направленного вдоль электрического поля) упорядоченного движения зарядов. Связь между величиной тока и плотностью его определяется соотношением

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Теперь получим соотношение, которое носит название <u>уравнения непрерывности</u>. Для этого в среде, где протекает электрический ток плотностью $\vec{j}$, выберем некую замкнутую поверхность S как показано на рисунке. Ток через эту поверхность будет определяться, с одной стороны, предыдущим соотношением, а с другой стороны, убылью зарядов в объеме, ограниченном выбранной поверхностью:



dq/dt<0 dq/dt=0

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}; \oint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{dq}{dt} = 0.$$

Последнее соотношение и носит название уравнения непрерывности, записанного в интегральном виде. Ему можно придать дифференциальный вид. Для этого используем следующие формулы

$$q = \int \rho dV; \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho dV = \int \frac{d\rho}{dt} dV,$$

а также определение дивергенции вектора $\vec{j}$: $\vec{j} d\vec{S} = div\vec{j} dV$. В результате получаем

$$\nabla\vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

3.19 Обобщенный закон Ома.

Закон Ома для однородного участка электрической цепи, открытый экспериментально, гласит: *сила тока, протекающего по однородному проводнику, прямо пропорциональна разности потенциалов на его концах*. Коэффициент пропорциональности в этой формуле называется электрическим сопротивлением проводника:

$$I = \frac{U}{R}$$

Экспериментально установлено, что для однородного цилиндрического проводника длиной l и площадью поперечного сечения S сопротивление можно определить по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

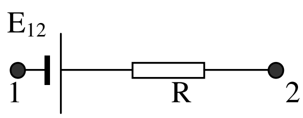
где ρ - удельное (то есть единицы длины) сопротивление проводника (не путать с плотностью вещества или зарядов!). Из этих соотношений можно получить закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E}.$$

В этой формуле величина σ называется удельной проводимостью среды.
Одними только электрическими силами поддерживать постоянный ток невозможно. Под действием только электрических сил все свободные заряды распределились бы так, что потенциал в цепи был бы везде одинаков. В результате ток бы прекратился. Для поддержания постоянного тока необходимы сторонние силы. Для их количественного описания используется вектор $\vec{E}^*$, который называется напряженностью поля сторонних сил. Тогда формула для плотности тока будет иметь вид

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Это и есть обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.



Теперь получим закон Ома для неоднородного участка цепи, или закон Ома в интегральной форме. Для этого используем закон Ома в дифференциальной форме, умножив его на $d\vec{l}$, а затем проинтегрировав это уравнение, считая, что мы перемещаем единичный заряд по схеме, изображенной на рисунке, из точки 1 в точку 2. Тогда получится следующая цепочка формул:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\,d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^*\,d\vec{l}\ ; \qquad I\int_1^2 \frac{\rho\,dl}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \int_1^2 \vec{E}^*\,d\vec{l}\ .$$

Первый интеграл дает нам сопротивление этого участка цепи R, а интеграл $\int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} = \mathcal{E}_{12}$ называется электродвижущей силой. Таким образом,

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

3.20 Закон Джоуля – Ленца.

Рассмотрим произвольный участок электрической цепи, по которой течет ток. За время dt через какое - либо сечение проводника будет перенесен заряд dq = Idt, тогда работа по его переносу равна

$$dA = dqU = IUdt,$$

где U – разность потенциалов, и, следовательно, мощность, которую развивают силы источника

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = (\varphi_1 - \varphi_2)I + E_{12}I.$$

Эта мощность, развиваемая током на участке цепи, может использоваться (расходоваться) на перемещение участка цепи или на протекание в нем химических реакций, или может превратиться в тепло. В случае, когда проводник неподвижен и химических реакций в нем не происходит, работа тока затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего проводник нагревается. Принято говорить, что в проводнике выделяется тепло

$dQ = UIdt$ или $Q = \int_0^t UIdt' = \int_0^t I^2 Rdt' = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt'$. Этот закон был установлен экспериментально и назван законом Джоуля – Ленца. Если в цепи течет постоянный ток, то закон можно записать в простом виде:

$$Q = I^2 Rt.$$

С помощью несложных вычислений можно получить дифференциальный вид закона. Тепло, выделяющееся в единице объема за единицу времени при протекании тока, равно

$$Q_{уд} = \frac{dQ}{dV} = \rho j^2 .$$