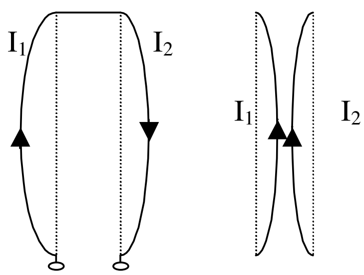
3.21 Взаимодействие токов. Магнитное поле.

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой. Например, два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут токи, притягивают друг друга, если токи имеют одинаковое направление и отталкивают друг друга, если токи противоположны по направлению. Величина силы взаимодействия двух токов на единицу их длины пропорциональна величинам токов I_1 и I_2 и обратно пропорциональна расстоянию между ними b: $F_{ед} = k_1 \frac{2I_1I_2}{b}$.



Этот закон был установлен Ампером в 1820 году. В дальнейшем с помощью этой формулы удалось определить единицу измерения тока в системе СИ – 1 Ампер. 1 Ампер - это такой ток, при котором параллельные проводники с током на расстоянии 1 м взаимодействуют с силой $2\cdot10^{-7}$ Н на каждую единицу их длины. В той системе единиц, в которой работал Ампер, коэффициент k_1 был равен единице. В системе СИ этот коэффициент равен $k_1 = \mu_0/(4\pi)$. Тогда в системе СИ эта формула приобретает вид:

$$F_{ед} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}.$$

Ясно, что природа этой силы не электростатическая, так как при выключении тока взаимодействие исчезало. Поэтому это новое поле назвали <u>магнитным.</u> Такое название связано с тем, что Эрстед в 1820 году обнаружил влияние тока на магнитную стрелку. В опыте Эрстеда при включении тока стрелка, находящаяся под прямым бесконечным током, располагалась перпендикулярно току. Если изменить направление тока в проводе, то стрелка повернется на 180^0. Из этого следовало, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Эту векторную величину обозначают как $\vec{B}$ и называют <u>магнитной индукцией</u>.

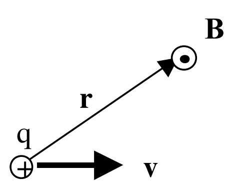
Итак, движущиеся заряды создают вокруг себя магнитное поле, которое проявляется в действии силы на попадающие в это поле движущиеся заряды.

Кроме того, опыт дает, что для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции: поле $\vec{B}$, порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей $\vec{B}_i$, порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i .$$

3.22 Поле движущегося заряда.

Окружающее нас пространство изотропное, поэтому поле неподвижного заряда сферически симметрично. Если же заряд движется, то появляется выделенное направление – направление его движения. Подчеркнем, что в этом разделе будет изучаться только движение зарядов с постоянным вектором скорости, малым по сравнению со скоростью света – v << c. Рассмотрим, от чего зависят свойства создаваемого движущимся зарядом магнитного поля. Ясно, что это поле должно иметь осевую симметрию. То есть магнитное поле в точках на окружности радиуса r должно быть одинаково. Кроме того, оно должно зависеть от величины заряда q, расстояния $\vec{r}$ и скорости его движения $\vec{v}$:



$$\vec{B} = f(q, \vec{v}, \vec{r}(t)) .$$

Вид этой функции может быть установлен только экспериментально. Когда были проведены необходимые эксперименты, то оказалось, что зависимость имеет следующий вид:

$$\vec{B} = k_1 \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

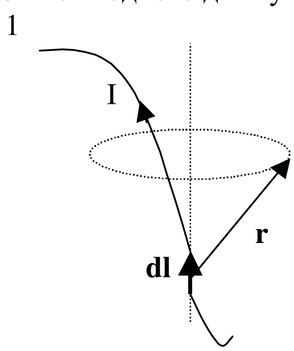
Таким образом, вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ перпендикулярен как радиус вектору, соединяющему движущийся заряд с точкой наблюдения, так и вектору скорости заряда. Модуль магнитной индукции равен $B = k_1 q \frac{v}{r^2} \mathrm{Sin}(\vec{v}, \vec{r})$. Направление вектора $\vec{B}$ для случая, изображенного на рисунке, показано точкой в кружочке – вектор направлен на нас перпендикулярно плоскости рисунка. Для системы СИ, которой обычно пользуются при расчетах, формула для вектора $\vec{B}$ приобретает следующий вид:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Приведем здесь значение константы $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Единицей измерения магнитной индукции в системе СИ является тесла (Тл).

3.23 Закон Био - Савара - Лапласа. Поле прямого тока.

От поля одного движущегося заряда перейдем к полю тока. Пусть в пространстве есть некий



проводник с током I. Выделим на этом проводнике участок $d\vec{l}$, на котором будут двигаться сразу dq = enSdl носителей заряда. В этой формуле n – концентрация электронов в проводнике, а S – площадь поперечного сечения проводника. Тогда индукция магнитного поля, создаваемая этим участком проводника с током в точке А, будет определяться по формуле:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi} \frac{[\vec{v} + \vec{u}, \vec{r}]}{r^3},$$

где $\vec{v}$ - скорость хаотического теплового движения электронов, а $\vec{u}$ - скорость упорядоченного их движения, создающая ток I. Усредним магнитную индукцию по всем носителям тока, находящимся в элементе объема Sdl

$$< d\vec{B} >= \frac{\mu_0 dq}{4\pi} \frac{[< \vec{v} > + < \vec{u} >, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi} \frac{[< \vec{u} >, \vec{r}]}{r^3}.$$

Тогда

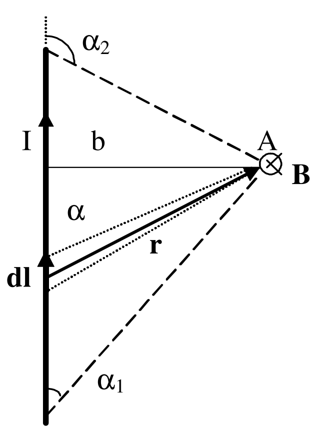
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 S}{4\pi} \frac{[ne < \vec{u} >, \vec{r}]dl}{r^3} = \frac{\mu_0 S}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]dl}{r^3}.$$

Но $\vec{j}dl = jd\vec{l}$ и jS = I, тогда получаем окончательную формулу для закона Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Мы получили формулу для магнитного поля, создаваемого участком проводника с током. Био и Савар провели эксперименты, а Лаплас их проанализировал и дополнил принципом суперпозиции. Модуль вектора магнитной индукции в этом случае будет равен

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \mathrm{Sin}(d\vec{l}, \vec{r}).$$



Отметим, что $\vec{r}$ - вектор, соединяющий элемент тока с точкой наблюдения А.

Используем полученный результат для расчета поля прямого тока конечной длины, как изображено на рисунке. Выберем на этом токе произвольный малый участок и найдем магнитное поле в точке А. Ясно, что вектор магнитной индукции от этого участка будет перпендикулярен как вектору $d\vec{l}$, так и вектору $\vec{r}$ и направлен перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Кроме того, ясно, что так же направлен вектор $d\vec{B}$ и от любого другого участка проводника с током. Следовательно,

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \mathrm{Sin}\alpha .$$

Теперь необходимо все переменные (а их три – r, dl и α) выразить через одну и провести интегрирование. Проделаем это: $r = b/\mathrm{Sin}\alpha$; $dl = rd\alpha/\mathrm{Sin}\alpha$. Теперь можно все подставить в формулу для dB:

$$dB = \frac{\mu_0 I r d\alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I d\alpha}{4\pi b} \mathrm{Sin}\alpha .$$

Проинтегрируем

$$B = \int_I dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathrm{Sin}\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\mathrm{Cos}\alpha_1 - \mathrm{Cos}\alpha_2) .$$

Это ответ для тока конечной длины. Для бесконечного тока угол $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$, тогда

$$B_{\updownarrow} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} .$$

3.24 Сила Лоренца.

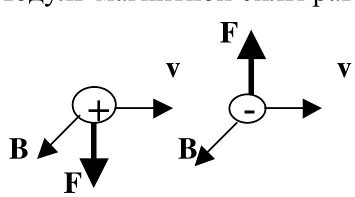
На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила, которую можно назвать магнитной. Эта сила должна зависеть от величины заряда q, его скорости $\vec{v}$ и величины магнитного поля $\vec{B}$. Эксперимент показал, что сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, равна

$$\vec{F} = k_2 q[\vec{v}, \vec{B}] .$$

Эту формулу можно считать определением магнитной индукции $\vec{B}$. Одна Тесла определяется так, чтобы коэффициент k_2 в формуле был равен единице в системе СИ. Тогда

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}] .$$

Модуль магнитной силы равен $F = q \cdot v \cdot B \cdot \mathrm{Sin}\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Направлена эта сила перпендикулярно как скорости частицы, так и направлению магнитного поля. Для положительного и отрицательного зарядов направление магнитной силы противоположно. Наиболее важным в этом случае является то, что в силу перпендикулярности магнитной силы направлению скорости ($\vec{F} \perp \vec{v}$), работы эта сила совершать не может, а следовательно, не может изменить модуль скорости заряда.



Если в пространстве существуют одновременно и магнитное, и электрическое поля, то сила, действующая на заряд, равна

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Это выражение было получено Лоренцом и носит название <u>силы Лоренца.</u>

3.25 Закон Ампера.

Теперь получим силу, действующую на проводник с током в магнитном поле. На каждый из носителей тока в проводнике действует магнитная часть силы Лоренца (носители участвуют в тепловом и направленном движении).

$$\vec{F} = q[\vec{v} + \vec{u}, \vec{B}] .$$

Эта сила за счет столкновений передается в конечном счете всему проводнику в целом. Найдем величину силы $d\vec{F}$, действующей на элемент проводника длины dl. Ясно, что надо усреднить силу по всем носителям тока в этом участке проводника, тогда

$$<\vec F> = q[<\vec v> + <\vec u>, \vec B] = q[<\vec u>, \vec B]$$

Теперь можно найти силу $d\vec F$. Для этого найдем заряд, который находится в этом участке проводника $dq = q \cdot n \cdot S \cdot dl$. Окончательно получаем:

$$d\vec F = <\vec F> nSdl = [nq <\vec u>, \vec B]Sdl = [\vec j, \vec B]dV .$$

Для силы Ампера получаем

$$d\vec F = I[d\vec l, \vec B]$$

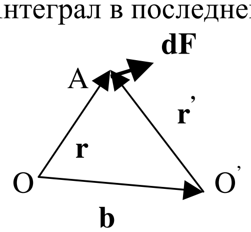
Это сила, действующая на участок проводника с током $d\vec l$, находящегося в магнитном поле. Эта формула была получена экспериментально и названа силой Ампера или законом Ампера. Модуль этой силы равен $dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \mathrm{Sin}(d\vec l, \vec B)$.

3.26 Контур с током в магнитном поле.

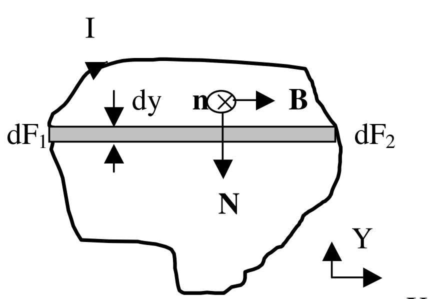
Поместим контур с током I в магнитное поле. На каждый участок контура будет действовать сила Ампера. В результате контур может совершать ускоренное поступательное движение и вращаться. Получим формулы, по которым можно рассчитать это движение.
Сначала рассмотрим однородное магнитное поле $\vec B = \overrightarrow{\overline{const}}$. В таком поле на участок проводника с током будет действовать сила $d\vec F = I[d\vec l, \vec B]$. Сумма всех этих сил будет равна

$$\vec F = \oint I\left[d\vec l, \vec B\right] = I\left[\oint d\vec l, \vec B\right] = 0 .$$

Интеграл в последней формуле равен нулю, так как сумма векторов малых участков, составляющих замкнутый контур, равна нулю. Следовательно, в однородном магнитном поле сила на контур с током не действует и поступательного движения контур не совершает. Зато возможно вращательное движение под действием момента сил Ампера.



В дальнейшем будем рассматривать только плоские контуры для упрощения понимания. Получим формулу, которая упростит дальнейшее рассмотрение. Покажем, что в случае однородного магнитного поля точка, относительно которой будет определяться момент сил, может быть выбрана произвольно. Рассмотрим некоторую точку контура с током A, в которой на этот участок контура действует сила $d\vec F$. На рисунке показаны две системы координат с началом в точках O и O'. Из рисунка ясно, что $\vec r' = \vec r - \vec b$. Момент этой силы, определенный в нештрихованной системе равен $\vec N = \int\left[\vec r, d\vec F\right]$, а в штрихованной - $\vec N' = \int\left[\vec r', d\vec F\right] = \int\left[\vec r - \vec b, d\vec F\right] = \int\left[\vec r, d\vec F\right] - \left[\vec b, \int d\vec F\right] = \vec N$.



Таким образом, если поле однородное, то начало отсчета может располагаться произвольно. Теперь можно вычислить момент сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле. Контур ориентирован так, как показано на рисунке. Вектор индукции магнитного поля ориентирован в плоскости рисунка слева направо. Ток в контуре течет по часовой стрелке, поэтому нормаль к контуру направим перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Разобьем весь контур на полоски толщиной dy и длиной x. На токи, текущие в пределах этого участка, действуют две силы, модули которых равны $dF_1 = IBdl_1\mathrm{Sin}\alpha_1 = IBdy$ и $dF_2 = IBdl_2\mathrm{Sin}\alpha_2 = IBdy$. Эти две силы равны по величине, направлены в противоположные стороны и образуют пару сил с моментом

$$dN = IBxdy = IbdS \; ; \; d\vec N = I\left[\vec n, \vec B\right]dS .$$

Полный момент сил, действующий на весь контур, можно получить интегрированием:

$$\vec N = \int I\left[\vec n, \vec B\right]dS = I[\vec n, \vec B]\int dS = I[\vec n, \vec B]S = [(IS\vec n), \vec B] = [\vec p_m, \vec B] .$$

Величина $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ называется дипольным магнитным моментом контура с током. Модуль момента сил можно определить по формуле $N = p_m B Sin(\vec{p}_m, \vec{B}) = p_m B Sin\alpha$.
Найдем работу, которая совершается при повороте контура. Чтобы увеличить угол α на $d\alpha$, необходима работа $dA = N\, d\alpha = p_m B Sin\alpha d\alpha$. Тогда потенциальная энергия контура с током в магнитном поле будет вычисляться так: $dW_{рмех} = p_m B Sin\alpha d\alpha$ и

$$W_{рмех} = - p_m B Cos\alpha = -\vec{p}_m \vec{B}.$$

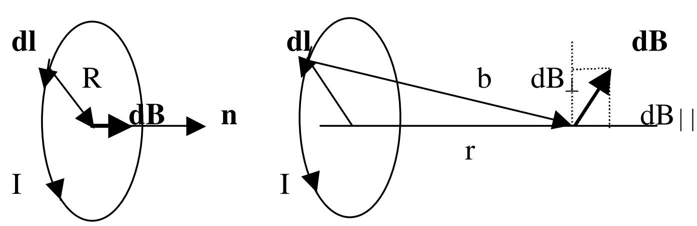
Параллельная ориентация векторов $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ отвечает минимуму энергии и, следовательно, устойчивому положению равновесия.
Коротко о неоднородном поле. Кроме момента сил, который может быть определен по той же формуле, что и в однородном поле, на контур будет действовать сила

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n},$$

где p_m – магнитный момент контура, а $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$ - производная вектора индукции магнитного поля по направлению нормали к контуру (или по направлению магнитного момента).

3.27. Поле кругового тока. Магнитный момент.

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущем по проводнику, имеющему форму окружности радиуса R. Сначала получим величину магнитного поля в центре кольца. Для этого используем закон Био – Савара. Мысленно разделим кольцо на участки тока длиной dl. Затем определим величину и направление магнитных полей от этих участков. После этого по принципу суперпозиции сложим все магнитные поля по правилу сложения векторов. В центре кольца направления всех магнитных полей от участков dl будут одинаковы (на рисунке), а величина будет определяться формулой



$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}.$$

Тогда, выполняя все перечисленные операции, получаем:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{(I\pi R^2)}{R^3}.$$

Для любого контура с током вводят понятие <u>магнитного момента.</u> Магнитный момент плоского контура с током определяется так: $\vec{p}_m = IS\vec{n}$. Магнитное поле в центре кольца

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{R^3}.$$

Теперь найдем поле на оси кольца. Все векторы $d\vec{B}$ от участков dl покрывают поверхность конуса, образующие которой перпендикулярны вектору $\vec{B}$. В силу осевой симметрии все вектора $d\vec{B}_\perp$ компенсируют друг друга и остается только составляющая $d\vec{B}_{II}$. Тогда

$$dB_{II} = dB \frac{R}{b} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi b^2} \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRdl}{b^3}.$$

Проинтегрировав по кольцу и учтя, что $b = \sqrt{r^2 + R^2}$, получаем

$$B = \int dB_{II} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi b^3}\oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2(I\pi R^2)}{(R^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$$

Итак, магнитное поле , создаваемое на оси кольца, кольцом с током I, определяется по формуле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Из формулы следует, что магнитное поле на оси зависит только от модуля r, поэтому поле слева и справа на оси симметрично. На больших расстояниях, когда r >> R, получаем следующую формулу

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{p}_m}{r^3}.$$

3.28. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$. Теорема о циркуляции для вектора $\vec{B}$.

По определению величина $\oint \vec{B}d\vec{S}$ - называется потоком вектора $\vec{B}$ через некоторую замкнутую поверхность. Найдем поток вектора магнитной индукции. В силу того, что магнитных зарядов не существует, линии вектора магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца, т.е. замкнуты. Поэтому поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$$

<u>Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$:</u> поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

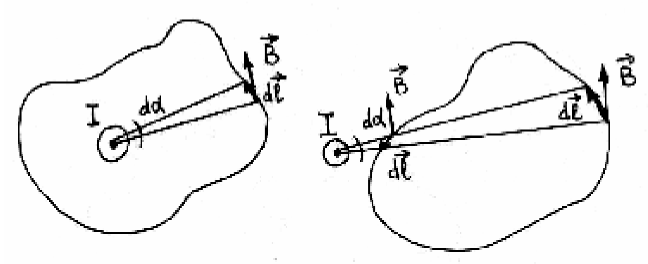
Получим дифференциальную форму теоремы Гаусса. По определению дивергенции

$$\frac{\vec{B}d\vec{S}}{dV} = \mathrm{div}\vec{B}$$

Тогда $\int_V \mathrm{div}\vec{B}dV = 0$. Это может выполняться для любого объема V, только если

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0\ (\nabla\vec{B} = 0).$$

Теперь докажем теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$. Пусть в некотором объеме пространства течет по проводу сечения S ток I. Необходимо вычислить интеграл $\oint_L \vec{B}d\vec{l}$ по некоторому замкнутому контуру L. Проще всего вычислить этот интеграл в случае прямого тока. Пусть замкнутый контур лежит в плоскости перпендикулярной к току (см. на рисунке). В каждой точке контура вектор $\vec{B}$ направлен по касательной к окружности проведенной через эту точку. Поэтому



$\vec{B}d\vec{l} = BdlCos(\vec{B}, d\vec{l}) = Bdl_{\perp}$, далее, зная, что $dl_{\perp} = rd\alpha$, получаем

$$\vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}dl_{\perp} = \frac{\mu_0}{2\pi}Id\alpha.$$

Окончательно получаем $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L d\alpha = \mu_0 I$.

Если замкнутый контур не охватывает тока, то $\oint_L d\alpha = 0$ и $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 0$.

Важно, чтобы ток и направление обхода были связаны правилом правого винта. Все выводы сохраняются для неплоского контура. Если же в пространстве есть несколько токов I_i, тогда по принципу суперпозиции $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i$ и

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i d\vec{l} = \sum \oint_L \vec{B}_i d\vec{l} = \sum \mu_0 I_k = \mu_0 I.$$

Таким образом,

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I,$$

где I – полный ток, охватываемый контуром L. Это и есть теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$, или закон полного тока.

3.29. Намагничение вещества. Вектор $\vec{J}$.

Если в магнитное поле, образованное токами в проводах, ввести то или иное вещество, поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является м а г н е т и к о м, т.е. способно под действием магнитного поля намагничиваться – приобретать магнитный момент.

Намагниченное вещество создает свое магнитное поле $\vec{B}'$, которое вместе с первичным полем $\vec{B}_0$, обусловленным токами проводимости, образует результирующее поле

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

Здесь под B и B' имеются в виду поля, усредненные по физически бесконечно малому объему. Поле B', как и поле B_0 токов проводимости, не имеет источников (магнитных зарядов), поэтому для результирующего поля B при наличии магнетика справедлива теорема Гаусса:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Это означает, что линии вектора B и при наличии вещества остаются всюду непрерывными.

В настоящее время установлено, что молекулы многих веществ обладают собственным магнитным моментом, обусловленным внутренним движением зарядов. Каждому магнитному моменту соответствует элементарный круговой ток, создающий в окружающем пространстве магнитное поле. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно, поэтому обусловленное ими результирующее магнитное поле равно нулю. Равен нулю и суммарный магнитный момент вещества. Последнее относится и к тем веществам, молекулы которых при отсутствии внешнего поля не имеют магнитных моментов. Если же вещество поместить во внешнее магнитное поле, то под действием этого поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, и вещество намагничивается – его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. При этом магнитные поля отдельных молекул уже не компенсируют друг друга, в результате возникает поле B'.

Иначе происходит намагничивание веществ, молекулы которых при отсутствии внешнего поля не имеют магнитного момента. Внесение таких веществ во внешнее поле индуцирует элементарные круговые токи в молекулах, и молекулы, а вместе с ними и все вещество приобретают магнитный момент, что также приводит к возникновению поля B'.

Большинство веществ при внесении в магнитное поле намагничиваются слабо. Сильными магнитными свойствами обладают только ферромагнитные вещества: железо, никель, кобальт, многие их сплавы и др.

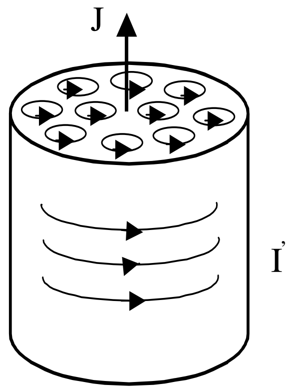
Степень намагничения магнетика характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют *намагниченностью* и обозначают $\vec{J}$. По определению

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m,$$

где ΔV - физически бесконечно малый объем в окрестности данной точки, $\vec{p}_m$ - магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование проводится по всем молекулам в объеме ΔV . Аналогично тому, как это было сделано для поляризованности $\vec{P}$, намагниченность можно представить как

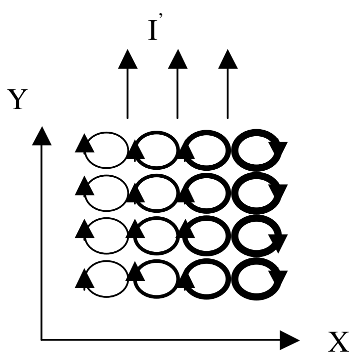
$$\vec{J} = n < \vec{p}_m >,$$

где n – концентрация молекул; $< \vec{p}_m >$ - средний магнитный момент одной молекулы. Из последней формулы видно, что вектор $\vec{J}$ сонаправлен со средним вектором $< \vec{p}_m >$, поэтому в дальнейшем достаточно знать поведение вектора $< \vec{p}_m >$ и представлять себе все молекулы в пределах объема ΔV имеющими одинаковый магнитный момент $< \vec{p}_m >$. Это будет значительно облегчать понимание вопросов, связанных с явлением намагничивания. Например, увеличение намагниченности $\vec{J}$ вещества означает соответствующее увеличение вектора $< \vec{p}_m >$: если $\vec{J} = 0$, то и $< \vec{p}_m > = 0$.



Если во всех точках вещества вектор $\vec{J}$ одинаков, говорят, что вещество намагничено одинаково.

Токи намагничивания I. Намагничивание вещества, как это уже было сказано, обусловлено преимущественной ориентацией или индуцированием магнитных моментов отдельных молекул в одном направлении. Это же можно сказать и об элементарных круговых токах, связанных с каждой молекулой, их называют м о л е к у л я р н ы м и т о к а м и. Такое поведение молекулярных токов приводит, как мы сейчас увидим, к появлению макроскопических токов **I'**, называемых токами намагничивания. Обычные токи, текущие по проводникам, связаны с перемещением в веществе носителей тока, их называют т о к а м и п р о в о д и м о с т и **I**.



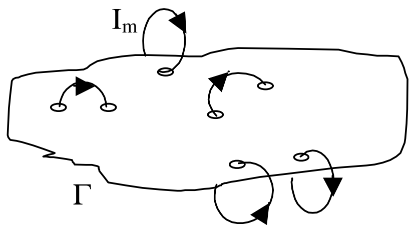
Чтобы понять, как возникают токи намагничивания, представим себе сначала цилиндр из однородного магнетика, намагниченность $\vec{J}$ которого однородна и направлена вдоль оси. Молекулярные токи в намагниченном магнетике ориентированы, как показано на рисунке. У соседних молекул элементарные токи в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и макроскопически взаимно компенсируют друг друга. Нескомпенсированными остаются только те молекулярные токи, которые выходят на боковую поверхность цилиндра. Эти токи и образуют макроскопический поверхностный ток намагничивания **I'**, циркулирующий по боковой поверхности цилиндра. Ток **I'** возбуждает такое же макроскопическое магнитное поле, что и молекулярные токи вместе взятые.

Теперь представим себе другой случай: намагниченный магнетик является неоднородным. Пусть, например, молекулярные токи расположены так, как на рисунке, где толщина линий соответствует силе молекулярных токов. Эта картина означает, что вектор $\vec{J}$ направлен за плоскость рисунка и растет по модулю при увеличении координаты X. Здесь видно, компенсации молекулярных токов внутри неоднородного магнетика уже нет, и в результате возникает объемный макроскопический ток намагничивания **I'**, текущий в положительном направлении оси У. Соответственно говорят о линейной **i'(А/м)** и поверхностной **j'(А/м^2)** плотностях тока.

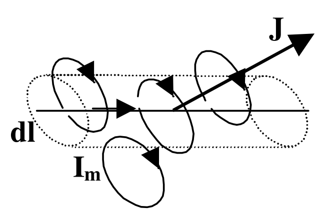
3.30. Свойства вектора $\vec{J}$.

Оказывается – в этом мы сейчас убедимся, - для стационарного случая циркуляция намагниченности $\vec{J}$ по произвольному контуру **Г** равна алгебраической сумме токов намагничивания **I'**, охватываемых контуром **Г**:

$$\oint \vec{J} dl = I',$$



где $I' = \int \vec{j}' d\vec{S}$, причем интегрирование проводится по произвольной поверхности, натянутой на контур **Г**.
Для доказательства этой теоремы вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, охватываемых контуром **Г**. Натянем на контур **Г** произвольную поверхность **S,** как изображено на рисунке. Из этого рисунка видно, что одни молекулярные токи пересекают поверхность **S** дважды – раз в одном направлении, второй раз в другом. Поэтому такие токи не вносят никакого вклада в результирующий ток намагничивания через поверхность **S**.
Но те молекулярные токи, которые обвиваются вокруг контура **Г**, пересекают поверхность S только один раз. Такие молекулярные токи и создают макроскопический ток намагничивания **I'**, пронизывающий поверхность **S**.
Пусть каждый молекулярный ток равен I_m и площадь, охватываемая им, S_m. Тогда, как видно из рисунка, элемент dl контура **Г** обвивают те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь



косого цилиндрика с объемом $dV = S_m \text{Cos}\alpha dl$, где α - угол между элементом контура и направлением вектора $\vec{J}$ в данном месте. Все эти молекулярные токи пересекают поверхность S один раз, и их вклад в ток намагничивания $dI' = I_m n dV$, где n – концентрация молекул. Подставив сюда выражение для dV, получим

$$dI' = I_m S_m n \text{Cos}\alpha dl = J \text{Cos}\alpha dl = \vec{J}\, d\vec{l};$$

здесь учтено, что $I_m S_m = p_m$ - магнитный момент отдельного молекулярного тока, а $I_m S_m n$ - магнитный момент единицы объема вещества. Проинтегрировав полученное выражение по всему контуру **Г**, получим исходное утверждение. Теорема доказана.
Остается заметить, что если магнетик неоднородный, то ток намагничивания **I'**, вообще говоря, пронизывает всю поверхность, а не только у ее границы, прилегающей к контуру **Г**. Именно поэтому его и можно представить как $I' = \int \vec{j}' d\vec{S}$, где интегрирование распространяется по всей поверхности S, ограниченной контуром **Г**. В приведенном же доказательстве нам удалось весь ток **I'** как бы «согнать» к границе поверхности S – прием, единственной целью которого является упростить вычисление этого тока.

3.31. Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$.

<u>Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$</u> (для магнитного поля *постоянных* токов). В магнетиках, помещенных во внешнее магнитное поле, возникают токи намагничивания, поэтому циркуляция вектора $\vec{B}$ теперь будет определяться не только токами проводимости, но и токами намагничивания, а именно:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I'),$$

где I и I' - токи проводимости и намагничивания, охватываемые заданным контуром **Г**.
Ввиду того что определение токов **I'** в общем случае задача сложная, формула становится малопригодной в практическом отношении. Оказывается, однако, можно найти некоторый вспомогательный вектор, циркуляция которого будет определяться только токами проводимости, охватываемыми контуром **Г**. Действительно, мы уже знаем, что с током **I'** связана циркуляция намагниченности:

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I'.$$

Предполагая, что циркуляция векторов $\vec{B}$ и $\vec{J}$ берется по одному и тому же контуру **Г**, выразим I' в предыдущем уравнении по этой формуле , тогда:

$$\oint\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{J}\right)d\vec{l}=I$$

Величину, стоящую под интегралом в скобках, обозначают буквой $\vec{H}$. Итак, мы нашли некоторый вспомогательный в е к т о р $\vec{H}$:

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{J},$$

циркуляция которого по произвольному контуру Г равна алгебраической сумме токов проводимости I, охватываемых этим контуром:

$$\oint\vec{H}d\vec{l}=I.$$

Эта формула выражает теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$: *циркуляция вектора* $\vec{H}$ *по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.*

Правило знаков для токов то же, что и в случае циркуляции вектора $\vec{B}$.

Заметим, что вектор $\vec{H}$ представляет собой комбинацию двух совершенно различных величин B/μ_0 и J. Поэтому вектор $\vec{H}$ – это действительно вспомогательный вектор, не имеющий сколько-нибудь глубокого физического смысла. Его введение оправдывается простыми уравнениями для его нахождения. Размерность этого вектора - А/м.

Вектор $\vec{J}$ был введен как вектор, зависящий от вектора результирующего магнитного поля $\vec{B}$. Однако принято связывать не эти векторы, а векторы $\vec{J}$ и $\vec{H}$. Для большинства веществ эта связь линейна:

$$\vec{J}=\chi\vec{H},$$

где χ - магнитная восприимчивость, безразмерная величина, характерная для каждого данного магнетика. В отличие от диэлектрической восприимчивости κ, которая всегда положительна, магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной. Соответственно магнетики разделяют на:

А) диамагнетики($\chi < 0$);

Б) парамагнетики($\chi > 0$);

В) ферромагнетики(для них зависимость нелинейная, причем $\chi >> 1$).

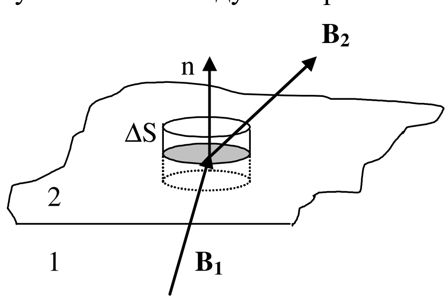
Для магнетиков с линейной зависимостью $\vec{J}$ и $\vec{H}$ связь между величинами становится такой:

$$\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H},$$

а величина μ называется магнитной проницаемостью вещества.

3.32 Граничные условия для векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$.

Получим связь между векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$ по обе стороны границы раздела двух магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Это будет сделано с помощью теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.



Условие для вектора $\vec{B}$. Возьмем бесконечно малый цилиндр высотой h и площадью основания ΔS. Размеры его должны быть таковы, чтобы можно было считать поле на поверхности цилиндра однородным. Граница раздела делит цилиндр пополам так, как изображено на рисунке. В результате половина цилиндра находится в среде 1, а вторая половина – в среде 2. Обозначим индукцию магнитного поля в среде 1 как $\vec{B}_1$, в среде 2 это поле будет $\vec{B}_2$. Вычислим поток вектора индукции магнитного поля через поверхность цилиндра. В соответствии с теоремой Гаусса этот поток должен быть равен нулю. Расчет дает следующий результат:

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = \int_{\text{верх}} \vec{B}d\vec{S} + \int_{\text{дно}} \vec{B}d\vec{S} + \int_{\text{бок}} \vec{B}d\vec{S} = 0 .$$

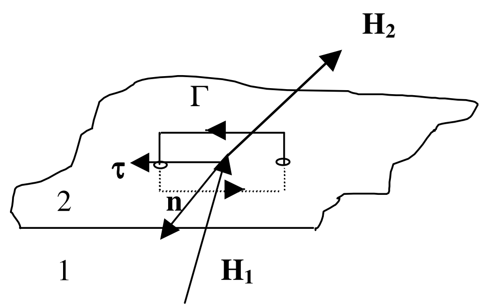
Так как поле в верхней части цилиндра однородно (как и в нижней), то

$$B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S + \int_{\text{бок}} \vec{B}d\vec{S} = 0 .$$

Устремим и без того малое $h \to 0$, тогда поток вектора магнитного поля через боковую поверхность будет равен нулю. Получаем граничное условие для нормальной к поверхности раздела компоненты вектора $\vec{B}$:

$$B_{2n} = B_{1n}.$$

<u>Условие для вектора</u> $\vec{H}$. Снова рассмотрим границу раздела тех же магнетиков, по которой



протекает ток проводимости плотностью $\vec{i}$. Вычислим циркуляцию вектора $\vec{H}$ по бесконечно малому прямоугольному контуру Г. Контур расположен перпендикулярно поверхности раздела магнетиков так, что половина его находится в среде 1, а вторая половина его находится в среде 2. Высота контура h к тому же много меньше длины l. На рисунке показаны направления обхода контура и направление нормали к плоской поверхности, связанной с контуром. Циркуляция вектора $\vec{H}$ равна

$$\int_{\Gamma} \vec{H}d\vec{l} = \int_{\text{низ}} \vec{H}d\vec{l} + \int_{\text{бок}} \vec{H}d\vec{l} + \int_{\text{верх}} \vec{H}d\vec{l} = I = \int \vec{i}d\vec{l} = i_n l .$$

Тогда, считая поле $\vec{H}$ в пределах контура однородным, получаем:

$$H_{2\tau}l - H_{1\tau}l = i_n l.$$

В этой формуле вектор $\vec{\tau}$ направлен вдоль плоскости контура справа налево, кроме того, учтено, что высота контура очень мала. Граничное условие для тангенциальной компоненты вектора $\vec{H}$ приобрело окончательный вид:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_n .$$

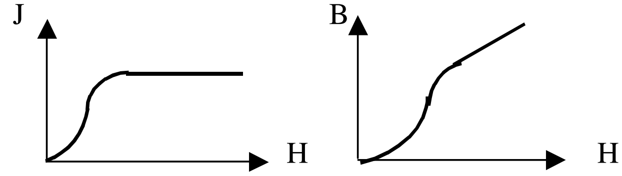
Если токов проводимости на границе раздела нет, то граничное условие упрощается:

$$H_{2\tau} = H_{1\tau} .$$

3.33 Ферромагнетизм

Ферромагнетиками называют вещества, которые могут обладать *спонтанной намагниченностью*, то есть намагничены уже при отсутствии внешнего поля. Типичные представители этого класса магнетиков – это железо, кобальт и многие их сплавы.

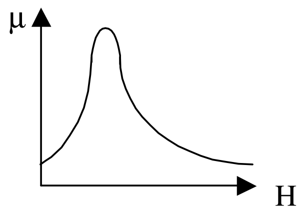
<u>Основная кривая намагничения</u>. Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная нелинейная зависимость J = f(H) и B = f(H). Кривая J = f(H), на которой намагниченность J = 0

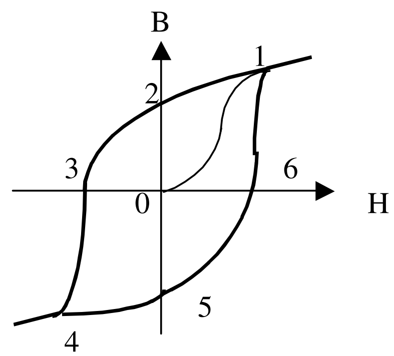


при H = 0, называется основной кривой намагничения. При увеличении магнитного поля J выходит на плато (то есть перестает зависеть от H) уже при малых H. Это говорит о том, что достаточно небольших полей, чтобы ориентировать все имеющиеся у молекул магнитные моменты вдоль поля. Индукция магнитного поля определяется формулой $B = \mu_0(H + J)$, поэтому она растет с увеличением поля

Н. Ввиду нелинейной зависимости В(Н) для ферромагнетика нельзя ввести магнитную проницаемость μ как постоянную величину, а только как функцию $\mu = f(H)$. Ее вид изображен на соответствующем рисунке. Максимальное значение магнитной проницаемости для ферромагнетиков может достигать величины 100000. Отметим, что все величины получены из основной кривой намагничения.

Магнитный гистерезис. Гистерезисом называется такая зависимость между В и Н, при которой связь этих величин зависит от предшествующей истории намагничения ферромагнетика. Если первоначально ненамагниченный ферромагнетик намагничивать, то зависимость В от Н идет по основной кривой намагничения. Но если после достижения насыщения (линейная зависимость В от Н) уменьшать Н, то кривая пойдет выше (линия 1 –2), а затем пройдет точки 2 – 3 – 4. Если же теперь проделать все дальше, то кривая пройдет через точки 4 – 5 – 6 – 1.





Если в точках 1 и 4 наступает насыщение, то такую петлю называют максимальной петлей гистерезиса. Ясно, что у ферромагнетика при Н = 0 намагниченность не исчезает, и отрезок 02 на оси В называют *остаточной индукцией* B_r. При этом остается остаточная намагниченность J_r. Это и есть постоянные магниты. Чтобы полностью размагнитить ферромагнетик, необходимо приложить обратное магнитное поле, по величине равное отрезку 03 на оси Н. Это поле называется *коэрцетивной силой* H_c. Для обычных ферромагнетиков эти величины имеют порядок: $B_r \cong 1$ Тл; $H_c \cong 100 - 1000$ А/м.

Температура Кюри. При повышении температуры способность ферромагнетика намагничиваться уменьшается, и при температуре, которая называется T_c(точка Кюри), ферромагнетик превращается в парамагнетик. Дело в том, что активное тепловое движение разрушает упорядоченность.

Физическую природу ферромагнетизма удалось понять только с помощью квантовой механики. При определенных условиях в кристаллах могут возникать так называемые обменные силы, которые заставляют магнитные моменты электронов устанавливаться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного, то есть самопроизвольного, намагничения – эти области называются доменами. Поскольку обменные силы короткодействующие, то размер домена исчисляется микронами. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и имеет определенный магнитный момент. Направления магнитных моментов для каждого домена различны, поэтому при отсутствии внешнего магнитного поля полный магнитный момент всего ферромагнетика равен нулю и образец ненамагничен. При включении внешнего магнитного поля домены, ориентированные по полю, растут за счет доменов, ориентированных против поля. Такой рост доменов в слабых полях имеет обратимый характер. В более сильных полях происходит одновременная переориентация магнитных моментов в пределах всего домена. Этот процесс является необратимым, что и служит причиной гистерезиса. После выключения внешнего поля намагниченность не исчезает, и ферромагнетик становится постоянным магнитом.

3.34 Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

В 1831 году Фарадеем было сделано одно из наиболее фундаментальных открытий в электродинамике - открыто явление электромагнитной индукции. Суть его в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток. Этот ток был назван индукционным. Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции(то есть электрическое поле). При этом весьма замечателен тот факт, что ЭДС индукции не зависит ни от чего, кроме скорости изменения магнитного потока Ф: – dФ/dt. Фарадей обнаружил, что индукционный ток можно получить двумя способами:

1) перемещением контура(или его части) в магнитном поле;
2) в неподвижном контуре созданием переменного магнитного поля.

Индукционный ток подчиняется правилу Ленца. Направление индукционного тока (а значит и знак ЭДС индукции) определяется правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. Другая формулировка: индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции.

Закон электромагнитной индукции. В 1845 году Ф.Э.Нейман дал математическое определение закона электромагнитной индукции:

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Знак «-» в этом уравнении связан с определенным правилом знаков. Знак магнитного потока Ф связан с выбором нормали к поверхности S, а знак E_i связан с выбором положительного направления обхода по контуру(направление индукционного тока). Здесь предполагается, что направление нормали $\vec{n}$ к контуру и положительное направление обхода связаны правилом правого винта.

Полный магнитный поток (потокосцепление). Если контур состоит из N витков, то в каждом одинаковом витке индуцируется одинаковая E_i, а полная ЭДС индукции будет суммой этих E_i. Если один виток охватывает магнитный поток Φ_1, то суммарный магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на такой сложный контур, можно представить как $\Psi = N\Phi_1$. Это и есть потокосцепление. Тогда ЭДС индукции

$$E_i = -N\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

3.35 Явление самоиндукции. Индуктивность.

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда меняется магнитный поток через контур. При этом не важно, с чем связано изменение магнитного потока. Если ток в контуре изменяется со временем, то меняется и величина магнитного поля, а, следовательно, и магнитный поток. Таким образом, в случае изменения тока в контуре в нем возникает ЭДС индукции. Это явление названо самоиндукцией.

Индуктивность. Если в пространстве, где находится контур с током I, нет ферромагнетиков, то магнитное поле, а значит и магнитный поток Ф через контур будут прямо пропорциональны току I. Тогда можно записать:

$$\Phi = LI.$$

В этой формуле величина L называется индуктивностью контура. По определению L > 0. Индуктивность L зависит от формы и размера контуров, а также от магнитных свойств окружающей среды. Единица измерения индуктивности – 1 Генри (Гн). 1 Гн – это индуктивность такого контура, у которого при токе 1 А магнитный поток равен 1 Веберу. При изменении силы тока в контуре согласно закону электромагнитной индукции возникает ЭДС самоиндукции E_s:

$$E_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

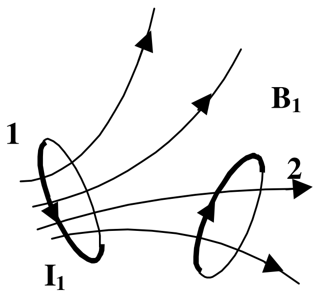
Если L = Const (не изменяется конфигурация контура и μ = Const), то

$$E_s = -L\frac{dI}{dt}.$$

Знак «-» показывает, что E_s всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока – в соответствии с правилом Ленца. Эта ЭДС старается сохранить ток неизменным: если ток в контуре уменьшается, то ЭДС самоиндукции стремится его увеличить. Особенно сильно это явление проявляется при включении и выключении тока в цепи, содержащей большую индуктивность.

3.36 Взаимная индукция. Взаимная индуктивность.

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2, расположенных достаточно близко друг к другу.



Если в контуре 1 течет ток I_1, то он создает магнитное поле, которое пронизывает контур 2. В контуре 2 магнитный поток, связанный с током I_1, равен Φ_2. Естественно, что Φ_2 будет пропорционален току I_1 (при отсутствии ферромагнетиков). Коэффициент пропорциональности обозначим через L_{21}. Для этого случая связь между потоком и током будет такова:

$$\Phi_2 = L_{21} I_1 .$$

Аналогично, в случае, когда ток течет в контуре 2, а магнитный поток пересекает контур 1, получаем

$$\Phi_1 = L_{12} I_2 .$$

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называют коэффициентами взаимной индукции контуров. Взаимная индуктивность численно равна магнитному потоку сквозь один из контуров, создаваемому единичным током в другом контуре. Коэффициенты L_{12} и L_{21} зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Размерность взаимной индукции – Генри.

Теорема взаимности. Соответствующий, достаточно сложный, расчет дает (а опыт подтверждает), что при отсутствии ферромагнетиков коэффициенты L_{12} и L_{21} одинаковы:

$$L_{12} = L_{21} .$$

Это и есть теорема взаимности. Смысл этой теоремы в том, что одинаковые токи в обоих контурах создают одинаковый магнитный поток в другом контуре.

Взаимная индукция. Наличие магнитной связи между контурами проявляется в том, что при всяком изменении тока в одном из контуров в другом контуре возникает ЭДС индукции. Это явление и называют взаимной индукцией. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС, возникающие в контурах 1 и 2, равны, соответственно,

$$E_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}; E_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt} .$$

Контуры считаются неподвижными, и нет ферромагнетиков. С учетом явления самоиндукции ток в 1 контуре можно будет найти из уравнения:

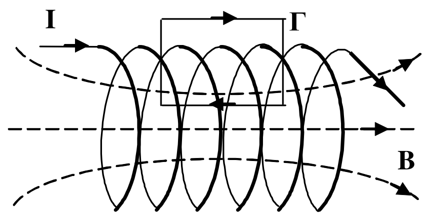
$$R_1 I_1 = E_1^* - L\frac{dI_1}{dt} - L_{12}\frac{dI_2}{dt} .$$

Аналогичное уравнение можно записать для тока во 2 контуре. Величиной E_1^* обозначена сторонняя ЭДС (не связанная с взаимной индукцией). Явление взаимной индукции положено в основу работы трансформаторов.

3.37 Индуктивность соленоида.

Соленоидом называется катушка из тонкого провода, намотанного на каркас. Пространство внутри катушки может быть заполнено материалом с магнитной проницаемостью μ. Рассмотрим идеальный соленоид: длина его L гораздо больше радиуса R. В этом случае при пропускании через соленоид тока I внутри соленоида возникает *однородное* магнитное поле с линиями индукции, параллельными оси соленоида. Вне соленоида при этом магнитного поля нет. Для нахождения величины магнитного поля воспользуемся теоремой о циркуляции для вектора $\vec{H}$:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I.$$



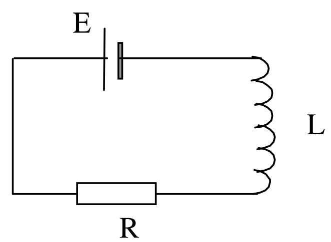
Для нахождения циркуляции выберем контур, как показано на рисунке. Тогда, поскольку вне контура поля нет, а на вертикальных участках контура магнитное поле перпендикулярно направлению обхода, получаем: $Hl = nIl$, здесь n – число витков на единицу длины соленоида. Для магнитного поля $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 nI$. Индуктивность можно теперь определить по формуле

$$L = N\frac{\Phi_1}{I} = N\frac{BS}{I} = N\frac{\mu\mu_0 nIS}{I} = \mu\mu_0 n^2 V.$$

В этой формуле V – объем соленоида.

3.38 Энергия магнитного поля.

Получим общую формулу для энергии магнитного поля на простом примере. Рассмотрим цепь,



состоящую из индуктивности, сопротивления и источника ЭДС. Подключим источник к цепи, тогда закон Ома для нее будет выглядеть так:

$$IR = E + E_s,$$

где E_s - ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при включении тока. Умножим обе части уравнения на Idt, тогда

$$E\,Idt = I^2 Rdt - E_s Idt = dQ + Id\Phi.$$

Это работа, совершаемая источником. Она идет на выделение джоулева тепла в цепи и на работу против ЭДС самоиндукции. Ее величина определяется формулой $\delta A^{доп} = Id\Phi$. Эта формула верна во всех случаях (даже при наличии ферромагнетиков). Далее используем определение индуктивности ($\Phi = LI$) и получим следующие формулы: $\delta A^{доп} = LIdI$ и $A^{доп} = LI^2/2$. Эта работа идет на создание магнитного поля в катушке:

$$W_{магн} = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Это магнитная энергия тока, или собственная энергия тока. Теперь на основе этой формулы получим энергию магнитного поля. Выразим полученную энергию через индукцию магнитного поля B и используем полученную ранее формулу для индуктивности соленоида : $L = \mu\mu_0 n^2 V$.

Тогда $W_{магн} = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\mu\mu_0 n^2 VI^2$. Но так как $nI = H = \frac{B}{\mu\mu_0}$, то $W_{магн} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}V = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}V$. Эта формула выведена для однородного магнитного поля, но, тем не менее, она справедлива для любого магнитного поля:

$$W_{магн} = \int \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV.$$

Эта магнитная энергия распределена в пространстве с плотностью

$$\omega_м = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

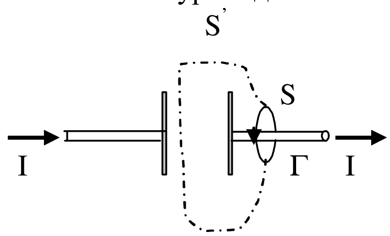
3.39 Уравнения Максвелла.

Теория электромагнитного поля, начала которой заложил Фарадей, математически была завершена Максвеллом. При этом главное, что сделал Максвелл, было предположение о симметрии во взаимозависимости полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Дело в том, что поскольку меняющееся во времени магнитное поле $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ создает электрическое поле (закон электромагнитной индукции), следует ожидать, что меняющееся во времени электрическое поле $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ создает магнитное поле.

Эту идею Максвелла можно обосновать следующим рассуждением. Рассмотрим разряжающийся конденсатор. Вычислим циркуляцию напряженности магнитного поля $\vec{H}$ с помощью теоремы о циркуляции, полученной для магнитостатического случая:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} d\vec{S}.$$

В качестве контура Γ для вычисления циркуляции выберем окружность, охватывающую ток, а поверхности, с ним связанные, выберем две – плоский круг S и поверхность S'. Обе поверхности имеют равные права, но через плоскость круга течет ток проводимости, а через поверхность S' – не течет. Получается, что для переменных токов циркуляция $\vec{H}$ зависит от выбора поверхности. Этого не может быть, следовательно, в рассуждениях (формулах) допущена ошибка. Для переменных полей теорему о циркуляции необходимо изменить. Следуя за Максвеллом, заметим, что поверхность S' пронизывают только линии электрического поля. Используем поверхности S и S' в качестве замкнутой поверхности для теоремы Гаусса для вектора $\vec{D}$: $\oint \vec{D} d\vec{S} = q$. Продифференцируем по времени это соотношение и дополним его уравнением непрерывности:



$$\oint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t} \;;\; \oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Объединив эти соотношения, получим формулу:

$$\oint \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S} = 0.$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение непрерывности для случая переменных токов. Второе слагаемое в скобках Максвелл назвал *плотностью тока смещения*:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Сумму токов проводимости и смещения назвали полным током:

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

В соответствии с уравнением непрерывности, линии полного тока являются непрерывными: там, где кончается ток проводимости, начинается ток смещения. Теперь необходимо вместо тока проводимости в теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ подставить полный ток и все противоречия, о которых говорилось ранее, будут сняты:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S}.$$

Это уравнение и является одним из главных достижений Максвелла. В дифференциальной форме это уравнение можно записать, используя, математический оператор – ротор. Определим ротор вектора как

$$\vec{H} d\vec{l} = \mathrm{rot}\vec{H} d\vec{S}.$$

Тогда дифференциальная форма полученного уравнения запишется так:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Запишем полную систему уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \qquad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0;$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \qquad \oint \vec{D} d\vec{S} = \int \rho dV.$$

Первые два уравнения показывают, что магнитное поле может возникать из-за движения зарядов, либо в связи с переменным электрическим полем. Второе уравнение можно трактовать как отсутствие магнитных зарядов. Вторые два уравнения говорят о том, что электрическое поле может возникать по двум причинам: при наличии электрических зарядов, а также при наличии переменного со временем магнитного поля. Внутри этих уравнений заключены все законы электромагнетизма, начиная с закона Кулона и заканчивая законом электромагнитной индукции. Хочется отметить, что это открытие Максвелл сделал чисто теоретически.

Запишем дифференциальную форму уравнений Максвелла:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0;$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \mathrm{div}\vec{D} = \rho.$$

Эти уравнения должны быть дополнены граничными условиями (запишем их для случая, когда на границе раздела двух сред нет ни сторонних зарядов, ни токов проводимости):

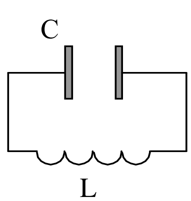
$$D_{1n} = D_{2n};\ E_{1\tau} = E_{2\tau};\ B_{1n} = B_{2n};\ H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Но и это еще не полная система уравнений. Она должна быть дополнена так называемыми материальными уравнениями. Если электромагнитное поле возбуждено в однородной среде, характеризуемой величинами диэлектрической проницаемости ε, магнитной проницаемости μ и проводимостью σ, то

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}; \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}; \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами.

3.40 Электромагнитные колебания.



Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивности L. В реальном контуре всегда присутствует сопротивление R, но мы будем рассматривать идеальный контур и это сопротивление не учитывать. Зарядим конденсатор и замкнем ключ. Протекание тока будет происходить в соответствии с законом Ома:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + E_S.$$

Поскольку R = 0, $E_s = -L\frac{dI}{dt}$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$, то уравнение приобретает вид:

$$\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0.$$

Обозначим точкой над физической величиной ее производную по времени $I = \dot{q}$, тогда

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 .$$

Это уравнение гармонических колебаний величины q с частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. При этом

$$q(t) = q_0 Cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Период электромагнитных колебаний определяется формулой Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} .$$

Напряжение на конденсаторе и ток в катушке теперь можно записать так:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} Cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m Cos(\omega_0 t + \alpha); I = \dot{q} = -\omega_0 q_0 Sin(\omega_0 t + \alpha) = -I_m Sin(\omega_0 t + \alpha) .$$

Теперь можно записать полную энергию колебаний:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C} Cos^2\alpha(t) + \frac{q_0^2}{2} L\omega_0^2 Sin^2\alpha(t) = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = W_{max}^{эл} = W_{max}^{магн} .$$

Кроме того, амплитуды напряжения и тока связаны соотношением:

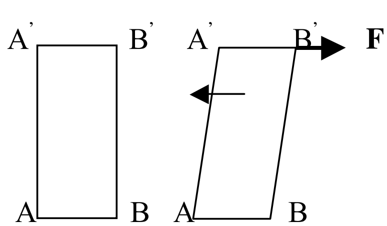
$$I_m \sqrt{\frac{L}{C}} = U_m .$$

3.41 Продольные и поперечные упругие волны

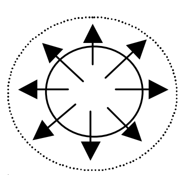
Любая колебательная система взаимодействует с окружающей средой, вызывая вынужденные колебания ближайших точек среды. При этом предполагается, что окружающее пространство представляет собой сплошную упругую среду. Тело считается упругим, если деформации, вызванные внешним воздействием, исчезают после его прекращения. При этом выполняется закон Гука:

$$dp = -k \frac{dV}{V} .$$

В этой формуле dp – давление, созданное колебательным движением, а k – модуль объемной упругости. Существует два вида упругости: упругость формы и объемная упругость. На рисунке проиллюстрированы оба вида упругости. Если тело стремится вернуть исходную форму, то есть вернуться в исходное состояние, то это упругость формы. Такая упругость присуща твердым телам. Для жидкостей и газов характерна лишь объемная упругость.



упругость формы


объемная упругость

Таким образом, если в какой-либо точке среды возникают колебания, то за счет упругих свойств среды они передаются в другие точки и вызывают там деформации. Механическое возмущение, распространяющееся в упругой среде, называется упругими или механическими волнами. Ясно, что волновой процесс периодический. Если частота колебаний в упругой волне лежит в диапазоне 20 – 20000 Гц, то такие волны воспринимает человеческое ухо – это слышимый звук.

Различают два вида волн: продольные и поперечные. Упругая волна называется продольной, если частицы среды совершают колебания в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемной упругостью и могут существовать в любой среде. Упругая волна называется поперечной, если частицы среды совершают колебания, оставаясь в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. Эта волны связаны с упругостью формы и могут существовать только в твердых телах.

3.42 Уравнение волны.

В нашу задачу входит определение величины деформации (то есть отклонения от положения равновесия) точек среды в зависимости от координат и времени. Ясно, что волновой процесс сопровождается переносом энергии. Различают бегущие волны (с переносом энергии) и стоячие волны (без переноса энергии).
Упругая волна называется синусоидальной (гармонической), если соответствующие ей колебания среды являются гармоническими. Частота колебаний называется частотой волны. Волна распространяется в среде с некоторой скоростью v, поэтому она дойдет от одной точки к другой точке за время t. Если волна вышла из некоторой точки в момент времени t_0, то $t - t_0 = \ell/v$. Это означает, что фаза колебаний в двух точках среды, находящихся на расстоянии ℓ друг от друга, будут отличаться на $\Delta\alpha = \omega(t - t_0) = \omega\ell/v$.
Геометрическое место точек, в которых фаза колебаний имеет одно и то же значение, называется волновой поверхностью. Точки, до которых дошла волна, называются волновым фронтом. Перпендикуляр к волновой поверхности называется лучом.
Волна называется плоской, если ее волновые поверхности представляют собой плоскости, параллельные друг другу.
Теперь напишем уравнение плоской волны. Если не рассматривать поглощение средой энергии, то амплитуда колебаний в каждой точке одинакова и отклонение частиц среды от своего положения равновесия будет зависеть от времени и координаты, отсчитанной по оси луча: $S = f(x,t)$. Если в начале координат ($x = 0$) колебания начались в момент времени $t = 0$, то в точку с координатой x они дойдут в момент времени $t - x/v$. Колебания в этой точке будут происходить по тому же закону, что и в начале координат, но с запаздыванием:

$$S(x=0,t) = A\mathrm{Sin}(\omega t + \alpha_0)$$
$$S(x=x,t) = A\mathrm{Sin}\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha_0\right).$$

Расстояние, которое волна проходит за время, равное периоду колебаний, называется длиной волны:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}.$$

Тогда для плоской гармонической волны уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$S(x,t) = A\mathrm{Sin}\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \alpha_0\right).$$

Величина A называется амплитудой волны, а α_0 – ее начальной фазой. Часто используется понятие волновой вектор (волновое число): $\vec{k}$. Его модуль равен $k = 2\pi/\lambda$, а направление совпадает с направлением скорости волны. Если волна плоская, но распространяется в произвольном направлении (не по оси x), то ее уравнение имеет следующий вид:

$$S(\vec{r},t) = A\mathrm{Sin}\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_0\right).$$

Для сферической волны аналогичное уравнение таково:

$$S(\vec{r},t) = \frac{A}{r}\mathrm{Sin}\left(\omega t - kr + \alpha_0\right).$$

Величина $\Phi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_0$ называется фазой волны.

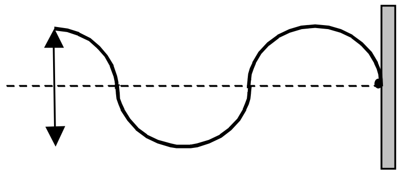
3.43 Стоячие упругие волны.

Возьмем шнур и закрепим его на стене, как показано на рисунке. Возбудим в шнуре поперечную синусоидальную волну. Тогда поперечные смещения точек шнура будут подчиняться закону

$$S_1 = A_1\mathrm{Cos}(\omega t - kx)$$

Если изменить знак перед слагаемым kx, то получим волну

$$S_2 = A_2\mathrm{Cos}(\omega t + kx),$$



распространяющуюся в обратном направлении. Такую волну можно получить, если отразить от стенки первую волну. Поэтому волна S_1 называется падающей волной, а S_2 – отраженной. Если отражение происходит без потери энергии, то амплитуды обоих волн одинаковы $A_1 = A_2 = a$. От сложения таких волн получается волна, колебания в которой происходят по закону:

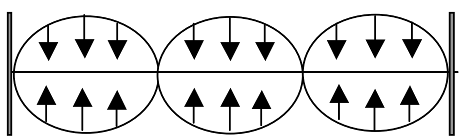
$$S = S_1 + S_2 = a\{Cos(\omega t - kx) + Cos(\omega t + kx)\} = 2aCoskxCos\omega t .$$

Такая волна называется стоячей. В этой волне каждая точка шнура, характеризуемая координатой x, совершает колебания с частотой ω и амплитудой $|2aCoskx|$. Точки шнура, в которых выполняется условие Coskx = 0, называются узлами смещения. В этих точках амплитуда колебаний равна нулю. Точки, где амплитуда колебаний максимальна, называются пучностями смещения. Расстояние между двумя узлами (двумя пучностями) можно определить из условия

$$k\Delta x = \pi .$$

Получаем, что это расстояние равно половине длины волны. Все точки, расположенные между двумя соседними узлами, совершают колебания в одной фазе. Узлы смещения как бы разделяют шнур на независимые области, в которых совершаются независимые гармонические колебания. Никакой передачи энергии между этими областями нет.

Если длина шнура неограниченна, то частота ω, а, следовательно, и длина стоячей волны могут



быть любыми. Если же оба конца шнура закрепить, а затем дернуть его, то в обе стороны побегут волны всевозможных частот и начнут отражаться от закреплений. Возникнет сложное нестационарное движение. Стационарное движение в виде стоячей волны возможно лишь при вполне определенных частотах колебаний: закрепленные концы шнура должны быть узлами стоячей волны. Отсюда следует, что на длине шнура L должно укладываться целое число полуволн:

$$\lambda = \frac{2L}{n};\ \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\pi v}{L} n;\ n = 1, 2, 3, ... \ .$$

В этих формулах v – скорость упругих волн в шнуре, L – длина шнура. Значения n определяют набор собственных (или нормальных) колебаний шнура. Собственные колебания с наименьшей частотой $\omega_1 = \pi v/L$ называются основным тоном, остальные называются обертонами, или гармониками. Аналогичные явления можно наблюдать и для колебаний в стержнях, как продольных, так и поперечных.

3.44 Волновое уравнение для электромагнитных волн.

Итак, мы ранее говорили, что уравнения Максвелла имеют решение в виде электромагнитных волн. Получим эти решения для простейшего случая: однородная (ε = const и μ = const), непроводящая (j = 0), нейтральная (плотность зарядов σ = 0) среда. В этом случае систему уравнений Максвелла можно записать с помощью оператора ∇ в виде

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};\ \nabla \vec{D} = 0;\ \nabla \vec{B} = 0 .$$

К этим уравнениям добавим материальные уравнения: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}; \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$ Эту систему будем решать следующим образом. Вычислим векторную производную (то есть оператор $\nabla\times$) от первого уравнения Максвелла. Получим следующее соотношение:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right).$$

Подставим из второго уравнения Максвелла значение последней скобки, тогда

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = -\mu\varepsilon\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Первая часть уравнения представляет собой *двойное векторное произведение*, которое можно раскрыть с помощью мнемонического правила – «бац минус цаб»:

$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

Тогда левая часть уравнения приобретает вид (учтено, что третье уравнение Максвелла дает $\nabla\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\nabla\vec{E} = 0$):

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = \nabla(\nabla\vec{E}) - \vec{E}(\nabla\nabla) = -\nabla^2\vec{E} = -\Delta\vec{E}.$$

Оператор $\Delta = \nabla^2$ называется оператором Лапласа. Окончательный вид уравнения для электромагнитной волны выглядит так:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Чуть ниже мы покажем, что это действительно уравнение, дающее волновое движение, а сейчас констатируем, что волновое движение происходит со скоростью, которую дает данное уравнение:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$ и $v_{вак} = c$. Для магнитного поля уравнение выглядит аналогично:

$$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Максвелл теоретически предсказал существование такого решения, девять лет спустя (1888) Г.Герц экспериментально доказал существование электромагнитных волн. С помощью вибратора (искрового разрядника) он получил электромагнитную волну, а затем исследовал ее свойства (отражение, преломление и др.).

По виду волнового фронта (то есть точек пространства, до которых дошли электромагнитные колебания) волны разделяют на плоские, сферические, цилиндрические и др. Далее мы будем рассматривать простейший вид волнового фронта – плоский. Итак, рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x. Тогда волновое уравнение приобретет вид:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_+ f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \vec{E}_- f\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Первое слагаемое в ответе представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси, второе слагаемое – такую же волну, но движущуюся в обратном направлении. Точный вид зависимости может быть произвольным. Простейшее решение этого уравнения называется синусоидальным или гармоническим и имеет вид

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \mathrm{Sin}(\omega t - kx + \alpha_0).$$

В этой формуле E_0 – амплитуда колебаний электрического поля в данной точке пространства, ω - частота колебаний в волне, k – волновой вектор (волновое число), равный $k = \omega/v$, α_0 – начальная фаза колебаний в данной точке пространства. Гармоническая или монохроматическая волна (от оптики – одноцветная) – это идеальный объект, в природе не встречающийся в чистом виде. Но в некоторых условиях реальная волна может быть описана как гармоническая. Любую волну можно представить как сумму гармонических волн. В этом нам помогает принцип суперпозиции для электрического и магнитного полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ...;$$
$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 + ...$$

3.45 Свойства плоской монохроматической волны.

Уравнения для электрического и магнитного полей в плоской монохроматической волне можно записать в виде:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_m \mathrm{Sin}(\omega t - kx + \alpha_E)$$
$$\vec{H}(x,t) = \vec{H}_m \mathrm{Sin}(\omega t - kx + \alpha_H).$$

Исследуем свойства этих решений. Для этого нам потребуется комплексное представление чисел:

$$e^{i\alpha} = \mathrm{Cos}\,\alpha + i\mathrm{Sin}\,\alpha; \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\right) = \mathrm{Cos}\,\alpha; \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha}\right) = \mathrm{Sin}\,\alpha .$$

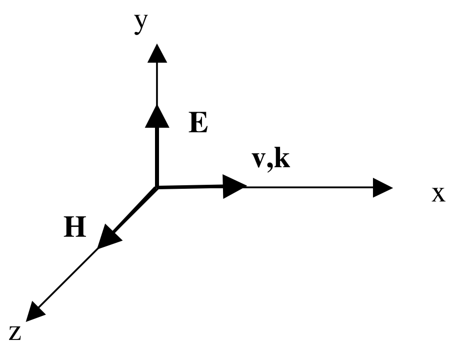
Тогда $\vec{E} = \vec{E}_m \,\mathrm{Im}\left(e^{i(\omega t - kx + \alpha_E)}\right) = \vec{E}_m \,\mathrm{Im}\, e^{i\Phi_E}$. Далее значок Im писать не будем.

Свойства ПМВ.

1) Электромагнитные волны – поперечные. Для доказательства этого надо показать, что $\vec{E} \perp \vec{k}$ и $\vec{H} \perp \vec{k}$. Покажем это:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega\vec{H}; \nabla \times \vec{E} = \nabla\left(e^{i\Phi_E} \times \vec{E}_m\right) = -i\vec{k} \times \vec{E}; \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}.$$

Тогда $-i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega\mu\mu_0\vec{H};$ и $\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\mu_0\vec{H};$ значит условие перпендикулярности выполнено: $\vec{H} \perp \vec{k}$. Точно так же доказывается и второе условие.



2) Векторы электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны: $\vec{H} \perp \vec{E}$. Это условие так же сразу следует из формулы $\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\mu_0\vec{H}$. Теперь можно утверждать, что векторы $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ составляют правую тройку векторов, что и показано на рисунке. Напоминаем, что рассматривается плоская электромагнитная волна. Однако на рисунке она еще и плоско поляризована (свойство 5).

3) Колебания векторов электрического и магнитного полей волны происходят в фазе: $\alpha_E = \alpha_H$. Покажем это для конфигурации, изображенной на рисунке. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеют проекции $\vec{E} \Rightarrow (0, E_y, 0)$; $\vec{H} \Rightarrow (0,0,H_z)$. Для вектора $\vec{k} \Rightarrow (k_x,0,0)$. Из уравнения $\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\mu_0\vec{H}$ следует, что $k_x E_y \vec{e}_z = \mu\mu_0\omega H_z \vec{e}_z$, тогда

$$kE_m\mathrm{Sin}(\omega t - kx + \alpha_E) = \mu\mu_0\omega H_m \mathrm{Sin}(\omega t - kx + \alpha_H).$$

Аналогично из уравнения $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ можно получить

$$kH_m\mathrm{Sin}(\omega t - kx + \alpha_H) = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \mathrm{Sin}(\omega t - kx + \alpha_E).$$

Для совместного выполнения этих условий необходимо, чтобы $\alpha_E = \alpha_H$.

4) Связь амплитуд электрического и магнитного полей в волне. Для совместного выполнения предыдущих уравнений необходимо еще и выполнение условий $kE_m = \mu\mu_0\omega H_m$ и $kH_m = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m$. Из них следует искомая связь:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2 .$$

5) Поляризация волны. Направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в монохроматической плоской волне может быть произвольным, что и выполняется, например, для естественного света (электромагнитной волны видимого диапазона). ЭЛМ волна, в которой направления колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ упорядочены каким-либо образом, называется поляризованной. Если колебания

вектора $\vec{E}$ (а, вместе с ним и конец вектора $\vec{H}$) происходят в одной плоскости при движении волны, то такая ЭЛМ волна называется линейно (плоско) поляризованной. Если конец вектора $\vec{E}$ (а, вместе с ним и конец вектора $\vec{H}$) при движении волны описывает эллипс (смотреть против направления вектора $\vec{k}$), то волна называется эллиптически поляризованной.

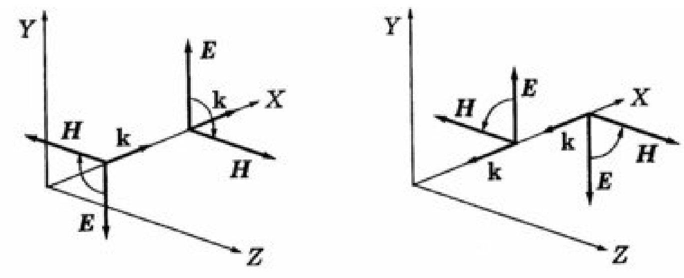
3.46 Стоячая электромагнитная волна.

Пусть имеется плоская ЭЛМ волна, движущаяся в направлении оси x. Эта волна характеризуется векторами $\vec{E} \Rightarrow (0,E_y,0)$ и $\vec{H} \Rightarrow (0,0,H_z)$. Уравнения волны для проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ таковы:

$$E_y = E_m \mathrm{Sin}(\omega t - kx); H_z = H_m \mathrm{Sin}(\omega t - kx).$$

В направлении оси x находится идеально отражающая стенка, расположенная перпендикулярно движению волны. В результате получаем отраженную волну, проекции векторов в которой

$$E_y = E_m \mathrm{Sin}(\omega t + kx); H_z = -H_m \mathrm{Sin}(\omega t + kx).$$

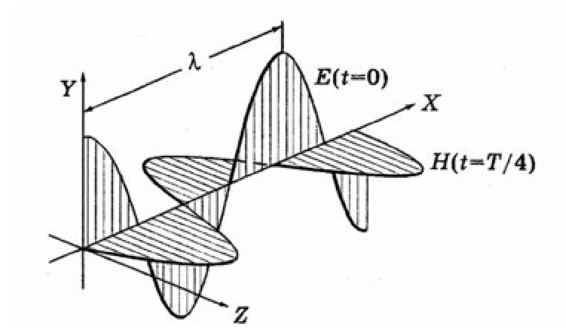


а) б)

Напомним, что векторы $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ составляют правую тройку векторов. В результате суперпозиции двух волн получаем волну, проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ которой выражаются формулами:

$$E_y^{ст} = 2E_m \mathrm{Cos}kx\mathrm{Sin}\omega t$$
$$H_z^{ст} = 2H_m \mathrm{Sin}kx\mathrm{Cos}\omega t.$$

Это и есть стоячая ЭЛМ волна. Она состоит из двух стоячих волн – электрической и магнитной. Колебания электрического поля сдвинуты по фазе относительно колебаний магнитного поля на $\pi/2$. В этой волне в каждой точке амплитуда колебаний разная. Точки, где амплитуда колебаний равна нулю, называются узлами. Точки, в которых амплитуда колебаний соответствующего вектора максимальна, называются пучностями. Расстояния между двумя узлами (или двумя пучностями) равно половине длины волны $\lambda/2$. Напомним, что длиной волны называется расстояние, которое волна проходит за период колебаний:



$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}.$$

В стоячей ЭЛМ волне узлы магнитного поля совпадают с пучностями электрического поля. Энергия электромагнитного поля не переходит ни через один из узлов.

3.47 Энергия и поток энергии ЭЛМ волн. Вектор Пойнтинга.

Исходя из того, что если энергия уменьшается, значит, она куда-то уходит, положим, что энергия ЭЛМ поля не только имеет свою плотность

$$w = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2},$$

но и некий вектор $\vec{S}$, называемый плотностью потока энергии.
Теперь сформулируем теорему Пойнтинга:

Убыль энергии за единицу времени в данном объеме равна потоку энергии сквозь поверхность, ограничивающую этот объем, плюс работа, совершенная в единицу времени (то есть мощность), которую поле производит над зарядами вещества внутри данного объема.
Математически это выглядит так:

$$-\frac{dW}{dt} = \oint \vec{S} d\vec{A} + P,$$

где величина $d\vec{A}$ обозначает элемент поверхности, $W = \int wdV$, $P = \int \vec{j}\,\vec{E}\,dV$.

Получим формулу для вектора Пойнтинга. По своему определению, это вектор, модуль которого равен энергии, проходящей через единицу площади за единицу времени, а направление совпадает с направлением скорости волны $\vec{S} = w\vec{v}$. Анализируя свойства ЭЛМ волны, можно прийти к выводу, что

$$\vec{v} = v\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{EH} = v\frac{[\vec{E},\vec{H}]}{EH}.$$

Пользуясь свойством 4 ЭЛМ волны, получаем w = EH/v. Тогда окончательный вид таков:

$$\vec{S} = [\vec{E},\vec{H}].$$

Модуль вектора Пойнтинга равен S = EH.

3.48 Импульс электромагнитного поля.

Пусть на какое-либо проводящее тело падает электромагнитная волна. Электрическое поле волны возбудит в этой среде ток плотностью (σ - удельная электропроводность среды)

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

Магнитное поле волны будет воздействовать на этот ток силой (на единицу объема)

$$\vec{F}_{\text{ед.об}} = [\vec{j},\vec{B}] = \mu_0[\vec{j},\vec{H}].$$

Эта сила оказывает давление на вещество. Поскольку это давление на вещество со стороны электромагнитной волны, то и вещество, и электромагнитное поле должны изменить свой импульс. Причем по закону сохранения импульса эти изменения должны быть по модулю одинаковы. Таким образом, закон сохранения импульса требует наличия у электромагнитного поля импульса. Обозначим импульс электромагнитного поля как $\vec{K}$. Он будет по модулю равен импульсу, передаваемому среде электромагнитной волной, который, в свою очередь, может быть определен из уравнения:

$$\frac{dK}{dt} = F.$$

Поверхностному слою площадью S и толщиной dl за время dt сообщается импульс

$$dK = F_{\text{ед.об}}\cdot S\cdot dl\cdot dt = \mu_0\cdot j\cdot H\cdot S\cdot dl\cdot dt.$$

В этом же слое за это же время поглощается энергия

$$dW = j\cdot E\cdot S\cdot dl\cdot dt,$$

которая выделяется в виде тепла. И импульс, и энергия передаются среде волной. Эти величины оказываются связанными соотношением

$$K = \mu_0\frac{H}{E}W.$$

Используя свойство 4 электромагнитных волн, можно записать окончательный ответ:

$$K = \frac{1}{c}W.$$