

**Лабораторная работа № 1.39**  
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА**  
**МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**Цель работы**

Исследование колебаний крутильного маятника с телами различной формы.

**Задачи**

1. Измерить период колебаний крутильного маятника с телами различной формы.
2. Определить моменты инерции исследованных тел.

**Введение**

Крутильный маятник – это твердое тело, закрепленное на упругой проволоке, которое может вращаться вокруг оси. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается основным законом динамики вращательного движения

$$I \beta = M, \quad (1)$$

где  $M$  – момент сил относительно оси вращения,  $I$  – момент инерции тела относительно той же оси и  $\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  – угловое ускорение.

Момент инерции тела  $I$  является мерой инертности тела при вращательном движении, подобно тому, как масса тела является мерой инертности тела при поступательном движении. В общем случае *моментом инерции системы (тела)* относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2)$$

Уравнение (2) отображает свойство аддитивности момента инерции: момент инерции тела, относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции частей этого тела относительно той же оси.

Для сплошного тела момент инерции находят путем интегрирования:

$$I = \int_M r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV. \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность тела, а  $dm = \rho dV$  – масса малого элемента тела объемом  $dV$ , расположенного на расстоянии  $r$  от оси вращения.

Если тело однородное (его плотность  $\rho$  не изменяется в пределах объема), то его момент инерции будет определяться только формой и полной массой тела:

$$I = \rho \int_V r^2 dV = \frac{m}{V} \int_V r^2 dV. \quad (4)$$

Момент инерции тела зависит от плотности, формы и размеров тела, а также от положения тела относительно оси вращения. Вычисление моментов инерции однородных тел правильной геометрической формы относительно их осей симметрии не составляет большой сложности. Примеры вычисления моментов инерции некоторых тел представлены в Приложении.

В лабораторной установке крутильный маятник представляет собой металлическую рамку, прикрепленную к стальной проволоке (рис.1). Концы проволоки закреплены в неподвижных кронштейнах так, что проволока является осью вращения маятника. При повороте рамки вокруг оси проволока деформируется и возникает момент сил упругости  $M$ , стремящийся вернуть рамку в положение равновесия. В первом приближении можно считать, что этот момент пропорционален углу закручивания проволоки  $\varphi$  и направлен в противоположную сторону. Поэтому проекция момента силы на ось вращения может быть представлена в следующем виде:

$$M = -f \cdot \varphi, \quad (5)$$

где  $f$  – постоянная величина для данной проволоки, называемая *угловой жёсткостью*, зависящая от материала и геометрических размеров проволоки.

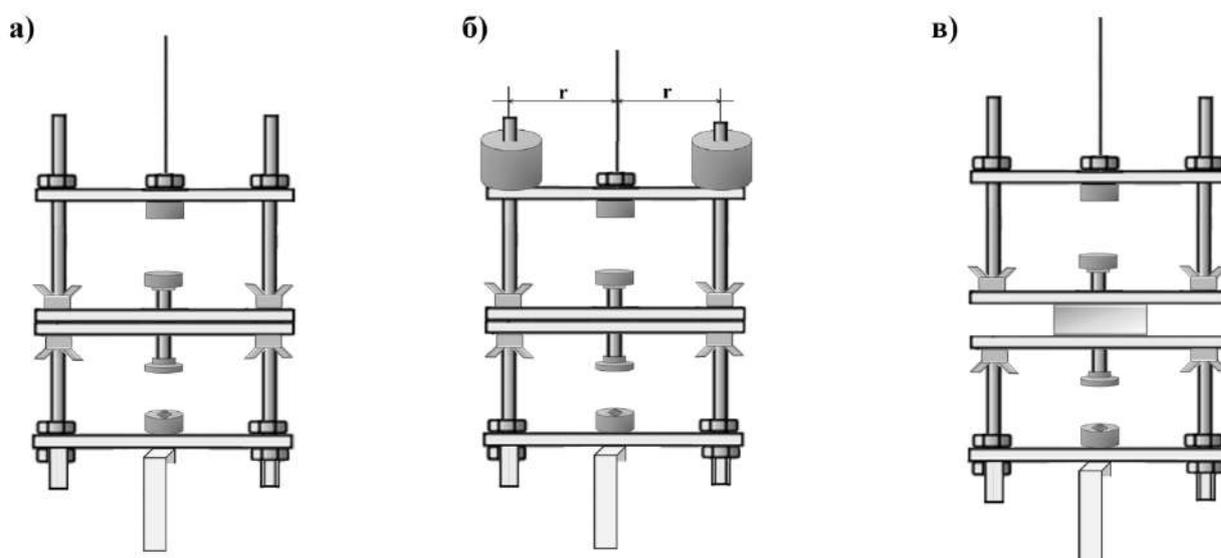


Рис.1. Крутильный маятник:

а) рамка; б) рамка с двумя цилиндрами, в) рамка с исследуемым телом.

С учетом (5) уравнение вращательного движения (1) переходит в

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -f \cdot \varphi$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (6)$$

где  $\omega^2 = f/I$ .

Уравнение (6) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний, его решение

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

описывает гармонические крутильные колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \quad (7)$$

Выражение (7) позволяет по экспериментальным значениям периода крутильных колебаний рассчитать момент инерции вращающегося тела или угловую жёсткость проволоки.

В начале в лабораторной работе необходимо измерить период колебаний пустой рамки (рис.1а). В этом случае измеренное значение периода  $T_0$  равно

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{f}}, \quad (8)$$

где  $I_p$  – момент инерции пустой рамки относительно оси вращения.

Далее следует поместить на рамку два одинаковых цилиндра (рис.1б) и определить период колебания  $T_1$  рамки с цилиндрами. Момент инерции такой системы равен сумме моментов инерции рамки  $I_p$  и моментов инерции цилиндров  $I_{ц}$  относительно оси вращения, поэтому период колебаний:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + 2I_{ц}}{f}} \quad (9)$$

Так как центр масс каждого цилиндра расположен на расстоянии  $r$  от оси вращения, то в соответствии с теоремой Штейнера

$$I_{ц} = I_{ц0} + mr^2, \quad (10)$$

где  $I_{ц0}$  – момент инерции цилиндра относительно его оси,  $m$  – масса цилиндра.

Для цилиндров, используемых в лабораторной работе,

$$I_{ц0} = \frac{1}{8}m(d_1^2 + d_2^2), \quad (11)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  – внешний и внутренний диаметры цилиндра.

Если теперь внутри рамки закрепить исследуемое тело с моментом инерции  $I_m$  относительно оси вращения (предварительно убрав цилиндры) (рис.1в) и вновь измерить период колебания рамки  $T_i$ , то

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_m}{f}}. \quad (12)$$

Исключая из уравнений (8), (9) и (12) неизвестные  $I_p$  и  $f$ , получаем

$$I_m = 2I_{ц} \frac{T_i^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (13)$$

## Экспериментальная установка

Экспериментальная установка (рис. 2) включает в себя крутильный маятник и блок измерений.

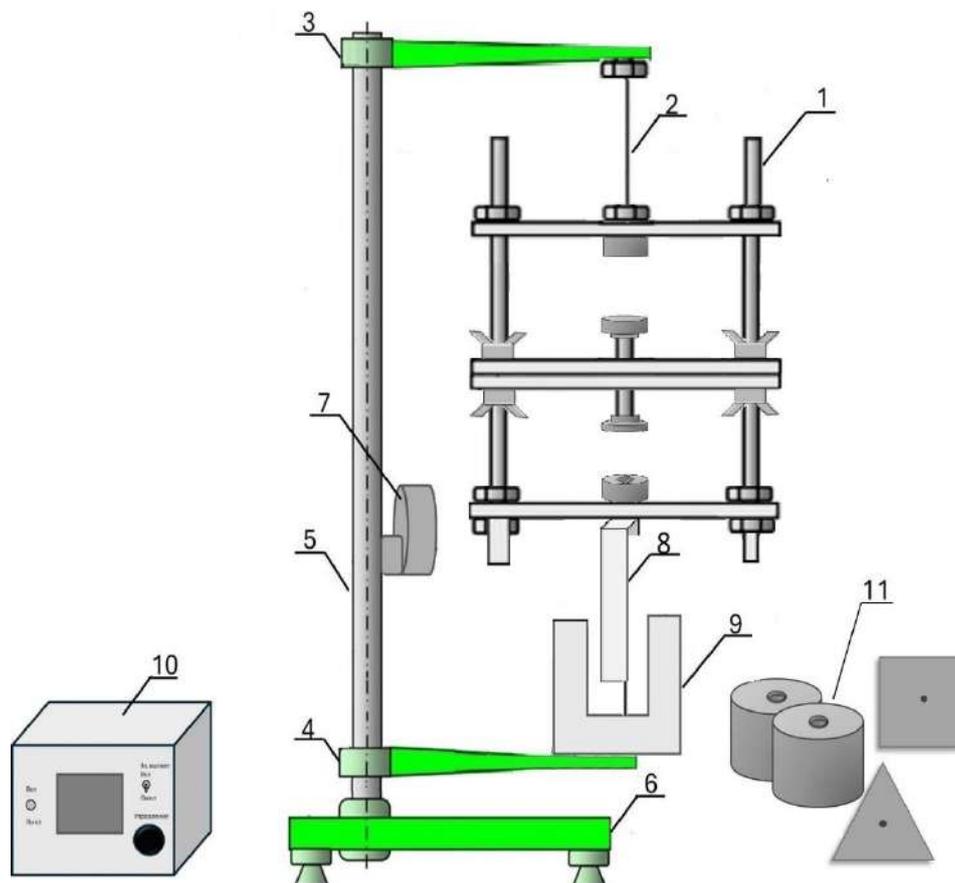


Рис.2. Внешний вид лабораторной установки

Металлическая рамка 1 закреплена на стальной проволоке 2, концы которой зажаты в верхнем 3 и нижнем 4 кронштейнах. Кронштейны укреплены на стойке 5 с основанием 6. К стойке прикреплен также электромагнит 7, фиксирующий рамку в исходном положении.

При освобождении рамки возникают крутильные колебания. В процессе колебаний планка 8, прикрепленная к рамке, пересекает световой поток в

фотодатчике 9, и соответствующие сигналы с датчика поступают на блок измерений 10.

Изменяя длину ножек, стойку 5 можно расположить строго вертикально, используя для этого встроенный в основание уровень.

На передней панели блока измерений 10 расположены:

1. Кнопка «Вкл/Выкл» для включения/выключения питания.
2. ЖК-дисплей – для отображения показаний секундомера.
3. Тумблер «Эл. магнит Вкл/Выкл» для управления электромагнитом – фиксатором подвеса.
4. Ручка «Управление» служит для изменения состояния маятника и установки количества колебаний.

Электронная система измерительного блока автоматически включает режим измерения времени при пересечении планкой 8 оси фотодатчика 9.

На дисплее блока измерений отображаются следующие данные:

- «Время, с» – измеренное значение времени в секундах;
- «Количество колебаний» – количество колебаний маятника (устанавливается студентами самостоятельно по указанию преподавателя);
- «Статус» – отражает различные состояния маятника: «Готовность», «Ожидание», «Движение».

Для измерения моментов инерции в работе предлагается набор тел 11: цилиндры, квадрат и треугольник. В комплект установки входит также штангенциркуль для измерения размеров исследуемых тел.

**Таблица 1.** Параметры тел, используемых в работе

	Тела	Масса	Геометрические размеры
1	Цилиндр	(116±1) г	диаметр - внешний $d_1 = \dots$ , - внутренний $d_2 = \dots$ , расстояния между осями цилиндров $2r =$
2	Треугольник	(145±1) г	стороны треугольника $a = \dots$ , $b = \dots$ , $c = \dots$
3	Квадрат	(289±1) г	сторона квадрата $l = \dots$

Плотность стали  $\rho = (7,8 \pm 0,1) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

### Порядок выполнения лабораторной работы

1. С помощью штангенциркуля измерьте геометрические размеры исследуемых тел. Результаты измерений занесите в последний столбец таблицы 1 с указанием их погрешности.

2. Включите блок измерений.

3. Определите период колебания  $T_0$  пустой рамки (без исследуемых тел).

Для этого

– включите электромагнит (переключатель «Эл. магнит» в положении «Вкл»);

– удерживая рамку за планку П (рис.3), отклоните рамку до соприкосновения с электромагнитом, зафиксировав исходное положение рамки;

- в строке «Статус» должна появиться надпись «Ожидание», а в строке «Количество колебаний» автоматически устанавливается количество колебаний 5;
  - поворачивая ручку «Управление», установите необходимое количество колебаний – 10;
  - нажав на ручку «Управление» на блоке измерения, переведите прибор в статус «Готовность», при этом обнулится значение времени;
  - отключите электромагнит (переключатель «Эл. магнит» в положении «Выкл»), рамка придёт в движение; при этом на дисплее блока измерений будет отображаться отсчёт времени колебаний и обратный отсчёт количества колебаний, в строке «Статус» – «Движение»;
  - по окончании выбранного количества колебаний отсчёт времени останавливается, на дисплее отображается время колебания  $t_0$ ; прибор автоматически переходит в статус «Ожидание»;
  - значение  $T_0 = t_0/10$  занесите в таблицу 2;
  - повторите действия, описанные выше не менее трёх раз.
4. Установите симметрично два цилиндра из набора тел на планку (рис.1б).
  5. Определите период колебаний  $T_1$  рамки с цилиндрами, повторяя действия, описанные в п.3. Значение  $T_1$  занесите в таблицу 2.
  6. Снимите цилиндры с рамки.
  7. Установите одно из исследуемых тел – квадрат – между параллельными планками в рамке так, чтобы плоскость квадрата располагалась горизонтально, а ось вращения проходила строго по центру квадрата (рис 3). Зафиксируйте верхнюю планку с помощью барашковых винтов Б, а затем с помощью центрального винта В закрепите квадрат, чтобы в процессе колебаний квадрат не смещался относительно рамки.
  8. Определите период колебаний  $T_2$  рамки с квадратом. Значение  $T_2$  занесите в таблицу 2.

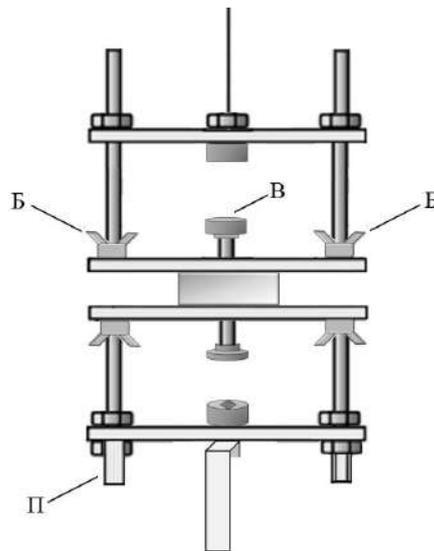


Рис.3. Рамка с исследуемым телом:

Б- барашковый винт, В – центральный винт, П – планка

9. Замените квадрат на другое исследуемое тело – треугольник. Закрепите треугольник внутри рамки так, чтобы ось вращения проходила строго по центру треугольника.
10. Определите период колебаний  $T_3$  рамки с треугольником. Значение  $T_3$  занесите в таблицу 2.

**Таблица 2.** Измерение периода колебаний рамки с телами различной формы

	Рамка без исследуемых тел			Цилиндры			Квадрат			Треугольник		
	$T_0, c$			$T_1, c$			$T_2, c$			$T_3, c$		
1												
2												
3												
4												
5												
$\langle T \rangle, c$												
$\Delta T, c$												

## Обработка результатов

1. Заполните последние строки таблицы 2, вычисляя для каждой из конфигураций среднее значение периода  $\langle T \rangle$  по всем измеренным значениям, а также его погрешность  $\Delta T$ .

(В условиях лабораторной работы приборная погрешность секундомера оказывается гораздо меньше случайной погрешности измерений, поэтому при определении  $\Delta T$  приборной погрешностью можно пренебречь.)

2. С помощью формул (10), (11) вычислите момент инерции цилиндра  $I_u$ .

3. Используя вместо  $T_i$  среднее значение периода  $T_2$ , по формуле (13) вычислите момент инерции квадрата.

4. Используя вместо  $T_i$  среднее значение периода  $T_3$ , по формуле (13) вычислите момент инерции треугольника.

5. Вычислите погрешности найденных моментов инерции, учитывая, что относительная погрешность момента инерции тела

$$\delta I_m = \frac{\Delta I_m}{I_m} = \sqrt{(\delta I_u)^2 + (\delta(T_i^2 - T_0^2))^2 + (\delta(T_1^2 - T_0^2))^2},$$

где все слагаемые под корнем означают квадраты относительных погрешностей соответствующих величин.

Относительная погрешность разницы квадратов периодов

$$\delta(T_i^2 - T_0^2) = 2 \frac{\sqrt{(T_i \Delta T_i)^2 + (T_0 \Delta T_0)^2}}{T_i^2 - T_0^2}$$

6. Используя данные из Приложения, рассчитайте теоретические значения моментов инерции исследованных тел. Вычислите их погрешности.

7. Сравните теоретические и экспериментальные значения.

## Контрольные вопросы

1. Что называют моментом инерции твердого тела относительно оси? В каких единицах измеряется момент инерции?

2. Какова роль момента инерции во вращательном движении?
3. При каких условиях колебания рамки будут гармоническими?
4. От чего зависит период колебаний рамки?
5. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.

### Литература

1. Детлаф, А. А. Курс физики: учебное пособие для вузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. 9-е изд., стер. М.: Академия, 2014. 719с.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие : в 3 томах / И. В. Савельев. — 17-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021 — Том 1: Механика. Молекулярная физика — 2020. — 436 с.
3. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учебное пособие для физических специальностей вузов : [в 5 томах] / Д. В. Сивухин. Изд. 6-е, стер. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014-2019. Т. 1: Механика. 2019. 560 с.
4. Иванов, В.К. Физика. Механика. Колебания: учеб. пособие/ В.К. Иванов. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 224 с.
5. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных: методические указания / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Кафедра экспериментальной физики; составители: Б. Д. Агапьев, С. С. Козловский. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012

**Моменты инерции некоторых тел**

Тело	Момент инерции
Материальная точка массой $m$ на расстоянии $r$ от оси вращения.	$I = mr^2$
Однородный тонкий стержень массой $m$ , длиной $l$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр тяжести.	$I = \frac{1}{12}ml^2$
Однородный тонкий стержень массой $m$ , длиной $l$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец.	$I = \frac{1}{3}ml^2$
Кольцо или труба с тонкими стенками радиусом $R$ и массой $m$ . Ось вращения проходит через центр кольца перпендикулярно плоскости кольца или совпадает с осью трубы.	$I = mR^2$
Круглый сплошной диск (цилиндр) радиусом $R$ и массой $m$ относительно оси, проходящей через центр диска (цилиндра) перпендикулярно основанию.	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Полый цилиндр массой $m$ относительно оси, проходящей через центр цилиндра перпендикулярно основанию ( $R_{\text{вн}}$ – внутренний радиус, $R_{\text{внешн}}$ – внешний радиус).	$I = \frac{1}{2}m(R_{\text{вн}}^2 + R_{\text{внешн}}^2)$
Однородный шар радиусом $R$ и массой $m$ относительно оси, проходящей через центр шара	$I = \frac{2}{5}mR^2$

<p>Квадрат массой <math>m</math> и длиной стороны <math>l</math> относительно оси, перпендикулярной плоскости квадрата, и проходящей через центр масс квадрата</p>	$I = \frac{1}{6}ml^2$
<p>Равнобедренный треугольник массой <math>m</math> относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника, и проходящей через центр масс,  <math>a</math> – длина основания треугольника, <math>h</math> – длина высоты, проведённой к основанию.</p>	$I = \frac{m}{2} \left( \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{9}h^2 \right)$