1.2. Элементы теории вероятностей.

1.2.1. Случайные события.

Случайные события – обычное явление в жизни. Примеры случайных событий: выпадение «орла» или «решки» при бросании монеты, выпадение числа при бросании кубика (кости), падение кирпича на голову, выигрыш в лотерею и так далее. Как часто могут происходить те или иные случайные события определяются математической величиной – *вероятностью*.

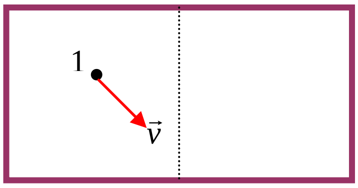

Рис. 2.1.

Случайными событиями могут быть также координаты и скорости отдельных частиц. Рассмотрим объем, в котором находится 1 молекула (рис.2.1), движущаяся с некоторой скоростью, и мысленно разобьем его на две части. Зададимся вопросом – где находится молекула? Измеряем ее положение много раз – N раз – через определенные промежутки времени (эти промежутки времени между измерениями обычно больше, чем среднее время пробега молекулы от стенки к стенке). Пусть при этом получаем, что из всех этих измерений частица $N_л$ раз находится в левой половине объема. Тогда вероятность можно определить, как отношение “положительного” (частица в левой половине) результата к полному числу испытаний при достаточно большом их числе. Это *частотное определение вероятности*:

$$\mathrm{P}\left(левая\ V/2\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{N_л}{N} \tag{1.2.1}$$

Рассмотрим другой пример – бросание кубика. Вероятность выпадения какого-либо числа i равна:

$$\mathrm{P}_i=\lim_{N\to\infty}\frac{N_i}{N}.$$

где N_i – число выпадений числа i, N – полное число бросаний. Очевидно, что в силу равноправия всех граней кубика и, следовательно, равной вероятности выпадения каждой грани, имеем, что вероятности выпадения каждого числа равны: $\mathrm{P}(1)=\mathrm{P}(2)=\ldots=\mathrm{P}(6)=\frac{1}{6}$. Сумма вероятностей всех возможных событий равна единице – это *нормировка полной вероятности на единицу*:

$$\sum_i P_i=\sum_i\frac{N_i}{N}=1 \tag{1.2.2}$$

Для молекулы в сосуде объемом V можно рассмотреть вероятность того, что частица попадает в элемент объема ΔV. Для этого в течение длительного периода τ будем измерять положение частицы через промежутки времени Δt. Тогда полное число измерений равно $N=\frac{\tau}{\Delta t}$. Пусть за время τ частица проводит внутри выбранного малого объема ΔV время t_i, тогда число “положительных“ измерений будет равно:

$$N_i=\frac{t_i}{\Delta t}. \tag{1.2.3}$$

Вероятность того, что частица находится в объеме ΔV, определяется:

$$\mathrm{P}=\lim_{N\to\infty}\frac{N_i}{N}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{t_i}{\tau} \tag{1.2.4}$$

Если время наблюдения достаточно велико, то время пребывания частицы внутри выделенного объема ΔV пропорционально его величине: $t_i\sim\Delta V$, тогда вероятность обнаружить частицу внутри ΔV равна:

$$\mathrm{P}=\frac{\Delta V}{V} \tag{1.2.5}$$

Как поступать, когда случайная величина имеет непрерывное распределение – как например, координата частицы x? Если эта величина принимает дискретный ряд значений x_α (α =1,2,3,...), то вероятность того, что молекула находится в точке с координатой x_α, определяется также как (1.2.4):

$$\mathrm{P}_\alpha=\lim_{N\to\infty}\frac{N_\alpha}{N}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{t_\alpha}{\tau}$$

где N_α – число измерений, при которых найдено значение x_α, N – полное число измерений, t_α – время, которое частица проводит в состоянии с координатой x_α.

Однако если учитывать непрерывное распределение координат, то тогда бессмысленно говорить о вероятности нахождения частицы точно в точке с координатой x, так как одна точка имеет размерность “нуль” и в ней частица находится бесконечно малое время (множество событий не счетное). Правильно в этом случае находить вероятность того, что частица находится в малом интервале координат от x до $x + dx$. Время t_x, которое частица проводит в интервале координат ($x \div x + dx$) пропорционально малому интервалу dx, и тогда вероятность попадания в этот интервал может быть записана:

$$dP_x = \rho(x)dx \tag{1.2.6}$$

Здесь $\rho(x)$ – коэффициент пропорциональности, дающий вероятность того, что частица лежит в интервале единичной длины в окрестности координаты x. Величина $\rho(x)$ имеет название *плотности вероятности* или *функции распределения вероятности*.

Рассмотрим частицу в объеме V, тогда вероятность того, что она находится в части большого объема ΔV, определяется:

$$P(\Delta V) = \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta N}{N}. \tag{1.2.7}$$

где ΔN – число измерений, определяющих положение частицы в объеме ΔV. При этом плотность вероятности запишется

$$\rho(x,y,z) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V\to 0}} \frac{\Delta N}{\Delta V\cdot N} = \lim \frac{P(\Delta V)}{\Delta V}. \tag{1.2.8}$$

Или можно записать плотность вероятности по-другому:

$$\rho(x,y,z) = \frac{dP}{dV} \tag{1.2.9}$$

как отношение вероятности нахождения в объеме dV к величине этого малого объема. Если у нас производится N измерений, то число измерений dN, дающих попадание частицы в бесконечно малый объем dV (под N будем понимать число частиц в объеме, которые ведут себя независимо друг от друга, если другой случай не оговаривается особо), равно:

$$dN = NdP = N\cdot\rho(x,y,z)\,dV = N\cdot\rho(x,y,z)dxdydz, \tag{1.2.10}$$

а в конечный объем V_1 определяется через интеграл по этому объему:

$$N(V_1) = N\int_{V_1}\rho(x,y,z)dxdydz \tag{1.2.11}$$

Тогда и вероятность попасть частице в конечный объем V_1 равна:

$$P(V_1) = \frac{N(V_1)}{N} = \int_{V_1}\rho(x,y,z)dxdydz \tag{1.2.12}$$

Условие нормировки вероятности выполняется:

$$\int_V dP = \int_V \rho(x,y,z)dxdydz = 1 \tag{1.2.13}$$

Это условие означает, что частица наверняка существует и с достоверностью, равной единице, находится внутри объема V.

1.2.2. <u>Основные теоремы</u>.

а). **Теорема сложения вероятностей**.

Пусть имеем дискретный набор случайных величин, характеризующих состояние системы. Если система находится в состоянии со значением α, то она не может одновременно находиться в состоянии β. Тогда имеем дело с *взаимоисключающими событиями*: система находится либо в α, либо в β. Пусть времена нахождения системы в этих состояниях равны t_α и t_β соответственно. Если нас устраивают обе ситуации, то есть когда система может находиться в состояниях со значением α или β, то вероятность системе «попасть» в состояния α или β есть:

$$\mathsf{P}_{\alpha+\beta}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{t_\alpha+t_\beta}{\tau}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{t_\alpha}{\tau}+\lim_{\tau\to\infty}\frac{t_\beta}{\tau}=\mathsf{P}_\alpha+\mathsf{P}_\beta \qquad (1.2.14)$$

Это и есть *теорема сложения вероятностей для двух взаимоисключающих событий*.

Примеры таких событий:

а) бросаем кубик – хотим получить 5 или 6, то есть и то, и другое устраивает, тогда вероятность есть сумма вероятности выпадения одного и другого числа;

б) молекула внутри объема, состоящего из двух кусочков – $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$, тогда вероятность равна сумме вероятностей для частицы быть в одном и втором объемах.

Исходя из этой теоремы, формируется условие нормировки вероятностей:

$$\mathsf{P}_1+\mathsf{P}_2+\mathsf{P}_3+\ldots=\sum_i \mathsf{P}_i=\lim_{\tau\to\infty}\frac{t_1}{\tau}+\lim_{\tau\to\infty}\frac{t_2}{\tau}+\lim_{\tau\to\infty}\frac{t_3}{\tau}+\ldots=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left(t_1+t_2+t_3+\ldots\right)=1 \qquad (1.2.15)$$

так как сумма по всем возможным состояниям в (1.2.15), или по всем временам $\sum_i t_i=\tau$, дает единицу. Таким образом, если устраивает любой состояние (любой исход дела), то вероятность получения результата равна 1.

Для непрерывного распределения случайной величины x условие нормировки записывается:

$$\int d\mathsf{P}=\int \rho(x)dx=1\ , \qquad (1.2.16)$$

где интеграл берётся по всему диапазону изменения координаты x. Равенство вероятности события единице говорит о достоверности этого события.

б). **Теорема умножения вероятностей**.

Рассмотрим 2 независимые физические системы, состояния которых характеризуются наборами величин L и M. Системы называются *статистически независимыми*, если вероятность P_α того, что система 1 находится в состоянии α со значением L_α, никак не зависит от вероятности P_β того, что система 2 находится в состоянии β со значением M_β.

Найдем вероятность того, что 1-ая система находится в состоянии α, а вторая – в состоянии β:

$$\mathsf{P}_{\alpha\beta}=\lim_{N\to\infty}\frac{N_{\alpha\beta}}{N}\ , \qquad (1.2.17)$$

где N – полное число измерений, $N_{\alpha\beta}$ – число измерений, когда в результате получаем одновременно L_α и M_β для каждой системы соответственно. Нетрудно получить число измерений, когда в системе 1 получено значение L_α:

$$N_\alpha=\mathsf{P}_\alpha\cdot N\,. \qquad (1.2.18)$$

Из этого числа существует только доля этих измерений, в которых у системы 2 получаем значение M_β, поэтому их число, как нетрудно видеть, равно:

$$N_{\alpha\beta}=\mathsf{P}_\beta\cdot N_\alpha\,. \qquad (1.2.19)$$

Тогда подставляя (1.2.18) и (1.2.19) в (1.2.17), получаем *теорему умножения вероятностей для статистически независимых систем*:

$$\mathsf{P}_{\alpha\beta}=\mathsf{P}_\alpha\cdot\mathsf{P}_\beta \qquad (1.2.20)$$

Примеры:

1) Бросаем 2 кубика (либо один кубик бросаем 2 раза), интересуемся вероятностью выпадения у первого кубика числа “6”, а у второго – “5”, тогда имеем: $\mathsf{P}_{6,5}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Если нам безразлично, у какого кубика происходит выпадение этих чисел, то надо умножить на 2: $\mathsf{P}_{6,5}=\frac{2}{36}$.

2) Рассмотрим 2 молекулы в объеме V, тогда вероятность для обеих молекул оказаться в объеме ΔV равна:

$$\mathsf{P}_2=\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2.$$

1.2.3. Среднее значение случайных величин.

Когда имеем дело со случайными величинами, то большое значение имеет определение их среднего значения. Определим *среднее значение случайных величин* или *математическое ожидание*. Пусть некоторая физическая величина L имеет дискретный ряд значений: L_1, L_2, L_3,… с соответствующими вероятностями: P_1, P_2, P_3,...их появления. Часто удобно знать не все наборы значений и их вероятности, а средние значения физической величины: $\langle L\rangle$. Среднее значение определяется (подобно нахождению координат центра масс):

$$\langle L\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{N_1L_1+N_2L_2+\ldots}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_\alpha N_\alpha L_\alpha}{N} = \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha L_\alpha$$

$$\langle L\rangle = \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha L_\alpha \qquad (1.2.21)$$

Среднее значение любой функции, зависящей от случайной величины L, равно:

$$\langle f(L)\rangle = \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha f(L_\alpha) \qquad (1.2.22)$$

Для случайных непрерывных величин (например, координаты x) среднее значение определяется интегралами:

$$\langle x\rangle = \int x d\mathrm{P}_x = \int x\rho(x)dx$$
$$\langle f(x)\rangle = \int f(x)\rho(x)dx \qquad (1.2.23)$$

где интегрирование проводится по всем возможным значениям x.

Рассмотрим некоторые свойства средних значений.

1) Пусть имеем две различные функции от случайной величины L: $f(L)$ и $\varphi(L)$. Тогда среднее значение от суммы равно сумме их средних значений

$$\langle f(L)+\varphi(L)\rangle = \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha\left(f(L)+\varphi(L)\right) = \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha f(L_\alpha)+\sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha\varphi(L_\alpha) = \langle f(L)\rangle+\langle\varphi(L)\rangle \qquad (1.2.24)$$

2) Если C постоянная, то среднее значение от произведения постоянной величины на функцию равно:

$$\langle C\varphi(L)\rangle = C\sum_\alpha \varphi(L_\alpha)\mathrm{P}_\alpha = C\langle\varphi(L)\rangle \qquad (1.2.25)$$

3) Если $f(L)$ функция случайной величины L, а $\varphi(M)$ функция другой случайной величины M, тогда имеем:

$$\langle f(L)\varphi(M)\rangle = \sum_\alpha\sum_\beta \mathrm{P}_{\alpha\beta} f(L_\alpha)\varphi(M_\beta) \qquad (1.2.26)$$

где $\mathrm{P}_{\alpha\beta}$ – вероятность события одновременного появления величин L_α и M_β. Если переменные L и M описывают 2 статистически независимые системы, то вероятности в соответствие с (1.2.20) перемножаются $\mathrm{P}_{\alpha\beta} = \mathrm{P}_\alpha\cdot\mathrm{P}_\beta$. Тогда получаем, что среднее значение функций этих переменных равно произведению их средних значений:

$$\langle f(L)\varphi(M)\rangle = \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha f(L_\alpha)\sum_\beta \mathrm{P}_\beta\varphi(M_\beta) = \langle f(L)\rangle\langle\varphi(M)\rangle \qquad (1.2.27)$$

1.2.4. Флуктуации.

Флуктуация – отклонение случайной величины от среднего значения. Флуктуация характеризует, как часто состояние системы и ее параметры отклоняются от своих средних значений.

$$\Delta L = L - \langle L\rangle \qquad (1.2.28)$$

Поскольку отклонения случайной величины от среднего значения могут быть различными при разных измерениях, то удобнее характеризовать их тоже средней величиной. Но тогда определение среднего значения (1.2.28) не годится для этого, поскольку среднее значение от него равно 0:

$$\langle\Delta L\rangle = \langle\left(L-\langle L\rangle\right)\rangle = \langle L\rangle - \langle L\rangle = 0 \qquad (1.2.29)$$

Поэтому в качестве меры отклонения берут не само отклонение ΔL, а квадрат флуктуации $(\Delta L)^2$:

$$(\Delta L)^2 = \left(L - \langle L\rangle\right)^2$$

и тогда рассматривают *средняю квадратичную флуктуацию* величины L:

$$\left\langle (\Delta L)^2 \right\rangle = \left\langle \left(L - \langle L\rangle\right)^2 \right\rangle \qquad (1.2.30)$$

Преобразуем (1.2.30), раскрыв скобки:

$$\left\langle (\Delta L)^2 \right\rangle = \left\langle \left(L - \langle L\rangle\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(L^2 - 2L\langle L\rangle + \langle L\rangle^2\right)\right\rangle = \left\langle L^2\right\rangle - 2\langle L\rangle^2 + \langle L\rangle^2 = \left\langle L^2\right\rangle - \langle L\rangle^2 \qquad (1.2.31)$$

Часто характеризуют флуктуации так называемой *дисперсией*, определяемой как квадратный корень из средней квадратичной флуктуации:

$$\sigma = \sqrt{\left\langle (\Delta L)^2 \right\rangle} \qquad (1.2.32)$$

Важное понятие – *относительная квадратичная флуктуация* определяется отношением дисперсии к самому среднему значению:

$$\eta = \frac{\sqrt{\left\langle (\Delta L)^2 \right\rangle}}{\langle L\rangle} \qquad (1.2.33)$$

<u>Примеры</u>.

1). Сосчитаем среднее значение результата выпадения на кубике $\langle L\rangle$ и его дисперсию. По формуле (1.2.21) имеем:

$$\langle L\rangle = \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha L_\alpha = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

Для определения дисперсии сосчитаем среднее значение квадрата:

$$\left\langle L^2\right\rangle = \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha L_\alpha^2 = \frac{1}{6}\cdot(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

Дисперсию находим по формуле (1.2.32):

$$\sigma = \sqrt{\left\langle (\Delta L)^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle L^2\right\rangle - \langle L\rangle^2} = \sqrt{\frac{91}{6} - \frac{21^2}{6^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{546-441} = \frac{1}{6}\sqrt{105} = 1.708$$

Относительная квадратичная флуктуация равна:

$$\eta = \frac{1.708}{3.5} = 0.488$$

Для кубика относительная квадратичная флуктуация довольно велика, поскольку набор случайных величин определяется только 6-ю значениями.