5.2. Общее уравнение переноса.

5.2.1. Средняя длина свободного пробега в одном направлении.

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать задачи, в которых явления переноса происходят вдоль одного направления, т.е. ограничимся одномерным случаем. Пусть вдоль некоторого направления имеем неравновесное состояние, которое заключается в том, что имеем неравномерное распределение свойств или характеристик молекул газа. Под свойством молекулы G, которое обычно называют *качеством* молекулы, понимают такие характеристики как энергия, импульс , масса и другие.

Итак, рассмотрим перенос некоторого качества молекул G по оси x, вдоль которой имеется неравновесное состояние. То есть, считаем, что градиент этого качества по оси x отличен от нуля

$$\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0 .$$

Скорость переноса качества G связана со свободным пробегом молекул вдоль оси x. Длина пробега вдоль определенной оси может отличаться от длины свободного пробега λ, которая определялась безотносительно направления распространения молекул. Поэтому сначала рассмотрим подробнее распространение молекул вдоль одной оси.

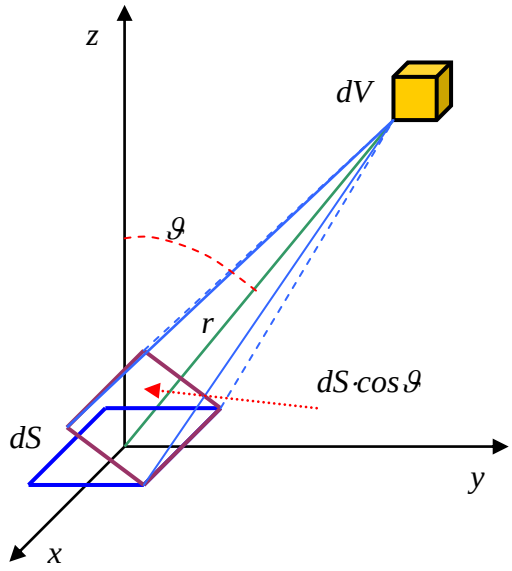

Рис. 2.1.

Сосчитаем среднюю длину свободного пробега молекул в данном направлении, т.е. свободный пробег молекулы, например, по оси z после последнего столкновения с другими молекулами (рис.2.1).

Пусть в объеме dV находится

$$dN_0 = n_0 dV$$

молекул столкнувшихся в этом объеме (рис. 2.1), где n_0 – концентрация молекул, столкнувшихся внутри dV. При этом доля этих столкнувшихся молекул, летящих к площадке dS, равна отношению телесного угла (в растворе которого и летят молекулы из точки, где находится элемент объема dV) к полному телесному углу:

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{dS \cdot Cos\vartheta}{4\pi r^2} .$$

Далее, доля молекул, долетевших до площадки dS без столкновения, согласно формуле (5.1.9) определяется множителем $\sim \exp(-r/\lambda)$. Тогда полное число молекул, пересекших площадку dS и на пути из элемента объема dV, не испытавших ни одного столкновения определяется:

$$dN = \frac{dSCos\vartheta}{4\pi r^2} n_0 dV exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) \qquad (5.2.1)$$

Можно записать вероятность того, что молекула из объема $dV = r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ долетает до площадки dS без столкновения, введя в (5.2.1) постоянную нормировки A:

$$dP = A\frac{dS \cdot n_0}{4\pi r^2} exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) r^2 drCos\vartheta Sin\vartheta d\vartheta d\varphi = A\frac{dS \cdot n_0}{4\pi} exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) drCos\vartheta Sin\vartheta d\vartheta d\varphi \qquad (5.2.2)$$

Заметим, что это определение аналогично определению вероятности через отношение

$$dP = {dN}/{N} .$$

Тогда среднее расстояние по оси z от объема dV до площадки dS, где $z = rCos\vartheta$, определяется стандартным образом (при этом делим на нормировочный интеграл):

$$\langle z\rangle = \frac{\int zdP}{\int dP} = \frac{A\frac{n_0 dS}{4\pi}\iiint exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) rdrCos^2\vartheta Sin\vartheta d\vartheta d\varphi}{A\frac{n_0 dS}{4\pi}\iiint exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) drCos\vartheta Sin\vartheta d\vartheta d\varphi} =$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} Cos^2\vartheta Sin\vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) rdr}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} Cos\vartheta Sin\vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) dr} = \frac{2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\lambda^2}{2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\lambda} = \frac{2}{3}\lambda \qquad (5.2.3)$$

$$\langle z\rangle = \frac{2}{3}\lambda \qquad (5.2.4)$$

Итак, средний пролет молекул вдоль оси z после последнего столкновения перед пересечением площадки dS не равен среднему свободному пробегу, а составляет $2/3$ от него.

5.2.2. Уравнение стационарных процессов переноса.

Пусть величина G – то свойство, или качество, молекулы, которое может переноситься молекулой из одной области в другую. К этим свойствам относятся следующие характеристики: масса, энергия, импульс, заряд и т.д. Предполагаем, что в равновесии G постоянно по объему, а при изменении равновесия (например, вдоль оси x) возникает градиент G: $\partial G/\partial x \neq 0$. При этом происходит перемещение этого качества G вдоль оси x вследствие движения молекул.

Итак, пусть имеем градиент качества $G(x)$ вдоль оси x. Рассмотрим перемещение этого качества через поперечную оси x единичную площадку в точке x за счет движения молекул Среднее расстояние, пробегаемое молекулами вдоль оси x без столкновения равно $2\lambda/3$. Обычно это расстояние мало по сравнению с реальными размерами сосуда, прибора и с характерными расстояниями x, на которых меняется функция $G(x)$. Поэтому функцию $G(x)$, рассматривая ее в точках, отстоящих от рассматриваемой точки на расстоянии $2\lambda/3$ (см рис. 2.2), можно разложить в ряд:

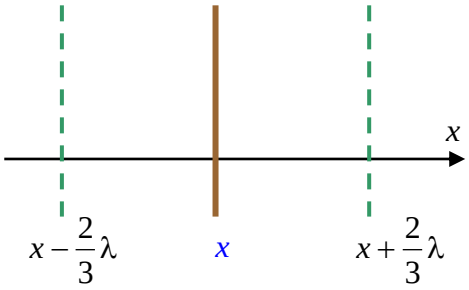

Рис. 2.2.

$$G\left(x \pm \frac{2}{3}\lambda\right) = G(x) \pm \frac{2}{3}\lambda\frac{\partial G}{\partial x} \qquad (5.2.5)$$

Здесь мы ограничились первым порядком разложения в ряд Тейлора. Поток числа частиц в направлении оси x через единичную площадку равен числу “столкновений” молекул с площадкой единичной площади и перпендикулярной оси x в единицу времени, то есть равен частоте столкновений молекул со стенкой, которую мы определяли в §2.3 (формула (2.3.15)):

$$\nu = \frac{1}{4}n_0\langle v\rangle .$$

Именно этот поток пересекает площадку в точке x, и он направлен как с левой стороны к точке x, так и с правой. Следовательно, плотность потока переносимого качества G (например, энергии) равна потоку этой величины через единичную площадку:

А) в направлении отрицательных значений x:

$$j^- = -\frac{1}{4}n_0\langle v\rangle\left[G(x) + \frac{2}{3}\lambda\frac{\partial G}{\partial x}\right], \qquad (5.2.6)$$

Б) вдоль положительных значений x:

$$j^+ = \frac{1}{4}n_0\langle v\rangle\left[G(x) - \frac{2}{3}\lambda\frac{\partial G}{\partial x}\right] \qquad (5.2.7)$$

Полная плотность потока есть сумма потоков слева и справа:

$$j_G = j^+ + j^- \tag{5.2.8}$$

Итак, подставляя (5.2.6) и (5.2.7) в (5.2.8), получаем *основное уравнение стационарных процессов переноса*:

$$j_G = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \lambda \frac{\partial G}{\partial x} \tag{5.2.9}$$

Плотность потока величины G пропорциональна концентрации частиц, средней скорости молекул, длине свободного пробега молекул и градиенту величины G. В дальнейшем это уравнение будем использовать в конкретных явлениях переноса, подставляя вместо G переносимое молекулами определенное качество.