5.3. Теплопроводность.

5.3.1. Уравнение Фурье.

Рассмотрим поток тепла, т.е. средней кинетической энергии молекул. Тогда в уравнении стационарных процессов переноса (5.2.9) j_G есть плотность потока тепла j_Q. В этом случае G – средняя энергия теплового движения, приходящаяся на одну молекулу. Она изменяется, если изменяется температура, и если имеется градиент температуры, то осуществляется перенос энергии теплового движения – *теплопередача* (рис.3.1). Из предыдущего рассмотрения знаем, что, исходя из теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы (здесь и далее температуру измеряем в градусах Кельвина $T_k = T$), эта энергия равна:

$$G = \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{C_V}{N_A}T \qquad (5.3.1)$$

где i – число степеней свободы, C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме. Тогда получаем, что градиент G пропорционален градиенту температуры:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{C_V}{N_A}\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (5.3.2)$$

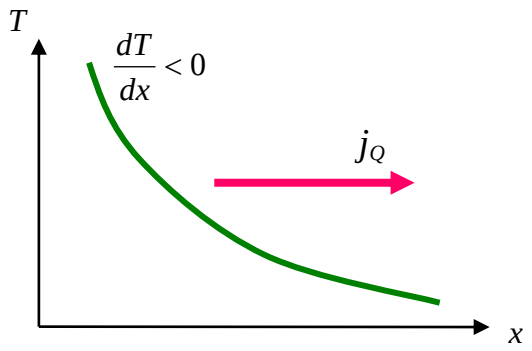

Рис. 3.1.

Подставляя соответствующие величины в уравнение стационарных процессов переноса (5.2.9), получаем для плотности потока тепла следующее уравнение:

$$j_Q = -\frac{1}{3}n_0\langle v\rangle\lambda\frac{C_V}{N_A}\frac{\partial T}{\partial x} = -\chi\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (5.3.3)$$

Здесь введенный коэффициент χ называется *коэффициентом теплопроводности*:

$$\chi = \frac{1}{3}n_0\langle v\rangle\lambda\frac{C_V}{N_A} = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\lambda c_V, \qquad (5.3.4)$$

где плотность равна $\rho = m_0 n_0$, m_0 – масса одной молекулы, а $c_V = C_V/N_A m_0 = C_V/m$ – удельная теплоемкость. Итак, уравнение (5.3.3) носит название *уравнения Фурье*, оно описывает *стационарный процесс теплопроводности* и имеет вид:

$$j_Q = -\chi\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (5.3.5)$$

Плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры.

Рассмотрим некоторые следствия из уравнения Фурье (5.3.5).

1. Коэффициент теплопроводности не зависит от давления газа. Это справедливо до тех пор, пока газ достаточно плотный. Появление зависимости χ от давления говорит о появлении разряженного состояния газа – *вакуума*. Из рисунка 3.2, где показана примерная зависимость коэффициента теплопроводности от давления, видно, когда можно ввести понятие вакуума. Это происходит примерно в тот момент, когда длина свободного пробега молекул λ сравнима с размерами сосуда.

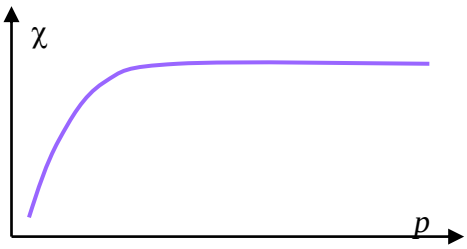

Рис. 3.2.

2. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры, в основном как $\chi \sim \sqrt{T}$. В самом деле, имеем

$$\chi = \frac{1}{3}n_0\langle v\rangle\frac{C_V}{N_A}\frac{1}{\sqrt{2}\sigma n_0} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\frac{C_V}{N_A}\frac{\langle v\rangle}{\sigma} \qquad (5.3.6)$$

и вся основная зависимость от температуры T происходит от изменения средней скорости при изменении T, поскольку сечение σ слабо зависит от температуры.

3. Размерность коэффициента теплопроводности

$$[\chi] = \frac{Вт}{м\,К}.$$

4. Полное переносимое тепло через поверхность S в единицу времени определяется интегралом по поверхности от плотности потока тепла:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \int_S j_Q dS \,. \qquad (5.3.7)$$

Примечание 1. *Жан Батист Жозеф Фурье, французский математик и физик, 1768–1830*

5.3.2. Нестационарное уравнение теплопроводности.

Если на границах объема газа, или тела, температуры не поддерживать постоянными, то в результате переноса тепла температура выравнивается по их объему. Это означает, что со временем изменяется градиент температуры и плотность потока тепла: $j_Q = j_Q(x,t)$. Учтем изменение температуры некоторого локального объема вещества при переносе тепла, т.е. найдем *уравнение теплопроводности, зависящее от времени*.

Рассмотрим одномерную плотность потока тепла $j(x)$ через поперечное сечение цилиндра ΔS (рис. 3.3). Тогда количество тепла, поступающее за время dt и пересекающее координату x равно:

$$dQ_+ = j(x)\Delta S dt \,.$$

Тепло, уходящее через поверхность ΔS в точке с координатой $x + dx$ определяется аналогично:

$$dQ_- = j(x+dx)\Delta S dt \,.$$

Тогда изменение количества тепла в объеме между этими координатами равно:

$$dQ = [j(x,t) - j(x+dx,t)]\Delta S dt$$

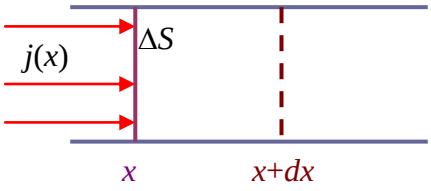

Рис. 3.3.

Умножим и разделим последнее уравнение на dx и, введя частную производную по координате, получаем:

$$dQ = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} dx \Delta S dt = -\frac{\partial j}{\partial x} \Delta V dt \qquad (5.3.8)$$

С другой стороны изменение количества тепла в объеме $\Delta V = \Delta S dx$ связано с изменением температуры этого объема:

$$dQ = \Delta m c_V dT = c_V \rho \Delta V dT \,, \qquad (5.3.9)$$

где c_V – удельная теплоемкость, $\rho = \Delta m / \Delta V$ – плотность газа. Сравнивая (5.3.8) и (5.3.9), получаем:

$$c_V \rho \, dT = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} dt \qquad (5.3.10)$$

И далее получаем следующее уравнение:

$$c_V \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} \,. \qquad (5.3.11)$$

Физический смысл уравнения (5.3.11) состоит в том, что скорость изменения температуры в единице объема вещества пропорциональна градиенту плотности потока тепла $j = j(x,t)$, которая, в свою очередь, определяется градиентом температуры и коэффициентом теплопроводности, т.е. описывается уравнением Фурье (5.3.5). Подставляя j из (5.3.5) в (5.3.11), получаем одномерное *нестационарное уравнение теплопроводности*:

$$c_V \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi \frac{\partial T}{\partial x}\right) \qquad (5.3.12)$$

Решение этого уравнения определяет как меняется распределение температуры со временем.

Рассмотрим частный случай, когда среда однородна и коэффициент теплопроводности χ не зависит от температуры (такое может быть, если процесс теплопередачи происходит не в газах):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{c_V \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \,, \qquad (5.3.13)$$

Здесь мы ввели коэффициент

$$D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle,$$

физический смысл которого будет прояснен в дальнейшем.

Для решения нестационарного уравнения теплопроводности (5.3.12) необходимо знать *начальные и граничные условия*. Если известно, что существуют источники тепла (ток, распад), то их можно учесть, если ввести мощность источников – количество тепла, выделяемое в 1 объема в 1 времени, тогда уравнение теплопроводности имеет вид:

$$c_V\,\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + q = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q \qquad (5.3.14)$$

Здесь q – *плотность мощности источника*, т.е. количество тепла, выделяемое в единице объема среды в единицу времени.

5.3.3. Распределение температуры между двумя концентрическими сферами.

В качестве примера рассмотрим стационарное распределение температуры между двумя концентрическими сферами, поддерживаемыми при температурах T_1 и T_2 (см рис. 3.4). В этом случае имеем стационарный процесс передачи тепла $\partial T/\partial t = 0$, т.е. распределение температуры постоянно во времени и полный поток тепла от внутренней сферы к внешней постоянен. Поскольку поверхность, через которую идет поток тепла, является сферической поверхность, то из (5.3.11) имеем

$$\frac{\partial I_{сф}}{\partial r} = \frac{\partial\left(j\cdot 4\pi r^2\right)}{\partial r} = 0,$$

где $I_{сф}$ полный поток тепла через сферическую поверхность. Таким образом, поток тепла через любую сферу промежуточного радиуса r между сферами постоянен:

$$j(r)\cdot 4\pi r^2 = const \qquad (5.3.15)$$

где j – плотность потока тепла, которая зависит от радиуса. Подставляя сюда плотность поток тепла из уравнения Фурье, имеем:

$$r^2\chi\frac{\partial T}{\partial r} = r^2\chi\frac{dT}{dr} = const \qquad (5.3.16)$$

Здесь постоянную величину 4π из (5.3.15) ввели в константу в правой части уравнения. Рассмотрим 2 возможности.

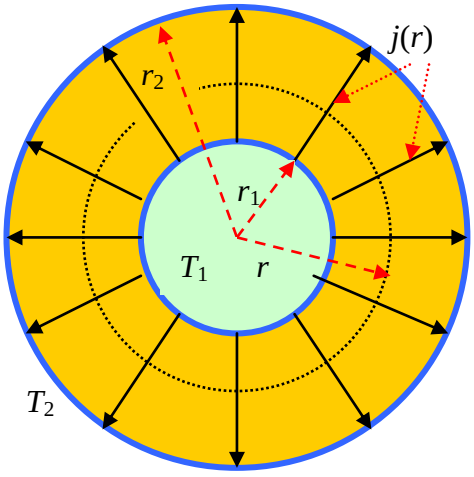

Рис. 3.4.

а). Если коэффициент теплопроводности χ постоянен, тогда имеем $dT = A\cdot dr/r^2$ и, интегрируя, получаем:

$$T = A\frac{1}{r} + B \qquad (5.3.17)$$

Коэффициенты A и B находятся из граничных условий: при $r = r_1$ имеем $T = T_1$, а при $r = r_2$ имеем $T = T_2$. Учитывая эти граничные условия, получаем, что распределение температуры по радиусу между сферами имеет вид:

$$T = \frac{r_2T_2 - r_1T_1}{r_2 - r_1} + \frac{r_1r_2\left(T_1 - T_2\right)}{r_2 - r_1}\frac{1}{r} \qquad (5.3.18)$$

Это соотношение можно преобразовать к следующему виду:

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \qquad (5.3.19)$$

Отсюда легко построить распределение температуры по радиусу (см рис. 3.5).

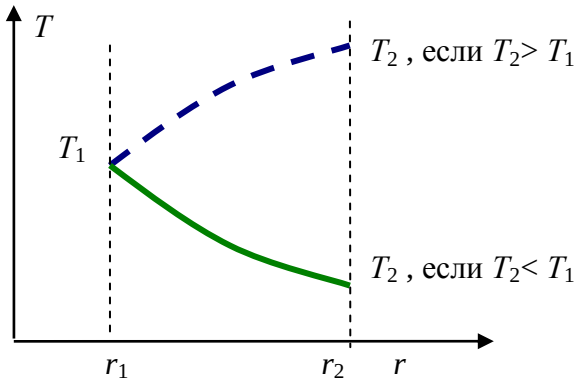

Рис. 3.5.

б). Если коэффициент теплопроводности

зависит от температуры (или координаты) и эта функция известна $\chi = \chi(T)$, то вычисляем интеграл

$$\int \chi(T)dT = A\frac{1}{r} + B \tag{5.3.19}$$

и снова находим A и B из граничных условий.